Slater 条件から見た半正定値計画問題

脇 隼人

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

2016-07-28

CCOS 2016, 京都大学

はじめに

目標 半正定値計画問題 (SemiDefinite Programming problem, SDP) を Slater 条件から眺める (Facial reduction の紹介)

- 教科書には記載されない (ぐらい細かい) 話
- 本日の話題に関連する研究の雰囲気
- SDP is convex, but nonlinear!

スケジュール

09:30 - 10:30 SDP, Slater 条件 と Slater 条件を満たさない SDP の紹介

10:50 - 11:50 技術的なこと I

13:30 - 14:30 技術的なこと II

14:45 - 15:45 演習

16:00 - 17:00 時間があれば (私が) 面白いと思っている話

SDPの定式化

$\boxed{\text{SDP}}$: Given $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ and $A_1, \ldots, A_m$ are linearly independent

$$(\text{Primal}) : \inf_X \left\{ A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j \ (j = 1, \ldots, m), X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

$$(\text{Dual}) : \sup_y \left\{ b^T y : A_0 - \sum_{j=1}^m y_j A_j \in \mathbb{S}^n_+, y \in \mathbb{R}^m \right\}$$

$\boxed{\text{記号・呼び方}}$

- $A \bullet B = \sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij} B_{ij} = \mathrm{Trace}(AB^T)$
- $\mathbb{S}^n_+$ and $\mathbb{S}^n_{++}$: sets of positive semidefinite and positive definite matrices, respectively
- Dualの制約：線形行列不等式 (Linear matrix inequality, LMI)

復習

Definition 1 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ : \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{X} \boldsymbol{s} \geq 0$

Definition 2 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_{++} : \forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{X} \boldsymbol{s} > 0$

Fact 1 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n$ ならば固有値は実数. $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$ ならば固有値は非負, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_{++}$ ならば正

Fact 2 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n$ に対して次のように分解できる

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}^T,$$

ただし $\boldsymbol{Q}$ は直交行列

Fact 3 サイズが同じ行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ に対して, $\mathrm{Trace}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{Trace}(\boldsymbol{BA})$

$\boxed{\text{復習の続き}}$

Fact 4 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T$ となる列フルランク行列 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ が存在

Fact 5 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{S} \in \mathbb{S}^n_+$ とする. $\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{S} \geq \boldsymbol{0}$ が成り立つ. さらに

$$\boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{X}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}_n.$$

Fact 6 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+$ & $\boldsymbol{X}_{ii} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{X}_{ij} = \boldsymbol{X}_{ji} = \boldsymbol{0}$ for all $j = 1, \ldots, n$

双対定理

$$(\text{Primal}) \inf_{X} \left\{ A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j \ (j = 1, \ldots, m), X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

$$(\text{Dual}) \sup_{y} \left\{ b^T y : A_0 - \sum_{j=1}^{m} y_j A_j \in \mathbb{S}^n_+, y \in \mathbb{R}^m \right\}$$

- (Primal) が Slater 条件を満たし (Dual) が feasible ならば, $\theta_P = \theta_D$ で, (Dual) が最適解を持つ
- (Dual) が Slater 条件を満たし (Primal) が feasible ならば $\theta_P = \theta_D$ で, (Primal) が最適解を持つ

Slater 条件

- $\exists X \in \mathbb{S}^n_{++}$ such that $A_j \bullet X = b_j \ \ (j = 1, \ldots, m)$
- $\exists y \in \mathbb{R}^m$ such that $A_0 - \sum_{j=1}^{m} y_j A_j \in \mathbb{S}^n_{++}$
- 制約想定 (Constraint qualification) の一つ

心に留めておくこと 1

- Abadie 制約想定や Guignard 制約想定 (接錐と線形化錐の関係) が Slater 条件より弱いが...
- Slater 条件は最適解を知らなくても確認できることがある *e.g.* SDP relaxation of Max-Cut problem:

$$\sup_{X} \left\{ L \bullet X : X_{ii} = 1 \ (i = 1, \ldots, n), X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

もちろん, 確認が難しい場合もある *e.g.* H_∞ state feedback control, $\mathrm{He}(M) = M + M^T$

$$\begin{cases} \inf\limits_{X,Y,\gamma} & \gamma \\ \text{subj. to} & -\begin{pmatrix} \mathrm{He}(AX + B_2 Y) & * & * \\ C_1 X + D_{12} Y & -\gamma I_{p_1} & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n+p_1+m_1}_+ \\ & X \in \mathbb{S}^n_+, Y \in \mathbb{R}^{m_2 \times n} \end{cases}$$

$\boxed{\text{心に留めておくこと 2}}$

- 「最適値が一致」 & 「一方の最適解の存在のみ」
- もう一方に最適解が存在しない場合があり得る
- 主双対内点法は, 双方が Slater 条件を満たしていることを要求 $\Rightarrow$ 双方で最適解が存在
- 組合せ最適化問題に対する SDP 緩和では, たいていの場合, 双方が Slater 条件を満たす
- Slater 条件を満たさない SDP は病的な SDP?

なぜ Slater 条件を気にする (した) のか?

$\boxed{\text{Example 1}}$ (Waki, Nakata, Muramatsu 2012)

$$\theta_1^* = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x : x^2 \geq 1, x \geq 0 \right\}$$

- $\theta_1^* = 1$ & $x^* = 1$
- Construct SDP relax. prob., $(\mathrm{SDP})_5 = 1$ by SDP solvers,
- But $(\mathrm{SDP})_r = 0$ for all $r \geq 1$

$\boxed{\text{Example 2}}$ (Waki 2012)

$$\theta_2^* = \inf_{x,y \in \mathbb{R}} \{ -x - y : xy \leq 1, x, y \geq 1/2 \}$$

- $\theta_2^* = -1.5$ & $(x^*, y^*) = (1, 1/2), (1/2, 1)$
- Construct SDP relax. prob., $(\mathrm{SDP})_7 = -1.5$ by SDP solvers
- But $(\mathrm{SDP})_r$ is infeasible for all $r \geq 1$

$\boxed{\text{SDP relax.}}$: ($X \in \mathbb{S}^{r+1}$ で添字は $\mathbf{0}$ から r に注意)

$$\sup_{X}\left\{-X_{00} : \sum_{\substack{k+\ell=j,\\ 0\le k,\ell\le r}} X_{k\ell} = b_j \ (j=1,\dots,2r), X \in \mathbb{S}^{r+1}_{+}\right\},$$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j=2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad (j = 1,\dots,2r)$$

$\boxed{\text{解けそう!}}$: $X \in \mathbb{S}^{r+1}_{+}$ と最後の等式制約に着目

- $X_{01}+X_{01}=0$, $X_{02}+X_{11}+X_{20}=1$, $\dots$, $X_{r,r-2}+X_{r-1,r-1}+X_{r-2,r}=0$, $X_{r,r-1}+X_{r-1,r}=0$, $X_{r,r}=0$,
- $X_{r,r}=0 \Rightarrow X_{r-1,r-1}=0 \Rightarrow X_{r-2,r-2}=0,\cdots,X_{22}=0$
- 結局, 以下と等価

$$\sup_{X}\{-X_{00} : X_{01}=X_{01}=0, X_{11}=1, X_{00}\ge 0\}$$

わかったこと

強双対定理から見ると

- 双対問題 (SOS) は Slater 条件を満たさないことがある & 摂動に対して最適値が大きく変化
- 手である程度解けてしまう or SDP relax. を小さくできる

多項式最適化から見ると

- SDP relax. が Slater 条件を満たすかどうかはすぐにはわからない
- 二乗和多項式の性質から, 任意の r に対して生成されう SDP relax. は全て以下と等価

$$(\text{Ex.1}) = \sup_{\sigma_j, p} \{p : x - p = \sigma_0 + x\sigma_1, \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}_+\},$$

$$(\text{Ex.2}) = \sup_{\sigma_j, p} \left\{ p : \begin{array}{r} -x - y - p = \sigma_0 + (x - 1/2)\sigma_1 \\ +(y - 1/2)\sigma_2, \\ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- (Kojima, Kim, Waki 2005) の POP に対する前処理の拡張になっている (Waki, Muramatsu 2011)

講義の目標：Facial reduction を知る

証明すること 2

$$(\text{Dual}) : \sup_{y} \left\{ b^T y : A_0 - \sum_{j=1}^{m} A_j y_j \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

- (Dual) が Slater 条件を満たさない $\iff$ $\exists \hat{X} \in \mathbb{S}^n_+ \setminus \{O\}$ such that $A_0 \bullet \hat{X} \leq 0, A_j \bullet \hat{X} = 0 \ (j = 1, \ldots, m)$
- 特に $A_0 \bullet \hat{X} < 0 \Rightarrow$ (Dual) が infeasible

コメント

- Slater 条件を満たさないという証拠 (certificate) がある
- (Dual) が feasible なら, (Primal) には目的関数を変えず実行可能性を保つ方向 $\hat{X}$ が存在する.

$$A_j \bullet (X + \alpha\hat{X}) = A_j \bullet X \ (j = 0, 1, \ldots, m) \text{ and}$$
$$X + \alpha\hat{X} \in \mathbb{S}^n_+ \ (\forall \alpha \geq 0).$$

$\boxed{\text{この事実を使うと...}}$

- (Dual) is (Dual)′ と等価:

$$(\text{Dual})' : \sup_{y} \left\{ b^T y : \hat{A}_0 - \sum_{j=1}^{m} \hat{A}_j y_j \in \mathbb{S}^r_+ \right\}$$

$\boxed{\text{Facial reduction algorithm for (Dual)}}$

Step 1 Find $\hat{X}$ for (Dual)

Step 2 Reduce (Dual) to (Dual)′

Step 3 (Dual) $\leftarrow$ (Dual)′ and go to Step 1

Return Slater 条件を満たし, (Dual) と等価な SDP

(Primal) に対しても同様に成り立つ

証明すること 1

$$(\text{Primal}) : \inf_{X} \left\{ A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j, X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

- (Primal) が Slater 条件を満たさない $\iff$ $\exists \hat{y} \in \mathbb{R}^m$ such that $b^T \hat{y} \geq 0, W := -\sum_{j=1}^m \hat{y}_j A_j \in \mathbb{S}^n \setminus \{O\}$
- 特に $b^T \hat{y} > 0 \Rightarrow$ (Primal) が infeasible

Facial reduction algorithm for (Primal)

Step 1 Find $\hat{y}$ for (Primal)

Step 2 Reduce (Primal) to (Primal)′

Step 3 (Primal) $\leftarrow$ (Primal)′ and go to Step 1

Return Slater 条件を満たし, (Primal) と等価な SDP

Slater 条件を満たさない SDP の応用例

- Quadratic assignment (Zhao, Karisch, Rendl, Wolkowicz 1998)
- Graph partition (Wolkowicz, Zhao 1999)
- Mixed integer quadratic program (Tanaka, Nakata, Waki 2012 and 2013)
- Polynomial optimization (Kojima, Kim, Waki 2005), (Waki, Nakata, Muramatsu 2012), (Waki, Muramatsu 2010 and 2011)
- Euclidean distance matrix completion (Krislock, Wolkowicz 2010)
- Control (Balakrishnan, Vandenberghe 2003), (Waki, Sebe 2015)

共通していること：どれも「あるクラスの問題から生成された SDP 緩和問題」

疑問

- そのクラスの問題がどういう性質を持っていたら, SDP(緩和問題) は Slater 条件を満たさないのか?
- その性質を使って計算効率を改善できるか?

理論 : Facial reduction (Borwein, Wolkowicz 1981 etc)

- Facial reduction そのものへの貢献
- 最適化理論への貢献
- 他分野への貢献

意外だったコメント : 「SDP は線形では?」, 「(SDP の) 双対問題を解いても...」

Slater 条件を意識させる他の例

$\boxed{\text{混合整数二次錐計画問題}}$ (Friberg 2016)

$$\begin{cases} \inf_{x_1,\ldots,x_5} & 2x_3 + 2x_4 - x_5 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 - x_4 \leq 0, 4x_4 - x_5 \geq 0, \\ & x_3 \geq -1, x_5 \leq 1, \\ & (x_1, x_2, x_3) \in Q_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_+, x_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ただし $Q_3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \right\}$

$\boxed{\text{特徴}}$:

- $x_4 \leq 0$ の部分問題で生成される緩和問題は, Slater 条件を満たさないだけでなく $\theta_P > \theta_D$
- A_0 の摂動に対して, θ_D が大きくかわる (Cheung, Wolkowicz 2014)
- Presolve や Cut の追加により, 緩和問題が Slater 条件を満たさない可能性がある $\to$ MISOCP がどういう条件を満たせば Slater 条件を満たすか?

$\boxed{\text{実行不可能性}}$：$\mathbb{P}_1$ と $\mathbb{P}_2$ はともに実行不可能

$$\mathbb{P}_1 \quad \sup_{y_1}\left\{by_1 : \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} - y_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2_+, y_1 \in \mathbb{R}\right\},$$

$$\mathbb{P}_2 \quad \sup_{y_1}\left\{by_1 : \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} - y_1\begin{pmatrix} & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2_+, y_1 \in \mathbb{R}\right\}$$

$\boxed{\text{注意}}$

- $\mathbb{P}_1$ は実行不可能性を示す証拠がある (強実行不可能性)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{P}_2$ そのような証拠はない (弱実行不可能性)
- 弱実行不可能性の場合, 摂動すると解が存在する; $b \le 0$ なら

$$\sup_{y_1}\left\{by_1 : \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} - y_1\begin{pmatrix} -\epsilon & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2_+, y_1 \in \mathbb{R}\right\} = b/\epsilon \le 0$$

- 分枝限定法で実行不可能性に基づく枝狩りは難しいかも

摂動解析 (with Sekiguchi)

$\boxed{\boldsymbol{H_\infty} \text{ 状態フィードバック制御問題}}$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\sup\limits_{x_1,\ldots,x_6} & -x_6 \\
\text{sub.to} & \begin{pmatrix}
2x_1+2x_2 & & & & & \\
-x_1+x_2+x_3-x_4 & -2x_2-2x_5 & & & & \\
-2x_1+x_2-2x_4 & -2x_2+x_3-2x_5 & x_6 & & & \\
x_1-2x_2+x_4 & x_2-2x_3+1x_5 & 0 & x_6 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & x_6 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6
\end{pmatrix} \in \mathbb{S}^6_+, \\
& \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2_+
\end{array}
\right.
$$

Table: SDPA-GMP (300 digits and ϵ =1.0e-16)

Problem	δ =1.0e-10	δ =1.0e-30	δ =1.0e-50
上の問題	2.2360679775444764	2.2360679774997897	2.2360679774997897
摂動 1	2.2360072694172072	2.1078335768712432	1.4142135623730950
摂動 2	2.2360072694172055	2.0000000000000000	2.0000000000000000
摂動 3	2.2360072665294605	1.4142135623730950	1.4142135623730950

Slater 条件から見た半正定値計画問題

技術的なこと

脇 隼人

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

2016-07-28

CCOS 2016, 京都大学

分離定理 (Separation Theorem)

Affine hull (Section 1, pp. 6, Rockafellar, 1970)

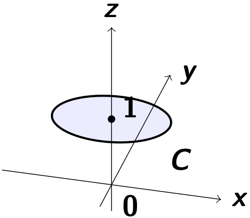
The affine hull of $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is the smallest affine set containing S and is denoted by $\mathbf{aff}(S)$

Relative interior (Section 6, pp.44, Rockafellar, 1970)

The relative interior $\mathbf{rel}(C)$ of a convex set C is

$$\mathbf{rel}(C) = \{x \in \mathbf{aff}(C) : \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } (x + \epsilon B) \cap (\mathbf{aff}(C)) \subseteq C\}$$

$\boxed{\text{例：円盤}}$: $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1, z = 1\}$



$$\begin{aligned} \mathbf{int}(C) &= \emptyset, \\ \mathbf{rel}(C) &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, z = 1\} \end{aligned}$$

分離定理 (Theorem 20.2, pp. 181, Rockafellar, 1970)

Let C_1 and C_2 be nonempty convex sets in $\mathbb{R}^n$. C_1 is polyhedral. The following are equivalent:

1. $C_1 \cap \mathbf{rel}(C_2) = \emptyset$
2. $\exists H$: hyperplane separating C_1 and C_2 properly and not containing C_2

The second is equivalent to the fact that $\exists c \in \mathbb{R}^n$ and $\delta \in \mathbb{R}$ such that

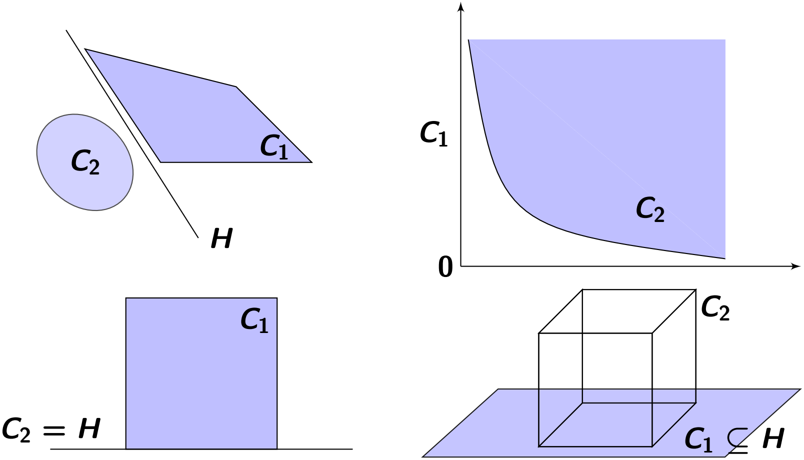
$$\text{A1} \quad c^T x \leq \delta \leq c^T s \quad (\forall x \in C_1, s \in C_2)$$

$$\text{A2} \quad \delta < c^T \hat{s} \quad (\exists \hat{s} \in C_2)$$

$\boxed{C_2 \text{ が錐の場合}}$: $\delta = 0$ と取れる

- $0 \in C_2$ より, $\delta \leq 0$
- もし $\exists s \in C_2$ s.t. $c^T s_2 < 0$ なら, $\alpha s \in C_2$ for all $\alpha > 0$ なので, $0 > c^T(\alpha s_2) \to -\infty \quad (\alpha \to \infty)$ で矛盾 $\therefore c^T s \geq 0$ for all $s \in C_2$

Figures of Separation Theorem



証明すること 1

(P) が Slater 条件を満たさない $\iff$ $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ such that $-\sum_{j=1}^m y_j A_j \in \mathbb{S}^n_+ \setminus \{O\}$ and $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \geq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$: $\hat{X}$ is a strictly feasible solution

$$\mathbf{0} < \hat{X} \bullet \left(-\sum_{j=1}^m y_j A_j \right) = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \leq \mathbf{0} \ (\text{矛盾!})$$

$\boxed{\text{Infeasibility}}$: $\tilde{X}$ is a feasible solution

$$\mathbf{0} \leq \tilde{X} \bullet \left(-\sum_{j=1}^m y_j A_j \right) = -\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} < \mathbf{0} \ (\text{矛盾!})$$

Certificate がある infeasibility を strong infeasibility と呼ぶ

$\boxed{\Rightarrow}$: $\boldsymbol{C_1 = \{b\}}$ and $\boldsymbol{C_2 = \{h \in \mathbb{R}^m : X \in \mathbb{S}^n_+, h_j = A_j \bullet X\}}$.
From (Theorem 6.6, p. 48, Rockafellar, 1970),

$$\mathbf{rel}(\boldsymbol{C_2}) = \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} : \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^{\boldsymbol{n}}_{++}, \boldsymbol{h_j} = \boldsymbol{A_j} \bullet \boldsymbol{X}\},$$

and separation theorem is equivalent to

$\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}; \boldsymbol{y^T b} \leq \mathbf{0} \leq \boldsymbol{y^T h}\,(\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C_2})$ and $\boldsymbol{y^T \hat{h}} > \mathbf{0}(\exists \boldsymbol{\hat{h}} \in \boldsymbol{C_2})$.

- 第一不等式より, $\boldsymbol{(-y)^T b} \geq \mathbf{0}$ and for all $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^{\boldsymbol{n}}_+$,

$$\boldsymbol{y^T h} = \sum_{j=1} \boldsymbol{y_j(A_j \bullet X)} = \boldsymbol{X} \bullet \left(\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y_j A_j}\right) \geq \mathbf{0}$$

  これは $-\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{(-y_j)A_j} \in \mathbb{S}^{\boldsymbol{n}}_+$
- 第二不等式より, $-\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{(-y_j)A_j} \neq \boldsymbol{O}$. おしまい

証明すること 2

(D) が Slater 条件を満たさない $\iff$ $\exists X \in \mathbb{S}^n_+ \setminus \{O\}$ such that $A_j \bullet X = 0$ and $A_0 \bullet X \leq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$: 同じ方針で証明できる.
$\boxed{\Rightarrow}$: $C_1 = \{A_0 - \sum_{j=1}^m y_j A_j : y \in \mathbb{R}^m\}$ and $C_2 = \mathbb{S}^n_+$. From separation theorem,

$$\exists Z \in \mathbb{S}^n \setminus \{O\}; Z \bullet X \leq 0 \leq Z \bullet Y \ (\forall X \in C_1, Y \in C_2)$$

- 不等式 (C_2) より, for all $Z \in \mathbb{S}^n_{++}$
- 不等式 (C_1) より,

$$Z \bullet X = (A_0 \bullet Z) - \sum_j y_j (A_j \bullet Z) \leq 0$$

これは $A_0 \bullet Z \leq 0$ and $A_j \bullet Z = 0$. おしまい

$\boxed{\text{Certificate}}$: $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ such that $b^T\hat{y} = 0$ and
$W := -\sum_{j=1}^m \hat{y}_j A_j \in \mathbb{S}^n_+ \setminus \{O\}$

$$\text{(P)} : \inf_X \{A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j \ (j = 1, \ldots, m), X \in \mathbb{S}^n_+\}$$

命題

(P) は (P)′ と等価

$$\text{(P)}' : \inf_X \{A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j \ (j = 1, \ldots, m), X \in \mathbb{S}^n_+ \cap \{W\}^\perp\}$$

ここで $\{W\}^\perp = \{X \in \mathbb{S}^n : X \bullet W = 0\}$.

$\boxed{\text{証明}}$: X : (P) の feasible solutions.

$$X \bullet W = -\sum_{j=1}^m y_j (A_j \bullet X) = -b^T y = 0.$$

Therefore $X \in \{W\}^\perp$.

(P)′ を SDP の形に変形する

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^T, \text{where } \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{S}_{++}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}_+^{\boldsymbol{n}} \cap \{\boldsymbol{W}\}^\perp \iff$$

$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}_+^{\boldsymbol{n}} \text{ and } \boldsymbol{X} \bullet \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^T = (\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}) \bullet \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{21}^T \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと, $\boldsymbol{X}_{22} = \boldsymbol{O}$. さらに, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{S}_+^{\boldsymbol{n}} \iff \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q} \in \mathbb{S}_+^{\boldsymbol{n}}$ より, $\boldsymbol{X}_{21} = \boldsymbol{O}$. したがって,

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^T$$

となる. これを (P)′ に代入する

続き

$$A_j \bullet X = (Q^T A_j Q) \bullet \begin{pmatrix} X_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} = (Q^T A_j Q)_1 \bullet X_{11} \ (j = 0, \ldots, m)$$

したがって,

$$(\mathrm{P})' : \inf_X \{ (Q^T A_0 Q)_1 \bullet X_{11} : (Q^T A_j Q)_1 \bullet X_{11} = b_j, X_{11} \in \mathbb{S}^r_+ \}$$

観察

- 行列のサイズが n から r に減少
- (P)′ は Slater 条件を満たすか? $\Rightarrow$ 同じことを適用して certificate があるかないか調べる

$$\mathbb{S}^n_+ \xrightarrow{(y^1, W^1)} \mathbb{S}^{r_1}_+ \xrightarrow{(y^2, W^2)} \mathbb{S}^{r_2}_+ \xrightarrow{(y^3, W^3)} \cdots \xrightarrow{(y^s, W^s)} \mathbb{S}^{r_s}_+.$$

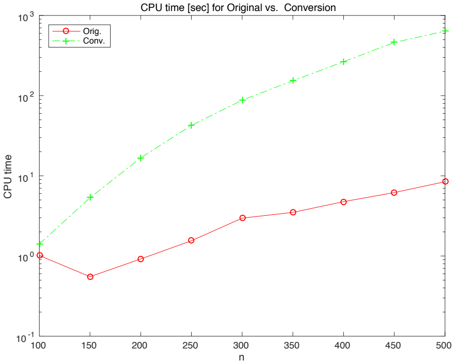
- 高々 n 回の繰り返しでおしまい = Facial reduction

$\boxed{\text{余談}}$ $\boldsymbol{Q}$ はなんでもいい? 乱数で生成した直交行列で

$$\text{(Original)} \quad \inf_{\boldsymbol{X}} \left\{ \boldsymbol{A}_0 \bullet \boldsymbol{X} : \boldsymbol{E}_i \bullet \boldsymbol{X} = 1, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \right\},$$

$$\text{(Conversion)} \quad \inf_{\tilde{\boldsymbol{X}}} \left\{ (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Q}^T) \bullet \tilde{\boldsymbol{X}} : (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{Q}^T) \bullet \tilde{\boldsymbol{X}} = 1, \boldsymbol{X} \in \mathbb{S}^n_+ \right\},$$

$\boxed{\text{数値実験}}$: 乱数で $\boldsymbol{L}$ を生成. 係数行列の疎・密で計算速度に差.



(D) の最適解

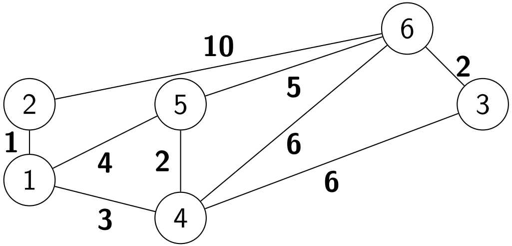
$$\begin{cases} (\mathrm{P}) & \inf_X \left\{ A_0 \bullet X : A_j \bullet X = b_j, X \in \mathbb{S}^n_+ \right\} \\ (\mathrm{D}) & \sup_y \left\{ b^T y : A_0 - \sum_{j=1}^m y_j A_j \in \mathbb{S}^n_+ \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathrm{P})' & \inf_X \left\{ (Q^T A_0 Q)_1 \bullet X : (Q^T A_0 Q)_1 \bullet X = b_j, X \in \mathbb{S}^r_+ \right\} \\ (\mathrm{D})' & \sup_y \left\{ b^T y : (Q^T A_0 Q)_1 - \sum_{j=1}^m y_j (Q^T A_j Q)_1 \in \mathbb{S}^r_+ \right\} \end{cases}$$

- (D)$'$ の LMI は (D) の LMI の部分行列で構成
- (D)$'$ の最適解 y^* は (D) の最適解にならないかも
- (P) が Slater 条件を満たさないので, (D) は最適解を持たないかもしれない
- $\{(Q^T A_j Q)_1 : j = 1, \ldots, m\}$ が一次独立でないかもしれない

例：SDP relaxation of MAX-CUT

$\boxed{\text{MAX-CUT}}$: $G = (V, E)$, $V = \{1, \dots, n\}$, $E \subseteq V \times V$, V を $R \subseteq V$ と $V \setminus R$ の二つに分けたい.



各辺には重みが付いている. 目的関数は V を R, $V \setminus R$ に分けたときに, R と $V \setminus R$ をまたぐ辺の重みの和

$$\max_{x} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(1 - x_i x_j)/4 : x_i \in \{-1, 1\} \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

ここで, 変数 x_i は $i \in V \setminus R$ なら $x_i = -1$, $i \in R$ なら $x_i = 1$

$\boxed{\text{例：SDP relax. of MAX-CUT の続き}}$：$W = (w_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{S}^n$ と定め,

$$L := (\mathrm{Diag}(We) - W)/4$$

とおく．ただし, $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{P}: \quad \max_x \{x^T L x : x \in \{-1, 1\}^n\}$$

$\boxed{\text{SDP relax. } \mathbb{Q}}$：$xx^T \to X$

$$\mathbb{Q}: \quad \sup_X \{L \bullet X : E_i \bullet X = 1 \ (i = 1, \ldots, n), X \in \mathbb{S}^n_+\}$$

ただし $E_i \in \mathbb{S}^n$ は (i, i) のみ 1 であとは全て 0

$\boxed{\text{主問題は Slater 条件を満たすか}}$

$$X = I_n$$

と取れば Slater 条件を満たすことがわかる
$\boxed{\text{双対問題は Slater 条件を満たすか}}$: Find X such that

$$E_i \bullet X = 0 \ (i = 1, \ldots, n), X \in \mathbb{S}^n_+ \setminus \{O\}, L \bullet X \le 0$$

これを満たす X は存在しないので, 双対問題は Slater 条件を満たす

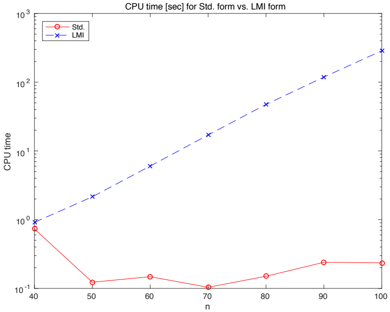
$\boxed{\text{余談}}$：どちらの定式化も MAX-CUT に対する SDP relax.

$$\text{(Std)} \quad \sup_{X} \{ L \bullet X : E_i \bullet X = 1 \ (i = 1, \ldots, n), X \in \mathbb{S}^n_+ \}$$

$$\text{(LMI)} \quad \sup_{x_{ij}} \left\{ \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} L_{ij} x_{ij} : I_n - \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} (-E_{ij}) x_{ij} \in \mathbb{S}^n_+ \right\}$$

ただし $E_{ij} \in \mathbb{S}^n$ は (i,j) と (j,i) 成分の 1 で後は 0 の行列

$\boxed{\text{数値実験}}$：乱数で L を生成．定式化の違いで計算速度に差．



SDP関係の教科書 I

E. de Klerk,
Aspects of semidefinite programming : interior point algorithms and selected applications.
Applied Optimization, Springer US, 2002.

B. Gärtner and J. Matoušek,
Approximation Algorithms and Semidefinite Programming.
Springer, 2012.

J. Renegar,
Mathematical view of Interior-Point Methods in Convex Optimization.
Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

M. Todd,
Semidefinite optimization.
Acta Numerica, 10, 515 – 560, 2001.

L. Tunçel,
Polyhedral and SDP Methods in Combinatorial Optimization.
Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, 2012.

Facial reduction の文献 I

M. J. Borwein and H. Wolkowicz,
Facial reduction for a cone-convex programming problem.
Journal of the Australian Mathematical Society, 30, 369 – 380, 1981.

Y. -L. Cheung, S. Schurr and H. Wolkowicz,
Preprocessing and regularization for degenerate semidefinite programs.
In Computational and Analytical Mathematics, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 50, 251 – 303, 2013.

Y. -L. Cheung and H. Wolkowicz,
Sensitivity analysis of semidefinite programs without strong duality.
Technical Report, University of Waterloo, 2014.

H. A. Friberg,
Facial reduction heuristics and the motivational example of mixed-integer conic optimization.
http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2016/02/5324.pdf, 2016.

M. Liu and G. Pataki,
Exact duality in semidefinite programming based on elementary reformulations.
SIAM journal on Optimization, 25, 1441 – 1454, 2015.

Facial reduction の文献 II

B. F. Lourenço, M. Muramatsu and T. Tsuchiya,
Solving SDP Completely with an Interior Point Oracle.
http://arxiv.org/abs/1507.08065, 2015.

Z. Luo, J. F. Sturm and S. Zhang,
Duality results for conic convex programming.
Technical Report, Erasmus University Rotterdam, 1997.

G. Pataki,
A Simple Derivation of a Facial Reduction Algorithm, and Extended Dual Systems.
Technical Report, Columbia University, 2000.

G. Pataki,
Strong duality in conic linear programming: facial reduction and extended dual.
In Computational and Analytical Mathematics (D. Bailey, H. Bauschke, P. Borwein, Frank Garvan, M. Théra, J. Vanderwerff and H. Wolkowicz eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 613 – 634, 2013.

Facial reduction の文献 III

F. Permenter and P. Parrilo,
Partial facial reduction: simplified, equivalent SDPs via approximations of the PSD cone.
https://arxiv.org/abs/1408.4685, 2014

M. V. Ramana,
An exact duality theory for semidefinite programming and its complexity implications.
Mathematical Programming, 77, 129 – 162, 1997.

M. V. Ramana, L. Tunçel and H. Wolkowicz,
Strong duality for semidefinite programming.
SIAM Journal on Optimization, 7, 641 – 662, 1997.

M. Tronvská,
Strong duality conditions in semidefinite programming.
Journal of Electrical Engineering, 56, 1 – 5, 2005.

H. Waki and M. Muramatsu,
Facial Reduction Algorithms for Conic Optimization Problems.
Journal of Optimization Theory and Applications, 158, 188 – 215, 2013.

Facial reduction に関係する凸解析や SDP の実行不可能性 I

M. Liu and G. Pataki,
Exact duals and short certificate of infeasibility and weak infeasibility in conic linear programming.
http://arxiv.org/abs/1507.00290, 2015.

B. F. Lourenço, M. Muramatsu and T. Tsuchiya,
A structural geometrical analysis of weakly infeasible SDPs.
The Operations Research Society of Japan, 59, 241 – 257, 2016.

G. Pataki,
The geometry of semidefinite programming.
In Handbook of semidefinite programming, H. Wolkowicz and R. Saigal and L. Vandenberghe eds., 2000.

G. Pataki,
On the closedness of the linear image of a closed convex cone.
Mathematics of Operations Research, 32, 395 – 412, 2007.

G. Pataki,
On the connection of facially exposed and nice cones.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 400, 211 – 221, 2013.

Facial reduction に関係する凸解析や SDP の実行不可能性 II

R. T. Rockakeffar,
Convex Analysis.
Princeton University Press, 1970

V. Roshchina,
Facially exposed cones are not always nice.
SIAM Journal on Optimization, 24, 257 – 268, 2014.

J. F. Sturm,
Error bounds for linear matrix inequalities.
SIAM Journal on Optimization, 10, 1228 – 1248, 2000.

H. Waki,
How to generate weakly infeasible semidefinite programs via Lasserre's relaxations for polynomial optimization.
Optimization Letters, 6, 1883 – 1896, 2012.

Facial reduction の応用 I

V. Balakrishnan and L. Vandenberghe,
Semidefinite Programming Duality and Linear Time-Invariant Systems.
IEEE Transactions on Automatic Control, 48, 1, 30 – 41, 2003.

D. Drusvyatksiy, G. Pataki and H. Wolkowicz,
Coordinate shadows of semi-definite and Euclidean distance matrices.
SIAM Journal on Optimization, 25, 1160 – 1178, 2015.

N. Krislock and H. Wolkowicz,
Explicit sensor network localization using semidefinite representations and facial reductions.
SIAM Journal on Optimization, 20, 2679 – 2708, 2010.

B. F. Lourenço, M. Muramatsu and T. Tsuchiya,
Weak infeasibility in second order cone programming.
Optimation Letters, 2015, doi:10.1007/s11590-015-0982-4

Y. Sekiguchi and H. Waki,
Perturbation Analysis of Singular Semidefinite Program and Its Application to a Control Problem.
http://arxiv.org/abs/1607.05568, 2016.

Facial reduction の応用 II

L. Tunçel,
On the Slater condition for the SDP relaxations of nonconvex sets.
Operations Research Letters, 29, 181 – 186, 2001.

H. Waki and M. Muramatsu,
Facial Reduction Algorithms for Finding Sparse SOS representations.
Operations Research Letters, 28, 361 – 365, 2009.

H. Waki and M. Muramatsu,
An extension of the elimination method for a sparse SOS polynomial.
Journal of the Operations Research Society of Japan, 54, 161 – 190, 2011.

H. Waki and N. Nakata and M. Muramatsu,
Strange Behaviors of Interior-point Methods for Solving Semidefinite Programming Problems in Polynomial Optimization.
Computational Optimization and its Applications, 53, 824 – 844, 2012.

H. Waki and N. Sebe,
Application of Facial Reduction to H_∞ State Feedback Control Problem.
http://arxiv.org/abs/1606.03529, 2016.

Facial reduction の応用 III

H. Wolkowicz and Q. Zhao,
Semidefinite programming relaxations for the graph partitioning problem.
Discrete Applied Mathematics, 96/97, 461 – 479, 1999.

Q. Zhao, S. E. Karisch, F. Rendl and H. Wolkowicz,
Semidefinite programming relaxations for the quadratic assignment problem.
Journal of Combinatorial Optimization, 2, 71 – 109, 1998.