行列単調関数の３つのタイプ

日合文雄（東北大情報科学）

学部１年生にも分かる易しい話をします (しかし定理の証明が易しいというわけではありませんが). $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列の全体, $M_n(\mathbb{R})$ を $n \times n$ 実行列の全体とします. エルミート行列 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, $A - B$ が半正定値のとき $A \geq B$ (半正定値順序) と書きます. また, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し, $A - B$ の成分がすべて非負のとき $A \succeq B$ (成分毎順序) と書きます. f を開区間 $(-\alpha, \alpha)$ 上の実数値関数とします (とりあえず, f の連続性も仮定しません). エルミート行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, $A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U^*$ (U はユニタリ行列) と対角化して, $\lambda_i \in (-\alpha, \alpha)$ $(i = 1, \dots, n)$ のとき, A の f による関数カルキュラス $f(A)$ を $f(A) := U \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} U^*$ と定めます. 他方, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ に対し, $a_{ij} \in (-\alpha, \alpha)$ $(i, j = 1, \dots, n)$ のとき, A の f による成分毎カルキュラス $f[A]$ を $f[A] := \begin{bmatrix} f(a_{11}) & \cdots & f(a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_{n1}) & \cdots & f(a_{nn}) \end{bmatrix}$ と定めます. このとき, 関数 f の行列単調性と行列凸性について, f によるカルキュラスと行列の順序の組合せで, 以下の４通りのタイプが考えられます：

(I) 関数カルキュラスと半正定値順序,
(II) 関数カルキュラスと成分毎順序,
(III) 成分毎カルキュラスと半正定値順序,
(IV) 成分毎カルキュラスと成分毎順序.

まず (IV) の場合は通常の関数としての単調性, 凸性と同じですから, 行列とは関係ありません. (I) の場合が行列論で最も標準的で最も重要です. これについては, 有名な Löwner 理論があります.

(II) の場合, 任意の n と固有値がすべて $(-\alpha, \alpha)$ の属する対称行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し

$$A \succeq B \succeq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(A) \succeq f(B)$$

のとき, f を m-単調といい,

$$A \succeq B \succeq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda A + (1-\lambda)B) \preceq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

のとき, f を m-凸といいます. F. Hansen は 1992 年に, 関数 f の m-単調性と m-凸性を特徴付けています.

我々は, (III) の場合を考え, 任意の n と成分がすべて $(-\alpha, \alpha)$ の属する対称行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し,

$$A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f[A] \geq f[B]$$

のとき, f を S-単調といい,

$$A \geq B \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f[\lambda A + (1-\lambda)B] \leq \lambda f[A] + (1-\lambda) f[B] \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

のとき, f を S-凸といいます. このとき, かなり驚くべきことに, 関数 f の S-単調性, S-凸性の特徴付けがそれぞれ m-単調性, m-凸性と全く同じであることが分かります.

上で述べた３つのタイプ (I), (II), (III) の行列単調関数と行列凸関数の特徴付けについて解説します.