

助教 山下真由子（微分幾何学・トポロジーの研究）

私は微分幾何学・トポロジーの研究をしています。主に理論物理学への応用を目指し、代数トポロジーを用いた場の理論の分類や、微分コホモロジーの研究を行っています。

数学と理論物理学との関わりは古く、数学の様々な分野が物理との関連を通して発展してきました。その中で代数トポロジーと物理学との関連は比較的新しいといえます。代数トポロジーの素粒子物理学や物性物理学への応用が注目され、近年活発に研究されています。

代数トポロジーは幾何学的対象の分類に大きな役割を果たします。理論物理学においても、物理系（「場の理論」）を分類することは基本的な問題であり、代数トポロジーが有用であることが近年明らかにされてきました。特に一般コホモロジーでの分類と相性がよいのは可逆と呼ばれるクラスの場の理論です。可逆な理論は、物性物理学で「Symmetry Protected Topological 相」として自然に現れるのに加えて、素粒子物理学において「量子異常」を記述する道具となるため、重要な対象です。このクラスの理論が一般コホモロジーを用いて分類できる、というタイプの予想が 2000 年代から Kapustin, Gu, Wen, Kitaev などの物理学者により提唱され、2016 年に Freed と Hopkins により、（位相的とは限らない）可逆な場の理論が「ボルディズム理論の Anderson 双対」と呼ばれる一般コホモロジー理論で分類できる、という最も一般的な予想が立てられました。

私は可逆な場の理論の分類に関連して、大きく分けて 2 つの研究を行いました。1 つ目は、Anderson 双対に対して場の理論と直接結びつくモデルを与える研究です。素粒子物理学者である米倉和也氏（東北大学）との共同研究 [1], [2] において、可逆な場の理論が持つ性質を抽象化することで、Anderson 双対の新しいモデルが得られるという数学的結果を得ました。2 つ目は、上記の一般論を具体的な問題に応用する研究です。素粒子物理学者である立川裕二氏（東京大学）との共同研究において、「ヘテロティック弦理論の量子異常が存在しない」、という結果を示しました ([3])。これは物理学的な命題ですが、一般コホモロジーの変換の言葉に置き換えることで、純粋数学的な手法によって問題を解決することが可能になります。

微分コホモロジー理論も私の重要な研究テーマです。微分コホモロジー理論とは、なめらかな多様体の圏で定義され、一般コホモロジー理論と微分幾何的なデータを組み合わせたようなものです。数学的には Cheeger と Simons により 1985 年に導入され、その後、Freed, Moore, Segal などにより、場の理論における「高次のゲージ場」を数学的に記述する道具として確立されました。特に位相的でない場の理論の記述に重要であり、ひとつの微分コホモロジー理論であっても様々な物理的な解釈がありえます。私は五味清紀氏（東京工業大学）との共同研究 [4] において、「フェルミオンの質量項」による微分 K, KO 理

論の新たなモデルを与えました. また, 上記の [1] においては微分 Anderson 双対のモデルも与え, これにも場の理論の「分配関数」としての解釈があります.

私はこの他にも, Atiyah-Singer の指数定理やその境界付き版である Atiyah-Patodi-Singer の定理に関して素粒子物理学者を交えたグループでの研究を行っています ([5], [6], [7], [8]). 今後も分野を越えた共同研究を積極的に行い, 物性物理学で現れる格子模型や, 最近重要になってきている高次圏と場の理論の関連も扱っていきたいと考えています.

参考文献

- [1] M. Yamashita and K. Yonekura. Differential models for the Anderson dual to bordism theories and invertible QFT's I, preprint. arXiv:2106.09270 (2021).
- [2] M. Yamashita. Differential models for the Anderson dual to bordism theories and invertible QFT's II, preprint. arXiv:2110.04828 (2021).
- [3] Y. Tachikawa and M. Yamashita. Topological modular forms and the absence of all heterotic global anomalies, preprint. arXiv:2108.13542 (2021).
- [4] K. Gomi and M. Yamashita. Differential KO-theory via gradations and mass terms, preprint. arXiv:2111.01377 (2021).
- [5] M. Yamashita. A new construction of strict deformation quantization for Lagrangian fiber bundles, preprint. arXiv:2003.06732 (2020).
- [6] M. Yamashita. A lattice version of the Atiyah-Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.* 385, 495–520 (2021).
- [7] H. Fukaya, M. Furuta, S. Matsuo, T. Onogi, S. Yamaguchi and M. Yamashita. The Atiyah-Patodi-Singer index and domain-wall fermion Dirac operators, *Commun. Math. Phys.* 380, 1295–1311 (2020).
- [8] H. Fukaya, M. Furuta, Y. Matsuki, S. Matsuo, T. Onogi, S. Yamaguchi and M. Yamashita. Mod-two APS index and domain-wall fermion, *Lett. Math. Phys.* 112, 16 (2022).