演習問題 (July 28, 2016)

脇　隼人 (waki@imi.kyushu-u.ac.jp)

1 Sums-Of-Square に関する問題

次の多項式最適化問題を考えます:

$$\inf_{x,y}\left\{y : x^4 + y^4 \geq 1, y - x^2 \geq 0\right\}. \tag{1}$$

この最小値は $\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} \approx 0.78616...$ です. (1) に対する SOS 緩和問題は次のように書けます:

$$\theta_r^* = \sup_{\sigma_j,\theta}\left\{\theta : \begin{array}{l} y - \theta = \sigma_0(x,y) + (x^4+y^4-1)\sigma_1(x,y) + (y-x^2)\sigma_2(x,y) \ (\forall x, y \in \mathbb{R}), \\ \theta \in \mathbb{R}, \sigma_0 \in \Sigma_r[x,y], \sigma_1 \in \Sigma_{r-2}[x,y], \sigma_2 \in \Sigma_{r-1}[x,y] \end{array}\right\}. \tag{2}$$

ここで, $r \geq 2$ を満たす整数であり, $\Sigma_k[x,y]$ は次数 $2k$ 以下の x, y を変数とする sums of square polynomial の集合とします. (2) を SeDuMi と解くと Table 1 の結果を得るます. つまり, $r = 6$ で (1) の最小値と一致しています. しかし, これは本当でしょうか. 以下の問いに答えて下さい.

Table 1: (2) の計算結果

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_r^*	5.6659e-13	5.0679e-06	0.0026	0.0908	0.7862	0.7862	0.7862	0.7862	0.7862

(Q1-1) 任意の r で, $\theta = 0$ となる解が存在することを証明して下さい. (ヒント : $\theta = 0$ となる解を構成してください)

(Q1-2) $\theta_2^* = 0$ であることを証明して下さい. (ヒント : y^4 の係数と定数項の係数を比較しましょう)

(Q1-3) $\theta_3^* = 0$ であることを証明して下さい. (ヒント : y^6, y^5, y^4 の係数と定数項の係数を比較しましょう)

(Q1-4) 任意の r で $\theta_r^* = 0$ であることを証明して下さい. (ヒント : 私は証明していませんが, 帰納法で証明できると思います.)

2 混合整数二次錐計画問題について

次の混合整数二次錐計画問題を考えます [2]:

$$\mathbb{P} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \inf\limits_{x_1,\ldots,x_5} & 2x_3 + 2x_4 - x_5 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 - x_4 \leq 0, 4x_4 - x_5 \geq 0, \\ & x_3 \geq -1, x_5 \leq 1, \\ & (x_1, x_2, x_3)^T \in Q_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_+, x_4 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \tag{3}$$

ただし $Q_\ell = \{x = (x_1, \ldots, x_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell : x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_\ell^2}\}$ です. これを次の手順で解いて最小値が -1 であることを証明しましょう.

まず, (3) に対して $x_4 \in \mathbb{Z}$ を $x_4 \in \mathbb{R}$ と置き換えた緩和問題を考え, その緩和問題の最小値を θ_0^* とします. つまり,

$$\theta_0^* = \inf \left\{ 2x_3 + 2x_4 - x_5 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 \leq 0, 4x_4 - x_5 \geq 0, x_3 \geq -1, \\ x_5 \leq 1, (x_1, x_2, x_3)^T \in Q_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_+, x_4 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}. \tag{4}$$

この時, (4) にある制約式 $x_1 + x_2 - x_4 \leq 0$ を無視すると,

$$\begin{aligned} &\inf_{x_1,\dots,x_3} \left\{ 2x_3 : x_3 \geq -1, (x_1, x_2, x_3)^T \in Q_3 \right\} \\ &\quad + \inf_{x_4, x_5} \{ 2x_4 - x_5 : 4x_4 - x_5 \geq 0, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \leq 1, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} \end{aligned} \tag{5}$$

と書けます.

(Q2-1) (5) を使って, $\theta_0^* = -2.5$ であることを証明してください. また, 緩和問題の最適解 $\hat{x} \in \mathbb{R}^5$ を答えてください. (ヒント：前半の二次錐計画問題の最小値は, 最小値にあたりをつけて解を構成することを考えると良いと思います. ただし, (x_1, x_2) の候補は無数にあるので, $x_1 + x_2 - x_4 \leq 0$ を満たすように調整してください.)

次に, 整数変数 x_4 に着目して $x_4 \geq \lceil \hat{x}_4 \rceil$ である部分問題 $\mathbb{P}_1$ と $x_4 \leq \lfloor \hat{x}_4 \rfloor$ である部分問題 $\mathbb{P}_2$ を作ります.

(Q2-2) (5) と同様の議論を適用することで, $\mathbb{P}_1$ の最小値が -1 であることを証明してください. (ヒント：緩和問題の最小解が $\mathbb{P}_1$ の実行可能解であり, 同じ目的関数値をとるので...)

最後に $\mathbb{P}_2$ について考えましょう.

(Q2-3) $x_4 \leq \lfloor \hat{x}_4 \rfloor$ という制約から, (x_4, x_5) が決定できます. それを答えてください.

上で求めた (x_4, x_5) を $\mathbb{P}_2$ に代入すると二次錐計画問題になります.

(Q2-4) その双対問題を記述して, それぞれの最適値と最適解を求めてください. 双対ギャップが 0 でないことがわかります. また求めた解より $\mathbb{P}_2$ の最小値が 0 であることを証明してください. なお, 二次錐計画問題とその双対問題は

$$\begin{array}{rl} \text{(Primal)} & \inf_{x} \left\{ b^T x : A_n^T x - c_n \geq 0, A_q^T x - c_q \in Q_\ell, x \in \mathbb{R}^m \right\}, \\ \text{(Dual)} & \sup_{y_n, y_q} \left\{ c_n^T y_n + c_q^T y_q : A_n y_n + A_q y_q = b, y_n \geq 0, y_q \in Q_\ell \right\} \end{array}$$

と記述することができます. (ヒント：これは双対問題の最適値や最適解は簡単に計算できますが, 主問題は難しいです.)

以上の議論から, (3) の最小値は -1 となります.

(Q2-5) ところで, (3) にある $x_1 + x_2 - x_4 \leq 0$ を $(1 - \epsilon)x_1 + x_2 - x_4 \leq 0$ と摂動したら (3) の最小値はどうなるでしょうか. ここで ϵ は十分小さい正の数とします. (ヒント：$\mathbb{P}_2$ の最小値が摂動で変化することに着目してこの問いを作りました.)

3 可安定性

演習問題の後に触れる予定ですが, 次の命題を示してみましょう. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m_2}$ とします.

命題 3.1 *次の二つは等価である.*

(C1) $\exists Z \in \mathbb{S}^n_+$ *such that* $A^T Z + ZA \in \mathbb{S}^n_+, B_2^T Z = 0.$

(C2) $\exists \lambda \in \mathbb{C}_+$ *and* $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ *such that* $A^T v = \lambda v$, $B_2^T v = 0$.

ただし, $\mathbb{C}_+$ *は実部が非負の複素数の集合である.*

(Q3-1) (C2)⇒(C1) を証明してください. (ヒント：複素数ではなく実数だと思っても構いません)

(C1)⇒(C2) を証明するためには次の補題を利用します.

補題 3.2 *[1] 同じサイズの実行列* F, G *が与えられ, 行列* F *が列フルランクであるとする. この時, 次の二つの条件は等価である:*

(D1) $FG^T + GF^T$ *は半正定値対称行列である.*

(D2) $G = F\Omega$ *を満たし* $\Omega + \Omega^T$ *が半正定値対称行列となる正方実行列* Ω *が存在する*

補題 3.2 を利用する前に, 次のことを考えましょう.

(Q3-2) $\Omega + \Omega^T$ が半正定値対称行列ならば, Ω の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ は $\Re(\lambda) \geq 0$ であることを証明してください. ここで $\Re(\lambda)$ は λ の実部を表します. (ヒント：固有ベクトル $v \in \mathbb{C}$ として, $\bar{v}^T(\Omega + \Omega^T)v \geq 0$ を利用すると...)

(Q3-3) 補題 3.2 と上の問いを利用して, (C1)⇒(C2) を証明してください. (ヒント：列フルランク行列 F を用いて, $Z = FF^T$ と分解すると良いでしょう.)

なお, 以下を満たす時不変の線形システムを可安定なシステムと呼びます.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}_+, \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T - \lambda I_n & B_2 \end{pmatrix} = n.$$

したがって, (C2) を満たすとき, その線形システムは可安定でないということになります. 故に, (講義では触れていませんが) H_∞ state feedback 制御問題の双対問題が Slater 条件を満たさないことの必要十分条件は可安定でない, ということが言えます.

(Q5-4) 余力があれば, 補題 3.2 の証明を与えてください.

References

[1] 蛯原義雄, LMI によるシステム制御, 森北出版, 2012.

[2] H. A. Friberg, Facial reduction heuristics and the motivational example of mixed-integer conic optimization, `http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2016/02/5324.html`, 2016.

[3] R. T. Rockakeffar, "Convex Analysis", Princeton University Press, 1970