偏微分方程式の消散構造とエネルギー減衰*

川島 秀一

九州大学大学院数理学研究院

波動方程式や Shrödinger 方程式はエネルギー保存が成立する方程式として有名であり，一方，熱方程式はエネルギー減衰が起きることで知られる．空間変数 x について Fourier 変換した方程式を考えれば，熱方程式 $u_t = \Delta u$ の場合の固有値 $\lambda(i\xi)$ は $\lambda(i\xi) = -|\xi|^2$ であり，これがエネルギー減衰を特徴付けるといって良い．より一般的には，適当な正定数 c に対して

$$\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi) \le -c|\xi|^2/(1+|\xi|^2)$$

で特徴付けられる消散構造の枠組みを考えるのが好都合である．この形の消散構造を持つ簡単な例としては，消散的波動方程式 $u_{tt} - \Delta u + u_t = 0$ がある．また，この形の消散構造は，圧縮性 Navier-Stokes 方程式を含む

$$A^0 u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Lu = \sum_{j,k=1}^{n} B^{jk} u_{x_j x_k}$$

の形の対称系に対しては,「安定性条件」という形で完全な特徴付けが与えられている．なお，Zuazua の最近の論文において，この「安定性条件」と制御理論における Kalman の階数条件や Hörmander の hypoellipticity の条件との関わりが指摘されている．

ところで近年，この枠組みに収まらないより弱い形の消散構造がいくつか発見され注目を集めている．その消散構造は，適当な $0 < m < l$ に対して

$$\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi) \le -c|\xi|^m/(1+|\xi|^2)^{l/2}$$

の形で特徴付けられる．本談話会では，いくつかの具体例を題材に，このような弱い形の消散構造を従来の消散構造との対比で解説し，そのエネルギー減衰と非線形安定性問題への応用について論じる．

---

*談話会，京都大学理学部，2009 年 10 月 14 日