非線形シュレディンガー方程式に対する次の特異摂動問題を考える.

$$(*)_\varepsilon \quad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u(x) > 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty. \end{cases}$$

このような方程式および関連する方程式系に対する特異摂動問題は量子力学における半古典極限 (semi-classical limit) を始めとするいろいろな問題において現れる. 凝集解 — $(*)_\varepsilon$ の解 $u_\varepsilon(x)$ に対して rescale された関数 $v_\varepsilon(y)$ を $v_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(\varepsilon y + x_\varepsilon)$ により導入すると $-\Delta v + V(x_0)v = f(v)$ $(x_0 = \lim x_\varepsilon)$ の非自明な解に収束する解 — の存在と凝集点 x_0 の特徴付けがもっとも興味ある問題となる. このような凝集解の存在は従来, 極限方程式とその解集合に対する一意性, 非退化性等の非常に強い仮定のもと Lyapunov-Schmidt 法等の有限次元近似を用いて行われることが多いが, 極限方程式の解集合に関する仮定は一般にチェックが難しく, 特に方程式系の場合そのような例はほとんど知られていない. ここでは, 極限方程式の解集合に対して一意性, 非退化性を仮定せずに解を構成する局所化された変分的方法を紹介し, その応用として clustering peak をもつ解の存在等を述べる.

この研究は Jaeyoung Byeon 氏 (Postech, Korea) との共同研究である.