講師　山下 剛（ 数論幾何の研究）

- p 進 Hodge 理論とそれに関連する分野 ((φ,Γ) 加群, p 進微分方程式など),
- 岩澤理論と Bloch-加藤の玉河数予想,
- 多重ゼータ値, 淡中基本群, 混合 Tate モチーフ,
- 志村多様体 (や Drinfel'd モジュラー多様体やシュトゥカのモジュライ) と Langlands 対応,
- 保型性持ち上げ定理 ($R=\mathbb{T}$) と p 進 Langlands 対応,
- 代数的サイクル, 混合モチーフ, 代数的 K 理論,
- 宇宙際 Teichmüller 理論とそれに関連する分野 (遠アーベル幾何, p 進 Teichmüller 理論, Hodge-Arakelov 理論など).

多重ゼータ値は, 共形場理論・KZ 方程式・結び目の量子不変量・擬テンソル圏・擬三角擬 Hopf 量子普遍包絡代数・曲線のモジュライ・Grothendieck-Teichmüller 群・混合 Tate モチーフ・代数的 K 理論など数学・物理の様々な分野と関連する面白い対象である. [2] において, 多重ゼータ値における Don Zagier 氏の次元予想の p 進版である p 進多重ゼータ値の空間の次元についての予想を定式化 (古庄英和氏との予想) し, 混合 Tate モチーフの圏のモチーフ的 Galois 群を用いることで代数的 K 理論と関係のある予想値で次元を上からおさえることを示した ([6] も参照). これは多重ゼータ値の空間の次元に関する寺杣友秀氏, Alexander Goncharov 氏, Pierre Deligne 氏による結果の p 進版であり, p 進多重ゼータ値に膨大な線形関係式が存在することを示している. また, ここでは以前開多様体に対して拡張した p 進 Hodge 理論 ([1], [5]) も使われている. p 進多重ゼータ値の空間と同様に p 進多重 L 値の空間の次元も代数的 K 理論と関係のある量で抑えたが, 多重 L 値の時と同様に p 進多重 L 値の間には一般に代数的 K 理論だけでは説明できない関係式が存在し, その一部は保型形式と関係することも分かった ([2], [6]). 混合 Tate モチーフの圏のモチーフ的 Galois 群の特殊元についての Grothendieck の予想の p 進版も定式化し, それと上述の古庄英和氏との次元予想及び p 進等圧予想との関係も明らかにした ([2], [6]). 岩澤理論の "混合 Tate 型の非可換化" の方向性の疑問についても [2] で言及した.

[4] の内容は玉川安騎男氏からの質問へ返答である. Pierre Berthelot 氏と Arthur Ogus 氏による p 進 Lefschetz$(1,1)$ 定理を準安定還元の場合へ拡張することと兵頭治氏と加藤和也氏による兵頭-加藤同型を族の場合に拡張することで Davesh Maulik 氏と Bjorn Poonen 氏による Picard 数跳躍軌跡についての結果を拡張した.

Andrew Wiles 氏と Richard Taylor 氏によってつくられ Mark Kisin 氏によって改良された Taylor-Wiles 系の議論による保型性持ち上げ定理 ($R^{\mathrm{red}}=\mathbb{T}$) とそこから得られる Langlands 対応において, 技術的には整 p 進 Hodge 理論を用いて局所普遍変形環を調べることが核心になってくる. [3] では Laurent Berger 氏と Hanfeng Li 氏と Hui June Zhu 氏による Frobenius 跡の附値が十分大きい時のクリスタリン表現の法 p 還元の計算及びそれを用いた Mark Kisin 氏による局所普遍変形環の構造解明の手法を n 次元表現に拡張した (考える絶対 Galois 群も p 進体だけでなくその有限次不分岐拡大にも拡張した). その研究を Frobenius 跡の附値が大きくないときにも推し進め, p 進体の絶対 Galois 群の 2 次元表現で Hodge-Tate 重みの差が $(p^2+1)/2$ 未満の時にクリスタリン表現の法 p 還元の様子が超幾何多項式の係数や終結式の p 可除性などにより統制される事実を見つけた ([7]). これはクリスタリン表現の法 p 還元についてこれまで知られていなかった現象である. また, 統一的視点もなく予想すらなかった法 p 還元の研究において部分的にであれ一般的な規則を見出したので, それと手がかりにより統一的な視点も模索したい. また, Pierre Colmez

氏・ Christophe Breuil 氏・ Vytautas Paskunas 氏・ Matthew Emerton 氏たちによる p 進 Langlands 対応の拡張の研究への応用や相互作用も期待される.

近年は, 望月新一氏による宇宙際幾何学のさらなる発展の方向性で同氏と共同研究をしている. 望月新一氏の計算において abc 予想の誤差項に Riemann ゼータ関数との関連性を示唆する 1/2 が現れる. 一方, 同氏の宇宙際 Teichmüller 理論においてテータ関数が中心的役割を果たすのであるが, テータ関数は Mellin 変換によって Riemann ゼータ関数と関係する. さらに, 宇宙際 Teichmüller 理論において宇宙際 Fourier 変換の現象が起きている. これらのことから, 長期的な計画であるが "宇宙際 Mellin 変換" の理論ができれば Riemann ゼータ関数と関係させることができるのではないかと期待して共同研究を進めている. [12] は望月新一氏の宇宙際 Teichmüller 理論をその準備の論文からまとめたサーベイ記事である.

他, 代数的サイクルや p 進微分方程式や Drinfel'd 加群や t モチーフなどでそれぞれ関連する専門家と議論を進めることもしている.

References

[1] Yamashita, G., Yasuda, S. *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semistable reduction.* preprint.

[2] Yamashita, G. *Bounds for the dimensions of p-adic multiple L-value spaces.* Documenta Math. Extra Volume: Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 687-723.

[3] Yamashita, G., Yasuda, S. *On some applications of integral p-adic Hodge theory to Galois representations.* J. Number Theory **147** (2015), 721–748.

[4] Yamashita, G. *p-adic Lefschetz* $(1,1)$ *theorem in semistable case, and Picard number jumping locus.* Math. Res. Let. **18** (2011), no. 01, 107-124.

[5] Yamashita, G. *p-adic Hodge theory for open varieties.* Comptes Rendus Math., volume **349** (2011), issues 21-22, 1127-1130.

[6] Yamashita, G. *p-adic multiple zeta values, p-adic multiple L-values, and motivic Galois groups.* Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, Adv. Studies in Pure Math. **63** (2012), 629-658.

[7] Yamashita, G., Yasuda, S. *Reduction of two dimensional crystalline representations and Hypergeometric polynomials.* In preparation.

[8] *A small remark on finite multiple zeta values and p-adic multiple zeta values.* RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B68 (2017), 171–174.

[9] *A simple proof of convolution identities of Bernoulli numbers.* Proc. Japan Acad., **91**, Ser. A (2015), 5–6.

[10] Yamashita, G. *On finite multiple zeta values of non-positive weight.* preprint.

[11] Yamashita, G. *A small remark on the filtered* ϕ*-module of Fermat varieties and Stickelberger's theorem.* Tsukuba J. Math. vol. **40**, No. 1 (2016), 119–124.

[12] Yamashita, G. *A proof of abc conjecture after Mochizuki.* preprint.