Chap.3 交通モデル編

最後は相補性問題や変分不等式問題として定式化・解析される例として，交通均衡問題におけるボトルネックモデルを紹介します．

（余所でも喋ったことがあるので，重複はご容赦ください．．．）

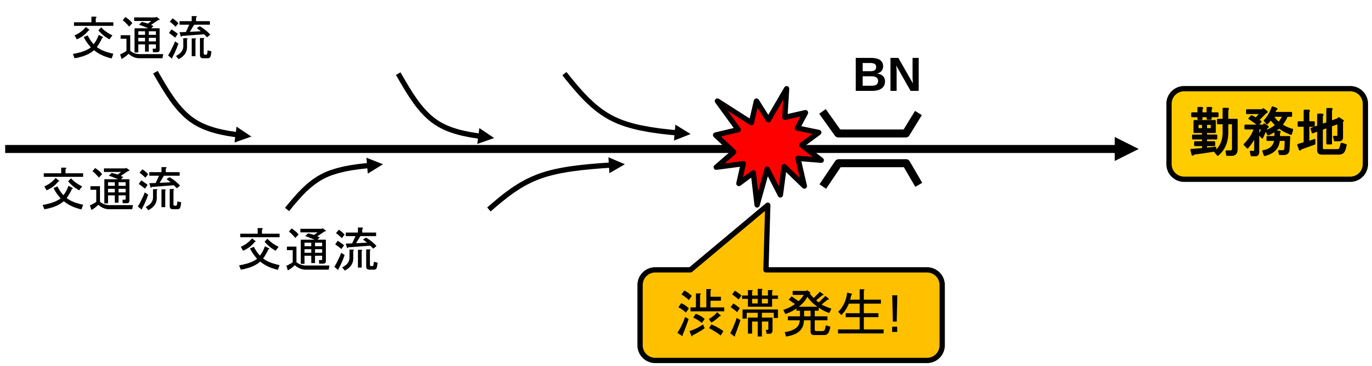
ボトルネック(BN)と渋滞

渋滞の起こる原因 ——— キャパシティを超えた交通量の集中

特にボトルネック(BN)とよばれる場所で渋滞が発生しやすい.

例：橋，交差点，インターチェンジ，工事現場，etc.

BNでは単位時間辺りに処理できる車の台数（交通量）は
限られており，それを超える交通量が集中すると渋滞が発生.



（詰まり気味のシンクに勢いよく水を流すと，水があふれてしまうイメージ．）

ボトルネック(BN)と渋滞

渋滞の起こる原因 ――― キャパシティを超えた交通量の集中

⇒ 混雑している時間帯を避ければ，渋滞に逢いにくい．
（混雑を避けたい心理）

⇔ そうは言っても，始業時刻から大幅にずれた時刻に職場に到着したくない．（希望到着時刻近辺に職場に着きたい心理）

混雑を避けたい心理と，希望到着時刻に着きたい心理のせめぎ合いにより，ある種の社会的な均衡状態が生まれる．

⇒ 通勤時刻選択均衡

既存研究（モデル構築と均衡解析）

- ユーザーの通勤時刻選択とBNによる渋滞発生モデル [Vickrey 1969]
- より詳細な数理モデル（動的ユーザー均衡）の構築. [Hendrickson et. al., 1981]
- 均衡解の存在性の証明 [Smith, 1984]
- 均衡解の一意性の証明 [Daganzo, 1985]

いずれも単数ボトルネック ↑

- ボトルネックが2つの場合への拡張と均衡解析 [Kuwahara, 1990], [Arnott et al. 1993]
- ボトルネックがN個の場合への拡張 [Arnott and De Palma, 2011] [Akamatsu, Wada and H, 2015] [Osawa, Fu and Akamatsu, 2017] [Yamashita and H, 2018]

【注】有名なWardrop均衡は，時刻依存の無い交通量を考えており，ユーザーは有向グラフ上のルートを選択する構造なので，本研究のモデルとは根本的に異なる.

通勤時刻選択均衡

以下の3条件 (a)-(c) を満たす交通フローパターンを
通勤時刻選択均衡という.

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

BNでどのように渋滞が生成されるか？ 渋滞列でどれくらい待つか？

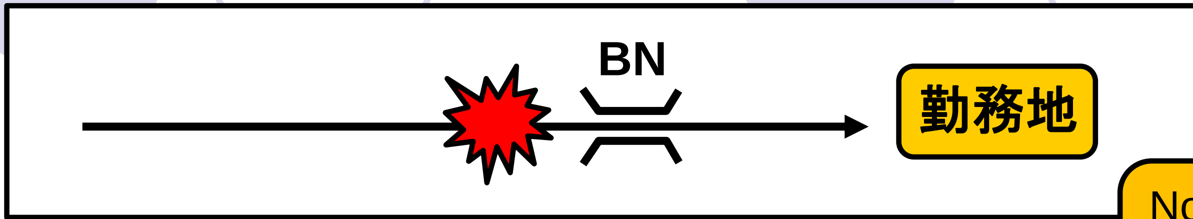
(b) 通勤時刻選択に関する条件

各通勤者はどのような方針に基づき通勤時刻を選択するか？

(c) フロー保存条件

まず，単数BNの場合の通勤時刻選択均衡のモデル化
について説明 ⟹ 複数BNへの拡張.

渋滞による待ち時間の解析（単数BN）



Note: 1台1台の車が離散的ないし確率的に到着するモデルとは異なる.

t ：時刻 $(0 \leq t \leq T)$ ← T は十分大きな値

$A(t)$ ：時刻 t における, BNへの累積到着台数（連続量）

$D(t)$ ：時刻 t における, BNからの累積離脱台数（連続量）

μ ：BN容量（最大処理能力・最大離脱率）

Note: 待ち行列や車そのものの物理的大きさは考えない

$E(t) = A(t) - D(t)$ ：時刻 t における, BNでの待ち行列台数

$$E(t) > 0 \implies \dot{D}(t) = \mu$$

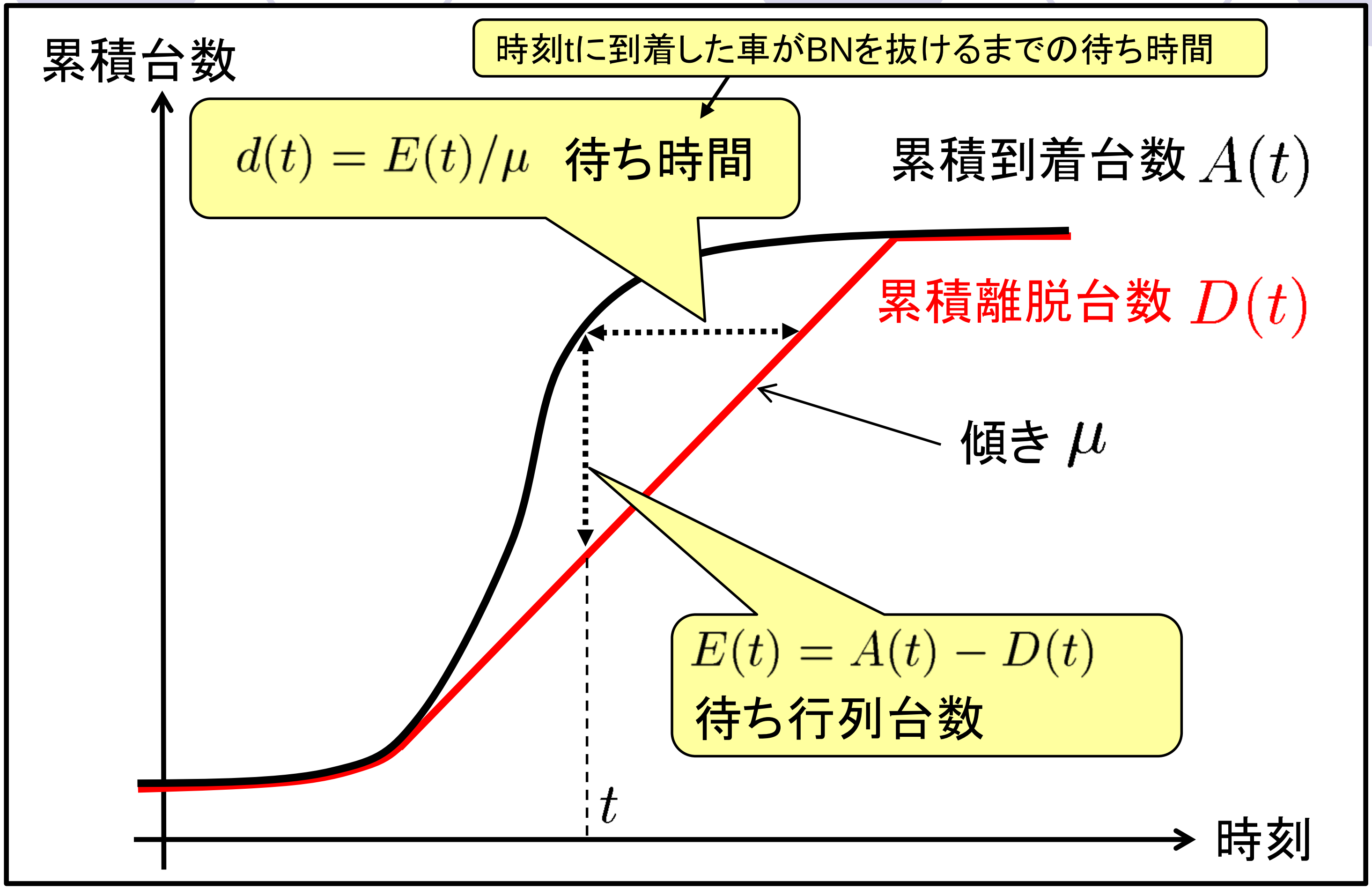
$$E(t) = 0 \implies \dot{D}(t) = \dot{A}(t) \quad (\leq \mu)$$

$$\dot{(\ )} := \frac{d(\ )}{dt}$$

$\dot{A}(t)$ ：到着率

$\dot{D}(t)$ ：離脱率

累積図による渋滞表現



$$\dot{D}(t) = \begin{cases} \mu & (E(t) > 0) \\ \dot{A}(t)\ (\leq \mu) & (E(t) = 0) \end{cases}$$

待ち時間に関する条件

$A(t)$	：累積到着台数
$D(t)$	：累積離脱台数
$E(t)$	：待ち行列台数
μ	： BN容量

$d(t) = E(t)/\mu$　BNでの待ち時間

$$\Rightarrow \quad \dot{d}(t) = \dot{E}(t)/\mu$$

$$= \left(\dot{A}(t) - \dot{D}(t)\right)/\mu$$

$$E(t) = A(t) - D(t)$$

$$\dot{D}(t) = \begin{cases} \mu & (E(t) > 0) \\ \dot{A}(t)\ (\leq \mu) & (E(t) = 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\dot{A}(t)/\mu] - 1 & (d(t) > 0) \\ 0\ (\geq [\dot{A}(t)/\mu] - 1) & (d(t) = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq d(t) \perp \dot{d}(t) - \left([\dot{A}(t)/\mu] - 1\right) \geq 0 \quad (\forall t \in [0, T])$$

待ち時間$d(t)$が満たすべき条件は**相補性条件**として記述できる.

(⊥は，乗じたらゼロの意．)

通勤時刻選択均衡

以下の3条件 (a)-(c) を満たすフローパターンを
通勤時刻選択均衡という.

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

$$0 \leq d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\dot{A}(t)/\mu\right] - 1\right) \geq 0$$

(b) 通勤時刻選択に関する条件

各通勤者はどのような方針に基づき通勤時刻を選択するか？

(c) フロー保存条件

ユーザーの時刻選択

システム内のユーザーは各々BN到着時刻を選択する.

t ：各ユーザーが選ぶBN到着時刻　$(0 \leq t \leq T)$

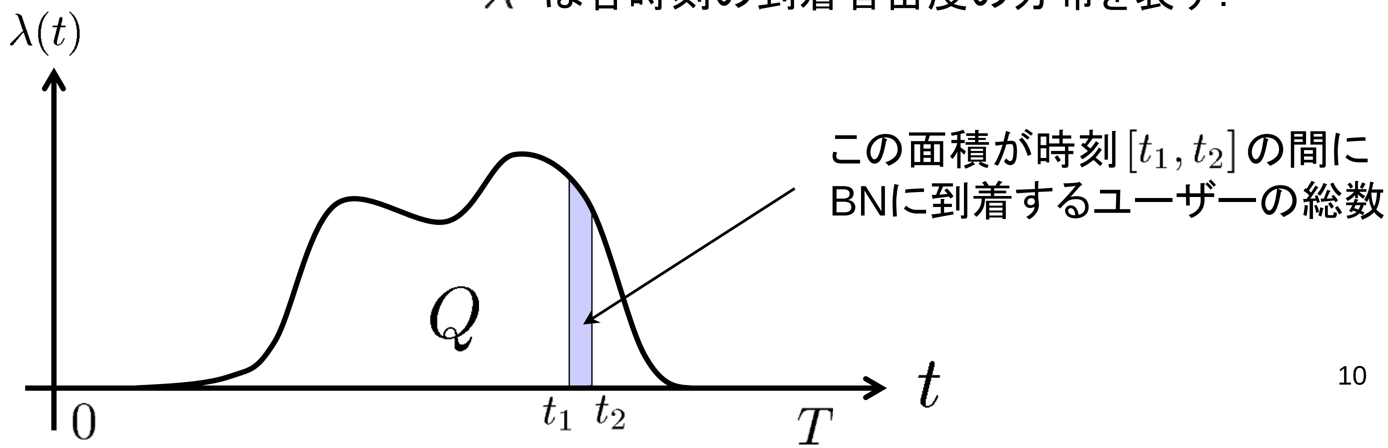
$\lambda(t)$：BN到着時刻として t を選ぶユーザーの到着率

Q ：システム内にいるユーザーの総量
（総交通需要）

$$\left(Q = \int_0^T \lambda(t)dt \right)$$

【注意】 時刻，ユーザー数は連続量. （交通流をフローとして扱う. ）

λ は各時刻の到着者密度の分布を表す.

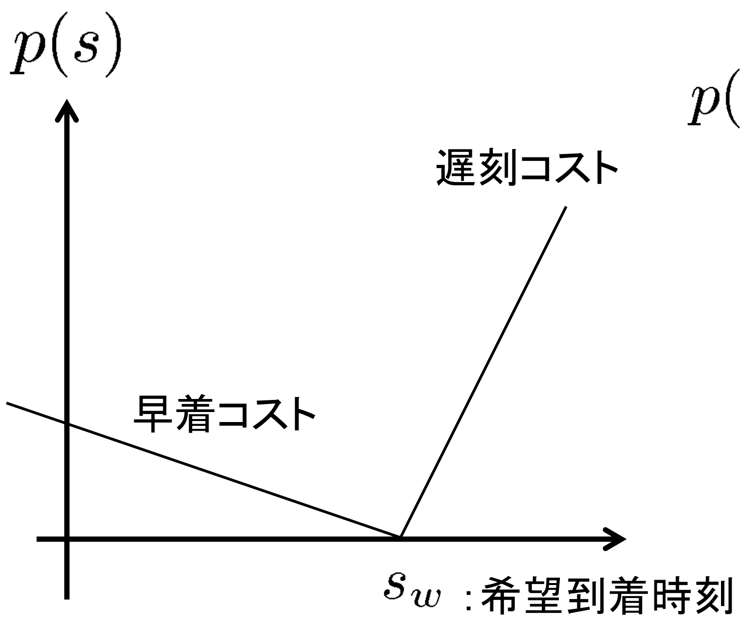


ユーザーの時刻選択

各ユーザーはなるべくコスト（不効用, disutility）$v(t)$ が小さな時刻 t を選択.

コスト $v(t)$ ＝ BNでの待ち時間 $d(t)$ ＋ スケジュール遅れ費用 $p(s)$

スケジュール遅れ費用



$s = t + d(t)$:勤務地到着時刻
（＝BN離脱時刻）

$$p(s) := \begin{cases} -\alpha(s - s_w) & (s < s_w) \\ \beta(s - s_w) & (s \geq s_w) \end{cases}$$

where $0 < \alpha < 1 < \beta$

$$\therefore \; p(s) \geq 0 \;\; (\forall s)$$

本研究では, すべてのユーザーが同じスケジュール遅れ費用関数を持っているものと仮定.

ユーザーの時刻選択

各ユーザーはコスト $v(t)$ が最小となる時刻 t を選択.

$\longrightarrow$ 均衡状態では以下の条件が成立

$$\lambda(t) > 0 \implies v(t) = \min_{t' \in [0,T]} v(t')$$
$$\lambda(t) = 0 \impliedby v(t) > \min_{t' \in [0,T]} v(t')$$

（ポピュレーションゲームにおける均衡状態）

$\Longleftrightarrow$

$$0 \le \lambda(t) \perp v(t) - \rho \ge 0$$

ρ は t に依存しない独立変数だが,

結果的に必ず $\rho = \min_{t' \in [0,T]} v(t')$

$$\left(\text{since } \int_0^T \lambda(t)dt = Q > 0,\ \ \lambda(t) \ge 0\right)$$

※ 実際は $v(t)$ は $\lambda(t)$ に依存することに注意.

通勤時刻選択均衡

以下の3条件 (a)-(c) を満たすフローパターンを
通勤時刻選択均衡という.

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

$$0 \le d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\dot{A}(t)/\mu\right] - 1\right) \ge 0$$

(b) 通勤時刻選択に関する条件

$$0 \le \lambda(t) \perp v(t) - \rho \ge 0$$

(c) フロー保存条件

$$\int_0^T \lambda(t)dt = Q \iff 0 \le \rho \perp \int_0^T \lambda(t)dt - Q \ge 0$$

$$(\because \rho > 0)$$

無限次元LCPへの定式化

以上の条件を再度書き出すと,

$$0 \le d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\dot{A}(t)/\mu\right] - 1\right) \ge 0$$

$$0 \le \lambda(t) \perp v(t) - \rho \ge 0$$

$$0 \le \rho \perp \int_0^T \lambda(t)dt - Q \ge 0$$

$A(t)$: 時刻 t における, BNへの累積到着台数（連続量）

$\lambda(t)$: BN到着時刻として t を選ぶユーザーの到着率 $\left(=\dot{A}(t)\right)$

$d(t)$: 時刻 t にBNに到着したユーザーのBNでの待ち時間

$p(t)$: スケジュール遅れ関数（所与）

$v(t)$: コスト$\left(=d(t)+p(t+d(t))\right)$

Q : システム内にいるユーザーの総量（所与の正値）

無限次元LCP

$$0 \le d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\lambda(t)/\mu\right] - 1\right) \ge 0 \qquad (\forall t \in [0,T])$$

$$0 \le \lambda(t) \perp d(t) + p(t+d(t)) - \rho \ge 0 \qquad (\forall t \in [0,T])$$

$$0 \le \rho \perp \int_0^T \lambda(t)dt - Q \ge 0$$

決定変数は, 関数 d, λ とスカラー ρ

以上のような無限次元の相補性問題として定式化される.

選択時刻の離散化

決定変数は関数（無限次元）なので，計算機でアルゴリズムを適用したり，有限次元ユークリッド空間の理論を適用したりする場合には，時刻の離散化が必要.

無限次元LCP

$$0 \le d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\lambda(t)/\mu\right] - 1\right) \ge 0$$
$$0 \le \lambda(t) \perp d(t) + p(t + d(t)) - \rho \ge 0$$
$$0 \le \rho \perp \int_0^T \lambda(t)dt - Q \ge 0$$

⇒

有限次元LCP

$$0 \le d_k \perp (d_{k+1} - d_k)/\Delta t - \left(\left[\lambda_k/\mu\right] - 1\right) \ge 0$$
$$0 \le \lambda_k \perp d_k + p(k + d_k) - \rho \ge 0$$
$$0 \le \rho \perp \textstyle\sum_{k=1}^K \lambda_k \Delta t - Q \ge 0$$

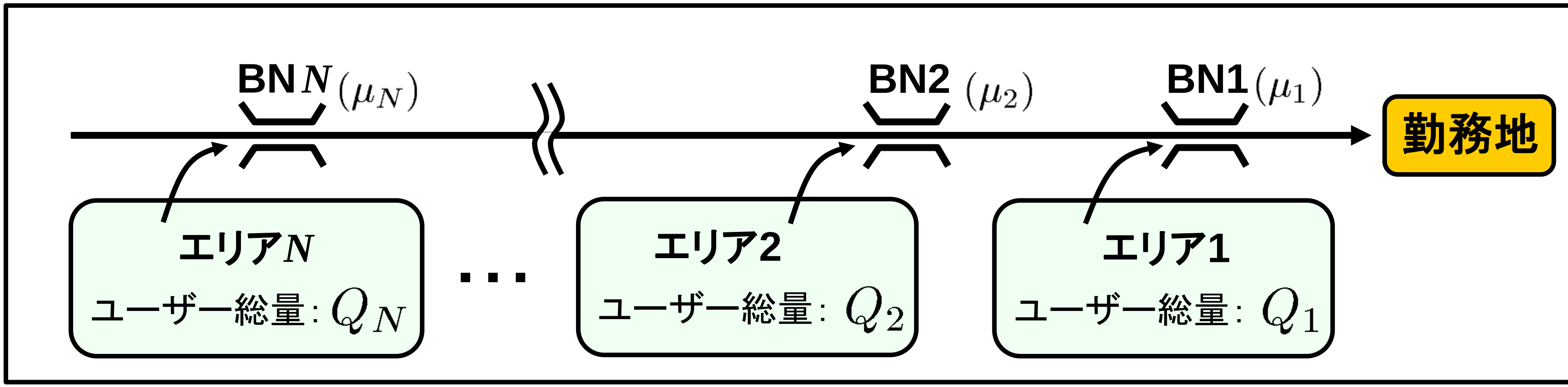
$[0, T] \to \{\Delta t, 2\Delta t, \ldots, K\Delta t\}$ with $\Delta t = T/K$

複数ボトルネックへの拡張

T. Akamatsu, K. Wada, and S. Hayashi, "The corridor problem with discrete multiple bottlenecks", Transportation Research Part B: Methodological, 81 (2015), pp. 808-829.

複数ボトルネックへの拡張

N個のボトルネックが直列に連なったコリドー型のネットワークを考える.



- 各エリア i のユーザーが BN i への到着時刻 t_i を選択.
- エリア i に居住するユーザーは, 下流の BN $i, i-1, \ldots, 1$ をすべて通過.
- BN i の容量 $\mu_i > 0$ は所与.
- 勤務地は全ユーザー共通.（都心をイメージ）
- First-In-First-Out (FIFO) を仮定.

※ エリア番号とBN番号の対応に注意.

移動時間と待ち時間（変更スライド）

t_i :エリア i 居住のユーザーが選んだ BN i への到着時刻

c_i : BN i から BN $i-1$ までの自由走行時間.

$d_i(t_i)$:時刻 t_i に BN i に到着したユーザーのBNでの待ち時間

$\longrightarrow$ このとき，勤務地到着時刻を計算したい.

$$t_{i-1} = t_i + d_i(t_i) + c_i$$

$$\begin{aligned} t_{i-2} &= t_{i-1} + d_{i-1}(t_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= t_i + d_i(t_i) + c_i + d_{i-1}(t_i + (d_i(t_i) + c_i)) + c_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{i-3} &= t_{i-2} + d_{i-2}(t_{i-2}) + c_{i-2} \\ &= t_i + d_i(t_i) + c_i + d_{i-1}(t_i + (d_i(t_i) + c_i)) + c_{i-1} \\ &\quad + d_{i-2}\Big(t_i + d_i(t_i) + c_i + d_{i-1}(t_i + (d_i(t_i) + c_i)) + c_{i-1}\Big) + c_{i-2} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ 変数が入れ子状になり，一般的な解析は不可能！

そこで，実時刻 t ではなく，勤務地到着時刻 s をベースとした時間座標系を導入.

勤務地到着時刻をベースにした座標系

s ：勤務地への到着時刻 $\left(s \in \left[\underline{S},\ \overline{S}\,\right]\right)$ ← 十分大きな区間

$\tau_i(s)$ ：勤務地到着時刻が s であるユーザーが BN i に到着する時刻.

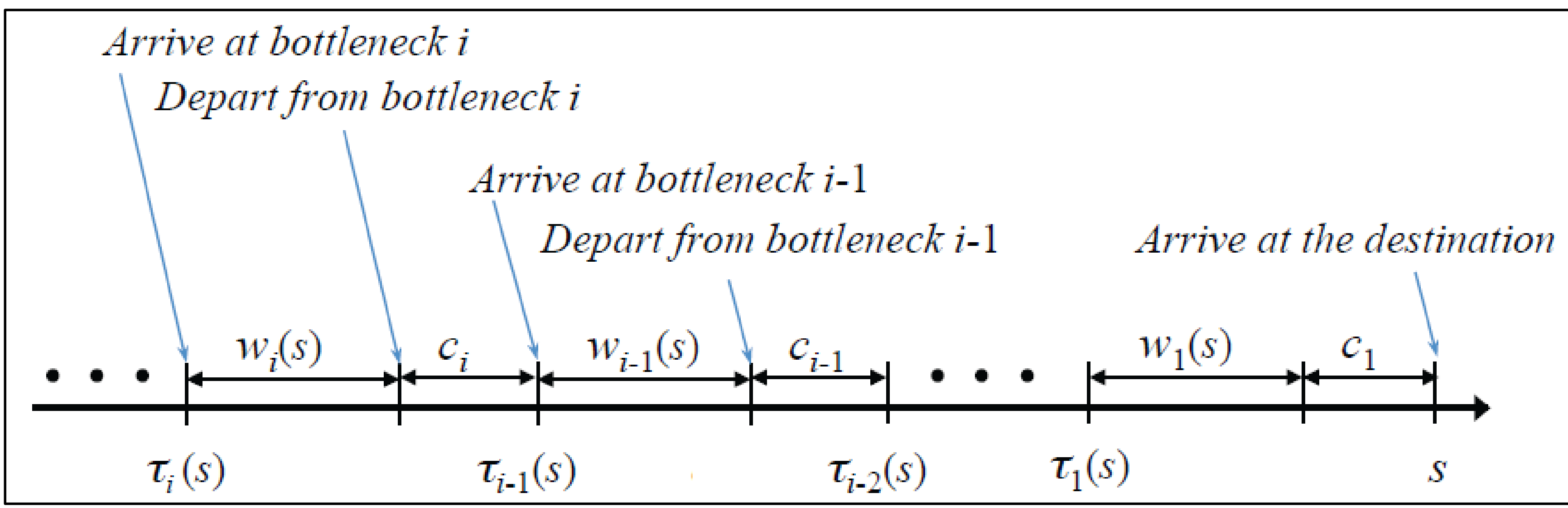
$w_i(s)$ ：勤務地到着時刻が s であるユーザーが BN i で待つ時間.

c_i ：BN i から BN $i-1$ までの自由走行時間.

BN 0 : 勤務地

$\tau_0(s) := s$

$$\Rightarrow \tau_i(s) = \tau_{i-1}(s) - \left(w_i(s) + c_i\right) = s - \sum_{j=1}^{i}\left(w_j(s) + c_j\right)$$



勤務地到着時刻をベースにした座標系

待ち時間 $w_i(s)$ に対する条件式(相補性条件)を導きたい.

単数BNモデルの場合は以下の通りだった.

$$0 \leq d(t) \perp \dot{d}(t) - \left(\left[\dot{A}(t)/\mu\right] - 1\right) \geq 0$$

$A(t)$: 時刻 t における, BNへの累積到着台数（連続量）

$d(t)$: 時刻 t にBNに到着したユーザーのBNでの待ち時間

そのまま当てはめると, 各BN i に対して

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq d_i(t) \perp \dot{d}_i(t) - \left(\left[\dot{A}_i(t)/\mu_i\right] - 1\right) \geq 0$$

ただし, $t = \tau_i(s)$ は BN i への到着時刻.

（FIFOゆえ, このユーザーがどのエリアから出発したかには依存しない. ）

しかし, $ds/dt = 1$ であるとは限らないので, 到着時刻 s をベースとした時間座標系に対してそのまま適用できない.

（ボトルネックでの待ち時間の伸縮のため, 1分早く家を出発した人が1分早く会社に着くとは限らない. ）

勤務地到着時刻をベースにした座標系

$$0 \le d_i(\tau_i(s)) \perp \dot{d}_i(\tau_i(s)) - ([\dot{A}_i(\tau_i(s))/\mu_i] - 1) \ge 0$$

$w_i(s) := d_i(\tau_i(s))$	時刻 s に勤務地へ到着するユーザーの BN i での待ち時間.
$Y_i(s) := A_i(\tau_i(s))$	時刻 s に勤務地へ到着するユーザーが BN i に到着したときの，BN i への累積到着台数.

$$\check{w}_i(s) = \dot{d}_i(\tau_i(s)) \cdot \check{\tau}_i(s)$$

$$\check{Y}_i(s) = \dot{A}_i(\tau_i(s)) \cdot \check{\tau}_i(s)$$

$$(\check{\ }) := \frac{d(\ )}{ds}$$

e.g. $\check{\tau}_i(s) = d\tau_i(s)/ds$

Note: $\check{\tau}_i(s) > 0$ due to FIFO assumption

上式 $\Longleftrightarrow$ $0 \le d_i(\tau_i(s)) \perp \dot{d}_i(\tau_i(s)) \cdot \check{\tau}_i(s) - ([\dot{A}_i(\tau_i(s)) \cdot \check{\tau}_i(s)/\mu_i] - \check{\tau}_i(s)) \ge 0$

$\Longleftrightarrow$ $0 \le w_i(s) \perp \check{w}_i(s) - ([\check{Y}_i(s)/\mu_i] - \check{\tau}_i(s)) \ge 0$

各 BN i での待ち時間に関する関係式が(到着時刻ベースで)導けた.

通勤時刻選択均衡（複数BN ver.）

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

$$0 \leq w_i(s) \perp \check{w}_i(s) - \left(\left[\check{Y}_i(s)/\mu_i\right] - \check{\tau}_i(s)\right) \geq 0$$

(b) 通勤時刻選択に関する条件

(c) フロー保存条件

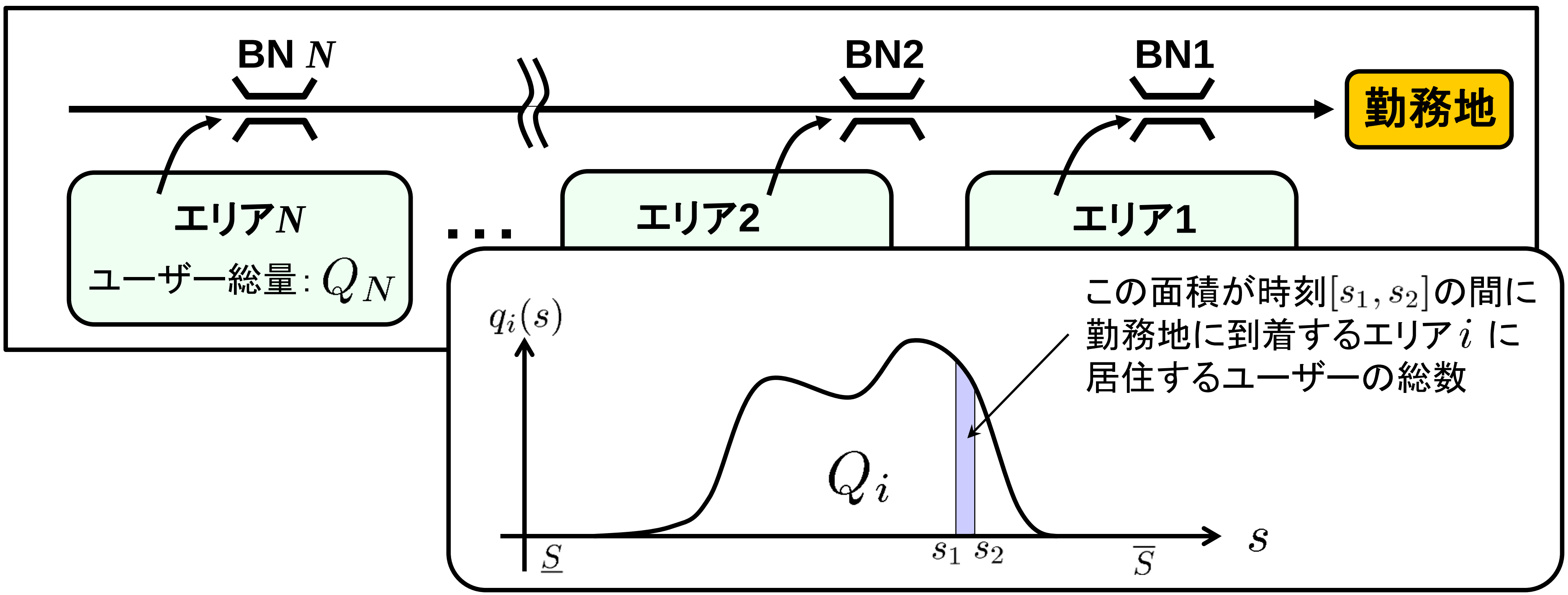
ユーザーの時刻選択

システム内のユーザーは各々，勤務地到着時刻 s を選択する．

s : 各ユーザーが選ぶ勤務地への到着時刻（$s \in [\underline{S}, \overline{S}]$）

$q_i(s)$: エリア i に居住し，勤務地到着時刻として s を選ぶユーザーの割合
（勤務地到着率）

Q_i : エリア i に居住するユーザーの総量 $\left(Q_i = \int_{\underline{S}}^{\overline{S}} q_i(s)ds\right)$



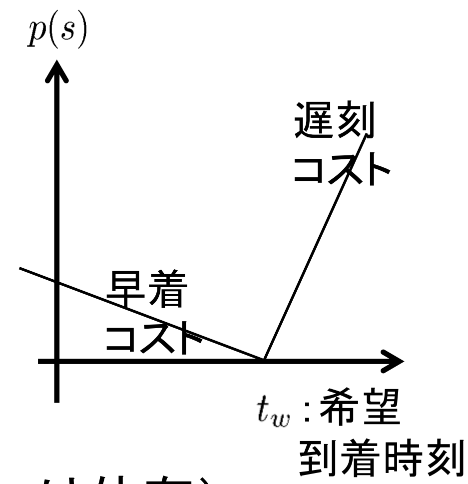
ユーザーの時刻選択

エリア i に居住する各ユーザーはコスト $u_i(s)$ が最小となるような時刻 s を選択.

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
q_i(s) > 0 \implies u_i(s) = \min\limits_{s' \in [\underline{S}, \overline{S}]} u_i(s') \\
q_i(s) = 0 \impliedby u_i(s) > \min\limits_{s' \in [\underline{S}, \overline{S}]} u_i(s')
\end{array}
}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \boxed{0 \leq q_i(s) \perp u_i(s) - \rho_i \geq 0}
$$

スケジュール遅れ関数



ρ_i は s に依存しない独立変数.（ i には依存）

エリア i に居住する各ユーザーはコスト $u_i(s)$ が最小となるような時刻 s を選択.

$$
\boxed{\text{コスト}\, u_i(s) = \text{総移動時間}\, s - \tau_i(s) + \text{スケジュール遅れ関数}\, p(s)}
$$

$\tau_i(s)$: BN i への到着時刻（= エリアi 居住者の出発時刻）

通勤時刻選択均衡（複数BN ver.）

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

$$0 \leq w_i(s) \perp \check{w}_i(s) - \left(\left[\check{Y}_i(s)/\mu_i\right] - \check{\tau}_i(s)\right) \geq 0$$

(b) 通勤時刻選択に関する条件

$$0 \leq q_i(s) \perp u_i(s) - \rho_i \geq 0$$

(c) フロー保存条件

$$0 \leq \rho_i \perp \int_{\underline{S}}^{\overline{S}} q_i(s)ds - Q_i \geq 0$$

通勤時刻選択均衡（複数BN ver.）

(a) 渋滞待ち時間に関する条件

$$0 \leq w_i(s) \perp \check{w}_i(s) - \left(\left[\check{Y}_i(s)/\mu_i\right] - \check{\tau}_i(s)\right) \geq 0$$

$\check{Y}_i(s) = \sum_{j=i}^{N} q_j(s)$

BN i への（総）到着率

$\check{\tau}_i(s) = 1 - \sum_{j=1}^{i} \check{w}_j(s)$

エリア i の通勤者の
勤務地到着時刻の変化率

(b) 通勤時刻選択に関する条件

$$0 \leq q_i(s) \perp u_i(s) - \rho_i \geq 0$$

$$\begin{aligned} u_i(s) &= s - \tau_i(s) + p(s) \\ &= \sum_{j=1}^{i} \left(w_j(s) + c_j\right) + p(s) \end{aligned}$$

（総待ち時間＋総移動時間
＋スケジュール遅れコスト）

(c) フロー保存条件

$$0 \leq \rho_i \perp \int_{\underline{S}}^{\overline{S}} q_i(s) ds - Q$$

均衡状態の表現

無限次元LCP（変数：w, q, ρ）

$$0 \le w_i(s) \perp \mu_i\Big(1 + \check{w}_i(s) - \textstyle\sum_{j=1}^{i} \check{w}_j(s)]\Big) - \sum_{j=i}^{N} q_j(s) \ge 0$$

$$0 \le q_i(s) \perp \textstyle\sum_{j=1}^{i} \big(w_j(s) + c_j\big) + p(s) - \rho_i \ge 0$$

$$0 \le \rho_i \perp \int_{\underline{S}}^{\overline{S}} q_i(s)ds - Q_i \ge 0 \qquad (s \in \mathcal{S} = [\underline{S}, \overline{S}],\ i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$w(s) = (w_1(s), \ldots, w_N(s))^\top$$
$$q(s) = (q_1(s), \ldots, q_N(s))^\top$$
$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)^\top$$
$$Q = (Q_1, \ldots, Q_N)^\top$$

ベクトル・行列表記

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_\mu = \mathrm{diag}\,(\mu_i)$$

$$0 \le w(s) \perp D_\mu(\mathbf{1} + (I - L)\check{w}(s)) - L^\top q(s) \ge 0$$

$$0 \le q(s) \perp L(w(s) + c) + p(s)\mathbf{1} - \rho \ge 0$$

$$0 \le \rho \perp \int_{\mathcal{S}} q(s)ds - Q \ge 0 \qquad (s \in \mathcal{S} = [\underline{S}, \overline{S}])$$

時間の離散化

無限次元LCP

$$
\begin{aligned}
&0 \le w(s) \perp D_\mu(\mathbf{1} + (I-L)\check{w}(s)) - L^\top q(s) \ge 0 \\
&0 \le q(s) \perp L(w(s)+c) + p(s)\mathbf{1} - \rho \ge 0 \\
&0 \le \rho \perp \textstyle\int_{\mathcal{S}} q(s)ds - Q \ge 0 \qquad (s \in \mathcal{S} = [\underline{S}, \overline{S}])
\end{aligned}
$$

時間を離散化

$[\underline{S}, \overline{S}\,] \to \{\underline{S} + \Delta s,\ \underline{S} + 2\Delta s, \ldots, \underline{S} + K\Delta s\}$ with $\Delta s = (\overline{S} - \underline{S})/K$

各ユーザーが選択する時刻: $k = 1, 2, \ldots, K$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&0 \le w_k \perp D_\mu(\mathbf{1} + (I-L)(w_{k+1} - w_k)/\Delta s) - L^\top q_k \ge 0 \\
&0 \le q_k \perp L(w_k + c) + p_k\mathbf{1} - \rho \ge 0 \\
&0 \le \rho \perp \textstyle\sum_{k=1}^{K} q_k \Delta s - Q \ge 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, K)
\end{aligned}
$$

$$
w_k = (w_{1k}, w_{2k}, \ldots, w_{Nk})^\top \in \mathbb{R}^N
$$

$$
q_k = (q_{1k}, q_{2k}, \ldots, q_{Nk})^\top \in \mathbb{R}^N \quad \rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)^\top \in \mathbb{R}^N
$$

時間の離散化

$$
\begin{aligned}
&0 \le w_k \perp D_\mu(\mathbf{1} + (I-L)(w_{k+1} - w_k)/\Delta s) - L^\top q_k \ge 0 \\
&0 \le q_k \perp L(w_k + c) + p_k \mathbf{1} - \rho \ge 0 \\
&0 \le \rho \perp \textstyle\sum_{k=1}^{K} q_k \Delta s - Q \ge 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, K)
\end{aligned}
$$

以後，簡単のため $\Delta s := 1$ とする.

さらに,

$$
w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NK} \qquad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NK}
$$

$$
\boldsymbol{\Delta}_K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

以下のような有限次元のLCPとして定式化.

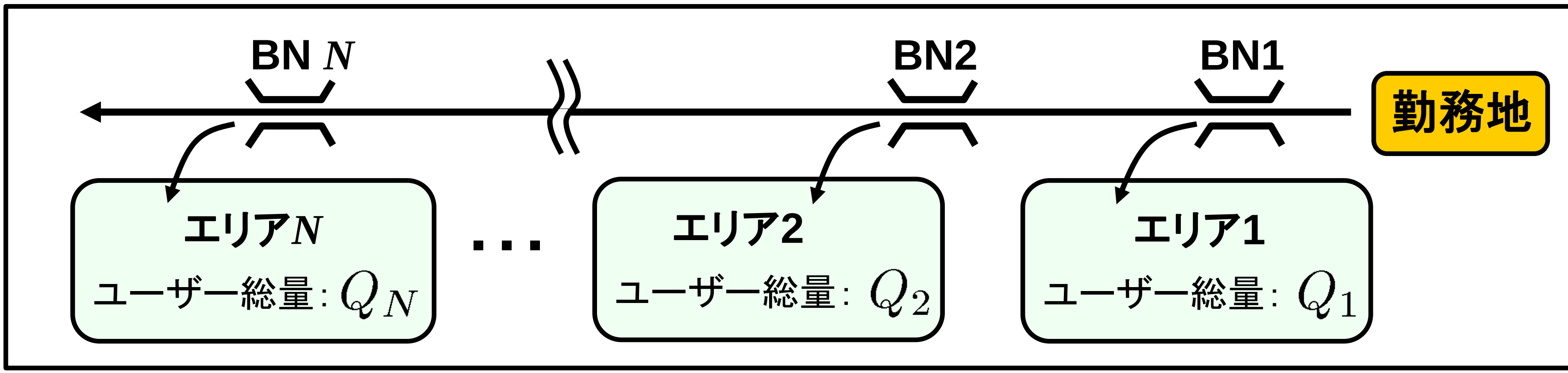
$\Rightarrow$ Find $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N}$ s.t. $\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \ge 0$, where

$$
M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\mathbf{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu (I - L) & 0 \\ \hline \mathbf{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \overset{\boldsymbol{p}\otimes\mathbf{1}}{\cancel{\boldsymbol{p}}} + \mathbf{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{1}_K \otimes D_\mu \mathbf{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]
$$

夕方の帰宅ラッシュモデル

s : 各ユーザーが選ぶ勤務地からの出発時刻

$q_i(s)$: エリア i に居住し，勤務地出発時刻として s を選ぶユーザーの割合（勤務地出発率）



基本的には，時間軸を逆にして考えればよい．

夕方の帰宅ラッシュモデル

s ：各ユーザーが選ぶ勤務地からの出発時刻

$q_i(s)$: エリア i に居住し，勤務地出発時刻として s を選ぶユーザーの割合

（勤務地出発率）

離散時間LCPへの定式化 （導出過程割愛）

$$\text{Find } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N} \text{ s.t. } \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \geq 0, \quad \text{where}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\boldsymbol{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu L & 0 \\ \hline \boldsymbol{1}_K^\top \otimes I & 0 & \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \boldsymbol{1}_K \otimes D_\mu \boldsymbol{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

対角成分に正数が
並ぶ下三角行列

朝ラッシュモデルの場合

$$\text{Find } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N} \text{ s.t. } \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \geq 0, \quad \text{where}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\boldsymbol{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu (I - L) & 0 \\ \hline \boldsymbol{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \boldsymbol{1}_K \otimes D_\mu \boldsymbol{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

対角成分に0が
並ぶ下三角行列

※ 夕方ラッシュモデルの方がLCPとして性質がよい．

行列のP0性の解析

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\mathbf{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu L & 0 \\ \hline \mathbf{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

もしMがP0行列ならば，アルゴリズムの収束性が理論的に保証される.

解集合に関するよい性質も．．．

$M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ がP0行列 $\overset{\text{def}}{\iff}$ Mのすべての主小行列式が0以上.

i.e., $\det(M_{\mathcal{I}\mathcal{I}}) \geq 0, \ \forall \mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, p\}$

行列のP_0性の解析

$$
M = \left[\begin{array}{c|c|c}
0 & I_K \otimes L & -\mathbf{1}_K \otimes I \\ \hline
-I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu L & 0 \\ \hline
\mathbf{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
D_\mu = \mathrm{diag}(\mu_i)
$$

$$
\boldsymbol{\Delta}_K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

以外は歪対称.

が正定値なら，Mは半正定値.

の部分はP行列.

正定値	⇒	P
⇓		⇓
半正定値	⇒	P0

⟹ だから，Mは確かにP_0っぽい！

MがP_0行列であることを証明できたら何か嬉しい！

一応，証明を頑張る前に，小さい次元の行列で
反例が無いか確認しておこう･･･

BN数 N=2, 時間区切数 K=3

コマンド ウィンドウ

MATLAB をはじめて使う方は、ビデオや例、『ご利用の前に』をご覧ください。

```
>>
>>
>> M

M =

    20     0     0     0     0     0    -1    -1     0     0
    39    39     0     0     0     0     0    -1     0     0
   -20     0    20     0     0     0     0     0    -1    -1
   -39   -39    39    39     0     0     0     0     0    -1
     0     0   -20     0    20     0     0     0     0     0
     0     0   -39   -39    39    39     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     1     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     1

>> [aa,bb] = P0check(M)

percent =

   61.0389


aa =

           0          9781          6602


bb =

        det: []
     matrix: []
        num: []
    details: []

>> det(M([1,2,3,6,8,12,14],[1,2,3,6,8,12,14]))

ans =

  780.0000
```

コマンド ウィンドウ

MATLAB をはじめて使う方は、ビデオや例、『ご利用の前に』をご覧ください。

```
>>
>>
>> M

M =

    20     0     0     0     0     0    -1    -1     0     0     0     0     0     0
    41    41     0     0     0     0     0    -1     0     0     0     0     0     0
   -20     0    20     0     0     0     0     0    -1    -1     0     0     0     0
   -41   -41    41    41     0     0     0     0     0    -1     0     0     0     0
     0     0   -20     0    20     0     0     0     0     0    -1    -1     0     0
     0     0   -41   -41    41    41     0     0     0     0     0    -1     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0    -1     0
     1     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0    -1
     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0    -1     0
     0     0     1     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0    -1
     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0    -1     0
     0
     0
     0

>> [aa,bb]

percent =

   61.0389


aa =

          11          9781          6591


bb =

        det: [-820.0000 -1.6400e+04 -820.0000 -820.0000 -1.6400e+04 -820.0000 -1.6400e+04 -41.0000 -820.0000
     matrix: [11x14 double]
        num: [10407 10423 11447 14567 14583 14759 14775 14823 14839 15527 15543]
    details: {1x11 cell}

>> det(M([1,2,3,6,8,12,14],[1,2,3,6,8,12,14]))

ans =

 -820.0000
```

MはP_0行列ではなかった！

線形相補性問題(LCP)への定式化（再掲）

s ：各ユーザーが選ぶ勤務地からの出発時刻

$q_i(s)$ ：エリア i に居住し，勤務地到着（出発）時刻として s を選ぶユーザーの割合　（勤務地到着率／出発率）

朝ラッシュモデル

$$\text{Find } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N} \text{ s.t. } \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \ge 0, \text{ where}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\boldsymbol{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu (I - L) & 0 \\ \hline \boldsymbol{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \boldsymbol{1}_K \otimes D_\mu \boldsymbol{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

夕方ラッシュモデル

$$\text{Find } \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N} \text{ s.t. } \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \ge 0, \text{ where}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\boldsymbol{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu L & 0 \\ \hline \boldsymbol{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \boldsymbol{1}_K \otimes D_\mu \boldsymbol{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

等価な変分不等式への変換

変数 **q** を含まない低次元の変分不等式としても等価に記述可能.

朝ラッシュモデルと等価なVIP

$$
\begin{aligned}
\text{Find} \quad & (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \Omega \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^{K} D_\mu \boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{w})^\top (\boldsymbol{w}'_k - \boldsymbol{w}_k) - \boldsymbol{Q}^\top (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \geq 0 \quad \forall (\boldsymbol{w}', \boldsymbol{\rho}') \in \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{G}_k(\boldsymbol{w}) := \mathbf{1} + (I - L)(\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{w}_{k-1}) \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{w}_0 = 0)
$$

$$
\Omega := \left\{ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{NK+N} \,\middle|\, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \geq \mathbf{0}, \ \ p_k \mathbf{1} + L(\boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{\rho} \geq 0 \ (k = 1, \ldots, K) \right\}
$$

実は, この変分不等式問題のKKT条件を考えたときのLagrange乗数が **q** にほかならない.（演習問題）

夕方ラッシュモデルも同様に記述可能

均衡解の存在性

均衡モデルを提案したら，均衡解の存在性を議論することは重要．

（朝ラッシュモデル）

Find $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2NK+N}$ s.t. $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \perp M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \geq 0$, where

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_K \otimes L & -\mathbf{1}_K \otimes I \\ \hline -I_K \otimes L^\top & \Delta_K \otimes D_\mu(I - L) & 0 \\ \hline \mathbf{1}_K^\top \otimes I & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{p} + \mathbf{1}_K \otimes L\boldsymbol{c} \\ \hline \mathbf{1}_K \otimes D_\mu \mathbf{1} \\ \hline -\boldsymbol{Q} \end{array}\right]$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} &0 \leq q \perp [I_K \otimes L]w - [\mathbf{1}_K \otimes I]\rho + [p \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}_K \otimes Lc] \geq 0 \\ &0 \leq w \perp [\Delta_K \otimes D_\mu(I - L)]w - [I_K \otimes L^\top]q + [\mathbf{1}_K \otimes D_\mu \mathbf{1}] \geq 0 \\ &0 \leq \rho \perp [\mathbf{1}_K \otimes I]q - Q \geq 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ この問題を点集合写像の不動点問題に再定式化．

均衡解の存在性

$$0 \le w \perp [\Delta_K \otimes D_\mu(I-L)]w - [I_K \otimes L^\top]q + [I_K \otimes D_\mu \mathbf{1}] \ge 0 \quad \text{(a)}$$

$$0 \le q \perp [I_K \otimes L]w - [\mathbf{1}_K \otimes I]\rho + [p \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}_K \otimes Lc] \ge 0 \quad \text{(b)}$$

$$0 \le \rho \perp [\mathbf{1}_K \otimes I]q - Q \ge 0 \quad \text{(c)}$$

(a) において，q が所与とみなせば，wは一意に定まる.

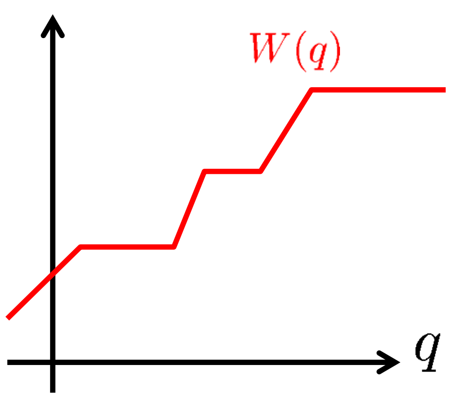
（∵ wにかかる行列は下三角行列．）

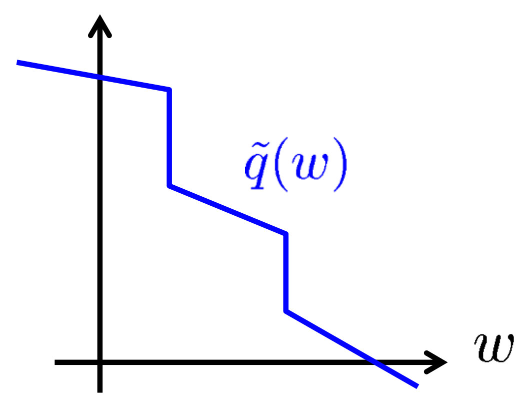
$$\exists W : \mathbb{R}^{NK} \to \mathbb{R}^{NK}, \text{ s.t. } w = W(q)$$

(c)⇔ $[\mathbf{1}_K \otimes I]q - Q = 0$ なので，これと(b)より，

$$\exists \tilde{q} : \mathbb{R}^{NK} \to 2^{\mathbb{R}^{NK}}, \text{ s.t. } q \in \tilde{q}(w)$$

上半連続で任意の像は非空コンパクト凸集合（詳細略）





均衡解の存在性

$$0 \le w \perp [\Delta_K \otimes D_\mu(I-L)]w - [I_K \otimes L^\top]q + [I_K \otimes D_\mu \mathbf{1}] \ge 0 \quad \text{(a)}$$

$$0 \le q \perp [I_K \otimes L]w - [\mathbf{1}_K \otimes I]\rho + [p \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}_K \otimes Lc] \ge 0 \quad \text{(b)}$$

$$0 \le \rho \perp [\mathbf{1}_K \otimes I]q - Q \ge 0 \quad \text{(c)}$$

(a) において，q が所与とみなせば，wは一意に定まる．

（∵ wにかかる行列は下三角行列．）

$$\exists W : \mathbb{R}^{NK} \to \mathbb{R}^{NK}, \text{ s.t. } w = W(q)$$

(c)⇔ $[\mathbf{1}_K \otimes I]q - Q = 0$ なので，これと(b)より，

$$\exists \tilde{q} : \mathbb{R}^{NK} \to 2^{\mathbb{R}^{NK}}, \text{ s.t. } q \in \tilde{q}(w)$$

上半連続で任意の像は非空コンパクト凸集合（詳細略）

⟹ 不動点問題 $q \in \tilde{q} \circ W(q)$ に解が存在すれば，上記LCPも解をもつ．

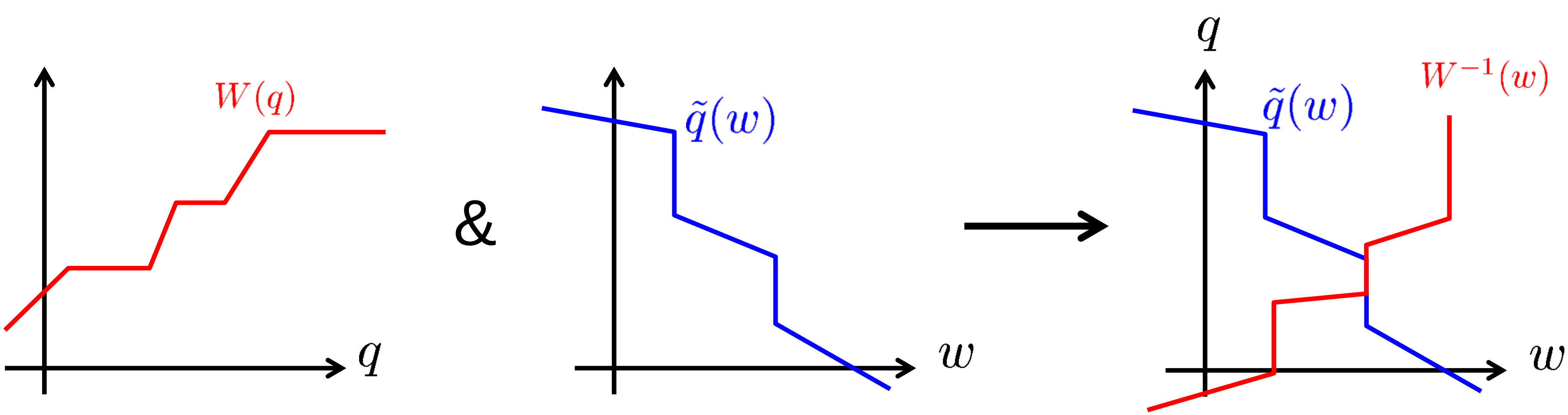
- 点集合写像 $\tilde{q} \circ W$ は上半連続で任意の像は非空コンパクト凸集合
- 点集合写像 $\tilde{q} \circ W$ の定義域 Ω は非空コンパクト凸であり，$\tilde{q} \circ W(\Omega) \subseteq \Omega$

⟹ 角谷の不動点定理より，不動点問題に解が存在．

均衡解の一意性

均衡解の一意性は未証明. 実験的には wに関しては
一意性が成り立つことが確認できている.
(q に関しては一意性が成り立たない例がある.)

1変数のイメージ



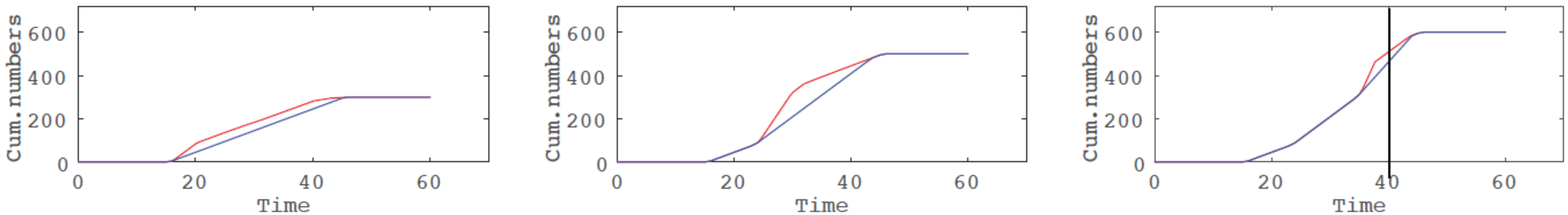
多変数の場合, 上記のことを degree theory等を用いて
上手く証明できないか模索中・・・

数値計算例（朝ラッシュモデル）

BN数：N=3，時間区切:K=60，BN処理能力：μ = (30,20,10), ユーザー数： Q=(100,200,300)

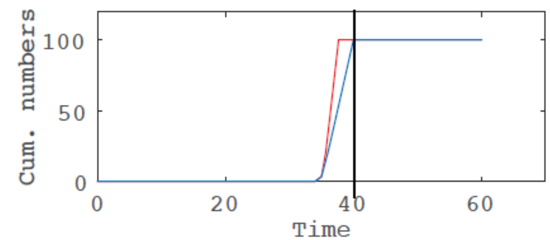
赤線：BNへの累積流入台数　　青線：BNからの累積離脱台数

BN3（上流）　BN2（中流）　BN1（下流）

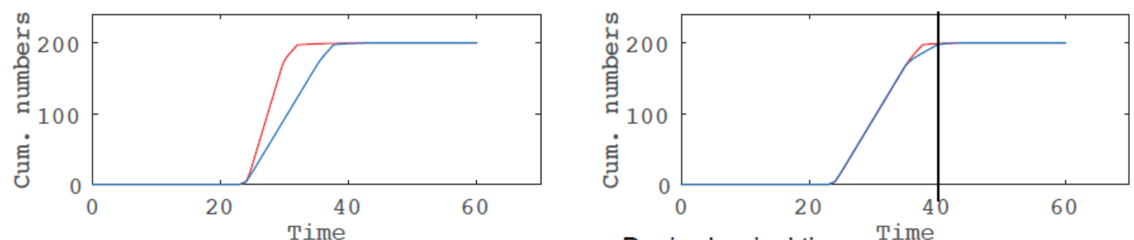


全エリア合計

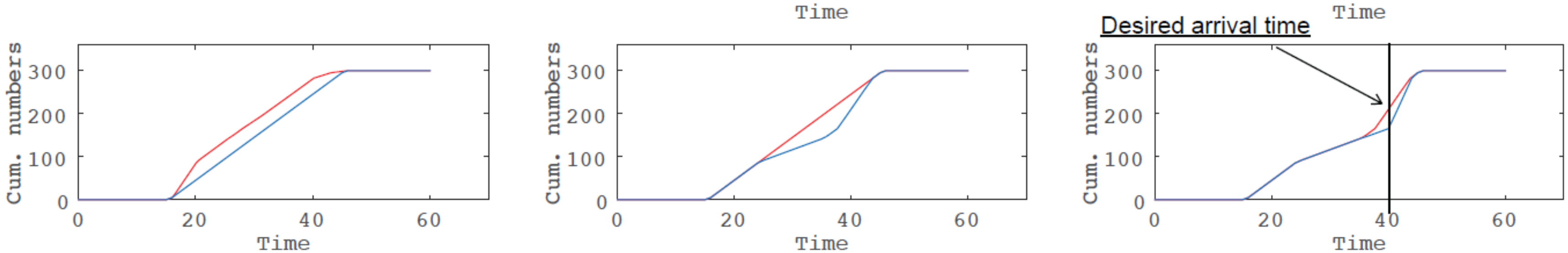
First row: Aggregate cumulative curves
Second row: Disaggregate cumulative curves for users with origin 1
Third row: Disaggregate cumulative curves for users with origin 2
Fourth row: Disaggregate cumulative curves for users with origin 3



エリア1居住者



エリア2居住者

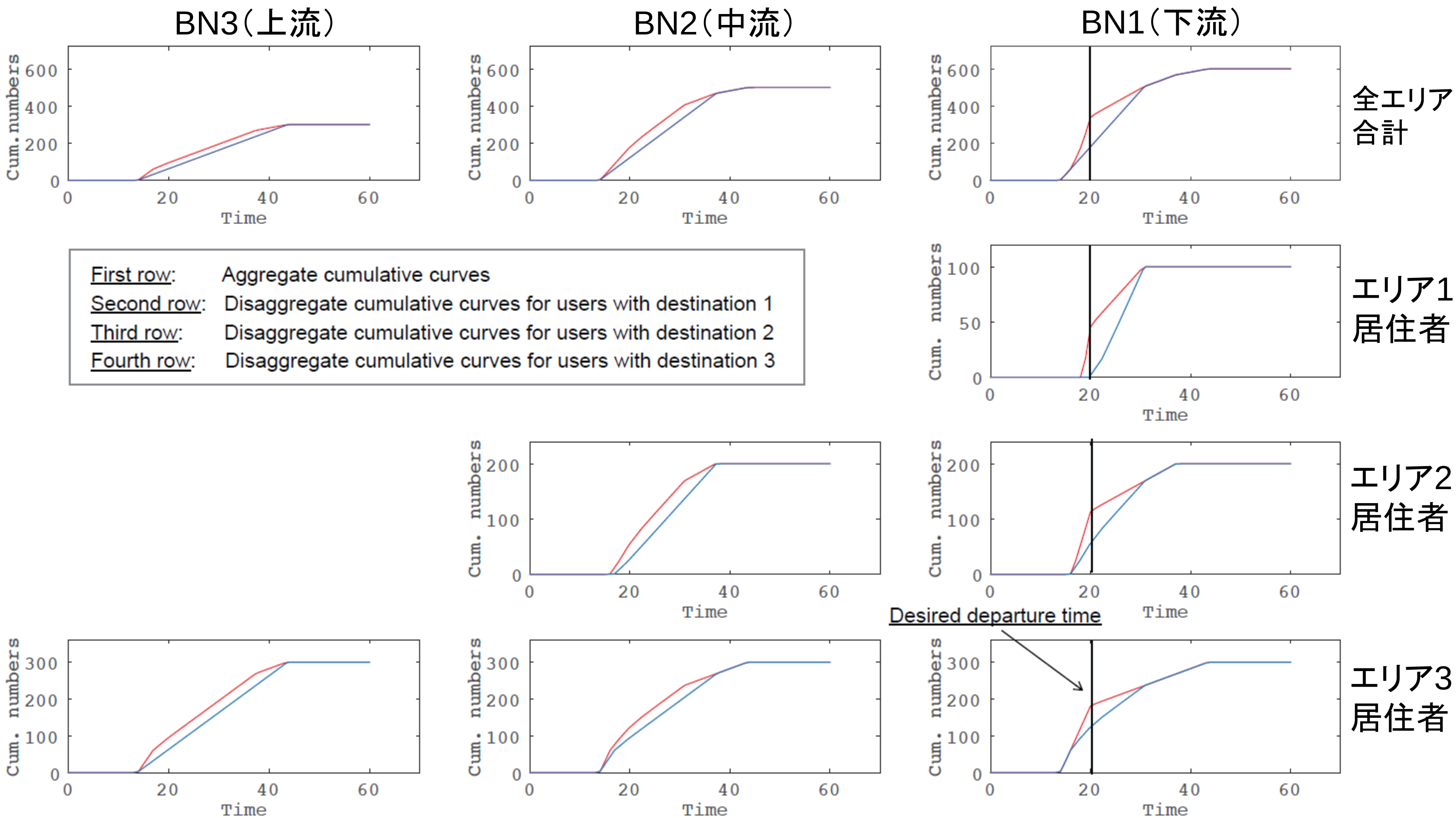


エリア3居住者

数値計算例（夕方ラッシュモデル）

BN数：N=3，時間区切:K=60，BN処理能力：μ = (30,20,10), ユーザー数： Q=(100,200,300)

赤線：BNへの累積流入台数　　青線：BNからの累積離脱台数

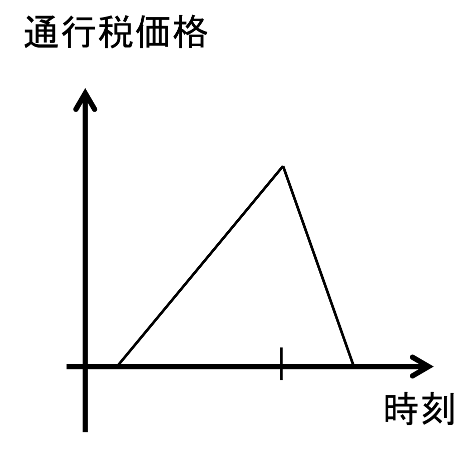


最近の話題1

ボトルネック通行税を導入したモデル.

→ 混雑する時間帯にボトルネック通行税を課すことにより，交通量を分散させる.

均衡状態が自動的にシステム最適となるような通行税の導入が（理論的には）可能.



通行料金はある種の最適化問題のKKT条件におけるLagrange乗数で特徴づけられる.

通行料金は時々刻々と変化.

最近の話題2

ボトルネック通行権とその売買市場を導入したモデル.

各ボトルネックに通行権を発行. 通行権をもつドライバーは決められた時刻にのみボトルネックを通行可能.

通行権はボトルネック容量分しか発行しないので, 待ち行列が発生しない.

通行権は市場で売買されることで価格が付く. 希望到着時刻近辺の通行権は高値となる.

均衡解を求める問題は無限次元線形計画問題として定式化.

均衡状態でボトルネック通行権価格が全時間帯でゼロとなるボトルネック（false bottleneck）が発生.

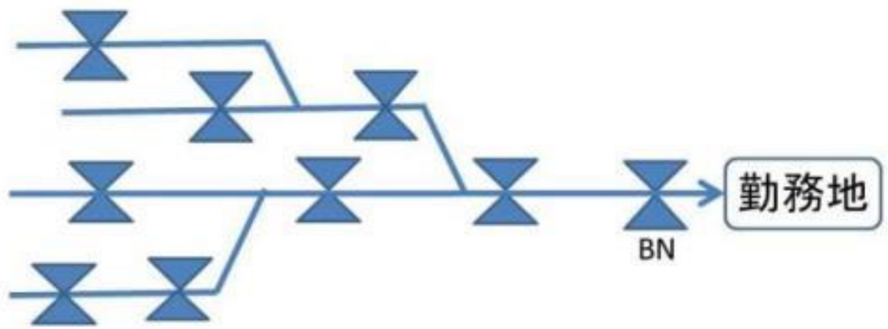
Osawa et al. は各ボトルネックの正規化需要（上流の総居住者数／ボトルネック容量）の大小関係により均衡解におけるfalse bottleneckを同定（無限次元線形計画問題を解かなくても. ）

最近の話題3

ツリー型ネットワークへの拡張

コリドー型

ツリー型



ツリー型ネットワークだと経路選択の余地がなく，FIFOが保証されるため，コリドー型の結果が自然に拡張可能.

False bottleneckの同定など，コリドー型と同じようにいかないケースもいくつか存在.

今後の課題（個人的興味含む）

無限次元 ver. での均衡解の存在性・一意性の解析

関数空間のLPやLCPを取り扱う必要がある.

存在性に関してはまだしも，一意性はどう定義？

ほとんど至るところ同じ値の２つ関数は？

関数のクラスをどう限定？（連続／リーマン可積分／etc）

バナッハ空間上での最適化理論が適用可？

無限次元 ver. での厳密求解アルゴリズム

変数は無限次元だが，解の区分線形性を仮定すれば
有限の情報で表現可能では？

マルチタイプユーザー ver. への拡張

経路選択問題との融合

ロバスト最適化と錐相補性問題を使った定式化．etc…

ご静聴ありがとうございました.