RIMS 共同研究 (COSS)
Kyoto, JAPAN

単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム

北原知就 (T. KITAHARA), 水野 眞治 (S. MIZUNO)

Tokyo Institute of Technology, 東京工業大学

July 21–23, 2015

Contents

本日の予定

単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム

10:30 - 11:20 (講義) 線形計画問題と単体法

11:40 - 12:30 (講義) 単体法で生成される異なる基底解の数

14:00 - 15:00 (講義) 強多項式アルゴリズムと単体法

15:15 - 16:15 上記講義内容の演習

16:30 - 17:30 全体総括

線形計画問題を解く単体法は，現実の大規模な問題効率よく解くことができるが，理論的に多項式アルゴリズムであるかどうかはわかっていない．実際，Dantzig の規則をはじめとするピボット規則を使った単体法に対して，入力データの次元の指数オーダーの計算量を必要とする例題が知られている．理論と実際の計算効率性に大きな違いがある一つの理由として，計算時間を多く必要とする人工的な例題では，問題を表現するデータにかなり大きな値が使われているが，実際の問題ではそのような大きなデータが使われることがほとんどないことがあげられる．したがって，後者のような問題に対して，単体法の計算効率が良いといえるのではないかと考えられる．

本論は，そのような方向での，単体法に関するひとつの研究の成果をまとめたものである．

講義でのねらい

- 基礎事項からしっかり理解しよう
- (理解できないことには) 疑問をもとう
- 疑問を解決しよう

Contents

本節の概要

1. LP の基底解と辞書
2. 双対問題
3. LP の基本定理（ふたつ）
4. 基底解の実行可能性，最適性，退化
5. 単体法と主単体法
6. 退化した基底解と単体法の巡回

線形計画問題の基本定理 I と基底解

- 標準形の LP(線形計画問題):

$$\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\ \text{subject to}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

ここで、$A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$, and $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$

線形計画問題の基本定理 I と基底解

- 標準形の LP(線形計画問題):

$$\min\ c^T x,\ \text{subject to}\ Ax = b,\ x \geq 0,$$

ここで、$A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, and $x \in R^n$

- LP の基本定理 I：線形計画問題が実行可能で下に有界ならば最適解を持つ.（LP の３つの場合：最適解，無限解，実行不能）

線形計画問題の基本定理 I と基底解

- 標準形の LP(線形計画問題):

$$\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \ \text{subject to } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

ここで、$A \in R^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in R^m$, $\boldsymbol{c} \in R^n$, and $\boldsymbol{x} \in R^n$

- LP の基本定理 I：線形計画問題が実行可能で下に有界ならば最適解を持つ.（LP の 3 つの場合：最適解，無限解，実行不能）
- 仮定：行列 A のランクは m である.

線形計画問題の基本定理 I と基底解

- 標準形の LP(線形計画問題):

$$\min \ c^T x, \ \text{subject to } Ax = b, \ x \geq 0,$$

  ここで、$A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, and $x \in R^n$
- LP の基本定理 I：線形計画問題が実行可能で下に有界ならば最適解を持つ.（LP の３つの場合：最適解，無限解，実行不能）
- 仮定：行列 A のランクは m である.
- 基底解: n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ から m 個 $x_i, i \in I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ の基底変数を選び，それら以外の非基底変数 $x_i, i \in I_N = \{i_{m+1}, \cdots, i_n\}$ をすべてゼロとした時，$Ax = b$ をみたす解がただ一つならば，それを基底解という.

基底解と辞書

- 基底変数の部分と非基底変数の部分を分けて $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を
$$\boldsymbol{A_B x_B} + \boldsymbol{A_N x_N} = \boldsymbol{b}$$
とすれば，基底解は
$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{A_B})^{-1}\boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$$

基底解と辞書

- 基底変数の部分と非基底変数の部分を分けて $Ax = b$ を
$$A_B x_B + A_N x_N = b$$
とすれば，基底解は
$$\bar{x}_B = (A_B)^{-1} b, \bar{x}_N = 0$$
- 標準形の線形計画問題は，
$$\begin{array}{ll} \min & c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \\ \text{s.t.} & x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ & x \geq 0 \end{array}$$
となる．これを辞書（基底形式表現）という．

双対問題，双対定理，最適性

- 標準形の LP の双対問題は，

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{c} \end{array}$$

双対問題，双対定理，最適性

- 標準形の LP の双対問題は,

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c \end{array}$$

- スラック変数を導入すると

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

- 弱双対定理，双対定理，最適性 (相補性条件）

双対問題の基底解

- 同様に，双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A_B^T y + s_B = c_B \\ & A_N^T y + s_N = c_N \\ & s_B \geq 0,\ s_N \geq 0 \end{array}$$

となり，基底解は，

$$\bar{y} = (A_B^T)^{-1} c_B,\ \bar{s}_B = 0,\ \bar{s}_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B$$

となる．

双対問題の基底解

- 同様に，双対問題は

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A_B^T y + s_B = c_B \\ & A_N^T y + s_N = c_N \\ & s_B \geq 0,\ s_N \geq 0 \end{array}$$

となり，基底解は，

$$\bar{y} = (A_B^T)^{-1} c_B,\ \bar{s}_B = 0,\ \bar{s}_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B$$

となる．

- 同じ基底における主問題と双対問題の基底解では相補性条件が成り立つ．$(\bar{x}_N = 0, \bar{s}_B = 0)$

辞書（基底解を使った表現）

辞書（基底解を使った表現）

- 基底 $\boldsymbol{I_B}$ での辞書は次のように書ける.

$$
\begin{array}{ll}
\min & \bar{z} + \bar{s}_N x_N \\
\text{s.t.} & x_B = \bar{x}_B - A_B^{-1} A_N x_N \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

辞書（基底解を使った表現）

- 基底 I_B での辞書は次のように書ける．

$$
\begin{array}{ll}
\min & \bar{z} + \bar{s}_N x_N \\
\text{s.t.} & x_B = \bar{x}_B - A_B^{-1} A_N x_N \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

- ここで，$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$ は（主と双対）目的関数値，$\bar{x}_B = (A_B)^{-1} b, \bar{x}_N = 0$ は主問題の基底解，$\bar{y} = (A_B^T)^{-1} c_B, \bar{s}_B = 0, \bar{s}_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B$ は双対問題の基底解である．

辞書（基底解を使った表現）

- 基底 I_B での辞書は次のように書ける．

$$\begin{array}{ll} \min & \bar{z} + \bar{s}_N x_N \\ \text{s.t.} & x_B = \bar{x}_B - A_B^{-1} A_N x_N \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- ここで，$\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b$ は（主と双対）目的関数値，
$\bar{x}_B = (A_B)^{-1} b, \bar{x}_N = 0$ は主問題の基底解，
$\bar{y} = (A_B^T)^{-1} c_B, \bar{s}_B = 0, \bar{s}_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B$
は双対問題の基底解である．
- 辞書から見て取れること： 基底解（主と双対），目的関数値，最適解の十分条件（必要条件？）

実行可能性による基底解の分類

- 基底には，４種類ある（主実行可能 or 不能，双対実行可能 or 不能）

実行可能性による基底解の分類

- 基底には，４種類ある（主実行可能 or 不能，双対実行可能 or 不能）
- 主問題の辞書を見れば，４つのうちのどのタイプか判定可能

実行可能性による基底解の分類

- 基底には，４種類ある（主実行可能 or 不能，双対実行可能 or 不能）
- 主問題の辞書を見れば，４つのうちのどのタイプか判定可能
- 主双対実行可能な基底解は，最適条件をみたす解（主問題の最適解かつ双対問題の最適解）

退化による基底解の分類

- 基底変数の中に値がゼロとなるものが存在するとき，退化した基底解という.（主退化，双対退化，主双対退化した基底解）：図による違いの説明

退化による基底解の分類

- 基底変数の中に値がゼロとなるものが存在するとき，退化した基底解という.（主退化，双対退化，主双対退化した基底解）：図による違いの説明
- 退化した主問題：定義と図による例

退化による基底解の分類

- 基底変数の中に値がゼロとなるものが存在するとき，退化した基底解という.（主退化，双対退化，主双対退化した基底解）：図による違いの説明
- 退化した主問題：定義と図による例
- 退化した双対問題：定義と図による例

最適性による基底解の分類

- 主問題の最適基底解（主最適解）

最適性による基底解の分類

- 主問題の最適基底解（主最適解）
- 双対問題の最適基底解（双対最適解）

最適性による基底解の分類

- 主問題の最適基底解（主最適解）
- 双対問題の最適基底解（双対最適解）
- 主双対最適条件を満たす基底解（主双対最適解）：図による例

最適性による基底解の分類

- 主問題の最適基底解（主最適解）
- 双対問題の最適基底解（双対最適解）
- 主双対最適条件を満たす基底解（主双対最適解）：図による例
- 主双対最適解は，主双対実行可能な基底解と同じ

最適性による基底解の分類

- 主問題の最適基底解（主最適解）
- 双対問題の最適基底解（双対最適解）
- 主双対最適条件を満たす基底解（主双対最適解）：図による例
- 主双対最適解は，主双対実行可能な基底解と同じ
- 単体法で求められるのは主双対最適解

LP の基本定理 II

基本定理 II

LP の基本定理 II

基本定理 II

- 標準形の LP が実行可能ならば実行可能基底解が存在する

LP の基本定理 II

基本定理 II

- 標準形の LP が実行可能ならば実行可能基底解が存在する
- 標準形の LP が最適解を持つならば主最適解が存在する.

LPの基本定理II

基本定理II

- 標準形のLPが実行可能ならば実行可能基底解が存在する
- 標準形のLPが最適解を持つならば主最適解が存在する.
- 標準形のLPが最適解を持つならば主双対最適解が存在する.

単体法

- 単体法は，初期の基底解から，(一つの基底変数と非基底変数を入れ変えながら)，次々と基底解を更新し，無限解あるいは主双対最適解を求めて終了する.

単体法

- 単体法は，初期の基底解から，(一つの基底変数と非基底変数を入れ変えながら)，次々と基底解を更新し，無限解あるいは主双対最適解を求めて終了する．
- 初期解の求め方，基底に入る変数と基底から出る変数の決め方により，さまざまな単体法がある．

主単体法

主単体法

- 主単体法では，主問題の実行可能基底解を初期解として，実行可能性を保ちながら (最小化問題では) 目的関数が増加しないように基底解を更新

主単体法

- 主単体法では，主問題の実行可能基底解を初期解として，実行可能性を保ちながら (最小化問題では) 目的関数が増加しないように基底解を更新
- Dantzig の規則を使った主単体法では，辞書での目的関数の係数が最小となる非基底変数を基底に入れ，その際実行可能性を保つように基底から出る変数を決める．主退化していると，基底を更新しても解が変わらないことがある

主単体法

- 主単体法では，主問題の実行可能基底解を初期解として，実行可能性を保ちながら (最小化問題では) 目的関数が増加しないように基底解を更新
- Dantzig の規則を使った主単体法では，辞書での目的関数の係数が最小となる非基底変数を基底に入れ，その際実行可能性を保つように基底から出る変数を決める．主退化していると，基底を更新しても解が変わらないことがある
- 初期解を求めるには，初期基底解が明らかな人工問題に単体法を適用し，実行不能であると判定するか，実行可能な初期基底を求める（２段階単体法と呼ばれる）．

単体法による巡回

- 単体法は，同じ基底解を 2 度生成する可能性がある．

単体法による巡回

- 単体法は，同じ基底解を 2 度生成する可能性がある．
- （乱数などを使わず）決まった法則で基底に入る変数と基底から出る変数を決めている場合，一旦同じ解を 2 度生成すると，そのサイクルを無限に繰り返す．（巡回）

単体法による巡回

- 単体法は，同じ基底解を 2 度生成する可能性がある．
- （乱数などを使わず）決まった法則で基底に入る変数と基底から出る変数を決めている場合，一旦同じ解を 2 度生成すると，そのサイクルを無限に繰り返す．（巡回）
- ピボット規則には，巡回を起こさないもの (Bland の規則など）と起こすもの (Dantzig の規則など）がある．

単体法の反復回数と生成される解の数

- 単体法は，基底を更新するごとに反復回数をカウントする．

単体法の反復回数と生成される解の数

- 単体法は，基底を更新するごとに反復回数をカウントする．
- 主問題が非退化ならば，主単体法で生成される基底解はすべて異なる．

単体法の反復回数と生成される解の数

- 単体法は，基底を更新するごとに反復回数をカウントする．
- 主問題が非退化ならば，主単体法で生成される基底解はすべて異なる．
- 主問題の退化した頂点で基底を更新しても基底解が動かないことがある．

単体法の反復回数と生成される解の数

- 単体法は，基底を更新するごとに反復回数をカウントする．
- 主問題が非退化ならば，主単体法で生成される基底解はすべて異なる．
- 主問題の退化した頂点で基底を更新しても基底解が動かないことがある．
- 退化した頂点では，巡回する可能性があり，巡回しない場合にも，基底解が動くまでの反復回数を見積もることは難しい．

単体法は最悪の場合内点法より遅い？

単体法は最悪の場合内点法より遅い？

- 内点法は，どんな問題も理論的に多項式オーダーの計算量で解ける．

単体法は最悪の場合内点法より遅い？

- 内点法は，どんな問題も理論的に多項式オーダーの計算量で解ける．
- 単体法の反復回数は，どんな問題も ***nCm*** 回の反復で解ける．

単体法は最悪の場合内点法より遅い？

- 内点法は，どんな問題も理論的に多項式オーダーの計算量で解ける．
- 単体法の反復回数は，どんな問題も nCm 回の反復で解ける．
- 単体法の反復回数は A, b, c によらないが，内点法はそれらに依存する．

単体法は最悪の場合内点法より遅い？

- 内点法は，どんな問題も理論的に多項式オーダーの計算量で解ける．
- 単体法の反復回数は，どんな問題も $\boldsymbol{nCm}$ 回の反復で解ける．
- 単体法の反復回数は $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によらないが，内点法はそれらに依存する．
- したがって，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の値によっては，内点法の方が遅いかもしれない．

Contents

Contents

多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min \ c^T x, \text{ subject to } Ax = b, \ x \geq 0,$$

（A, b, c の各要素が整数）に対して、

$$\begin{aligned} L_A &= \sum\sum \log(|a_{ij}| + 1) \leq mn \log(A_{max} + 1), \\ L_b &= \sum \log(|b_i| + 1) \leq m \log(b_{max} + 1), \\ L_c &= \sum \log(|c_j| + 1) \leq n \log(c_{max} + 1). \end{aligned}$$

とする。$A_{max} = \max\{|a_{ij}| \mid a_{ij}$ は行列 A の ij 要素$\}$.

多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min\ c^T x,\ \text{subject to}\ Ax = b,\ x \geq 0,$$

（A, b, c の各要素が整数）に対して、

$$\begin{aligned} L_A &= \sum\sum \log(|a_{ij}| + 1) \leq mn \log(A_{max} + 1), \\ L_b &= \sum \log(|b_i| + 1) \leq m \log(b_{max} + 1), \\ L_c &= \sum \log(|c_j| + 1) \leq n \log(c_{max} + 1). \end{aligned}$$

とする。$A_{max} = \max\{|a_{ij}| \mid a_{ij}$ は行列 A の ij 要素$\}$.

多項式アルゴリズム: 演算回数が m,n,L_A,L_b,L_c の多項式で抑えられる (楕円体法、内点法)

強多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \ \text{subject to } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

に対して、

強多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min\ c^T x,\ \text{subject to}\ Ax = b,\ x \geq 0,$$

に対して、

強多項式アルゴリズム: 演算回数が n (と m) の多項式で抑えられる。

強多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min \ c^T x, \ \text{subject to } Ax = b, \ x \geq 0,$$

に対して、

強多項式アルゴリズム: 演算回数が n (と m) の多項式で抑えられる。

Tardos の強多項式アルゴリズム: 演算回数が n, L_A の多項式で抑えられる。

強多項式アルゴリズム

線形計画問題

$$\min \ c^T x, \text{ subject to } Ax = b, \ x \geq 0,$$

に対して、

強多項式アルゴリズム: 演算回数が n (と m) の多項式で抑えられる。

Tardos の強多項式アルゴリズム: 演算回数が n, L_A の多項式で抑えられる。

L_A が n の多項式で抑えられる問題に対して、強多項式アルゴリズムである。補助問題を多項式アルゴリズムで解く必要がある。

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

の特徴を持つ．

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

- 補助問題を複数 (n の多項式だけ）解く

の特徴を持つ.

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

- 補助問題を複数 (n の多項式だけ）解く
- 各補助問題を多項式アルゴリズムで解く

の特徴を持つ．

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

- 補助問題を複数 (*n* の多項式だけ）解く
- 各補助問題を多項式アルゴリズムで解く

の特徴を持つ.

- 単体法は，行列が TUM の LP に対する多項式アルゴリズムとはいえていない.

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

- 補助問題を複数 (n の多項式だけ）解く
- 各補助問題を多項式アルゴリズムで解く

の特徴を持つ．

- 単体法は，行列が TUM の LP に対する多項式アルゴリズムとはいえていない．
- Tarsdos のアルゴリズムを使っても，単体法が TUM の LP に対する強多項式アルゴリズムになるとはすぐには言えない．

結果のみ適用してもダメ

Tardos のアルゴリズムは，次の二つ

- 補助問題を複数 (n の多項式だけ）解く
- 各補助問題を多項式アルゴリズムで解く

の特徴を持つ．

- 単体法は，行列が TUM の LP に対する多項式アルゴリズムとはいえていない．
- Tarsdos のアルゴリズムを使っても，単体法が TUM の LP に対する強多項式アルゴリズムになるとはすぐには言えない．
- Tarsdos のアルゴリズムの中身をよく理解しないと，今回の結果は得られない．

K-M2012の結果＋クラメルの法則

K-M2012の結果＋クラメルの法則

K-M2012の結果： 解の数の上界

$$nm\frac{\gamma}{\delta}\log(m\frac{\gamma}{\delta})$$

γとδは、実行可能基底解における最大要素と正の最小要素の値 $\rightarrow$ いかに評価

K-M2012の結果＋クラメルの法則

K-M2012の結果： 解の数の上界

$$nm\frac{\gamma}{\delta}\log(m\frac{\gamma}{\delta})$$

γ と δ は、実行可能基底解における最大要素と正の最小要素の値 → いかに評価

クラメルの法則を使う:

$$\delta \geq \frac{1}{\Delta_A},\ \gamma \leq \Delta_A \|b\|_1.$$

Δ_A は行列 A の絶対値最大部分行列式の値

K-M2012の結果＋クラメルの法則

K-M2012の結果： 解の数の上界

$$nm\frac{\gamma}{\delta}\log(m\frac{\gamma}{\delta})$$

γとδは、実行可能基底解における最大要素と正の最小要素の値 → いかに評価

クラメルの法則を使う:

$$\delta \geq \frac{1}{\Delta_A},\ \gamma \leq \Delta_A \|b\|_1.$$

Δ_A は行列 A の絶対値最大部分行列式の値

上の結果より反復回数の上界は：

$$nm\Delta_A^2\|b\|_1\log(m\Delta_A^2\|b\|_1)$$

主単体法と双対単体法

主単体法と双対単体法

主単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$nm\Delta_A^2 \|b\|_1 \log(m\Delta_A^2 \|b\|_1)$$

主単体法と双対単体法

主単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$nm\Delta_A^2 \|b\|_1 \log(m\Delta_A^2 \|b\|_1)$$

双対単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$m^2\Delta_A^2 \|c\|_1 \log(m\Delta_A^2 \|c\|_1)$$

主単体法と双対単体法

主単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$nm\Delta_A^2 \|b\|_1 \log(m\Delta_A^2 \|b\|_1)$$

双対単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$m^2\Delta_A^2 \|c\|_1 \log(m\Delta_A^2 \|c\|_1)$$

$\|b\|$ が小さい問題 主単体法で解くとよい

$\|c\|$ が小さい問題 双対単体法で解くとよい

主単体法と双対単体法

主単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$nm\Delta_A^2\|b\|_1\log(m\Delta_A^2\|b\|_1)$$

双対単体法の場合の結果： 解の数の上界

$$m^2\Delta_A^2\|c\|_1\log(m\Delta_A^2\|c\|_1)$$

$\|b\|$ が小さい問題 主単体法で解くとよい

$\|c\|$ が小さい問題 双対単体法で解くとよい

$\|b\|$ と $\|c\|$ が大きい問題 Tardos の基本アルゴリズムを使う

Tardos の基本アルゴリズムの概要

Tardosの基本アルゴリズムの概要

- ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素を大きさ $n^2\Delta_A$ 以下の整数で近似した補助問題を解くことにより，主問題の最適解で必ずゼロとなる変数が見つかる．

Tardosの基本アルゴリズムの概要

- ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素を大きさ $n^2\Delta_A$ 以下の整数で近似した補助問題を解くことにより，主問題の最適解で必ずゼロとなる変数が見つかる．
- 最適解でゼロとなる変数をゼロに固定した問題は元問題と同値である．変数が少なくなる問題の補助問題を次々と解くことにより，最大 $n - m$ 回の反復で最適解を得ることができる．

Tardosの基本アルゴリズムの概要

- ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素を大きさ $\boldsymbol{n^2\Delta_A}$ 以下の整数で近似した補助問題を解くことにより，主問題の最適解で必ずゼロとなる変数が見つかる．
- 最適解でゼロとなる変数をゼロに固定した問題は元問題と同値である．変数が少なくなる問題の補助問題を次々と解くことにより，最大 $\boldsymbol{n-m}$ 回の反復で最適解を得ることができる．
- ベクトル $\boldsymbol{c}$ の各要素の大きさが $\boldsymbol{n^2\Delta_A}$ 以下の整数であるLPを双対単体法で解くとき、解の数の上界は

$$\boldsymbol{m^2n^3\Delta_A^3\log(mn^3\Delta_A^3)}$$

となる。

Tardos の補助問題

Tardosの補助問題

$\boldsymbol{c}$を射影: ベクトル$\boldsymbol{c}$を部分空間$\{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$に射影したベクトルを$\boldsymbol{c}'$とする.

Tardos の補助問題

$\boldsymbol{c}$ を射影: ベクトル $\boldsymbol{c}$ を部分空間 $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ に射影したベクトルを $\boldsymbol{c}'$ とする.

$\boldsymbol{c}'$ をスケーリング: $\boldsymbol{d} = \frac{n^2 \Delta_A}{\|\boldsymbol{c}'\|_\infty} \boldsymbol{c}'$

Tardos の補助問題

$\boldsymbol{c}$ を射影: ベクトル $\boldsymbol{c}$ を部分空間 $\{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ に射影したベクトルを $\boldsymbol{c}'$ とする.

$\boldsymbol{c}'$ をスケーリング: $\boldsymbol{d} = \frac{n^2 \Delta_A}{\|\boldsymbol{c}'\|_\infty} \boldsymbol{c}'$

$\boldsymbol{d}$ を整数化: $\bar{\boldsymbol{d}} = \lceil \boldsymbol{d} \rceil$.

Tardosの補助問題

$\boldsymbol{c}$ を射影: ベクトル $\boldsymbol{c}$ を部分空間 $\{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ に射影したベクトルを $\boldsymbol{c}'$ とする.

$\boldsymbol{c}'$ をスケーリング: $\boldsymbol{d} = \frac{n^2 \Delta_A}{\|\boldsymbol{c}'\|_\infty} \boldsymbol{c}'$

$\boldsymbol{d}$ を整数化: $\bar{\boldsymbol{d}} = \lceil \boldsymbol{d} \rceil$.

双対単体法: 目的関数を $\bar{\boldsymbol{d}}^T \boldsymbol{x}$ とした補助問題を双対単体法で解く

元問題と補助問題の関係

元問題と次の (I) は本質的に同じ，(II) は整数化

$$(I)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y + s = d, \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (II)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y + s = \bar{d} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

元問題と補助問題の関係

元問題と次の (I) は本質的に同じ，(II) は整数化

$$(I)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y + s = d, \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (II)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s. t.} & A^T y + s = \bar{d} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- $\|d - \bar{d}\|_\infty \leq 1$ であるので，(II) の最適解 $(\bar{y}, \bar{s})$ において $d_i - a_i^T \bar{y} \geq n\Delta_A$ ならば $x_i^* = 0$ が成立

元問題と補助問題の関係

元問題と次の (I) は本質的に同じ，(II) は整数化

$$(I)\quad \begin{aligned} \min\quad & b^T y \\ \text{s. t.}\quad & A^T y + s = d, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (II)\quad \begin{aligned} \min\quad & b^T y \\ \text{s. t.}\quad & A^T y + s = \bar{d} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $\|d - \bar{d}\|_\infty \leq 1$ であるので，(II) の最適解 $(\bar{y}, \bar{s})$ においてて $d_i - a_i^T \bar{y} \geq n\Delta_A$ ならば $x_i^* = 0$ が成立
- $\|d\|_\infty = n^2 \Delta_A$ より，$d_i - a_i^T \bar{y} \geq n\Delta_A$ が少なくとも一つの i で成立

なぜ双対問題か？主問題の場合は...

なぜ双対問題か？主問題の場合は...

- 双対問題の補助問題を解くことで，双対問題のある最適解で正となる変数が判明する．

なぜ双対問題か？主問題の場合は...

- 双対問題の補助問題を解くことで，双対問題のある最適解で正となる変数が判明する．
- その結果，主問題の任意の最適解で **0** となる変数が判明する．その変数を取り除いても，問題は変わらない．

なぜ双対問題か？主問題の場合は...

- 双対問題の補助問題を解くことで，双対問題のある最適解で正となる変数が判明する．
- その結果，主問題の任意の最適解で **0** となる変数が判明する．その変数を取り除いても，問題は変わらない．
- 主問題の補助問題を解くことで，主問題のある最適解で正となる変数が判明する．（これをどのように使えばよいか？）

非退化の仮定について

非退化の仮定について

- 今回の上界は，生成される異なる解の数についてである．反復回数の上界を得るためには，すべての補助問題に非退化の仮定をする必要がある．

非退化の仮定について

- 今回の上界は，生成される異なる解の数についてである．反復回数の上界を得るためには，すべての補助問題に非退化の仮定をする必要がある．
- 補助問題が退化している場合にはどうするか．

非退化の仮定について

- 今回の上界は，生成される異なる解の数についてである．反復回数の上界を得るためには，すべての補助問題に非退化の仮定をする必要がある．
- 補助問題が退化している場合にはどうするか．
- 巡回を回避するには，退化基底解では非巡回のピボット規則を使うことが可能．その時の反復回数はどうなる．上界を得ることは可能か？

Announcement

ICCOPT V 2016 TOKYO

(The 5th International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society)

Place: Roppongi, Tokyo, JAPAN

Dates: Aug. 6 (Sat) - 11 (Thu), 2016

Venue: National Graduate Institute for Policy Studies (GRIPS)