教授　玉川 安騎男　（整数論，数論幾何学の研究）

代数多様体，特に代数曲線やそのモジュライ空間の被覆と基本群に関する数論幾何は，内外の多くの研究者によってさまざまな視点から研究されている。本研究所では，望月新一，星裕一郎及び当該所員を中心に，広い意味での遠アーベル幾何（anabelian geometry）を軸として活発に研究が進められ，当該分野を世界的にリードしている。特に，曲線の遠アーベル幾何に関して，当該所員は，これまでに有限体上の結果，有理数体上有限生成な体上の結果，正標数代数閉体上の結果などを得てきた。

以下では，当該所員が近年得た，いくつかの結果を簡単に紹介する。

・（M. Saïdi との共同研究）有限体上の曲線やその関数体の遠アーベル幾何に関し，素数の無限集合 Σ である条件を満たすものに対して幾何的基本群を最大副 Σ 商に置き換えた場合の結果（[1][4] など）を証明した。また，有限生成体上の曲線に対するセクション予想に関連して，離散的 Selmer 群や離散的 Shafarevich-Tate 群という，有限生成体上のアーベル多様体の新しい数論幾何的不変量を導入した（[8]）。最近では，大域体の遠アーベル幾何に関し，ガロア群を最大 m 次可解商に置き換えた場合の結果を得，さらに素体上有限生成な体の場合に拡張した（[10] 及び論文 3 編準備中）。

・（A. Cadoret との共同研究）有理数体上有限生成な体上の曲線の数論的基本群の l 進ガロア表現で幾何的基本群の像がある種の弱い条件を満たすものが与えられた時，その表現を曲線の（剰余次数を制限した）閉点の分解群に制限して得られるガロア表現の像の下界の存在を証明した。素数 l を走らせた時の l 進表現系や法 l 表現系の像の幾何的部分のふるまいについても考察し，種数やゴナリティーの発散性や像の l 独立性などに関する結果を証明した（[5][6] など）。最近では，アーベルスキームのファイバーに現れるアーベル多様体の共通同種因子に関する Rössler-Szamuely の問題についての結果（論文投稿中），概テイム版 Bertini 定理（論文準備中），淡中圏論的 Chebotarev 密度定理（論文投稿中）などを証明した。

・（A. Cadoret，C. Hui との共同研究）上述の法 l 表現系に関する Cadoret との共同研究の発展として，幾何的モノドロミーの法 l 半単純性についての強い結果を得た（[3]）。また，Grothendieck-Serre/Tate 予想（Tate 予想＋半単純性予想）の $\mathbb{Q}_l$ 係数版と $\mathbb{F}_l$ 係数版の間の比較（Israel J. Math. に掲載予定）や l 進表現系の整半単純性及び超積係数のモノドロミーの研究（論文準備中）を行った。

・（C. Rasmussen との共同研究）3 点抜き射影直線の副 l 基本群の上のガロア表現に関する伊原の問題に関連して，有限次代数体 K と正整数 g

が与えられた時，K 上の g 次元アーベル多様体 A の同型類と素数 l の組で，体 $K(A[l^\infty])$ が l の外で不分岐で $K(\zeta_l)$ 上副 l な拡大になるようなものは有限個しかないことを予想し，$[K:\mathbb{Q}] \leq 3$，$g=1$ の場合，$K=\mathbb{Q}$，$g \leq 3$ の場合，及び一般 Riemann 予想の仮定下での K：一般，g：一般の場合などに肯定的解決を得た。また，関連して，2 の外で不分岐な主偏極アーベル曲面の 2 冪ねじれ点の研究（[2]），射影直線の l 冪次巡回被覆のヤコビ多様体の l 冪ねじれ点の研究（[7]），楕円曲線に付随するガロア表現の跡像の普遍下界性に関する研究（論文準備中）などを行った。

[1] *A refined version of Grothendieck's birational anabelian conjecture for curves over finite fields*, Advances in Mathematics **310** (2017), 610–662 (with Mohamed Saïdi).

[2] *Abelian surfaces good away from* 2, International Journal of Number Theory **13** (2017), no. 4 , 991–1001 (with Christopher Rasmussen).

[3] *Geometric monodromy — semisimplicity and maximality*, Annals of Mathematics (2) **186** (2017), no. 1, 205–236 (with Anna Cadoret and Chun Yin Hui).

[4] *A refined version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields*, Journal of Algebraic Geometry **27** (2018), no. 3, 383–448 (with Mohamed Saïdi).

[5] *On the geometric image of* $\mathbb{F}_\ell$*-linear representations of étale fundamental groups*, International Mathematics Research Notices **2019** (2019), no. 9, 2735–2762 (with Anna Cadoret).

[6] *Genus of abstract modular curves with level-*ℓ *structures*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **752** (2019), 25–61 (with Anna Cadoret).

[7] *Cyclic covers and Ihara's question*, Research in Number Theory **5** (2019), no. 4, 33, 23 pp. (with Christopher Rasmussen).

[8] *On the arithmetic of abelian varieties*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **762** (2020), 1–33 (with Mohamed Saïdi).

[9] *Correspondences on curves in positive characteristic*, Contemporary Mathematics **767** (2021), 97–114.

[10] *The m-step solvable anabelian geometry of number fields*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **789** (2022), 153–186 (with Mohamed Saïdi).