

## 助教 辻村 昇太 (数論幾何)

私は双曲的曲線の数論幾何に関心を持っており、特に、遠アーベル幾何学、及び、その応用の研究を行っている。現在までの研究状況は以下の通りである。

星裕一郎氏、望月新一氏によって構築された組み合わせ論的遠アーベル幾何学を用いて（彼ら自身によって）双曲的曲線のモジュライスタック上の普遍曲線に対する幾何学版 Grothendieck 予想が証明されていた。[1]では、プロファイル付 Hurwitz スタック（点付き単純被覆のモジュライ空間）を導入の後、この幾何学版 Grothendieck 予想の Hurwitz スタック（単純被覆のモジュライ空間）版を定式化し、組み合わせ論的遠アーベル幾何学を適用することで証明した。

絶対遠アーベル幾何学の文脈で、Belyi カスプ化と呼ばれる  $p$  進局所体上の（特別な種類の）双曲的曲線の閉点に付随する分解群を復元する技術が、望月新一氏によって構築されていた。[2]では、この Belyi カスプ化のある種の組み合わせ論版（組み合わせ論的 Belyi カスプ化）を三脚同期化の理論を用いて構築した。そして、古くから考察されている「射影直線引く 3 点の幾何的基本群への外 Galois 作用から誘導される、有理数体の絶対 Galois 群から Grothendieck-Teichmüller 群への単射は全単射か」という問題への応用: (a) Y. André 氏によって定式化されたこの問題の  $p$  進局所版における対応する単射の自然な分裂の構成 ([2]), 及び、(b) 数論的な対象であるこの単射の像の共役類の、純群論的/組み合わせ論的復元 ([8], 星裕一郎氏、望月新一氏との共同研究), を与えた。(a) の証明では組み合わせ論的遠アーベル幾何学以外の非自明な結果として、E. Lepage 氏による Mumford 曲線に対する非特異点解消を用いた。(a) の分裂が単射であれば、この問題の局所版は肯定的に成立することになる。この単射性を導くため、幾何的緩和基本群の剛性の理解をより深める必要を感じ、その方面の研究も行っている ([7])。また非特異点解消に関しては、望月新一氏との最近の共同研究 ([10]) において、Mumford 曲線に限らない一般の  $p$  進局所体上の双曲的曲線に対して成立することを証明した。この論文では、E. Lepage 氏とは異なる議論/整理の仕方で、この非特異点解消が絶対版  $p$  進 Grothendieck 予想を導くことも確認している。さらに、これまでの研究に現れていた様々な種類の  $p$  進版 Grothendieck-Teichmüller 群が実は全て一致しているという事実も証明している。

[3]では、南出新氏と共同で、離散付値体の絶対 Galois 群の遠アーベル的群論的性質に関する考察を行った。遠アーベル幾何学で考察される副有限群の多くは、その非可換性の顕現とも考えられる性質（例えば、中心自明性）を備えている。これらの性質を、剰余標数正な一般の完備離散付値体の絶対 Galois 群も備えていることを証明した。また、最近の観察として、種数 0 の双曲的曲線であれば、剰余標数  $p$  の一般の Hensel 離散付値体上で副  $p$  版 Grothendieck 予想、及び、（閉点に付随する分解群を保つという仮定の下で）その絶対版が成立することを確認している。論文は現在準備中である。将来的には、 $p$  進的な遠アーベル幾何学に関する多くの結果は、（標数が正であることを除き）剰余体に制限のない設定で展開されるようになると期待している。

[4] や [9] では、南出新氏や澤田晃一郎氏と遠アーベル幾何学に現れる様々な副有限群の内在的非分解性（及びその一般化）に関する共同研究を行った。内在的非分解性は「任意の非自明な閉正規部分群の中心化群が自明」という性質と同値であり、中心自明性や非分解性よりも強い遠アーベル的群論的性質である。これらの論文では、遠アーベル幾何学に現れる様々な副有限群が内在的非分解性を満たすことを確認した。現在、内在的非分解性の応用として得られるいくつかの遠アーベル幾何的な結果に関して論文準備中である。また非分解性関連の研究として [6] では、南出新氏が学位論文で提出していた「Grothendieck-Teichmüller 群が強

非分解性 (全ての開部分群が非分解であるという性質) を満たすか」という問題に対して, M. Saidi 氏と玉川安騎男氏による有限体上の Grothendieck 予想型の結果, 及び almost surface 群に関する考察を組み合わせて, 肯定的解答を与えた。

[8] では, 数体の最大円分拡大 (の任意の有限生成拡大) の部分体上の曲線に対する, 双有理版 (つまり, 関数体版) の Grothendieck 予想型の結果を証明した。基本的に双有理版は双曲的曲線版に比べると証明は易しくなる。その一方で, 円分指標の像が完全に消滅しているような体上の任意の双曲的曲線に付随する対象に対して, (強い意味での) Grothendieck 予想型の結果が初めて得られたという意味では興味深い進展だと考えている。双曲的曲線そのものに対しても同様のことが成立するかどうか引き続き研究を進めたい。

- [1] S. Tsujimura, Geometric version of the Grothendieck conjecture for universal curves over Hurwitz stacks, *Kodai Math. J.* **44** (2021), pp. 492–555.
- [2] S. Tsujimura, Combinatorial Belyi cuspidalization and arithmetic subquotients of the Grothendieck-Teichmüller group, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), pp. 779–829.
- [3] A. Minamide and S. Tsujimura, Anabelian group-theoretic properties of the absolute Galois groups of discrete valuation fields, *J. Number Theory* **239** (2022), pp. 298–334.
- [4] A. Minamide and S. Tsujimura, Internal indecomposability of profinite groups, *Adv. Math.* **409** (2022), Paper No. 108689.
- [5] A. Minamide and S. Tsujimura, *Strong indecomposability of the profinite Grothendieck-Teichmüller group*, preprint.
- [6] Y. Hoshi, S. Mochizuki, and S. Tsujimura, *Combinatorial construction of the absolute Galois group of the field of rational numbers*, RIMS Preprint **1935** (December 2020).
- [7] S. Tsujimura, On the tempered fundamental groups of hyperbolic curves of genus 0 over  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ , to appear in *J. Inst. Math. Jussieu*.
- [8] S. Tsujimura, *Birational anabelian Grothendieck conjecture for curves over arbitrary cyclotomic extension fields of number fields*, RIMS Preprint **1957** (February 2022).
- [9] A. Minamide, K. Sawada, and S. Tsujimura, *On generalizations of anabelian group-theoretic properties*, RIMS Preprint **1964** (August 2022).
- [10] S. Mochizuki and S. Tsujimura, *Resolution of nonsingularities, point-theoreticity, and metric-admissibility for  $p$ -adic hyperbolic curves*, RIMS Preprint **1974** (June 2023).