C4　セルバーグ式 $\zeta_\Gamma(s)$ にまつわる夢〈山の彼方の格子群〉

Γ：局所コンパクトな群 G の離散部分群で $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)<\infty$　"格子群"

Γ のあるタイプの「原始的」共役類 P たち $\Rightarrow$ $\zeta_\Gamma(s)=\prod_P\left(1-N(P)^{-s}\right)^{-1}$.

◎ A. Selberg (1956)　$G_\infty = SL_2(\mathbb{R})$　実数体

⊙ 約10年後、数論的動機から、以下の $\Gamma\subset G$ に対して $\zeta_\Gamma(s)$ を考えた……

$G_p = SL_2(\mathbb{Q}_p')$　p進体 $\mathbb{Q}_p$ (の有限次拡大)

定符号4元数体で p が不分岐

Γ の例：Hamilton 4元数, $p\neq 2$,

$$\Gamma=\{a+bi+cj+dk;\ a^2+b^2+c^2+d^2=1,\ a,b,c,d\in \underbrace{\mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]}\}$$

有理数で"分母はタカダカ p べき"

$G_{\infty,p} = SL_2(\mathbb{R})\times SL_2(\mathbb{Q}_p')$

Γ の例：$SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$

不定符号4元数環に対する類似物

いずれの場合も、$\zeta_\Gamma(s)$ は (p^{-s} の有理函数で) $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線の函数体 k の $\zeta_k(s)$ と奇妙な関係にある。どういうことか？　$(\infty\times p)$-case では、これらの差は塔での分解素点 S の寄与で；$|S| = \left(\mathrm{Ind}_{\Gamma\uparrow G}(1_\Gamma) : sp_\infty\otimes sp_p\right)$.　"special repr"

C5 $(\infty \times p)$-adic view の副産物の一つが "Switching Quaternions"

広く使われている

Čerednik $B/\mathbb{Q}$ $\rightarrow$ Drinfel'd B/k

4元数環 $B/\mathbb{Q}$ は、$\left\{ \begin{array}{lllll} B \otimes \mathbb{R} & \cong & \overset{\text{split}}{M_2(\mathbb{R})} & \text{or} & \overset{\text{ramify}}{\text{Hamilton}} \\ B \otimes \mathbb{Q}_p & \cong & M_2(\mathbb{Q}_p) & \text{or} & \text{division} \end{array} \right\}$ で

ramify は偶数個の $p \leqq \infty$; これの指定で定まる.

$B \begin{pmatrix} \infty\text{-split} \\ p\text{-ramify} \end{pmatrix}$ $\longleftrightarrow$ スウィッチ $B^* \begin{pmatrix} \infty\text{-ramify} \\ p\text{-split} \end{pmatrix}$

"lattice" $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ | "lattice" $\Gamma^* \subset SL_2(\mathbb{Q}_p)$

$\downarrow$ | $\downarrow$

global Shimura Curve
Bad Reduction Mod p

$\xleftrightarrow{\text{対応}}$

Mumford's p-adic uniformization
小平 diagram, $\zeta_{\Gamma^*}(s)$, etc.

個のリスク

NF-case では？

未知の格子の存在に期待

Arithmetic

v.s.

エタール・コホモロジー … 以外には
「なかろう予想」に走る

Arithmetic Algebraic Geometry

集団的リスク

C6 (Suppl) 三木博雄さんとの共著論文 "… Potential Unramifiedness & Reduction …" J. Fac Sci Univ Tokyo IA 22 (1975

$K \supset \mathbb{Q}_p$: Complete w.r.t. a discrete valuation extending the p-adic valuation of $\mathbb{Q}_p$,

$\exists \pi$: a prime elt alg. over $\mathbb{Q}_p$.

Suppose $\exists \sigma : K \hookrightarrow K^{\sigma} \subset K$ endomorphism,

inducing $\bar{\sigma} : \bar{K} \to \bar{K}^{p^f}$ (the p^f-th power map, for some $f \geq 1$).

Key Lemma Any finite ext'n M/K is potentially unramified

iff $\exists m \geq 1$ and $\tau : M \to M^{\tau} \subset M$ extending σ^m

s.t. $M^{\tau} \cdot K = M$.

$$\begin{array}{ccc} M^{\tau} & - & M \\ | & & | \\ K^{\sigma^m} & - & K \end{array}$$

(K としては、$\mathfrak{X}_q^S$ の universal deformation から定まる完備体、

σ は $X^0 = \Pi \underset{S}{+} \Pi'$ の Π-成分から定まる endomorphism

に適用.