連分数展開の Legendre 定数と Lenstra 定数について

仲田　均

無理数 $x \in (0,1)$ の正則連分数展開による第 n 主近似を $\frac{p_n}{q_n}$ とおく。このとき任意の x について次の古典的結果は良く知られている：
(Legendre) 有理数 $\frac{p}{q} \neq 0$ に対して

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

であれば、ある $n \geq 1$ に対して

$$\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$$

である。また、ここで、任意の $c > 2$ に対してある x では

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

かつ、すべての $n \geq 1$ に対して

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$$

が成立する。この意味で $\frac{1}{2}$ を 正則連分数の Legendre 定数とよぶ。

一方、ほとんどすべての x, $0 < x < 1$ に対して、

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sharp \{ n,\, 1 \leq n \leq N \,:\, q_n^2 \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < c \} \begin{cases} = \frac{1}{\log 2} \cdot c & \text{for } 0 \leq c \leq \frac{1}{2} \\ < \frac{1}{\log 2} \cdot c & \text{for } \frac{1}{2} < c \leq 1 \end{cases}$$

が成立する。この意味で、$\frac{1}{2}$ を 正則連分数の Lenstra 定数とよぶ。

この講演では Legendre 定数と Lenstra 定数が共に $\frac{1}{2}$ になることが偶然の一致ではないことを示す。また、その証明方法が Hecke 群に付随する Rosen 型連分数など他の連分数展開にも適用できることを確認し、Legendre 定数の決定に応用する。証明には、Diophantus 近似、連分数と modular surface 上の geodesic flow の関係を用いる。