演習問題

以下の問題において記号や定義は講義スライドのものと同様である．

問題 1　所与の連続的微分可能な凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{VIP}(K, \nabla f)$ と制約つき最適化問題 “min $f(\boldsymbol{x})$ s.t. $\boldsymbol{x} \in K$” が等価である [*1] ことを示したい．以下の問題に答えよ．ただし，任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{\varepsilon \to 0} \big(f(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x})\big)/\varepsilon = \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{d}$ が成り立つことを用いてよい．

(1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を連続的微分可能な凸関数とする．このとき，任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $\nabla f(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})$ が成り立つことを示せ．

(2) $\operatorname*{argmin}_{x \in K} f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{SOL}(K, \nabla f)$ が成り立つことを示せ．

問題 2　所与の閉凸錐 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{VIP}(C, \boldsymbol{F})$ と錐相補性問題

$$\text{Find } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \boldsymbol{x} \in C,\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^*,\ \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$$

が等価であることを示せ．ただし，$C^* := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \geq 0\ (\forall \boldsymbol{y} \in C)\}$ は C の双対錐を表す．

問題 3　$K \subseteq \mathbb{R}^n$ を所与の空でない閉凸集合とし，$\Pi_K(\boldsymbol{x})$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合 K へのユークリッド射影とする（すなわち，$\Pi_K(\boldsymbol{x}) := \operatorname{argmin} \big\{ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \;\big|\; \boldsymbol{y} \in K \big\}$ である）．さらに，$\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$ および $\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nor}}(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{F}(\Pi_K(\boldsymbol{z})) + \boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z})$ とする．このとき，以下を示せ．

(1) 任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ および $\boldsymbol{x}' \in K$ に対して $(\boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z}))^\top (\boldsymbol{x}' - \Pi_K(\boldsymbol{z})) \leq 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F})$　を示せ．

(3) $\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nor}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} = \Pi_K(\boldsymbol{z}) \iff \boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F}),\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$　を示せ．

問題 4　単位開球を $B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$ とし，その閉包，すなわち単位閉球を $\mathrm{cl}\, B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ とする．また，$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を所与の連続関数とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, B$ に対して $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{cl}\, B$ が成り立つならば，$\boldsymbol{\Phi}$ は $\mathrm{cl}\, B$ 内に不動点 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*) \in \mathrm{cl}\, B$ をもつことを degree theory を用いて示したい．

(1) ホモトピー関数を $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) := \boldsymbol{x} - t\Phi(\boldsymbol{x})$ で定義する（ただし，$0 \leq t \leq 1$ である．）さらに，$\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{bd}\, B, [0,1])$ が成り立つとする．このとき，$\boldsymbol{\Phi}$ は $\mathrm{cl}\, B$ 内に不動点をもつことを示せ.（ヒント：このケースでは degree の性質は用いない.）

(2) $\boldsymbol{0} \notin \boldsymbol{H}(\mathrm{bd}\, B, [0,1])$ が成り立つとする．このとき，$\boldsymbol{\Phi}$ は $\mathrm{cl}\, B$ 内に不動点をもつことを示せ．

（注釈） 単位閉球 $\mathrm{cl}\, B$ を一般のコンパクト凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ で置き換えても上記の命題は成り立ち，これを Brouwer の不動点定理という．実際，任意のコンパクト凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ はある次元 $\ell \leq n$ の閉球と同相であることが知られているので，上記の結果より Brouwer の不動点定理を直ちに示すことができる．

[*1] 問題 A と問題 B が等価であるとは，問題 A の解集合と問題 B の解集合が一致することを意味する．以後の問題も同様．

問題 5　$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を所与の連続関数，$K \subseteq \mathbb{R}^n$ を所与の閉凸集合とし，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}} \in K$ に対して集合

$$L_<(\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}) := \left\{ \boldsymbol{x} \in K \;\middle|\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}) < 0 \right\}$$

を考える．このとき，$L_<(\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}) \cap \operatorname{bd}\Omega = \emptyset$ を満たすような有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}} \in K \cap \Omega$ が存在するならば，$\mathrm{VIP}(K, \boldsymbol{F})$ は解をもつことを背理法で示したい．次の問題に答えよ．(実際 (1) と (3) は講義スライドに記述があるので，実質的な設問は (2) のみ．)

(1) ホモトピー関数を $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) := \boldsymbol{x} - \Pi_K\big(t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) + (1-t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}\big)$ で定義する $(0 \le t \le 1)$．また，$\mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F}) = \emptyset$ であると仮定する．このとき，$\boldsymbol{0} \notin \boldsymbol{H}(\operatorname{bd}\Omega, 0)$ および $\boldsymbol{0} \notin \boldsymbol{H}(\operatorname{bd}\Omega, 1)$ が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $t \in (0,1)$ に対して $\boldsymbol{0} \notin \boldsymbol{H}(\operatorname{bd}\Omega, t)$ が成り立つことを示せ.（ヒント：問題 3 の (1) で示した射影の特性をどこかで使う.）

(3) $\mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F}) = \emptyset$ であると仮定すると，degree のホモトピー不変性より矛盾が導けることを確認せよ.

問題 6　講義で紹介した朝ラッシュモデルは以下のような線形相補性問題として定式化される.

$$\text{Find } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2NK+N} \text{ s.t. } \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \ge 0,$$

$$\text{where}\quad M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\boldsymbol{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu (I - L) & 0 \\ \hline \boldsymbol{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \boldsymbol{1}_K \otimes D_\mu \boldsymbol{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right].$$

ただし，$\otimes$ はクロネッカー積 [*2] を表しており，

$$\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{q} \\ \hline \boldsymbol{w} \\ \hline \boldsymbol{\rho} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2NK+N}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NK}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NK}, \quad \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^N,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \Delta_K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K}$$

および $D_\mu = \operatorname{diag}(\mu_1 \ldots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_K)^\top \in \mathbb{R}^K$, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_N)^\top \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_N)^\top \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{1}_K = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^K$, $\boldsymbol{1} = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^N$ である．また，$I_K \in \mathbb{R}^{K \times K}$ と $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ は単位行列である．このとき，上記の線形相補性問題は以下の変分不等式問題の KKT 条件と等価であることを確認せよ．（ヒント：所与の行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m$ を用いて $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) := A\boldsymbol{z} + \boldsymbol{t}$, $K := \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{0},\ -B\boldsymbol{z} + \boldsymbol{r} \ge \boldsymbol{0}\}$ としたときの VIP $(K, \boldsymbol{F})$ の KKT 条件を考えよ.）

$$\begin{aligned} &\text{Find}\quad (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \Omega \\ &\text{s.t.}\quad \sum_{k=1}^{K} D_\mu \boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{w})^\top (\boldsymbol{w}_k' - \boldsymbol{w}_k) - \boldsymbol{Q}^\top (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \ge 0 \quad \forall (\boldsymbol{w}', \boldsymbol{\rho}') \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{where}\quad \boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{w}) &:= \boldsymbol{1} + (I - L)(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_{k-1}) \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{w}_0 = 0) \\ \Omega &:= \left\{ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{NK+N} \;\middle|\; (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \ge \boldsymbol{0},\ p_k \boldsymbol{1} + L(\boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{\rho} \ge 0 \ \ (k = 1, \ldots, K) \right\}. \end{aligned}$$

[*2] 定義は wikipedia をご参照下さい.

解答

解答 1　(1) $\varepsilon \in (0,1)$ とすると，f の凸性より $f((1-\varepsilon)\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y}) \le (1-\varepsilon)f(\boldsymbol{x})+\varepsilon f(\boldsymbol{y})$ ゆえ，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}) &\ge \frac{1}{\varepsilon}\Big(f((1-\varepsilon)\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\Big) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(f(\boldsymbol{x}+\varepsilon(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-f(\boldsymbol{x})\Big) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，右辺を $\varepsilon \to +0$ とすれば，直ちに題意を得る．

(2) $\boldsymbol{x} \in K$ を VIP の解とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}' \in K$ に対して

$$0 \le \nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ここで，ひとつめの不等号は $\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K,\nabla f)$ と $\boldsymbol{x}' \in K$ より，ふたつめの不等号は凸関数の性質より成り立つ．よって，$\boldsymbol{x}$ は表記の最適化問題の最適解である．

逆に，$\boldsymbol{x} \in K$ は表記の最適化問題の最適解であるとする．$\boldsymbol{x}' \in K$ を任意のベクトルとする．このとき，K の凸性より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\boldsymbol{x}+\varepsilon(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) \in K$ が成り立つ．また，$\boldsymbol{x}$ は最適解なので，$f(\boldsymbol{x}+\varepsilon(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}))-f(\boldsymbol{x}) \ge 0 \quad (\forall\varepsilon > 0)$ である．よって，左辺を ε で除して $\varepsilon \to 0$ とすると，$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) \ge 0$ を得る．$\boldsymbol{x}' \in K$ は任意であったので，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K,\nabla f)$ である．

解答 2　$\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(C,\boldsymbol{F})$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) \ge 0 \quad (\boldsymbol{x}' \in C) \tag{1}$$

が成り立つ．まず定義より $\boldsymbol{x} \in C$ は明らか．また，C は閉凸錐ゆえ，$\boldsymbol{0}, 2\boldsymbol{x} \in C$ であるので，(1) に $\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{x}' := 2\boldsymbol{x}$ とおくことにより，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{x} = 0$ を得る．よって，(1) は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{x}' \ge 0 \quad (\boldsymbol{x}' \in C)$ と等価になるが，双対錐の定義よりこれは $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^*$ を意味する．

逆に $\boldsymbol{x} \in C, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^*, \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つとする．ここで，$\boldsymbol{x}' \in C$ を任意にとると，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \in C^*$ より，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{x}' \ge 0$ である．よって，$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ より $0 \le \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$ を得るが，これは $\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(C,\boldsymbol{F})$ を意味する．

解答 3　(1) $(\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))^\top(\boldsymbol{x}'-\Pi_K(\boldsymbol{z})) > 0$ を満たすような $\boldsymbol{x}' \in K$ が存在したと仮定する．このとき，$\varepsilon \in (0,1)$ に対して $\boldsymbol{y}_\varepsilon := (1-\varepsilon)\Pi_K(\boldsymbol{z})+\varepsilon\boldsymbol{x}'$ とすると，K の凸性より任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して $\boldsymbol{y}_\varepsilon \in K$ である．さらに，$\varepsilon > 0$ を十分小さな正の数とすると，

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}_\varepsilon\|^2 &= \|\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z})-\varepsilon(\boldsymbol{x}'-\Pi_K(\boldsymbol{z}))\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z})\|^2-\varepsilon\Big[2(\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))^\top(\boldsymbol{x}'-\Pi_K(\boldsymbol{z}))-\varepsilon\|\boldsymbol{x}'-\Pi_K(\boldsymbol{z})\|^2\Big] \\ &< \|\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z})\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．しかし，$\boldsymbol{y}_\varepsilon \in K$ より $\Pi_K(\boldsymbol{z})$ が最近点であることに矛盾する．よって題意を得る．

(2) $(\Longrightarrow)$ $\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}-\Pi_K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}' \in K$ を任意の点とし，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とすると，$\boldsymbol{x} = \Pi_K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = \Pi_K(\boldsymbol{z})$ が成り立つので以下を得る．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) = (\Pi_K(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{x}'-\Pi_K(\boldsymbol{z})) \ge 0.$$

ここで，最初の等号は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ より，二つ目の等号は $\boldsymbol{x} = \Pi_K(\boldsymbol{z})$ より，不等号は (1) の結果より成り立つ．

($\Longleftarrow$) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F})$ とする．このとき，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とおくと，以下の関係を得る．

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\|^2 &= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})^\top \big(\boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\big) + \big(\boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\big)^\top \big(\boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\big) \\ &= -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^\top \big(\Pi_K(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{x}\big) + \big(\boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\big)^\top \big(\boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z})\big) \le 0 \end{aligned}$$

ここで，不等号は $\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F})$ かつ $\Pi_K(\boldsymbol{z}) \in K$ であることと，$\boldsymbol{x} \in K$ かつ (1) より成り立つ．よって，$\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ を得る．

(3) ($\Longrightarrow$) $\boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nor}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{x} = \Pi_K(\boldsymbol{z})$ が成り立つとする．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{F}(\Pi_K(\boldsymbol{z})) + \boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

より $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ を得る．さらに以下を得る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) - \Pi_K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) \\ &= \boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{SOL}(K, \boldsymbol{F})$ および $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ とする．このとき，(2) より $\boldsymbol{F}^{\mathrm{nat}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ゆえ，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) \\ &= \boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \Pi_K(\boldsymbol{z})$ を得る．さらに以下を得る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{x} - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \\ &= [\boldsymbol{z} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{z} + \boldsymbol{F}(\Pi_K(\boldsymbol{z})) - \Pi_K(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{F}_K^{\mathrm{nor}}(\boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

解答 4　(1) 仮定より $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathrm{bd}\, B$ および $t \in [0, 1]$ が存在する．ここで，$\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = 0$ より $\|\boldsymbol{x}\| = t\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\|$ が，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{bd}\, B$ より $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ が，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{cl}\, B$ より $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\| \le 1$ が成り立つことに注意すると，$1 = \|\boldsymbol{x}\| = t\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\| \le 1$ が成り立つので，$t = \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\| = 1$ である．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ となるため，$\boldsymbol{\Phi}$ は不動点をもつ．

(2) すべての $t \in [0, 1]$ に対して $\boldsymbol{0} \notin \boldsymbol{H}(\mathrm{bd}\, B, t)$ が成り立つので，ホモトピーの不変公理 (A3) を適用することができる．さらに，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0) \equiv \boldsymbol{x}$ であることと $\boldsymbol{0} \in B$ であることに注意すると，公理 (A1) より $\deg(\boldsymbol{H}(\cdot, 0), B) = 1$ が成り立つ．よって，

$$1 = \deg(\boldsymbol{H}(\cdot, 0), B) = \deg(\boldsymbol{H}(\cdot, 1), B)$$

となるので，$\boldsymbol{H}(\cdot, 1)$ すなわち $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ は B 内で零点をもつ．よって，$\boldsymbol{\Phi}$ は B 内で不動点をもつ．

解答 5　(2) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$ を満たす $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathrm{cl}\, \Omega \times (0, 1)$ が存在したとする．このとき，$\boldsymbol{x} \notin \mathrm{bd}\, \Omega$ であることを示せば十分である．もし $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}$ ならば Ω が開であることと $\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}} \in \Omega$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}} \notin \mathrm{bd}\, \Omega$ である．よって，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}$ の場合を考える．$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} = \Pi_K(t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) + (1 - t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})$ であるので，明らかに $\boldsymbol{x} \in K$ である．また，問題 3 の (1) でも示した射影の特性より，任意の $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in K \times \mathbb{R}^n$ に対

して $(\boldsymbol{y}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))^\top(\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))\le 0$ が成り立つ．これに $\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}\in K$, $\boldsymbol{z}:=t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))+(1-t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}$ を代入すると，$\Pi_K(\boldsymbol{z})=\Pi_K(t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))+(1-t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})=\boldsymbol{x}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}0 &\ge (\boldsymbol{y}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))^\top(\boldsymbol{z}-\Pi_K(\boldsymbol{z}))\\ &= (\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}-\boldsymbol{x})^\top(t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))+(1-t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}-\boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}-\boldsymbol{x})^\top\big(-t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+(1-t)(\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}-\boldsymbol{x})\big)\\ &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})^\top\big(t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+(1-t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})\big)\end{aligned}$$

すなわち

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})^\top\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\le-\frac{1-t}{t}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}}\|^2<0$$

を得る．よって，$\boldsymbol{x}\in L_<(\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})$ である．一方，$L_<(\boldsymbol{x}^{\mathrm{ref}})\cap\mathrm{bd}\,\Omega=\emptyset$ であったので，$\boldsymbol{x}\notin\mathrm{bd}\,\Omega$ が成り立つ．

解答 6　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}):=A\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}$, $K:=\{\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{0},\ -B\boldsymbol{z}+\boldsymbol{r}\ge\boldsymbol{0}\}$ としたときの VIP $(K,\boldsymbol{F})$ の KKT 条件は

$$\begin{aligned}&A\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\mu}+B^\top\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0},\\ &\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{\mu}\perp\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{0},\\ &\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{\lambda}\perp-B\boldsymbol{z}+\boldsymbol{r}\ge\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

これを，$\boldsymbol{\mu}$ を消去して整理すると，

$$\boldsymbol{0}\le\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}0 & -B\\ B^\top & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}\tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}:=\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{z}:=(\boldsymbol{w}^\top,\boldsymbol{\rho}^\top)^\top$, $B:=-[I_K\otimes L\ \ -\mathbf{1}_K\otimes I]$, $\boldsymbol{r}:=\boldsymbol{p}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}_K\otimes L\boldsymbol{c}$,

$$A:=\left[\begin{array}{c|c}\Delta_K\otimes D_\mu(I-L) & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right],\quad \boldsymbol{t}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}_K\otimes D_\mu\mathbf{1}\\ \hline -\boldsymbol{Q}\end{array}\right]$$

とすると，LCP (2) は設問の LCP と同一である．さらに，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})=A\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}\big(\Delta_K\otimes D_\mu(I-L)]\big)\boldsymbol{w}+\mathbf{1}_K\otimes D_\mu\mathbf{1}\\ -\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}D_\mu(I-L)\boldsymbol{w}_1+D_\mu\mathbf{1}\\ D_\mu(I-L)(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1)+D_\mu\mathbf{1}\\ \vdots\\ D_\mu(I-L)(\boldsymbol{w}_K-\boldsymbol{w}_{K-1})+D_\mu\mathbf{1}\\ -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_\mu\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{w})\\ D_\mu\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{w})\\ \vdots\\ D_\mu\boldsymbol{G}_K(\boldsymbol{w})\\ -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}$$

および

$$\begin{aligned}-B\boldsymbol{z}+\boldsymbol{r}&=(I_K\otimes L)\boldsymbol{w}-(\mathbf{1}_K\otimes I)\boldsymbol{\rho}+(\boldsymbol{p}\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}_K\otimes L\boldsymbol{c})\\ &=\begin{bmatrix}L\boldsymbol{w}_1\\ \vdots\\ L\boldsymbol{w}_K\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\rho}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1\mathbf{1}+L\boldsymbol{c}\\ \vdots\\ p_K\mathbf{1}+L\boldsymbol{c}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

であるので，設問に記述された VIP と上記の VIP$(K,\boldsymbol{F})$ は同じである．