塔構造、分解素点、ゼータ函数

――奇の発見を原点とした整数論発展史に則って――

伊原康隆（2023/9/16)

第2回日本数学会賞小平邦彦賞記念講演

―― 口述用メモ、スライドの補足 、文献 ――

はじめに

　まず伊原が用意したものの代読から始めます―― 年寄りがアドリブでやると脱線して長くなるから台本通り読んでくれと固くいわれておりますので。

　思いがけず身に余る賞を賜り、また先程は過分なお言葉をいただきまさに恐悦至極でございます。私にいささか自負できるのはむしろ「種まき的」なことであり、世代交代によってその痕跡も薄れているかなと感じておりましただけに、このように評価していただき、とても有り難いことと思っております。

　小平邦彦先生とは、東大の理学部数学教室で約８年間若輩スタッフとしてご一緒させていただきました。大学紛争のさなか、理学部長として学生たちに押しかけて来られた際、目の前の一人をつかまえて「君、一日何時間勉強しますか？」。学部長に推挙され戸惑われながら、夏休みなど数学数学で過ごしておられたのを、たまたま信州でお会いしゆっくり歓談させていただき、ことさら強く感じたものでした。先生は、数学は若い人の力比べではなく好きな人は一生を捧げるものだということをまさに体現しておられたと思います。

　私は有名な未解決問題を解いて世間を驚かせることはできませんでした。ただ、自分が驚けることは常に求め、いくばくかをみつけ、伝え、後輩たちや海外を含む多くの方々の有難い参加を得て研究を進めることができました。２０歳代終わり頃でしたか、広中平祐さんから、有名問題にチャレンジするよう鼓舞していただいたことがありました。「解いて見ようともしないのは、だらしないですね」と。大志を抱けという有り難い励ましでしたが、整数論では事情が異なるという私の感想は、今も変わっておりません。ちなみに恩師志村五郎先生の視点からの感想では「大欲は無欲に似たり」でした。

スライド Preと並行して
　数論の歴史を振り返ると、「一」に具体的対象への好奇心、工夫された計算、偶然の幸運などによる特異構造の発見、「二」にそれをパラメータ付きに一般化して奥にある函数の問題として眺めようとする構成的試み、これらが整数論の発展の大切な源でした。ゼータ函数、楕円関数、モジュラー函数、その後の岩澤理論、谷山理論、志村理論、それぞれの特色の相違はあれ、いずれも内容豊富な具体的新構造の、特殊な場合の発見から一般的構成の過程を経ていたと思います。
（補足）たとえばモジュラー関数のガウスによる発見は、全く相異なる由来の２つの量の数値計算結果が（小数点以下１１桁まで）一致した！という驚きから出発し、双方を適当なパラメーター付きにしても一致することからそのパラメーターとして生まれたものでした。

しかし数論でのここ四、五十年間は、否定的一般論「そういう解は有限個しかない、全くない、この範囲にしかない」「よい性質をもつ不連続群、あるいは格子群、は既知のものに限られる」といった方向の結果が、時代の象徴のように目立っています。これらは自然認識として重要だし、証明方法は上で発達した理論の応用でもあり、それぞれの見事さは正に数学発展の金字塔。私も（理解程度に応じて）感嘆しつつ、そろそろ時代の舵が「予想された結果（特に「他にはなかろう」型の予想）の証明法」の追求ばかりではなく、「予期できなかった新構造」の追求こそ、という方向に切り変わってほしいと願っています。

比較的若い分野では「広大無秩序に見える中で基本的秩序の筋道、論証を与える」のが課題でしょう。歴史の長い整数論では「既に秩序立った世界と見えているその奥で、希少な新構造を探索するのが、忘れて欲しくない課題であろう」と思います。実は応用面でも、一見「奇」だが存在する構造、そのとき目立たなくても順次なされたそれらの発見の産物の方が、時代を経て思わぬところで役に立っているようです。

　私の場合はささやかですが、こういった方向の話をさせていただきます。アブストラクトでは「複数の視点と方法の相違」まで論じましたが、スライドを作り時間を測って「それは無理」と悟り、話題をさらに絞りました。整数論のいわば第一原理が根っ子、遠過去と未来を結ぶであろう一本の「半分しか見えない線」が幹と枝、という話になります。目新しいブランド的キーワードの提示を期待された向きは失望されるかもしれませんが、整数論自体の面白さを感じ取っていただければ幸いです。

以下、スライドに入りますが、最初の１分間位は黙っていますので、ご自身のペースでお読み下さい。わからない記号は適当に推測お願い、それから補足と要約を述べさせていただきます。
[スライドA1 口頭補足]
素数は整数論の重要なキーワード。
素数の定義は様々で、これは身近な定義。
素因子分解の一意性の３つの趣が異なる表現です。
その第３が次に繋がる

[スライドA2 口頭補足]
 Γ(s)はガンマ関数、Im , Re は複素数の虚部、実部
 ζ*(s) (resp. ζ(s)) は s=0,1(resp. s=1) のみで１位の極を持ちその外では正則

下部のポイント：
i) オイラー積を和に転換するため、対数や対数微分を取る。
ii) 一般のゼータ関数でリーマン予想の類似が期待できるのはオイラー積をもつ場合に限られる。

[スライドA3 口頭補足]
 冒頭の両方向矢印は
 {ρ}の上である函数 F がとる値の和
 = {p^m} の上で Fのフーリエ変換がとる値 (重さ 1/m 付き) の和
という関連性、いわゆる explicit formula。
 素数冪だけ〜 たとえば 6, 15 などは入らないということ。
 方程式を使った down-to-earth な説明

[スライドA4 口頭補足]
 F_q はガロアに因んで GF(q) (Galois' field) とも記されていたが現在これはあまり使われない。代数多様体（多変数連立方程式の解全体がなす構造体）に関する素数 p と関わる数論の問題を考えるには「最初からその多様体（の定義方程式の係数）を有限体の上で考えてその特徴を生かすことが大変有効！」この発見者もガロア。

[スライドA5口頭補足]
共役類(イ）に属する素数 p が、この多項式を mod pでは完全分解（相異なる１次式の積）する素数。
それぞれの共役類に属する素数の集合の密度は、その共役類の元の個数と比例。たとえば(イ）は 1/24。

[スライドA6口頭補足]
大きなガロア群は千手観音のようなもの。手は関節ごとに数を増やしながら果てしなく延び、関節を決めるとそこが掴んでいる素数たちが決まり、延びるに従って掴まれている素数たちが分かれていく。めちゃくちゃ沢山ある無限の延ばし方の中に、素数（冪）をわけるという意味で最も見やすい「延ばし方=千手の選び方」を探そうというのが基本的目標。

 The first thing you learn in number theory is that
 "Galois is equipped with Frobeniuses"
と言われる。正確には
 Galois= the Galois group over an arithmetic field
 Frobeniuses= the Frobenius conjugacy classes of primes of the base field

 これを有限で切り、その行列表現ごとにフロベニウス共役類の固有多項式を他の保形表

現の固有多項式と比べるのが、通常のやり方。ここでは極限移行の中に特殊なものがあるのではないかという想定で考えを進める。

[スライドB1口頭補足]
[スライドB2口頭補足]
　Th.1 の文献は[I-1]
　Sは空集合の場合も無限集合の場合（この場合、定理の式の左辺は「収束して」という意味）も含む。α_P は正の小さい実数（最大でもPが虚素点の場合の3.8014…）。
　等式　右辺ー左辺= … は、kのデデキント・ゼータ函数の函数等式の直接の帰結であり、定理１の証明よりはるかに簡単。
 Sが完全分解素点のみの場合、S-modified とはオイラー積からS因子を除くだけ。

[スライドB3口頭補足]
「試金石としてわるくない」　GRHを仮定した結果の反例を見つければよいわけだが、大抵の結果は誤差項の評価であり、それがeffectiveの場合でもefficientとまではいかないと思われる。それらの中で定理１はかなりexplicit。

「定年頃におすすめ」目標として掲げるものは科研費申請には適さないであろう、また定年直後なら元気は十分だろうから。
 |d_k |< 2003 … 。 |d_k |が はるかに小さく、たとえば |d_k |< 126 ではGRHと関係なく無限次不分岐拡大 K/k の非存在が示される。

[スライドB4口頭補足]
「緊密」(tight) は上記論文の時点では名付けておらず、新たな期待を感じての命名。
　記号 S の原意は splitting の頭文字だが, 典型例では special representation とも supersingular moduli とも結びつく。

下段に述べた群 G の特性：たとえば p進整数環の上の特殊線型群 SL(2)はその性質を共有。

[スライドB5口頭補足]
冒頭で「この話の根っ子は整数論の第一原理に」と述べたのは（Galois is equipped with Frobeniuses)、また「半分しか見えない線を幹と枝」は、函数体と代数体の場合の（最大）緊密塔のことでした（函数体の場合の詳述は後述）。

函数体の場合のこの不等式は、筆者を含めた２、３のアイデアの玉突きから生じたものだが、直接関連するのは　Drinfeld-Vladut {Dr-Vl] と Serre [Se1]。

S_1, S_2 と代数体の実素点、虚素点との対比：
“tight”という数論的な塔に限ったことによって代数体に近寄ってくれている感じがしませんか？

[スライドB5-Supple口頭補足]
　不分岐と限らない場合の不等式は、 tamely ramified な場合は上記の論文で補足してある。wild ramificationsを含む場合は Tsfasman-Vladut [Ts-Vl](2002)で初めて正面から扱われた。ただし、そこでは 左辺/右辺（の [K:k] → ∞ に伴う極限）だけが表面に出ており、wild ramificationの場合は S の素点からの寄与が 消えて0 となる場合が多いのではないか？　従って、左右の比が１に近いところについての議論に実質からんでいるのかどうか？
 ここでは数値的極限よりも構造的極限の存否が関心の的なので立ち入らないが、
下の体 k も動かす場合の左辺/右辺のなるべく1に近い値を求める方向の研究もある（例えば　H.Hajir-C.Maire, J.Symb.Comp.33 (2002), no 4）

[スライドB6口頭補足]
　通信用個人番号を例にとったが、用途ははるかに広い。Error-correcting code ともいわれ、連続的情報（たとえば音波）をデジタル的に伝える場合に必要不可欠な「ノイズ処理」を含むとのこと。詳しくは知らないが、十分納得している。
　なお整数論の美しさがこのように使われることに対する（元数学者などからの）即時的反発も聞こえてくるが、私はこの応用の中にも美を感じる。

[スライドC1口頭補足]
Remark 「S の上の Yの点はすべてF_{q^2}-rational」 という数論的条件が
「３曲線系の被覆 𝕐_{q}→ 𝕏_{q} が etale」と代数幾何的に言いかえられる！

[スライドC2口頭補足]
　Th.0 の文献は多岐に亘るが
[I-2] Author’s Notes 2008(VI) “*Study starting from any given lifting 𝕏 of a system 𝕏_q* ”
をご参照下さい。

　ℍ_p は適当に定義されるp進的空間
　幾何的な基本群の場合は群 Γ は fixed-point freeに作用するが、数論的な場合はそうではなく、stabilizer が non-trivial （この場合は free cyclic）となる ℍ_ ……の点の集合こそが普遍被覆を形成するというわけ。またそのΓによる商については、それが（代数曲線の）幾何的な点の集合ではなく素点（スキーム論的な閉点）の集合になることに驚かれた（たとえば1973年1月タタ研究所で　D. Mumford との討論の際）。
 下段の with H.Miki は [IM](1975)

[スライドC3口頭補足]
(i) cf.[I-2], Author’s Notes 2008 (IV)
　ζ_{Γ}(s) は後述
(ii) は g＞1 の場合のかなり基本的な問題だが、根本的解決は（筆者が知る限り）得られていない。
　[I-2] Author’s Notes 2008 (IX “*Which systems 𝕏_q are liftable to 𝕏?*”)
　[I-3] (VI, *The lifting problem*) (特にIgusa tower関連の詳細)

とその引用文献表をご参照下さい。

最下段は、個々の問題がどうかではなく「なかろう予想」の雰囲気がもたらす潜在的危険性への危惧。

[スライドC 残り、口頭補足]

これら研究の動機はセルバーグ式ゼータ函数に魅せられ（他にも２、３理由があり）その p-adic 及び (∞ x p)-adicな類似物ζ_{Γ}(s) を考えて計算し合同ゼータ函数と比較してみたこと。いずれも旧聞に属するので再現は控えるが、こういった離散群の考察の意義を感じ取っておられない方々に認知していただきたいのは、この観点での研究の副産物には標数０の数論の世界でも幅広い応用をもつ「４元数環の交換則」も入っていること。たとえば４元数環の判別式における ∞ と p の交換の幾何学的意味（マンフォードの一意化、小平図形）など、極めて示唆に富むが、それらはまず　Ceredník がこの (∞ x p)--adicな理論に基づいて示したもの　[Cer1,2] （それを Drinfeld が一般化）。

adelization による全方位展望の恩恵を忘れない限り、時にその一部に焦点を当てる試みの意義は常にある。どこに焦点を当てるかによって見えるものが変わるのは当然だから。

[おわりに]

私の指導教官は、数学科進学以前からの久賀道郎先生、志村五郎先生,そして大学院修士課程では　佐武一郎先生でした。数学の世界での私の存在自体、全くこの先生方のおかげです。恩師と転機という題目の話をさせていただこうかと迷いもいたしました。のちには佐藤幹夫先生、そして Professors M.Eichler, B.Dwork, I.I.Piatetski-Shapiro, J-P.Serre, P.Deligne, R.Langlands, V.G.Drinfeld から特に強い刺激や励ましを、さらには同輩や後輩の生徒さんからも大変多くを学ぶことが出来ました。お名前は出しきれませんが、この機会にそれぞれの方々から受けた恩恵を思い起こし心中深く感謝しております。

今日の私は、育った川の上流に回遊の最後にやっと戻ってきた鮭のようなものでして、熊の餌食になる前に数学ダネの産卵だけは済ませなくては、というわけで、あそこ（出口）に関連別刷りとチラシなど置かせていただきましたので、拡散にもご協力をよろしくお願いいたします。

最後に、推薦してくださった方々、大変お世話になった数学会関係の方々、そしてはるばるお越しいただいき聞き苦しい話を最後までお聞きくださった皆様方に、厚く御礼申し上げます。

引用文献

[Cer1] I.V.Cerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of PGL_2(k_w) x E, Math.USSR Sbornik, Vol 28 (1976) No 2

[Cer2] ibid, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of PGL_2(k_w) with compact quotients, Math.USSR Sbornik, Vol 29 (1976) No 1

[Dr-Vl] V.G.Drinfeld and S.G.Vladut, On the number of rational points of algebraic curves, Functional Analysis 17(1983) (in Russian)

[I-1] Y.Ihara, How many primes decompose completely in an infinite unramified extension of a global field? J.Math.Soc Japan 35-4(1983)

[I-2] ibid. On Congruence Monodromy Problems" MSJ Memoirs Vol 18 (2008)
1968,69年の東大講義録の再出版、
巻末のAuthor's Notes 2008 にその後の展開の要約。

[I-3] ibid. On (∞ x p)-adic uniformization of curves mod p with assigned many rational points, RIMS Kokyuroku 2120 (July, 2019) in: "Profinite monodromy, Galois representations, and Complex multiplications " (M.Kaneko org., held 2018/05/21~05/23)

[IM] Y.Ihara and H. Miki, Criteria related to potential unramifiedness and reduction of unramified coverings of curves, J.Fac.Sci. Univ.Tokyo, IA22 (1975)

他のihara文献は、京都大学数理解析研究所ホームページ
＞研究所について＞メンバー ＞名誉教授 ＞〇〇 ＞PapersList から検索可能

[Se] J-P. Serre, Sur le nombre des points rationnels d'une courbe algebrique sur un corps fini, C.R.Acad.Sci. Paris, 296 (1983),Ser I.

[Ts-Vl] M.A.Tsfasman and S.G.Vladut, Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem, Moscow Math. J. 2-2 (2002)