

トーリック多様体と半群環のコホモロジー群

東北大学大学院理学研究科 石田 正典

京都大学数学教室談話会 2008 年 12 月 10 日

階数有限の自由 \mathbb{Z} 加群の 0 を含む有限生成部分半群 \mathcal{S} を考え、ある体 k 上の半群環 $S = k[\mathcal{S}]$ を考える。実空間の中で \mathcal{S} の凸包 $C(\mathcal{S})$ を考えると、これは有理的な凸多角錐となっている。トーリック多様体の理論の習慣にならって、 $C(\mathcal{S})$ はある空間内の強凸な多角錐 π の双対錐と考える。

π の面全体の集合 $F(\pi)$ は包含関係について有限な順序集合となっている。各面 σ の向きづけを固定すれば、相対的に余次元 1 の面となるような面の組 $\sigma \prec \tau$ に対して結合係数 $[\sigma, \tau] = \pm 1$ が定まる。このことを使うと、各 σ から加群への意味のある自然な対応 G があれば、 $F(\pi)$ を基底とした複体 $C^*(F(\pi), G)$ を作ることができる。ただし、 G が共変的である場合と反変的な場合では複体の準同型の向きが逆になる。

Bruns-Herzog の本にあるように、 \mathcal{S} の可逆元が 0 だけの場合、任意の S 加群 M の極大イデアルについての局所コホモロジー群が、 σ に $M \otimes_S S_\sigma$ を対応させる反変的な G による複体のコホモロジー群に等しくなる。ここで S_σ は σ に対応する S の素イデアルに含まれない半群の元全体による S の局所化である。

同様のことは射影的トーリック多様体上の準連接層のコホモロジー群についても成り立つ。実際、このようなコホモロジー群は、ある半群環上の加群の局所コホモロジー群の直和因子となっている。

正規半群環については、柳川浩二による平方因子をもたない加群の局所コホモロジー群についての理論がある。この理論と藤野による射影的トーリック多様体上の微分層のコホモロジー群に関する消滅定理との関係についても述べる予定である。