非対称マルコフ半群の超縮小性とその応用

重川 一郎

具体的な問題から始めることにする．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{1}$$

の解は，熱の拡散を表している．ここではこの方程式をコンパクトリーマン多様体の上で考えよう．$\Delta$ は Laplace-Beltrami 作用素である．するとこの方程式の解は時間とともに定数に収束していく．ここではこの問題を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + bu \tag{2}$$

の解と比較することを考える．$b$ はベクトル場で $\operatorname{div} b = 0$ を仮定しておく．すると，(2) の解もやはり定数に収束していく．その収束の速さを比べたい．

そこで (1) の基本解を $p(t,x,y)$ と表し，(2) の基本解を $q(t,x,y)$ と表す．基本の測度は正規化されたリーマン測度を取っている．$p(t,x,y)$, $q(t,x,y)$ ともに 1 に収束するが，その速さを比較するのに次のような指数を導入する．

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{1\to\infty} &= -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M}|p(t,x,y)-1|,\\
\gamma_{1\to\infty} &= -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x,y\in M}|q(t,x,y)-1|.
\end{aligned}$$

このとき $\tilde{\gamma}_{1\to\infty} \le \gamma_{1\to\infty}$ が証明できる．また $\Delta + b$ が正規作用素の場合は等号が成り立つ．従って一般に対称でない場合の方が速く収束することが分かる．正規作用素の場合は収束の速さは変わらないことが分かる．

さて，この講演では，これらの問題を一般的な枠組みで考える．$L^2$ の枠組みでのスペクトルとの関連が基本的であるが，基本解の収束を一様収束で考えるために，超縮小性を利用する．ここでは非対称マルコフ半群に対する超縮小性を議論し，その応用として基本解の収束の問題を取り扱う．