

Construction of geometric invariants by symplectic representations

森田 茂之

種数 g の閉曲面 Σ_g ($g \geq 1$) の 1 次元有理係数ホモロジー群を $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ と表す. このとき交叉数形式 $H \otimes H \rightarrow \mathbb{Q}$ により, H はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$ の基本表現空間となる. もし Σ_g に Riemann 面の構造 M が与えられている場合には, その Jacobi 多様体を $Jac(M)$ とするとき, 自然な同一視 $H_1(Jac(M); \mathbb{Q}) = H$ がある. M の基点 p を選べば Abel-Jacobi の写像 $f : M \rightarrow Jac(M)$ が定義されるが, f が誘導するコホモロジーの準同型写像

$$f^* : H^2(Jac(M); \mathbb{Q}) \cong \Lambda^2 H \longrightarrow H^2(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

において, $f^*([\omega]) = 2g$ となる. ここで ω は $Jac(M)$ 上の自然なシンプレクティック形式であり, $[\omega] \in \Lambda^2 H$ は対応するコホモロジー類を表す. こうしてシンプレクティック群の表現のことばによって, 重要な幾何的不変量 g が説明されることが分かる.

上記の事実は, 様々な形で一般化される. 例えば, よく知られているように $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$ のリー代数 $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Q})$ は, Sp 表現としては 2 次対称積 $S^2 H$ に同型であるが, 極大コンパクト群 $U(g)$ に関する相対コホモロジー群 $H^*(\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Q}), U(g)) \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3, \dots]$ は, Siegel モジュラー群 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の安定コホモロジー群を生成する (Borel). 一方, $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Q})$ 自身の g に関する安定コホモロジー群は

$$\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Q})) \cong \lim_{g \rightarrow \infty} (\Lambda^* S^2 H)^{\mathrm{Sp}} / \sim \cong H^*(S^3 \times S^7 \times S^{11} \times \dots; \mathbb{Q})$$

となることが知られている. 一般に, $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$ の表現空間, あるいはそれらからなるリー代数のコホモロジーの Sp 不変部分空間は, Weyl の不変式論を用いて記述され豊富な構造を持つことが分かる. ここでは Kontsevich によるグラフコホモロジーの考えが基本的である. しかし, 具体的に求めることは極めて難しい.

本講演では, Riemann 面やグラフのモジュライ空間, 曲面やグラフの写像類群, その重要な部分群である Torelli 群, あるいは横断的にシンプレクティックな葉層構造や 3 次元多様体の不変量等の研究において, 交代積 $\Lambda^* H$ と対称積 $S^* H$ を初めとする, 種々の Sp 表現空間が現れることを見る. そして, それらを用いていろいろな特性類や幾何的不変量が, どのようにして構成されるかを見てみることにする. これらを通して, いくつかの問題や予想も提出してみたい.