Laguerre 過程の漸近挙動

種村 秀紀　　(千葉大学理学部)

$B_{ij}(t), \tilde{B}_{ij}(t), 1 \leq i, j < \infty$ を独立な一次元ブラウン運動とする. $N, \nu \in \mathbb{N}$ に対して

$$M(t) = \left(B_{ij}(t) + \sqrt{-1}\tilde{B}_{ij}(t)\right)_{1 \leq i \leq N+\nu, 1 \leq j \leq N}$$

とおき, $\Xi(t) = M(t)^* M(t), t \in [0, \infty)$ で定義された $N \times N$ エルミート行列値過程を Laguerre 過程または複素 Wishart process という. このエルミート行列値過程の固有値 $\lambda_i, 1 \leq i \leq N$ は, 次の確率微分方程式

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}dB_i(t) + 2\left\{N + \nu + \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_j(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\right\} dt, \quad 1 \leq i \leq N.$$

をみたす拡散過程であり, 非衝突条件の下での N 本の $2(\nu + 1)$ 次元ベッセル過程を表している.

この談話会では N を無限大にしていったときの

$$\xi_N(t) = \{\lambda_i(a_N(t)) - x_N, \ 1 \leq i \leq N\}$$

漸近挙動を次の 4 つの場合に分けて紹介する:

(i) ν を固定したまま $x_N = 0$, $a_N(t) = N + t$ として $N \to \infty$ とする.

(ii) $\nu = qN$, $x_N = cN, c \in (c^{\min}, c^{\max})$, $a_N(t) = 1 + t/N$ として $N \to \infty$ とする.

(iii) $\nu = qN$, $x_N = c^{\min} N^{2/3}$, $a_N(t) = N^{-1/3} + t/N$ として $N \to \infty$ とする.

(iv) $\nu = qN$, $x_N = c^{\max} N^{2/3}$, $a_N(t) = N^{-1/3} + t/N$ として $N \to \infty$ とする.

ここで $c^{\min} = q + 2 - 2\sqrt{q+1}$, $c^{\max} = q + 2 + 2\sqrt{q+1}$ であり, q は 1 以上の実数とする. (i) の場合を hard edge, (ii) の場合を bulk, (iii), (iv) の場合を soft edge という.

参考文献

[1] Marcenko, V.A. and Pastur, L.A. : Distribution of eigenvalues for some sets of radom matrices, Sb. Math. **1** 457-486 (1967).