- 教員名: 山下剛
- 教員の大分野名: 代数学, 幾何学
- 教員の小分野名: 整数論, 数論幾何, 代数幾何学
- 分野のキーワード: p 進 Hodge 理論, Galois 表現, 多重ゼータ値
- 研究分野紹介: 数論幾何, 特に以下のトピックに関心を持っている:
  ・p 進 Hodge 理論とそれに関連する分野 ((φ, Γ) 加群, p 進微分方程式など),
  ・岩澤理論と Bloch-加藤の玉河数予想,
  ・多重ゼータ値, 淡中基本群, 混合 Tate モチーフ,
  ・志村多様体 (や Drinfel'd モジュラー多様体やシュトゥカのモジュライ) と Langlands 対応,
  ・保型性持ち上げ定理 ($R = \mathbb{T}$) と p 進 Langlands 対応,
  ・代数的サイクル, 混合モチーフ, 代数的 K 理論,
  ・宇宙際 Teichmüller 理論とそれに関連する分野
  (遠アーベル幾何, p 進 Teichmüller 理論, Hodge-Arakelov 理論など).

p 進 Hodge 理論の研究: hollow 対数的スキームを導入することで, 積構造・push-forward・サイクル類と整合的な形で開多様体に対する p 進 Hodge 理論を証明した. 直接の関係はないが関連する話題として, (幾何的な定理である)p 進 Hodge 理論の比較同型が Fermat 多様体の時に具体的に計算すると円分体の岩澤理論における (数論的な定理である)Stickelberger の定理を意味していることの観察もした. p 進 Hodge 理論それ自身ではないが, p 進コホモロジー論の整備として p 進 Lefschetz$(1, 1)$ 定理を準安定還元の場合へ拡張することおよび兵頭-加藤同型を族の場合に拡張することをした. その結果 Maulik-Poonen による Picard 数跳躍軌跡についての結果を準安定な場合に拡張した.

多重ゼータ値の研究: Zagier の次元予想の p 進版である p 進多重ゼータ値の空間の次元についての予想を定式化 (古庄氏との予想) した. 混合 Tate モチーフの圏のモチーフ的 Galois 群を用いることでその (代数的 K 理論と関係のある) 予想値で次元を上からおさえることを示した. p 進多重 L 値の空間の次元も代数的 K 理論と関係のある量で抑えたが, 多重 L 値の時と同様に p 進多重 L 値の間には一般に代数的 K 理論だけでは説明できない関係式が存在し, その一部は保型形式と関係することも示した. 混合 Tate モチーフの圏のモチーフ的 Galois 群の特殊元についての Grothendieck の予想の p 進版も定式化し, それと上述の古庄氏との次元予想及び p 進等圧予想との関係も明らかにした. また, 岩澤理論の "混合 Tate 型の非可換化" の方向性の疑問も提示した. p 進 Riemann ゼータ値と有限 2 重ゼータ値の関係も示した. Bernoulli 数の convolution 恒等式の簡明な別証明をみつけ, convolution 恒等式から指数 $(1, 1, -k)$ の有限 3 重ゼータ値の有理性を証明した.

保型性持ち上げ定理 ($R = \mathbb{T}$) の研究: Taylor-Wiles によってつくられ Kisin によって改良された Taylor-Wiles 系の議論による保型性持ち上げ定理 ($R^{\mathrm{red}} = \mathbb{T}$) とそこから得られる Langlands 対応において, 技術的には整 p 進 Hodge 理論を用いて局所普遍変形環を調べることが核心になってくる. Berger-Li-Zhu による Frobenius 跡の附値が十分大きい時のクリスタリン表現の法 p 還元の計算及びそれを用いた Kisin による局所普遍変形環の構造解明の手法を n 次元表現に拡張した (考える絶対 Galois 群も p 進体だけでなくその有限次不分岐拡大にも拡張した)(安田氏との共同研究). その研究を Frobenius 跡の附値が大きくないときにも推し進め, p 進体の絶対 Galois 群の 2 次元表現で Hodge-Tate 重みの差が $\frac{p^2+1}{2}$ 以下の時にクリスタリン表現の法 p 還元を計算し, その様子が超幾何多項式の係数や終結式の p 可除性などにより統制される事実を見つけた (同様に安田氏との共同研究). これはクリスタリン表現の法 p 還元についてこれまで知られていなかった現象である.

他のトピックで進行中のものがいくつかあるが割愛する.

- 志望者に期待すること: 大学院に入学するまでに, たとえば,
  ・Hartshorne, "Algebraic Geometry"
  ・Silverman, "The Arithmetic of Elliptic Curves"
  ・Serre, "Local Fields"
  などのテキストによって, それぞれ代数幾何学の基礎知識・楕円曲線の基礎知識・局所類体論の基礎知識を得ていることが望ましいが, 入学後にセミナーで理解を確認していくのでもよい. 勉強の進んでいる人は, たとえば Mumford の "Abelian Varieties" や Grothendieck et al. の SGA (Séminaire de Géométrie Algébrique) や Deligne の "La Conjecture de Weil I, II" などにも読み進めてもらえるとよい.