

# テンセグリティの応力とその応用 (グラフの実現問題)

谷川真一\*

2017年7月31日

テンセグリティとは、棒材 (伸び縮みしない)・ケーブル (縮むが伸びない)・ストラット (伸びるが縮まない) の 3 種類の直線部材のピン接合によって構成される構造物である。ケーブルやストラットは安定的な部材ではないが、それらをうまく繋ぎ合わせることで安定構造物が構成可能である。例えば [26] において、様々なテンセグリティの例を見ることができる。

安定なテンセグリティとは直感的には、任意の外力に対して構造物内部の抵抗力 (応力) がうまく力の釣り合いを満たすように作用し、形状が保たれるような構造物である。本講義ではこのテンセグリティの応力に関連して、以下の 3 項目の解説を行う。

(i) テンセグリティの安定性とグラフ実現問題

(ii) Cauchy の多面体剛性定理

(iii) Colin de Verdière 数

(i)(ii) は主に Connolly [7] の内容に基づいているが、グラフ実現問題の半正定値計画緩和を通じた捉え方は最近のものである。(例えば [13, 27, 30].) Colin de Verdière 数に関する解説は [15, 18, 23] に基づいている。テンセグリティの剛性に関するより詳細な解説は [8, 9], より一般的向けの解説記事は [10] などがある。

**記号の定義:** 正の整数  $n$  に対し、 $\mathbb{R}^n$  を  $n$  次元ユークリッド空間とし、その内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いて表す。 $\mathcal{S}_n$  をサイズ  $n$  の実対象行列の集合、 $\mathcal{S}_{n,+}$  をサイズ  $n$  の半正定値対称行列の集合、 $\mathbf{e}_{n,i} \in \mathbb{R}^n$  を第  $i$  座標が 1 で他の座標値が 0 のベクトル、 $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$  を全ての座標値が 1 のベクトル、 $J_{n,m}$  を全ての要素が 1 の  $n \times m$  行列とする。サイズが文脈より明らかな場合は添字を省略する。 $\mathcal{S}_n$  上に内積を  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$  ( $A, B \in \mathcal{S}_n$ ) と定義することで  $\mathcal{S}_n$  を  $\binom{n+1}{2}$  次元内積空間と考える。

また文脈から誤解が生じる恐れがない場合、 $n$  を用いて議論の対象となっているグラフ  $G = (V, E)$  の頂点数をあらわす。

$A \in \mathcal{S}_n$  が半正定値のとき、しばしば  $A \succeq 0$  と記す。 $A$  の重複を含めた正の固有値数を  $a$ 、負の固有値数を  $b$  としたとき、 $A$  の符号数を  $(a, b, n - a - b)$  と定める。

## 1 テンセグリティの安定性とグラフ実現問題

### 1.1 テンセグリティの大域剛性

数学的には以下のように定義される。

**定義 1.1.** 有限かつループなしグラフ  $G = (V, E)$ , 符号関数  $\sigma : E \rightarrow \{+, 0, -\}$ ,  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  の三つ組  $(G, \sigma, p)$  を、 $d$  次元テンセグリティと呼ぶ。

つまり  $G$  の各辺は直線部材、各頂点はピン接合点を表し、 $\sigma(e) = 0, +, -$  によって棒、ケーブル、ストラットを組合せ表的に表現する。(このような組  $(G, \sigma)$  を符号グラフと呼ぶ。) また  $p$  は各頂点  $i \in V$  の  $d$  次元ユークリッド空間内での点配置  $p_i \in \mathbb{R}^d$  を表現している。

---

\*tanigawa@mist.i.u-tokyo.ac.jp

符号グラフが等しい2つのテンセグリティ  $(G, \sigma, p), (G, \sigma, q)$  を考える. 各辺  $ij \in E$  に対し以下が成り立つとき  $(G, \sigma, q)$  は  $(G, \sigma, p)$  の変形と呼ぶ:

$$\|p_i - p_j\| \begin{cases} \geq & (\text{if } \sigma(ij) = +) \\ = & (\text{if } \sigma(ij) = 0) \\ \leq & (\text{if } \sigma(ij) = -) \end{cases} \|q_i - q_j\|$$

また2つの点配置  $p, q$  に対し,  $p$  と  $q$  が合同であるとは

$$\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|$$

が任意の2頂点  $i, j \in V$  で成立することと定める. 以下に述べる通り, このことは  $q$  から  $p$  への等長変換が存在することと等価である.

**命題 1.2.** 有限集合  $V$  と自然数  $d$  に対し, 以下が同値:

- $p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  と  $q: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  が合同.
- ある直交行列  $O \in \mathbb{R}^{d \times d}$  と  $t \in \mathbb{R}^d$  が存在し,  $p(i) = Oq(i) + t$  ( $\forall i \in V$ ).

**演習問題 1.** 命題 1.2 を証明せよ.

$p$  と  $q$  が合同な時,  $p \simeq q$  と記す. また  $(G, \sigma, q)$  が  $(G, \sigma, p)$  の変形である時,  $(G, \sigma, q) \preceq (G, \sigma, p)$  と記す.

**定義 1.3.** 以下が成立する時,  $d$  次元テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  は大域的に剛である:

$$\forall q: V \rightarrow \mathbb{R}^d, (G, \sigma, q) \preceq (G, \sigma, p) \Rightarrow q \simeq p$$

つまり大域剛性は, 所与の部材と接続関係  $(G, \sigma)$  によって構成可能なテンセグリティが唯一に定まる場合であり, 非常に安定な構造物であると考えられる. 一方, このような幾何学的な定義とは異なり, 任意の外力に対する抵抗力 (応力) を有する構造物として安定な構造物を捉える方法が構造力学においては主流である. この応力と力の釣合をこれから定式化していく.

**定義 1.4.** テンセグリティ  $(G = (V, E), \sigma, p)$  を考える.  $F: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対し, 以下を満たす  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$  を  $(G, \sigma, p)$  の  $F$  に対する応力と呼ぶ:

$$\text{符号条件: } \omega(ij) \begin{cases} \geq 0 & (\text{if } \sigma(ij) = +) \\ \leq 0 & (\text{if } \sigma(ij) = -) \end{cases}$$

$$\text{釣合条件: } \sum_{j \in V: j \sim i} \omega(ij)(p_i - p_j) = F(i) \quad (\forall i \in V),$$

ここで  $j \sim i \Leftrightarrow ij \in E$ .

特にゼロ関数  $i \mapsto 0$  に対する応力を  $(G = (V, E), \sigma, p)$  の自己応力と呼ぶ. つまり

$$\text{自己応力釣合条件: } \sum_{j \in V: j \sim i} \omega(ij)(p_i - p_j) = 0 \quad (\forall i \in V).$$

全ての部材が棒材のとき, テンセグリティはしばしばフレームワークと呼ばれる.

## 1.2 グラフの実現問題と SDP 緩和

ここではグラフの実現問題を通じて, テンセグリティの剛性と応力の関係を解説する.

**グラフの実現問題**とは非負重み付きグラフ  $(G, \ell)$  に対し,  $\ell$  を辺長として実現するような  $G$  の指定された空間への埋込を求める問題である. つまり  $d$  次元ユークリッド空間においては, 入力  $(G, \ell)$  に対し,

$$\|p_i - p_j\| = \ell_{ij} \quad (\forall ij \in E)$$

を満たす  $p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求める問題である. この問題は  $d = 1$  の場合でも, NP 困難であることが知られているが, ここではさらに問題を一般化して符号グラフの実現問題を考えよう. つまり符号関数  $\sigma: E \rightarrow \{\pm, 0\}$  と重み  $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を有する符号グラフ  $(G, \sigma, \ell)$  が入力に対し,

$$\|p_i - p_j\| - \ell_{ij} \begin{cases} \leq 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ = 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ \geq 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = -) \end{cases}$$

を満たす  $p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  を求める問題である。

$p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対し、 $P \in \mathbb{R}^{d \times n}$  を第  $i$  列が  $p_i$  の行列とすると、 $P^\top P$  は階数  $d$  の半正定値対称行列であり、逆に任意の階数  $d$  の半正定値対称行列  $X$  は  $X = P^\top P$  と  $P \in \mathbb{R}^{d \times n}$  を用いて分解可能である。さらに

$$\langle P^\top P, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \|p_i - p_j\|^2$$

が成立することから、ユークリッド空間への符号グラフ実現問題は以下の階数制約付き半正定値計画問題  $P(G, \sigma, \ell)$  として定式化可能である:

$$\begin{aligned} \max & \quad 0 \\ \text{subject to} & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \leq \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \geq \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = -) \\ & \quad \langle X, J \rangle = 0 \\ & \quad X \succeq 0 \\ & \quad \text{rank } X = d \end{aligned}$$

ここでグラフの各辺長は平行移動に対して普遍であることから、得られる頂点集合の重心は原点にあると仮定して良い。 $\langle X, J \rangle = 0$  はその仮定を記述している。

上記議論によって、大域剛性判定問題は階数制約付き半正定値計画問題の解の唯一性に関する話題であることがわかる。つまり以下の事実が成立する。

**命題 1.5.**  $(G, \sigma, p)$  を  $d$  次元テンセグリティとし、 $\ell: E \ni ij \mapsto \|p_i - p_j\|$  とおく。このとき、 $(G, \sigma, p)$  が大域的に剛である必要十分条件は  $P(G, \sigma, \ell)$  が唯一の解を有することである。

階数制約付き半正定値計画問題は難しい問題なので、階数制約を無視し、半正定値計画緩和問題

$$\begin{aligned} \max & \quad 0 \\ \text{subject to} & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \leq \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ & \quad \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \geq \ell_{ij}^2 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = -) \\ & \quad \langle X, J \rangle = 0 \\ & \quad X \succeq 0 \end{aligned}$$

を利用して問題の性質を探るのが一般的なアプローチである。以降、この SDP 緩和問題を  $\text{SDP}(G, \sigma, \ell)$  と記すことにする。

命題 1.5 ではテンセグリティの大域剛性がグラフ実現問題の解の唯一性として理解できることを述べた。この対応関係をグラフ実現問題の緩和問題に対して適用することで、対応するテンセグリティの剛性性質を新たに定義することができる [30]。

**定義 1.6.**  $d$  次元テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  に対し、 $\ell: E \ni ij \mapsto \|p_i - p_j\|$  とおく。このとき  $\text{SDP}(G, \sigma, \ell)$  の解がただ一つならば、 $(G, \sigma, p)$  は普遍的に剛であると定める。このことは任意の  $d' (\geq d)$  に対し、 $(G, \sigma, p)$  が  $\mathbb{R}^{d'}$  内で大域的に剛であることと等価である。

### 1.3 双対問題と重み付きラプラシアン

対象となる SDP が定義されたので、次のステップは双対問題を考えることである。 $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top$  と  $J$  が直交していることから、双対問題は以下のように記述可能である:

$$\begin{aligned} \min & \quad \sum_{ij \in E} \omega_{ij} \ell_{ij}^2 \\ \text{subject to} & \quad \sum_{ij \in E} \omega_{ij} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \succeq 0 \\ & \quad \omega_{ij} \geq 0 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ & \quad \omega_{ij} \in \mathbb{R} \quad (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ & \quad \omega_{ij} \leq 0 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = -) \end{aligned}$$

一般に辺重み  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、 $L_{G, \omega} := \sum_{ij \in E} \omega_{ij} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top$  と定義すると、

$$L_{G, \omega}[i, j] = \begin{cases} \sum_{k: k \sim i} \omega_{ik} & (i = j) \\ -\omega_{ij} & (ij \in E) \\ 0 & (ij \notin E, i \neq j) \end{cases}$$

となっている。つまりこの行列  $L_{G,\omega}$  は重み付きグラフ  $(G,\omega)$  に対するラプラシアンである。

面白いことに、テンセグリティの自己応力はラプラシアンを利用して特徴付けすることができ、さらに自己応力条件を利用して双対問題の最適性を特徴づけすることができる。

以下の補題では、 $p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対し、 $P \in \mathbb{R}^{d \times n}$  を第  $i$  列が  $p_i$  の行列とする。

**補題 1.7.**  $d$  次元テンセグリティ  $(G,\sigma,p)$  に対し以下が同値:

- $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$  が自己応力釣合条件を満たす。
- $PL_\omega = 0$ .

証明.

$$\begin{aligned} PL_\omega &= \left( \dots, \left( \sum_{j:j \sim i} \omega_{ij} \right) p_i - \sum_{j:j \sim i} \omega_{ij} p_j, \dots \right) \\ &= \left( \dots, \sum_{j:j \sim i} \omega_{ij} (p_i - p_j), \dots \right) \end{aligned}$$

より. □

**補題 1.8.**  $(G,\sigma,p)$  をテンセグリティ,  $\ell: E \ni ij \mapsto \|p_i - p_j\|$ ,  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$  とすると以下が同値:

- $\omega$  が  $\text{SDP}(G,\sigma,\ell)$  の双対問題の最適解。
- $L_\omega \succeq 0$  かつ  $\omega$  が  $(G,\sigma,p)$  の自己応力。

証明. 双対問題の最適値は明らかに 0 であるので、双対問題の実行可能解  $\omega$  が最適解である必要十分条件は  $\sum_{ij \in E} \omega_{ij} \ell_{ij} = 0$ . つまり

$$0 = \sum_{ij \in E} \omega_{ij} \ell_{ij} = \sum_{ij \in E} \omega_{ij} \langle P^\top P, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \langle P^\top P, L_\omega \rangle.$$

$L_\omega$  が半正定値であることから、この条件は  $PL_\omega = 0$  と等価。補題 1.7 より、このことは  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$  が自己応力釣合条件を満たすことと等価。

$\omega$  の実行可能性は  $L_\omega$  の半正定値性と  $\omega$  の符号条件から構成されているので、補題の主張が得られる。 □

また補題 1.7 から  $\dim \ker L_\omega$  の下限が得られる。

**補題 1.9.**  $d$  次元テンセグリティ  $(G,\sigma,p)$  の自己応力  $\omega$  に対し

$$\dim \ker L_\omega \geq d + 1$$

が常に成り立つ。ただし  $p_1, \dots, p_n$  のアフィン次元<sup>1</sup>は  $d$  であるとする。

証明. 重み付きラプラシアンの定義から  $\mathbf{1}_n \in \ker L_\omega$ . また補題 1.7 より  $PL_\omega = 0$ .  $p_1, \dots, p_n$  のアフィン次元が  $d$  であることから、 $\begin{pmatrix} P \\ \mathbf{1}_n^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times n}$  は行独立。よって  $\ker \dim L_\omega$  の次元は少なくとも  $d + 1$ . □

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^d$  内の点  $p_1, \dots, p_n$  に関して

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

を満たす  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  が  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  に限られる時、 $p_1, \dots, p_n$  がアフィン独立であるという。このことは  $\begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$  が線型独立であることと同値である。 $n$  点  $p_1, \dots, p_n$  の (張る空間の) アフィン次元を  $\dim\left\{\begin{pmatrix} p_i \\ 1 \end{pmatrix} : i = 1, \dots, n\right\} - 1$  と定義する。(つまり極大なアフィン独立点集合のサイズ引く 1 がアフィン次元.)

もし  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$  のアフィン次元が  $d$  より小さい場合、それらの点集合はある超平面に含まれている。そのため、低次元の点集合とみなすことができる。このことから通常、 $d$  次元テンセグリティは、その点集合のアフィン次元が  $d$  である場合を指す。

## 1.4 超安定性

**定義 1.10.**  $d$  次元テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  において、以下の (iv) が満たされかつ以下の (i)(ii)(iii) を満たす自己応力  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する時、 $(G, \sigma, p)$  は超安定的と呼ばれる:

- (i)  $\forall ij \in E, \omega(ij) \neq 0$ ;
  - (ii)  $\dim \ker L_\omega = d + 1$ ;
  - (iii)  $L_\omega$  は半正定値;
  - (iv)  $(p_i - p_j)^\top S(p_i - p_j) = 0$  ( $\forall ij \in E$ ) を満たす非ゼロ対称行列  $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$  は存在しない. (Connelly の錐条件)
- 性質 (i)(ii)(iii) を満たす自己応力を超安定化自己応力と呼ぶ.  
以下が主定理である.

**定理 1.11** (Connelly [7]). 超安定的な  $d$  次元テンセグリティは普遍的に剛である.

Connelly の錐条件 (条件 (iv)) は少しテクニカルであるが、低次元の場合はほぼ自明に満たされる. 例えば以下の十分条件が容易に示される.

**補題 1.12.** 超安定化自己応力を有する 1 次元テンセグリティは Connelly の錐条件を常に満たす. また超安定化自己応力を有する 2 次元テンセグリティにおいて、任意の 3 点が同一直線上に存在しないならば条件 (iv) が成立つ.

## 1.5 定理 1.11 の証明

$(G, \sigma, p)$  を超安定的な  $d$  次元テンセグリティとし、 $\omega^*$  を超安定化自己応力とする. また  $P \in \mathbb{R}^{d \times n}$  を第  $i$  列が  $p_i$  の行列、 $\ell : ij \mapsto \|p_i - p_j\|$  とする. 目標は  $P^\top P$  が  $\text{SDP}(G, \sigma, \ell)$  の唯一の解であることを証明することである.

**観察 1:**  $X$  が主問題の実行可能解ならば、 $\langle X, L_{\omega^*} \rangle = 0$  かつ  $\langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \ell_{ij}^2$  ( $\forall ij \in E$ ).

- 補題 1.8 より  $\omega^*$  は双対最適解である. よって弱双対性の議論を利用して、

$$0 = \sum_{ij \in E} \omega_{ij}^* \ell_{ij}^2 \geq \sum_{ij \in E} \omega_{ij}^* \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = \langle X, L_{\omega^*} \rangle \geq 0$$

つまり  $\langle X, L_{\omega^*} \rangle = 0$  かつ  $\omega_{ij}^* (\langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle - \ell_{ij}^2) = 0$  が得られる. さらに超安定化応力条件 (i) より、 $\langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle - \ell_{ij}^2 = 0$  が導かれる.

**観察 2:**  $\text{rank } P = d$ .

- もし  $p_1, \dots, p_n$  がある  $\mathbb{R}^d$  内の超平面に含まれているとする. この超平面の法線ベクトルを  $z \in \mathbb{R}^d$  とすると、任意の  $i, j$  に対し  $p_i - p_j$  が  $z$  と垂直であることから  $(p_i - p_j)^\top z z^\top (p_i - p_j) = 0$  となり、 $S = z z^\top$  に対し条件 (iv) が成立していないことがわかる.
- よって  $p_1, \dots, p_n$  のアフィン次元は  $d$  であり、 $\text{rank } P = d$ .

**観察 3:**  $\{X \in \mathcal{S}_{n,+} : \langle X, L_{\omega^*} \rangle = 0, \langle X, J \rangle = 0\} = \{(AP)^\top (AP) : A \in \mathbb{R}^{d \times d}\}$ .

- $X \in \mathcal{S}_{n,+}$  に対し、 $\langle X, L_{\omega^*} \rangle = 0 \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^d x_i x_i^\top$  ( $x_i \in \ker L_{\omega^*}$ ) と表現可能.
- $X \in \mathcal{S}_{n,+}$  に対し、 $\langle X, L_{\omega^*} \rangle = 0$  かつ  $\langle X, J \rangle = 0 \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^d x_i x_i^\top$  ( $x_i \in \ker L_{\omega^*} \cap \ker J$ ) と表現可能.
- 超安定性条件 (ii) より  $\dim \ker L_{\omega^*} = d + 1$  であり、 $\mathbf{1} \in L_{\omega^*}$  であることから、 $\dim(\ker L_{\omega^*} \cap \ker J) = d$ .
- 補題 1.8 より  $PL_{\omega^*} = 0$  かつ  $P\mathbf{1} = 0$  なので、観察 2 より、 $P$  の行ベクトル集合は  $\ker L_{\omega^*} \cap \ker J$  の基底.
- よってある  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  が存在し、 $(x_1 \dots x_d) = P^\top A^\top$ . つまり  $X = P^\top A^\top A P$ .

♣: •  $X$  を任意の実行可能解とすると、観察 1 と観察 3 より  $X = (AP)^\top A P$  と表すことができる.

- 観察 1 より、各  $ij \in E$  に対し、

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle - \langle P^\top P, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \\ &= \langle P^\top (A^\top A - I_d) P, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle \\ &= (p_i - p_j)^\top (A^\top A - I_d) (p_i - p_j). \end{aligned}$$

- Connelly の錐条件より  $A^\top A - I_d = 0$ . すなわち  $X = P^\top P$ . □

## 1.6 いろいろコメント

- 定理 1.11 は凸最適化の双対性を解釈することによって、比較的容易に得られた。テンセグリティの設計問題において真に難しいのは、超安定性条件を満たすテンセグリティを設計することである。実際、1次元においても様々な問題が未解決である [20].

演習問題 2. 超安定的な 1次元テンセグリティを構成してみよ。

演習問題 3. 1次元テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  の普遍剛性は、符号グラフ  $(G, \sigma)$  と直線上の点順序のみに依存する。この主張が事実であるかを考察せよ。

演習問題 4.  $G$  が弦グラフの場合、フレームワーク  $(G, p)$  の普遍剛性を考察せよ。

- 定理 1.12 の証明の議論は、そのまま一般の SDP へ適用可能である。

演習問題 5. 定理 1.12 の一般化を考察せよ。

- これまでの議論に、Browin and Wolkowicz [2] による面的縮小法のアイデアを応用することによって、SDP 判定問題が唯一の解を有するための必要十分条件を導出することが可能である。詳しくは [11, 29].
- $p$  が generic でかつ全ての部材が棒材ならば、実は定理 1.11 の逆が成立つ [13]. この事実がテンセグリティに対して成立するかは重要な未解決問題である。
- $p$  が generic ならば、同様な階数条件で、フレームワーク (全ての部材が棒材) の大域剛性が特徴づけられることが知られている。

定理 1.13 (Gortler, Healy, and Thurston [12]).  $d$ 次元フレームワーク  $(G, p)$  が大域的に剛である必要十分条件は  $G$  が完全グラフまたは  $\text{rank } L_\omega = n - d - 1$  を満たす自己応力  $\omega$  を有することである。

しかしながらテンセグリティの大域剛性に関しては、定理 1.11 以上のことは殆ど知られていない。

- 2次元フレームワークの大域剛性に関してはさらに簡潔なグラフ理論的特徴づけが知られている [19]. 3次元フレームワークに対して、対応する定理を導出することは重要な未解決問題である。詳しくは [28].

## 2 Cauchy の多面体剛性定理

### 2.1 コーシーポリゴン

Cauchy の剛性定理の証明にむけ、ここでは以下のテンセグリティの族が超安定的であることを示す。

定義 2.1.  $n \geq 4$  に対し、以下の 2次元テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  をコーシーポリゴンと呼ぶ。

- $G = (V, E)$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$ ,  $E = C \cup S$ ,  $C = \{\{i, i+1\} : i = 1, \dots, n\}$  (ただし  $n+1 = 1$ ),  $S = \{\{i, i+2\} : i = 1, \dots, n-2\}$ ;
- $\forall e \in C, \sigma(e) = +, \forall e \in S, \sigma(e) = -$ ;
- $p_1, \dots, p_n$  は添字順に強凸配置 (つまり凸包が  $n$  点凸多角形で,  $p_1, \dots, p_n$  が順に頂点.)

演習問題 6. 4 頂点のコーシーポリゴンが超安定的であることを証明しなさい。

また同じグラフ (4 頂点の完全グラフ) で異なる符号関数や頂点配置の 2次元テンセグリティが考えられるが、それらのテンセグリティの超安定性に関して考察しなさい。

定理 2.2.  $n \geq 4$  の時、コーシーポリゴンは超安定的。

証明.  $n$  に関する帰納法.  $n = 4$  は演習問題 6. 以下では  $n \geq 5$  の場合のコーシーポリゴン  $(G, \sigma, p)$  を考える。補題 1.12 より、 $(G, \sigma, p)$  が超安定化応力を有することを証明すれば良い。

$p_1, \dots, p_{n-2}, p_n$  上の  $(n-1)$  頂点コーシーポリゴンを  $(H_1, \sigma_1, p_1)$  とし、 $p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$  の 4 点上のコーシーポリゴンを  $(H_2, \sigma_2, p_2)$  とする。ここで  $V(H_1) = \{1, \dots, n-2, n\}$ ,  $V(H_2) = \{n-3, n-2, n-1, n\}$ . 帰納法の仮定よりそれぞれ超安定的であるので、それぞれの超安定化応力  $\omega_1$  と  $\omega_2$  をとってくる。超安定化応力を正の実数倍しても超安定化応力であり、 $p_{n-3}p_n$  は  $(H_1, \sigma_1, p_1)$  においてストラット、 $(H_2, \sigma_2, p_2)$  においてケーブルなので、

$$\omega_1(\{n-3, n\}) + \omega_2(\{n-3, n\}) = 0 \quad (1)$$

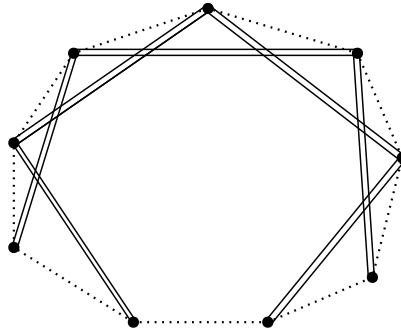


Figure 1: 9 頂点のコーシーポリゴン.

と仮定して良い.

$H_1$  に点 " $n-1$ " を孤立点として加えることで,  $(H_1, \sigma_1, p_1)$  を  $n$  頂点上の (非連結な) テンセグリティとみなすことができ, この時  $L_{\omega_1}$  は大きさ  $n$ , 階数  $(n-1)-3$  の半正定値行列である. 同様に  $H_2$  に頂点  $1, 2, \dots, n-4$  を孤立点と加えることで,  $(H_2, \sigma_2, p_2)$  を  $n$  頂点上の (非連結な) テンセグリティとみなすことができこの時  $L_{\omega_2}$  は大きさ  $n$ , 階数  $1$  の半正定値行列である.

$L := L_{\omega_1} + L_{\omega_2}$  を考える. (1) より, この第  $(n-3, n)$  要素はゼロである. さらに第  $(n-2, n)$  要素は負である.

- 仮に第  $(n-2, n)$  要素が非負と仮定しよう. コーシーポリゴン  $(G, \sigma, p)$  のストラット  $p_{n-2}p_n$  をケーブルに変更したテンセグリティを考えると,  $L$  はこのテンセグリティのある自己応力  $\omega'$  に対するラプラシアンになっている. このテンセグリティでは  $p_n$  はケーブルのみに接続しており, 頂点配置が凸配置であることから, 自己応力釣合条件によって  $p_n$  に接しているケーブルに応力は働いていないことがわかる. しかし  $L$  の構成法より明らかに  $L$  の  $n$  列目に非ゼロ要素が存在し, 点  $p_n$  周りに応力が働いているため矛盾する.

このことから  $L$  は  $(G, \sigma, p)$  の自己応力  $\omega$  に対するラプラシアンになっている.  $L_{\omega_1}, L_{\omega_2}$  共に半正定値であることから,  $L_{\omega}$  は半正定値. また  $L_{\omega_1}, L_{\omega_2}$  共に半正定値であることから,  $\ker L_{\omega} = \ker L_{\omega_1} \cap \ker L_{\omega_2}$ . よって  $\dim \ker L_{\omega} = \dim \ker L_{\omega_1} \cap \ker L_{\omega_2} = \dim \ker L_{\omega_1} + \dim \ker L_{\omega_2} - \dim(\ker L_{\omega_1} + \ker L_{\omega_2}) = 4 + (n-1) - n = 3$ .

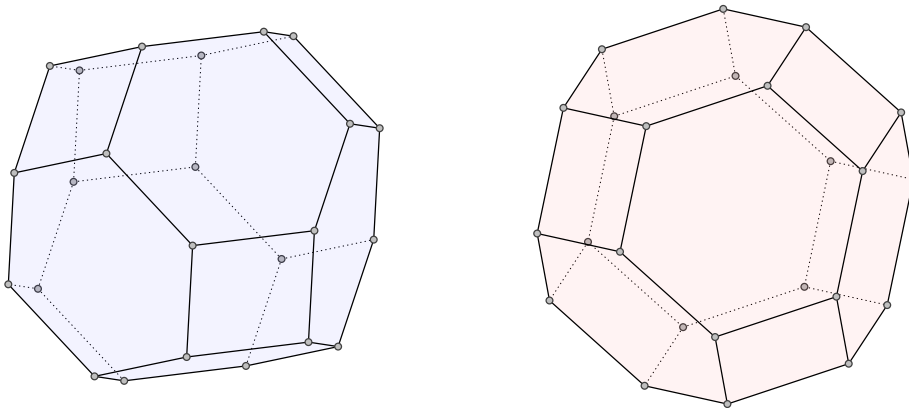
- ここで  $\dim(\ker L_{\omega_1} + \ker L_{\omega_2}) = n$  は以下のように示すことができる.  $\dim \ker L_{\omega_2} = n-1$  であるので,  $\ker L_{\omega_1} \setminus \ker L_{\omega_2} \neq \{0\}$  を示せば良い.  $(0, \dots, 0, 1, 0)^T \in \ker L_{\omega_1}$  であるが,  $(0, \dots, 0, 1, 0)^T \in \ker L_{\omega_2}$  ならば  $p_{n-3}, p_{n-2}, p_n$  がアフィン従属となり, 強凸性の仮定に反する.

よって  $\text{rank } L_{\omega} = n-3$  であり,  $\omega$  は超安定化応力である. □

## 2.2 コーシーの定理

Connelly[7] によって提唱された超安定性の概念はコーシーの剛性定理の別証明を与えるために導入された道具である.

**定理 2.3** (コーシーの剛性定理 [3]). 3次元ユークリッド空間内の凸多面体  $P, Q$  のグラフが同型であり, 対応する面が合同ならば  $P$  と  $Q$  は合同である.



証明は組合せ的部分と幾何的部分から構成されており、幾何的部分の鍵となる補題がコーシーポリゴンの超安定性である (定理 2.2)。よって残すは組合せ的部分である。

凸多面体  $P$  のグラフ  $G = (V, E)$  に関して、符号関数  $\sigma : E \rightarrow \{+, 0, -\}$  を考える。すべての頂点において  $\sigma(v) = 0$  ならば  $\sigma$  を自明な符号関数と呼ぶ。非自明な場合、 $+$  または  $-$  の符号を持つ辺の集合によって誘導されるグラフを  $G_\sigma$  と書く。頂点  $v \in V$  に接続する  $G_\sigma$  の辺集合を  $v$  周り順に 1 周辿った際、符号の変化回数を  $\text{index}(v)$  と書くことにする。

**補題 2.4.** 任意の凸多面体のグラフ  $G = (V, E)$  と符号関数  $\sigma : E \rightarrow \{+, 0, -\}$  に対して、 $\text{index}(v) \leq 2$  となる  $G_\sigma$  の頂点  $v$  が存在する。

**証明.**  $G_\sigma$  は平面的であり、ある平面描画における頂点、辺、面の個数を  $n, m, f$  とする。また大きさ  $i$  の面の個数を  $f_i$  とする。オイラーの式より、 $m + 2 = n + f$  であり、また  $f = \sum_{i \geq 3} f_i$  と  $2m = \sum_{i \geq 3} i f_i$  が成り立つので、 $\sum_{i \geq 3} (i - 2) f_i = 2n - 4$  が得られる。

各面の境界辺をたどって一周した際、符号の変化を調べることで以下が得られる。 $\sum_v \text{index}(v) = \sum_{i \geq 3: \text{奇数}} (i - 1) f_i + \sum_{i \geq 3: \text{偶数}} i f_i \leq \sum_{i \geq 3} 2(i - 2) f_i = 4n - 8$ 。よって  $\text{index}$  の平均値は 4 より小さいので、 $\text{index}(v) \leq 3$  となる頂点  $v$  が存在するが、 $\text{index}$  は常に偶数なので  $\text{index}(v) \leq 2$  が成り立つ。□

コーシーの剛性定理の証明。背理法で示す。

- 3次元ユークリッド空間内の凸多面体  $P, Q$  において、グラフが同型かつ対応する面が合同であるが、 $P$  と  $Q$  が合同でないと仮定する。
- $P$  の各辺  $e$  において接する 2 つの面の角度が、 $Q$  における対応する角度より大きい/同じ/小さい場合  $\sigma(e) = +/0/-$  と符号を割り当てる。
- $P$  と  $Q$  は合同でないが、対応する各面が合同であることから  $\sigma$  は非自明。
- 補題 2.4 より、 $\text{index}(v) \leq 2$  を満たす  $v \in V(G_\sigma)$  が存在。
- $v$  とその他の頂点を分離する平面  $H$  を適当にとってくる。  $C^P = H \cap P$  は凸多角形。
- 各面が合同であることから、 $Q$  上で  $C^P$  に対応するサイクル  $C^Q$  をとってくることができる。
- $\text{index}(v) = 0$  のとき。
  - $P$  と  $Q$  の対称性より、 $v$  は  $+$  or  $0$  符号の辺のみと接していると仮定して良い。
  - $C^P$  の頂点からなるコーシーポリゴンを考える。
  - このコーシーポリゴンは超安定的であることから、 $C^P$  と  $C^Q$  は合同であることがわかり、 $v$  周りの角度の変化がないことがわかる。しかしこれは  $v \in V(G_\sigma)$  に矛盾する。
- $\text{index}(v) = 2$  のとき。
  - $\text{index}(v) = 2$  であることから  $C^P$  を 2 つの (凸な) パスでかつ、一方のパス  $C_+^P$  では符号が  $+$  or  $0$  のみ、もう一方のパス  $C_-^P$  では符号が  $-$  or  $0$  のみとなるように分解できる。
  - これらのパスの端点を  $a, b$  とする。これらのパスの頂点上のコーシーポリゴンを考える。
  - コーシーポリゴンの超安定性から  $C_+^P$  においては  $a, b$  の距離は小さくならない。
  - $P$  と  $Q$  の対称性より、 $a, b$  の距離は大きくならないこともわかる。
  - コーシーポリゴンの超安定性より、 $C_+^P$  は変形していないことがわかる。
  - よって  $\text{index}(v) = 0$  となり矛盾。

□

**演習問題 7 (Dehn の定理).** 3次元ユークリッド空間内の凸多面体のスケルトンをフレームワークとみなした際、このフレームワークに非ゼロ自己応力が存在しないことを示せ。



### 3 球面テンセグリティの応力

球面テンセグリティとは、グラフ  $G = (V, E)$ ，符号関数  $\sigma : E \rightarrow \{-, 0, +\}$ ， $p : V \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$  の三つ組  $(G, \sigma, p)$  と定義される。球面テンセグリティに対しても、球面距離  $\arccos \langle x, y \rangle$  を用いて、剛性などの概念が自然に定義される。この際、球面上でのグラフ実現問題は、重み付の符号グラフ  $(G, \sigma, c)$  に対し、

$$\langle p_i, p_j \rangle - c_{ij} \begin{cases} \geq 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ = 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ \leq 0 & (ij \in E, \sigma(ij) = -) \end{cases}$$

を満たす  $p : V \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$  を求める問題である。ユークリッド空間の場合と同様に、この問題は階数制約付き半正定値計画問題と定式化され、その緩和問題は

$$\begin{aligned} & \max && 0 \\ & \text{subject to} && \langle X, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top \rangle \geq c_{ij} \quad (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ & && \langle X, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top \rangle = c_{ij} \quad (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ & && \langle X, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top \rangle \leq c_{ij} \quad (ij \in E, \sigma(ij) = -) \\ & && \langle X, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \rangle = 1 \quad (i \in V) \\ & && X \succeq 0 \end{aligned}$$

と記述される。この問題は(符号制約付き)半正定値行列補完問題として広く知られる問題である。この問題の双対問題は

$$\begin{aligned} & \min && \sum_{i \in V} \omega_i + \sum_{ij \in E} \omega_{ij} c_{ij} \\ & \text{subject to} && \sum_{i \in V} \omega_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top + \sum_{ij \in E} \omega_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\top) \succeq 0 \\ & && \omega_{ij} \geq 0 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = +) \\ & && \omega_{ij} \in \mathbb{R} \quad (ij \in E, \sigma(ij) = 0) \\ & && \omega_{ij} \leq 0 \quad (ij \in E, \sigma(ij) = -) \end{aligned}$$

となり、 $A_\omega := \sum_{i \in V} \omega_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top + \sum_{ij \in E} \omega_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\top)$  は  $G$  の重み付隣接行列である。

ここから球面テンセグリティ  $(G, \sigma, p)$  上での  $\omega : V \cup E \rightarrow \mathbb{R}$  の釣合条件は

$$\omega(i)p(i) + \sum_{j:j \sim i} \omega(ij)p(j) = 0 \quad (i \in V)$$

と定義すれば良いことがわかる。よって、この釣合条件と符号条件を満たす  $\omega : V \cup E \rightarrow \mathbb{R}$  を球面自己応力と呼ぶ。実際、以下の対応関係が成立している。

**演習問題 8.**  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$  を

$$\psi : x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

と定義する。 $d$  次元フレームワーク  $(G, p)$  に対し、 $(G, \sigma, p)$  の(ユークリッド)自己応力空間と  $(G, \psi \circ p)$  の球面自己応力空間は線形同型であることを証明せよ。

さらに定理 1.11 の議論によって以下が成立することがわかる [21].

**定理 3.1.**  $(G, \sigma, p)$  を  $(d-1)$  次元球面テンセグリティとし、 $c_{ij} = \langle p_i, p_j \rangle$  とする。以下を満たす球面自己応力  $\omega$  が存在する時、対応する半正定値行列補完問題の解は唯一に定まる。

- (i)  $\forall ij \in E, \omega_{ij} \neq 0$
- (ii)  $\dim \ker A_\omega = d$
- (iii)  $A_\omega \succeq 0$
- (iv)  $p_i^\top S p_i = 0$  ( $i \in V$ ) と  $p_i^\top S p_j = 0$  ( $ij \in E$ ) を満たす非ゼロ対称行列  $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$  は存在しない。(球面上錐条件)

実は、定理 3.1 の条件 (iv) が Colin de Verdière 数において重要な役割を果たしている。

## 4 Colin de Verdière 数

### 4.1 Colin de Verdière 数とは

$\mathcal{A}(G)$  を  $G$  の重み付隣接行列の集合とする. グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $G$  に辺重みを与えることで, 指定されたスペクトルを有する隣接行列が構成可能かを調べたい. (つまり  $\mathcal{A}(G)$  内の行列の固有値の上下限値や重複度などを調べたい.) ここでは, 以下の特殊な符号制約付きの場合を考える:

$$\mathcal{A}^-(G) = \left\{ A \in \mathcal{S}_n : \begin{array}{l} A[i, j] \in \mathbb{R} \ (i = j) \\ A[i, j] < 0 \ (ij \in E) \\ A[i, j] = 0 \ (\text{otherwise}) \end{array} \right\}.$$

Perron-Frobenius の定理<sup>2</sup>により,  $A \in \mathcal{A}^-(G)$  の最小固有値の重複度は 1 である.

では第二 (最小) 固有値の重複度がどの程度大きくなるかを解析してみよう. 対角行列を適当に加えることで,  $A$  の負固有値数が丁度一つでかつ第二固有値が 0 の場合を考えれば十分であることがわかる. つまりグラフパラメータ  $\mu_0(G) = \max\{\dim \ker A : A \in \mathcal{A}^-(G), \text{負固有値数が } 1\}$  を解析することによって第二固有値の重複度の最大値がわかる.

一般にこの  $\mu_0(G)$  を見積もることは非常に困難であることが知られている. しかしながら次の *Strong Arnold 性 (SAP)* と呼ばれる条件を課すことで, 第二固有値の重複度が非常に良い振る舞いをみせることが Colin de Verdière によって発見された.

**定義 4.1.** 以下の性質を  $A \in \mathcal{A}(G)$  の *Strong Arnold 性 (SAP)* と呼ぶ:

$$S[i, i] = 0 \ (\forall i \in V), \ S[i, j] = 0 \ (\forall ij \in E), \ AS = 0 \ \text{の 3 条件を満たす非ゼロ対称行列 } S \in \mathbb{R}^{n \times n} \ \text{が存在しない.}$$

**定義 4.2.**  $A \in \mathcal{A}^-(G)$  が負固有値数が 1 でかつ SAP を有する時,  $A$  は  $G$  の *Colin de Verdière 行列* と呼ぶ.  $G$  の *Colin de Verdière 数* を

$$\mu(G) = \max\{\dim \ker A : G \text{ の Colin de Verdière 行列 } A\}$$

と定義する.

つまり

$$\mu(G) = \max \left\{ \dim \ker A : \begin{array}{l} A[i, j] \in \mathbb{R} \ (i = j) \\ A[i, j] < 0 \ (ij \in E) \\ A[i, j] = 0 \ (\text{otherwise}) \\ \text{負固有値数が } 1 \\ \text{SAP} \end{array} \right\}$$

**定理 4.3** (Colin de Verdière[6]).  $H$  が  $G$  のマイナーなら,  $\mu(H) \leq \mu(G)$ .

**定理 4.4.**  $G$  をグラフとする.

- (i)  $\mu(G) \leq 1 \Leftrightarrow G$  が素なパスの和 [6].
- (ii)  $\mu(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$  が外平面的 [6].
- (iii)  $\mu(G) \leq 3 \Leftrightarrow G$  が平面的 [6].
- (iv)  $\mu(G) \leq 4 \Leftrightarrow G$  は  $\mathbb{R}^3$  へのリンクなし埋込可能 [25].

### 4.2 例

$\mu(K_n) = n - 1$ :  $-J_n \in \mathcal{A}^-(K_n)$  かつ  $-J_n$  はただ一つの負固有値を有する. また  $K_n$  に対しては SAP が自明に成立するので,  $\mu(K_n) \geq \dim \ker -J_n = n - 1$ . 定義より  $\mu(K_n) \leq n - 1$  なので  $\mu(K_n) = n - 1$  が成り立つ.

また定理 4.3 より,  $E(G) \neq \emptyset$  ならば  $\mu(G) \geq 1$  となる.

<sup>2</sup>隣接行列に対する **Perron-Frobenius** の定理.  $A$  を正の辺重み付き連結グラフの隣接行列とし,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$  を  $A$  の固有値とする. この時, 以下が成り立つ.

- (i)  $\mu_1 > \mu_2$ .
- (ii)  $\mu_1 \geq |\mu_n|$ .
- (iii)  $\mu_1$  に対し, 各要素が正の固有ベクトルが存在.

$\mu(K_{1,3}) = 2$ : 以下の行列  $A$  は  $\mathcal{A}^-(K_{1,3})$  内に属し, 符号数が  $(1, 1, 2)$  である:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SAP を満たすことを確認するために, 任意の

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & 0 & c \\ 0 & b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

をとってこよう. すると  $AX = 0$  から,  $a + b = 0, b + c = 0, c + a = 0$  が得られ,  $a = b = c = 0$  となる. よって SAP が成り立ち,  $\mu(K_{1,3}) \geq 2$  が成立する.

$\mu(K_{1,3}) = 2$  を示すために  $\mu(K_{1,3}) \geq 3$  と仮定する. その証拠を  $B$  とする. 次数 3 の点を 1, その他の点を 2, 3, 4 とすると,  $\dim \ker B \geq 3$  であることから  $\ker B$  内に  $x_2 = x_3 = 0$  となる非ゼロ  $x \in \ker B$  が存在する. 頂点 3 における釣合条件  $B_{3,3}x_3 + B_{1,3}x_1 = 0$  より  $x_1 = 0$  が得られる. さらに頂点 1 における釣合条件  $\sum_{i=1}^4 B_{1,i}x_i = 0$  より  $x_4 = 0$  が得られる. よって  $x = 0$  が得られ,  $x \neq 0$  に矛盾する.

$\mu(K_{n,m}) = n+m-2$  ( $n, m \leq 3$ ): 上記の議論は  $n, m \leq 3$  の範囲ならば拡張可能である. 実際  $A = \begin{pmatrix} 0 & -J_{n,m} \\ -J_{m,n} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^-(K_{n,m})$  は符号数が  $(1, 1, n+m-2)$  であり,  $n \leq 3, m \leq 3$  ならば SAP が成立することが確認できる. よって  $\mu(K_{n,m}) \geq n+m-2$  である. また同様な議論で  $\mu(K_{n,m}) \leq n+m-2$  を示すことができ,  $n \leq 3, m \leq 3$  ならば  $\mu(K_{n,m}) \geq n+m-2$  となる.  
 $n > 3$  または  $m > 3$  の時は,  $\mu(K_{n,m}) = \min\{n, m\} + 1$  となることが知られている.

### 4.3 SAP

SAP にはいくつかの等価な特徴づけが存在する.

階数  $n-d$  の  $A \in \mathcal{A}(G)$  に対し,  $\ker A$  の基底から  $p: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  が自然に定まる. (つまり  $P$  の行ベクトル集合が  $\ker A$  の基底.) このようにして得られる  $(G, p)$  を  $G$  の  $A$  に対する *kernel 表現* と呼ぶ.

$\mathcal{S}_{n,k}$  を階数  $k$  の  $n \times n$  行列の集合とする.  $\mathcal{S}_{n,k}$  は  $\mathcal{S}_n$  内の滑らかな多様体である. 一方で  $G$  の重み付き隣接行列の集合  $\mathcal{A}(G)$  は  $\mathcal{S}_n$  内の線形部分空間である.

**補題 4.5.**  $G$  を  $n$  頂点グラフとすると,  $A \in \mathcal{A}(G) \cap \mathcal{S}_{n,n-d}$  に対し以下が同値:

- (i)  $A$  は SAP を有する;
- (ii)  $\mathcal{S}_{n,n-d}$  と  $\mathcal{A}(G)$  が  $A$  において横断的に交わる<sup>3</sup>;
- (iii)  $G$  の  $A$  に対する kernel 表現  $(G, p)$  が球面錐条件 (定理 3.1 の条件 (iv)) を満たす.

**証明.** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): 滑らかな多様体  $M$  に対し, 点  $x$  での法空間を  $N_x M$  と表す.

$$N_A \mathcal{A}(G) = \{S \in \mathcal{S}_n : S[i, i] = 0 (\forall i \in V), S[i, j] = 0 (\forall ij \in E)\}$$

$$N_A \mathcal{S}_{n,n-k} = \{S \in \mathcal{S}_n : AS = 0\}$$

である<sup>4</sup>.  $T_A \mathcal{A}(G) + T_A \mathcal{S}_{n,n-k} = \mathcal{S}_n$  となる必要十分条件は  $N_A \mathcal{A}(G) \cap N_A \mathcal{S}_{n,n-k} = \{0\}$  であることから, (ii) が成立する必要十分条件は「 $S \in N_A \mathcal{A}(G) \cap N_A \mathcal{S}_{n,n-k} \Rightarrow S = 0$ 」, すなわち  $A$  が SAP を有することである.

<sup>3</sup> $\mathbb{R}^m$  内の滑らかな多様体  $M_1, M_2$  が  $x \in M_1 \cap M_2$  において横断的に交わる  $\Leftrightarrow T_x M_1 + T_x M_2 = \mathbb{R}^m$ . ここで  $T_x M_i$  は  $M_i$  の  $x$  での接空間.

<sup>4</sup>まず

$$T_A \mathcal{S}_{n,n-k} = \{AX^\top + XA : X \in \mathbb{R}^{n \times n}\} \quad (2)$$

に注意する. 実際, 行列  $A$  の符号数が  $\sigma = (a, b, k)$  の時,  $A = BI_\sigma B^\top$  とかける. ただし  $B$  は正則,  $I_\sigma$  は対角行列で初めの  $a$  個の対角成分が 1, 次の  $b$  個の対角成分が  $-1$ , 残りの対角成分が 0 の行列.  $\mathcal{S}_{n,k}$  内の  $A$  の (十分小さい) 近傍の行列は同じ符号数を有することから,  $B$  に十分近い  $B'$  を用いて  $B'I_\sigma B'^\top$  とかける. よって  $A$  への滑らかなパスは  $B_t I_\sigma B_t^\top$  と書け,  $t$  で微分して  $t = 0$  とおくと,  $BI_\sigma \dot{B}_0^\top + \dot{B}_0 I_\sigma B^\top = AB^\top \dot{B}_0^\top + \dot{B}_0 BA$  が得られる.  $\dot{B}_0^\top$  は任意の行列なので, (2) が成り立つ.

よって  $S \in N_A \mathcal{S}_{n,n-k} \Leftrightarrow \langle S, AX^\top + XA \rangle = 0 \forall X$  であるが,  $\langle S, AX^\top + XA \rangle = 2\langle S, XA \rangle = \text{tr}(SAX^\top)$  であるので, 後者は  $SA = 0$  と等価である.

(i)⇔(iii) 第  $i$  列が  $p_i$  の  $d \times n$  行列を  $P$  とする. 任意の  $S \in \mathcal{S}_n$  に対し,  $SA = 0$  となる必要十分条件は  $S = PXP^\top$  となる  $X \in \mathcal{S}_d$  が存在することである. そのような  $S$  の表現に対し,  $S_{ij} = 0 \Leftrightarrow \langle S, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\top \rangle = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle PXP^\top, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\top \rangle = p_i^\top X p_j + p_j^\top X p_i = 0$ . 同様な関係が対角成分に対しても成り立ち, (i) と (iii) の等価性が導かれる.  $\square$

重み付きラプラシアンに対し, 同様な解析を行うと, 以下のように Connolly の錐条件が導かれる.

**補題 4.6.**  $G$  を  $n$  頂点グラフとすると,  $L \in \mathcal{L}(G) \cap \mathcal{S}_{n-d-1}^n$  に対し以下が同値:

- (i)  $\forall S \in \mathcal{S}_n, X(L + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top) = 0$  and  $\langle X, (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^\top \rangle = 0$  ( $\forall ij \in E$ )  $\Rightarrow S = 0$ ;
- (ii)  $\mathcal{S}_{n,n-d-1}$  と  $\mathcal{L}(G) + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$  が  $L + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$  において横断的に交わる;
- (iii)  $G$  の  $L$  に対する kernel 表現  $(G, p)$  が Connolly の錐条件を満たす.

#### 4.4 定理 4.3 の証明

ここでの証明は [15] のアイデアに基づいている. 以下の補題を利用する.

**補題 4.7.**  $\mathbb{R}^n$  内の滑らかな部分多様体  $M_1, M_2, M_3$  に対し,  $M_1$  が  $M_2$  の余次元 1 以上の部分多様体であり,  $M_1$  と  $M_3$  が  $x \in M_1 \cap M_3$  において横断的に交わっているならば,  $M_2 \cap M_3$  内に  $\gamma(0) = x, \gamma(t) \notin M_1$  ( $t \neq 0$ ) を満たす滑らかなパス  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow M_2 \cap M_3$  が存在する.

辺削除の場合: グラフ  $G'$  が  $G$  から辺  $v_1 v_2$  を削除して得られるグラフとする.  $d = \mu(G')$  とし,  $A'$  を  $\mu(G')$  を与える行列とする.  $A' \in \mathcal{A}(G') \cap \mathcal{S}_{n,n-d}$  であり,  $\mathcal{A}(G')$  と  $\mathcal{S}_{n,n-d}$  は  $A'$  において横断的に交わる. また  $\mathcal{A}(G')$  は  $\mathcal{A}(G)$  の余次元 1 の部分空間である. よって補題 4.7 によって  $\mathcal{A}(G) \cap \mathcal{S}_{n,n-d}$  内の滑らかなパス  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathcal{A}(G) \cap \mathcal{S}_{n,n-d}$  で  $\gamma(0) = A'$  かつ  $\gamma(t) \notin \mathcal{A}(G')$  を満たすものをもってこれる.  $A_t = \gamma(t)$  とすると, 十分小さい  $t (\neq 0)$  では  $A_t$  (または  $A_{-t}$ ) が  $\mathcal{A}^-(G)$  に属し,  $A_t \in \mathcal{S}_{n,n-d}$  であるから  $A'$  と  $A_t$  の符号数は等しい. また SAP の条件は代数的であるから, 十分小さい  $t$  で  $A_t$  が SAP を満たすこともわかる. よって  $\mu(G) \geq \dim \ker A_t = d = \mu(G')$ .

辺縮約の場合: グラフ  $G'$  が  $G$  から辺  $v_1 v_2$  を縮約して得られるグラフとする.  $d = \mu(G')$  とし,  $A'$  を  $\mu(G')$  を与える行列とする.  $N_1 = N_G(v_1)$  とし,  $v_1 v_2$  を縮約して得られる頂点を簡単のため  $v_2$  と記す. 以下のように  $\mathcal{S}_{n-1} \times \mathbb{R}$  内の滑らかな部分多様体を定める:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{A}(G') \times \{0\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & v_2 & N_1 & V \setminus (N_1 \cup \{v_2\}) \\ B + & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon x x^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \end{array} \right), \epsilon \right\} : B \in \mathcal{A}(G'), x = B[v_2, N_1] \in \mathbb{R}^{|N_1|}, \epsilon \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{S}_{n-1, n-1-d} \times \mathbb{R}$$

$\mathcal{M}_1$  は  $\mathcal{M}_2$  の余次元 1 以上の部分多様体であり,  $A'$  の SAP から  $(A', 0) \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3$  が横断的に交わる. よって補題 4.7 によって  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3$  内の滑らかなパス  $\gamma$  で  $\gamma(0) = (A', 0)$  かつ  $\gamma(t) \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$  を満たすものをもってこれる. 定義より, 各  $t$  に対し,  $\gamma(t) = (A'_t, t)$  と表すことができる. ここで

$$A'_t = B_t + \begin{array}{ccc|ccc} & & & v_2 & N_1 & V \setminus (N_1 \cup \{v_2\}) \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t x_t x_t^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \end{array},$$

ただし  $B_t \in \mathcal{A}(G'), x_t = B_t[v_2, N_1]$ .  $\gamma(t) \in \mathcal{M}_3$  より,  $t$  が十分に小さいならば  $A'_t$  の符号数は  $A'$  の符号数と一致している.

今  $A'_t$  から部分行列  $A'_t[v_2, N_1]$  (とその対称な部分行列) をゼロに置き換えた行列を  $A_t^o$  とする. すると  $A_t^o$  は以下の  $n \times n$  行列  $A_t$  の左上  $1 \times 1$  ブロックに対する Schur 補元である:

$$A_t := \begin{array}{cc|cc} & & v_1 & V(G) \setminus \{v_1\} \\ v_1 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_t^o \end{bmatrix} & \end{array} + \begin{array}{ccc|cc} v_1 & v_2 & N_1 & & \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{t} & x_t^\top & 0 & 0 \\ -\frac{1}{t} & \frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 \\ x_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

よって Haynsworth の式より,  $t > 0$  の時,  $A_t$  の符号数は  $(n-d-1, 1, d)$  となっている. さらに  $A_t^o$  の定義より, ある  $G$  の部分グラフ  $H$  に対し,  $A_t \in \mathcal{A}^-(H)$  が確認できる. また十分小さな  $t$  においては  $A_t$  が SAP を有することが,  $A'_t$  の SAP と補題 4.5 から確認できる. よって  $\mu(G) \geq \mu(H) \geq \dim \ker A_t = d = \mu(G')$  が成立する.

## 4.5 定理 4.4(iii) の証明

ここでの証明は [14] に基づいている。

$x \in \mathbb{R}^V$  に対し,  $\text{supp}^+(x) = \{i \in V : x_i > 0\}$ ,  $\text{supp}^-(x) = \{i \in V : x_i < 0\}$ ,  $\text{supp}^0(x) = \{i \in V : x_i = 0\}$ ,  $\text{supp}(x) = \text{supp}^+(x) \cup \text{supp}^-(x)$  と定義。

**補題 4.8.**  $A \in \mathcal{A}^-(G)$  の負固有値数が 1 ならば, 任意の  $x \in \ker A$  に対し, 以下のいずれかが成り立つ。

- (i)  $\text{supp}^+(x)$  と  $\text{supp}^-(x)$  がそれぞれ連結。
- (ii)  $\text{supp}(x)$  の連結成分を  $H_1, \dots, H_k$  とすると, 各  $H_i$  は  $\text{supp}^+(x)$  または  $\text{supp}^-(x)$  のいずれかに属し,  $N_G(V(H_i)) \cap \text{supp}^0(x) = N_G(V(H_j)) \cap \text{supp}^0(x)$  が成立。

**証明.**  $z$  を負固有値に対する固有ベクトルとする。すると  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  が  $y \in \ker A$  となる必要十分条件は  $y \cdot z = 0$  かつ  $y^\top A y \leq 0$  が成立することに注意しておく。(レイリー商による特徴付より。) まずは以下の主張を証明しておく。

**主張 4.9.**  $\text{supp}^+(x)$  が異なる連結成分  $I, J$  を持つとする。この時,  $y \in \mathbb{R}^n$  を

$$\begin{aligned} y_I &:= x_I \\ y_J &:= -\frac{z_I \cdot x_I}{z_J \cdot x_J} x_J \\ y_{V \setminus (I \cup J)} &:= 0 \end{aligned}$$

と定義してやると  $y \in \ker A$ 。

**証明.** 定義より  $z \cdot y = 0$  が容易に確認できる。さらに  $K = \text{supp}^-(x)$  とおくと,  $Ax = 0$  であることから  $A_{I,I}x_I + A_{I,K}x_K = 0$  と  $A_{J,J}x_J + A_{J,K}x_K = 0$  が成立しているため,  $y^\top A y = y_I^\top A_{I,I}y_I + y_J^\top A_{J,J}y_J = -x_I^\top A_{I,K}x_K - \lambda^2 x_J^\top A_{J,K}x_K \leq 0$ .  $\square$

補題を証明するために, (i) が成り立たず,  $\text{supp}^+(x)$  の連結成分数が 2 以上と仮定する。すると

$$\text{supp}^+(x) \text{ と } \text{supp}^-(x) \text{ を結ぶ辺が存在しない。} \quad (3)$$

実際, そのような辺  $uv$  が存在し,  $u$  が  $\text{supp}^+(x)$  の連結成分  $I$  に属するとすると,  $\text{supp}^+(x)$  の別の連結成分  $J$  をとって, 主張の  $y$  を利用して,  $x - y$  を考える。  $x - y \in \ker A$  であり, 各点で釣合条件が成立しているが,  $u \in \text{supp}^0(x - y)$  かつ  $u$  は  $v \in \text{supp}^-(x - y)$  と接し  $\text{supp}^+(x - y)$  の点とは接していないことから, 釣合条件を満たすことができない。よって (3) が成立する。

(3) から (ii) の前半部分が成立することがわかった。  $\text{supp}(x)$  内の任意の連結成分  $I, J$  に対し, (3) より  $A_{I,I}x_I = A_{J,J}x_J = 0$  が成立することがわかる。よって上記主張のように  $y$  を定義してやると,  $y \in \ker A$  であり, 各  $w \in \text{supp}^0(y)$  の釣合条件より  $N(H_i) \cap \text{supp}^0(x) = N(H_j) \cap \text{supp}^0(x)$  が成立していることがわかる。  $\square$

**補題 4.10.** もし  $G$  が 3 連結かつ  $K_{3,3}$  マイナーフリーならば補題 4.8 の (i) が成立する。

**証明.**  $x \in \ker A$  に対し, 補題 4.8(ii) が成立すると仮定。すると  $\text{supp}^+(x)$  と  $\text{supp}^-(x)$  間には辺がないが, Perron-Frobenius の定理より  $x$  の要素は全て正または全て負ではないので,  $\text{supp}^0(x)$  は非空な頂点分離である。よって 3 連結性より  $|V_0| \geq 3$  であり, 各  $H_i$  を 1 点に縮約したグラフを考えると,  $N_G(H_i) \cap \text{supp}^0(x) = N_G(H_j) \cap \text{supp}^0(x)$  から  $K_{3,3}$  マイナーが存在することがわかる。よって矛盾が導かれた。  $\square$

定理 4.4(iii) の証明。もし  $G$  が平面的でないならば, Kuratowski の定理より  $K_5$  または  $K_{3,3}$  マイナーが存在。  $\mu(K_5) = 4$  かつ  $\mu(K_{3,3}) = 4$  なので,  $\mu(G) \geq 4$  が定理 4.3 から従う。

もし  $G$  が平面的ならば, 定理 4.3 より  $G$  は極大平面グラフと仮定して良い。  $\mu(G) \geq 4$  と仮定し,  $A \in \mathcal{A}^-(G)$  をその証拠とする。

$G$  内の任意の三角形  $u, v, w$  をとってくる。  $\dim \ker A \geq 4$  なので,  $\ker A$  内に  $x_u = x_v = x_w = 0$  なる  $x$  が存在する。  $G$  の 3 連結性より各  $u, v, w$  から  $\text{supp}(x) \cap V \setminus \text{supp}(x)$  上で点素な 3 本のパス  $P_u, P_v, P_w$  が存在。  $u$  から  $P_u$  を辿って,  $\text{supp}(x)$  へ到達する直前の点を  $a$  とし,  $v, w$  に対しても同様に点  $b, c$  をとってくる。力の釣合条件より,  $a$  は  $\text{supp}^+(x)$  と  $\text{supp}^-(x)$  の両方と接している。  $b, c$  も同様である。

$G$  に新たに点  $s$  と辺  $su, sv, sw$  を加えたグラフを  $G'$  とすると,  $G'$  も平面的。しかしながら  $G'$  から  $\text{supp}^+(x)$  と  $\text{supp}^-(x)$  をそれぞれ縮約したグラフは  $K_{3,3}$  をマイナーとして含むことが容易に確認でき, 矛盾が導かれる。  $\square$

**演習問題 9.** 定理 4.4(i) を証明せよ。(ヒント:  $G$  が素なパスの和  $\Leftrightarrow G$  が  $K_{1,3}$  と  $K_3$  をマイナーとして含まない。)

**演習問題 10.** 定理 4.4(ii) を証明せよ。(ヒント:  $G$  が外平面的  $\Leftrightarrow G$  が  $K_{2,3}$  と  $K_4$  をマイナーとして含まない。)

## 5 $\nu(G)$ , グラフの横断的な直交表現, 実現可能次元

### 5.1 直交表現

グラフ  $G = (V, E)$  に対し,

$$\langle p_i, p_j \rangle = 0 \quad (ij \notin E, i \neq j)$$

を満たす  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  は,  $G$  の直交表現と呼ばれている. 任意のグラフが  $d = n$  の場合に直交表現を有することは自明であり, できるだけ小さい  $d$  に対する直交表現を得たい. 一方で  $p = 0$  の場合は避けたいことから, 何らかの一般性を条件として課すことが必要である. 例えば [24] では, いわゆる一般の配置 (どの  $d$  点も線型独立) の直交表現が可能であるための必要十分条件を導出している. ここでは, 横断性 (つまり SAP) を一般性の条件とし課した場合の直交表現について考えていきたい.

$G$  の  $d$  次元直交表現を求めることは,  $G$  の階数  $d$  の半正定値隣接行列を求めることと等価である. よって SAP を一般性の条件とした場合の直交表現最小次元は

$$\nu(G) := \max \left\{ \dim \ker A : \begin{array}{l} A \in \mathcal{A}(G) \\ A \succeq 0 \\ \text{SAP} \end{array} \right\}.$$

実はこのパラメータは,  $\mu(G)$  と同じような代数的パラメータで木幅と近い性質をもつものとして, Colin de Verdière[6] によって導入された.

Colin de Verdière[6] のオリジナルの定義では  $A[i, j] \neq 0$  ( $ij \in E$ ) が条件に含まれている. 上記定義の  $\nu(G)$  は, より簡潔な性質を有する変種として van der Holst [15] によって導入された  $\nu^=$  である. オリジナルのパラメータの解析に関しては [16] が詳しい.

定理 4.3 の証明法を適用することで以下を示すことができる.

**定理 5.1** (van der Holst[17]).  $H$  が  $G$  のマイナーならば,  $\nu(H) \leq \nu(G)$ .

**定理 5.2** (van der Holst[17]).  $G$  をグラフとする.

- (i)  $\nu(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$  は  $K_3$  をマイナーとして持たない.
- (ii)  $\nu(G) \leq 3 \Leftrightarrow G$  は  $K_4$  をマイナーとして持たない.
- (iii)  $\nu(G) \leq 4 \Leftrightarrow G$  は  $K_5$  と  $K_{2,2,2}$  をマイナーとして持たない.

### 5.2 実現可能次元

唐突だが, 次に  $d$  次元フレームワーク  $(G, p)$  の低次元への折り畳み問題を考えてみよう. つまり入力  $G = (V, E)$  と  $p : V \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対し,

$$\|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\| \quad (ij \in E)$$

を満たす  $q : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  ( $k < d$ ) の存在性を判定したい. この問題を動機として, Belk and Connelly[1] は以下の実現可能次元と呼ばれるグラフパラメータ  $\text{rd}(G)$  を導入した.

$$\text{rd}(G) := \min\{d : \text{任意の } n \text{ 次元フレームワーク } (G, p) \text{ が } d \text{ 次元空間へ折り畳み可能}\}.$$

ここで  $n = |V(G)|$ . Belk and Connelly は [1] において,  $k \leq 3$  の場合に対し  $\text{rd}(G) \leq k$  となるグラフ  $G$  の特徴付を与えた. それらの組合せ的条件は定理 5.2 のものと一致しており (つまり  $\text{rd}(G) = \nu(G) - 1$ ), 2つのパラメータ間に何かしらの関係があることが予想できる. 実際, 球面空間において同様のパラメータを定義することで, その関係が陽に現れる. つまり球面距離を用いて,

$$\text{srd}(G) := \min\{d : \text{任意の } n \text{ 次元球面フレームワーク } (G, p) \text{ が } (d-1) \text{ 次元球面へ折り畳み可能}\}$$

と定義すると, SDP 双対性, 補題 4.5, 定理 3.1 より

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \max\{d \mid \exists A \in \mathcal{A}(G) : \dim \ker A = d, \text{SAP}\} \\ &= \max\{d \mid \exists p : V \rightarrow \mathbb{S}^{d-1} : (G, p) \text{ は球面超安定的}\} \\ &\leq \max\{d \mid \exists p : V \rightarrow \mathbb{S}^{d-1} : (G, p) \text{ は球面普遍剛}\} \\ &\leq \text{srd}(G) \end{aligned}$$

となる. Laurent と Varvitsiotis[22] によって,  $\text{srd}(G)$  の場合も同じ条件で  $\text{srd}(G)$  が特徴づけられることが証明されている. これらをまとめると以下ようになる.

**定理 5.3** (van der Holst[17], Belk and Connelly[1], Laurent and Varvitsiotis[22]).  $G$  をグラフとする.  $k \leq 3$  において,  $\nu(G) = \text{rd}(G) + 1 = \text{srd}(G)$ .

$\nu(G)$  と  $\text{srd}(G)$  の双対関係は, 定理 5.2 定理 5.3 を証明する際に有用である. 例えば定理 5.2(iii) の証明において,  $\nu(G)$  を下からおさえることは,  $K_5$  と  $K_{2,2,2}$  に対し行列  $A$  を提示すれば, あとはマイナー単調性より  $\{K_5, K_{2,2,2}\}$  マイナーフリーグラフの  $\nu$  の下限が得られる. 一方で, 上限を証明するのは  $\text{srd}(G)$  の方が容易である. van der Holst は  $\nu(G)$  の上限を示すために,  $\nu(G)$  の木幅との関係や  $k$ -sum 操作に対する挙動を調べたが, それらは幾何学的パラメータ  $\text{srd}(G)$  (または  $\text{rd}(G)$ ) に対してはほぼ自明に従い,  $\{K_5, K_{2,2,2}\}$  マイナーフリーグラフの構造定理を利用することで,  $\text{srd}(G) \leq 4$  が成立することも比較的容易に証明可能である.

$\nu(G), \text{srd}(G), \text{rd}(G)$  の正確な関係は未だ証明されていない.

要素に不等号条件を課すことで, 符号グラフに対してもパラメータ  $\nu$  を定義することができ, このパラメータは球面テンセグリティの実現可能次元と双対の関係になっている. 符号付グラフの構造の複雑性のために,  $\nu(G, \sigma) \leq 3$  (または  $\text{srd}(G, \sigma) \leq 3$ ) となる符号グラフの特徴付が既に未解決である.

## 参考文献

- [1] M. Belk and R. Connelly, Realizability of graphs, *Discrete Comput. Geom.*, 37, 125–137, 2007.
- [2] M. J. Borwein and H. Wolkowicz. Facial reduction for a cone-convex programming problem. *J. Aust. Math. Soc.*, 30:369–380 (1981)
- [3] A.L. Cauchy, Sur les polygones et polyedres, second memoire, *J. Ecole Polytechnique*, 1813.
- [4] Y. Colin de Verdière, Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 50 (1990) 11–21.
- [5] Y. Colin de Verdière, On a new graph invariant and a criterion for planarity, in: *Graph Structure Theory* (N. Robertson, P. Seymour, eds.), *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993, pp. 137–147
- [6] Y. Colin de Verdière. Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B.*, 74, 121–146, 1998.
- [7] R. Connelly, Rigidity and energy, *Invent. Math.*, 66:11–33 (1982)
- [8] Robert Connelly. Rigidity. In *Handbook of Convex Geometry*, pages 223–271. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [9] Robert Connelly. Questions, conjectures and remarks on globally rigid tensegrities, manuscript, November 2009.
- [10] Robert Connelly and Allen Back. Mathematics and Tensegrity. *American Scientist*, 86(2), 142–151, 1998.
- [11] R. Connelly and S. Gortler. Iterative universal rigidity. *Discrete Comput. Geom.*, 53:847–877 (2015)
- [12] S. Gortler, A. Healy, and D. Thurston, Characterizing generic global rigidity, *American J. Math.*, 132:897–939 (2010)
- [13] S. Gortler and D. Thurston, Characterizing the universal rigidity of generic frameworks, *Discrete Comput. Geom.*, 51:1017–1036 (2014)
- [14] H. van der Holst, A short proof of the planarity characterization of Colin de Verdière, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 65 (1995) 269–272
- [15] H. van der Holst. Topological and Spectral Graph Characterizations. PhD thesis, University of Amsterdam, 1996.
- [16] H. van der Holst. Graphs with magnetic Schrödinger operators of low corank. *J. Comb. Theory, Ser. B.*, 84, 311–339, 2002
- [17] H. van der Holst. Two tree-width-like graph invariants, *Combinatorica*, 23, 633–651, 2003.

- [18] H. van der Holst, L. Lovasz, and A. Schrijver, The Colin de Verdiere parameter. Graph theory and combinatorial biology, 29–85, Bolyai Soc. Math. Stud., 7, Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.
- [19] B. Jackson and T. Jordán, Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 94:1–29 (2005)
- [20] T. Jordán and V. H. Nguyen. On universally rigid frameworks on the line. EGRES technical reports Egerváry Research Group, Budapest, TR-2012-10, 2012.
- [21] M. Laurent and A. Varvitsiotis. Positive semidefinite matrix completion, universal rigidity and the strong Arnold property. *Linear Algebra Appl.*, 452, 292–317, 2014.
- [22] M. Laurent and A. Varvitsiotis. A new graph parameter related to bounded rank positive semidefinite matrix completions, *Math. Programm.*, 145, 291–325, 2014.
- [23] L. Lovász, Geometric representations of graphs, [www.cs.elte.hu/lovasz/geomrep.pdf](http://www.cs.elte.hu/lovasz/geomrep.pdf), 2016.
- [24] L. Lovász, M. Saks, and A. Schrijver, Orthogonal representations and connectivity of graphs, *Linear Alg. Appl.* 114/115, 439–454.
- [25] L. Lovász and A. Schrijver, A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 1275–1285, 1998.
- [26] Marcelo Pars, <http://www.tensegriteit.nl/e-simple.html>
- [27] A. So and Y. Ye, Theory of semidefinite programming for sensor network localization, *Math. Program.*, 109:367–384, 2007.
- [28] S. Tanigawa. Sufficient conditions for globally rigidity of graphs, *J. Comb. Theory Ser. B*, 113:123–140 (2015)
- [29] S. Tanigawa, Singularity degree of the positive semidefinite matrix completion problem, *SIAM J. Optim.*, 27, 986–1009, 2017.
- [30] Z. Zhu, A. Man-Cho So, and Y. Ye. Universal rigidity and edge sparsification for sensor network localization. *SIAM J. Optim.* 20, 3059–3081, 2010.