双曲空間上のブラウン運動

2007/11/7　松本裕行

$\mathbf{H}^{n+1}=\{(x,y)=(x^1,...,x^n,y)\in\mathbf{R}^{n+1};y>0\}$ を $(n+1)$ 次元上半空間とし，Poincaré 計量 $ds^2=y^{-2}(dx^2+dy^2)$ を入れる．Laplace-Beltrami 作用素は，この直交座標の下で，

$$\Delta=y^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-(n-1)y\frac{\partial}{\partial y}$$

と書かれる．

一般に，リーマン多様体 M 上の Laplace-Bertrami 作用素を Δ_M と書くとき，$\Delta/2$ を生成作用素とする拡散過程を M 上の Brown 運動と呼ぶ．局所座標を用いて確率微分方程式を解くことにより構成することができる．

上の実双曲空間上では，$(n+1)$ 次元標準 Brown 運動 $\{(w_t^1,...,w_t^n,B_t),t\geqq 0\}$ に対して

$$\begin{cases}dX_t^j=Y_t dw_t^j, & j=1,2,...,n,\\ dY_t=Y_t dB_t-\dfrac{n-1}{2}\,Y_t dt\end{cases}$$

を解けばよい．この確率微分方程式は具体的に解くことができて，解 $\{Z_t=(X_t,Y_t)\}$ は

$$\begin{cases}X_t^j=X_0^j+\displaystyle\int_0^t Y_s dw_s^j, & j=1,2,...,n,\\ Y_t=Y_0\exp\left(B_t-\dfrac{n}{2}t\right)\end{cases}$$

と Wiener 汎関数として具体的に表現することができる．

講演の前半では，この表現から話を始めて，

1. 古くから知られているものとは異なる熱核の具体形を Gruet に従って与え，その漸近挙動に関する結果を述べ，

2. Brown 運動自身の $t\to\infty$ における漸近挙動に関して述べる．

微分形式に作用する Laplacian などの解析に応用するためには，ブラウン運動の正規直交枠束への水平持ち上げが必要である．後半部分では，Poincaré 上半平面上で考えると，水平持ち上げに対する確率微分方程式の解が，やはり Wiener 汎関数として具体的に表現されることを述べる．さらに 1 次微分作用素に作用する Laplacian に対する熱核の表示が得られること，コンパクトなリーマン面上の Selberg 跡公式に応用できることを述べたい．