# 完全最急降下法を目指して

近畿大理工　青木 貴史 (Takashi AOKI)
京大数理研　河合 隆裕 (Takahiro KAWAI)
京大数理研　竹井 義次 (Yoshitsugu TAKEI)

## §1　[BNR] の提案と本稿の目的

いつも引用する Berk-Nevins-Roberts [BNR] が出版されて 20 年近く経つという事実が示すように，高階常微分方程式の完全 WKB 解析はその出発点となる部分，即ち，Stokes 図形の決定に際して 2 階の場合に見られない困難があることが認識されてからかなりになる．（具体的にどこが難しいかについては [BNR] 及び [AKT1] を参照．）その困難の解決は，Stokes 図形が高階の時えらく複雑になると云うことの為にいささかの懸念は残るが，やはり重要な問題と思われる．

Stokes 図形を algorithmic に記述する方法の無い現状では，「解の積分表示に最急降下法を用いて Stokes 図形を決定する」と云う方法は魅力的であり，又実用的でもある (cf. [U1], [U2], [AKT2], [T2]). 問題は，しかし，大抵の微分方程式は解の積分表示等持たないことである．この問題の解決策として [BNR] が提案したのが，方程式の Fourier 変換（本稿では簡単の為 Laplace 変換を用いて議論する）を考え，Fourier 変換された方程式の WKB 解を用いて “近似的な積分表示” を構成し，それに最急降下法（あるいは鞍点法）を適用しよう，と云うものであった．（尚，[WSW] も参照．）彼等の議論の重要なポイントは，方程式の Fourier 像の WKB 近似解の逆 Fourier 積分に鞍点法を適用すると元の方程式の WKB 近似解が得られる，と云う点にあると思われる（[BNR], p. 992, (22) 式）．［尚，このすっきりとした結論は，表象から作用素を作る際にある種の対称化（Weyl 積）を取って

議論していることに依る．］但し Berk 達のこの見事な議論が成立するのは鞍点の近傍においてのみであり，最急降下路が Fourier 像の変わり点を通ったりすれば話は混沌としてくる．ここは Berk 達も悩んだらしく，「変わり点では近似が悪くなるから，そこを迂回する為に最急降下路を曲げてみるか」(p. 1001) と迄言っている（ように読める；表現が delicate なので少し自信が無い）．

このように Berk 達の論点を整理してみると，

(i) 鞍点の近傍での議論は任意の次数迄拡張できるであろう，

及び

(ii) （Fourier 像の）変わり点の近傍では WKB 近似の初項だけでなくすべての項の Borel 和を考えるべきなのだろう，

と云う見当がつく．言い換えれば，Fourier 像の WKB 近似解でなく，完全 WKB 解析をやればよいのだろう，と予想される．そこで，以下においては，

(i) $\Longleftrightarrow$ WKB 解の Borel 変換の局所的対応，

として，又

(ii) $\Longleftrightarrow$ Fourier-Laplace 像の WKB 解が（Fourier-Laplace 像に対する）Stokes 曲線を越える際に subdominant な項を拾い込むという事実の対応物として，最急降下路が Stokes 曲線と交われば subdominant な項に付随する最急降下路も付け加えて議論を行う，

と云う形で，[BNR] の提案を完全 WKB 解析的に定式化し直すことを試みる．そして，それが Stokes 図形の完成にどのような形で役立つか，又，過去に得られている結果と整合しているかを具体的な例に即して検証する．同時に，WKB 近似解に於いては極めて重要と思われる変わり点が，Stokes 曲線の始点と云う間接的な形でしか議論に関わって来ないことをも例証する．（我々の議論に於ける $\widehat{P}$ の変わり点の一つの意味合いについては §7 で論じる．）

## §2　準備 — Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 積分に対する鞍点と最急降下路

まず記号の準備から始めよう．考察の対象とする作用素 $P$ は次の形を持つと仮定する．

(1)　$$P=\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} a_{jk}x^k\eta^{m-j}\left(\frac{d}{dx}\right)^j$$　（$a_{jk}$ は定数，$\eta$ は大きなパラメータ）．

以下，この作用素の Laplace 変換を

(2)　$$\widehat{P}=\left(\sum a_{jk}\eta^{n-k}\left(-\frac{d}{d\xi}\right)^k\xi^j\right)\eta^{m-n}$$

に依り定める．これと整合する函数 $\psi$ の Laplace 変換 $\hat{\psi}$ は

(3)　$$\psi(x,\eta)=\int e^{\eta x\xi}\hat{\psi}(\xi,\eta)d\xi$$

を満たす．

今，

(4)　$$p(x,\xi)=\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} a_{jk}x^k\xi^j$$

とおき，$p(x,\xi)=0$ を $\xi$ について解いた解を $\xi=\xi_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$，$x$ について解いた解を $x=x_k(\xi)$ $(k=1,\cdots,n)$ と書くことにしよう．すると，

(5)　$$\widehat{P}\hat{\psi}=0$$

の $n$ 個の WKB 解 $\hat{\psi}_k(\xi,\eta)$ $(k=1,\cdots,n)$ が

(6)　$$\hat{\psi}_k=\exp\left(\eta\int^{\xi}(-x_k(\xi))d\xi+\cdots\right)$$

（あるいは，以下で Borel 変換を考える便宜上，$\sqrt{\eta}$ であらかじめ割った $\hat{\psi}_k = \exp(\eta \int^{\xi}(-x_k(\xi))d\xi + \cdots)/\sqrt{\eta}$）の形で与えられることは見易い．従って，我々が考察したいのは

$$\varphi(x,\eta) = \int \exp\left(\eta(x\xi - \int^{\xi} x_k(\xi)d\xi) + \cdots\right) d\xi \tag{7}$$

と云う形の函数（$\widehat{P}\hat{\psi} = 0$ の WKB 解の逆 Laplace 変換）である．

我々の立場としてこれ等の無限級数はすべて Borel 和として扱いたい．従って以下積分路の記述等もまず $\hat{\psi}_k$ の Borel 変換を取ってから行う．この為に次の記号を導入しておこう．

$$P_B = \sum a_{jk} x^k \frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^{m-j}}{\partial y^{m-j}}, \tag{8}$$

$$\widehat{P}_B = \sum a_{jk} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \tilde{y}^{m-k}} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \xi^j. \tag{9}$$

又，$\hat{\psi}_k$ の Borel 変換を $\hat{\psi}_{k,B}$ と記することとする．この時定義により

$$\widehat{P}_B \hat{\psi}_{k,B} = 0 \tag{10}$$

であり，さらに

$$\varphi(x,\eta) = \int \exp(\eta x\xi) \left( \int \exp(-\eta\tilde{y}) \hat{\psi}_{k,B}(\xi,\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\xi \tag{11}$$

と書ける．但し，この時 $\tilde{y}$ に関する積分は Borel 和の定義により

$$\tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_k(\xi)d\xi + v, \quad v \geq 0 \tag{12}$$

（$\hat{a}$ は WKB 解 $\hat{\psi}_k$ の正規化の為に適当に定めた定点）なる半直線に沿って実行する．さらに，最急降下法（鞍点法）を念頭に置いているから，$\xi$ に関する積分は

$$f_k(x,\xi) = x\xi - \int_{\hat{a}}^{\xi} x_k(\xi)d\xi \tag{13}$$

の鞍点を通る $\mathrm{Re} f_k$ の最急降下路に沿って行うと云う Ansatz を置く．（この Ansatz は，積分表示を持つ Laplace 型方程式の場合の一般的な結果（[T2]）や調和振動子に

対する具体的な計算（[T1]）に裏打ちされたものである．）今の場合，定義により

$$x = x_k(\xi_j(x)) \tag{14}$$

であるから，$f_k(x,\xi)$ の鞍点は $\xi = \xi_j(x)$ $(j = 1, \cdots, m)$ により与えられる．従って，特に $\xi_j(x)$ が $\widehat{P}$ の変わり点でなければ

$$\left.\frac{dx_k}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_j(x)} \neq 0 \tag{15}$$

より $\partial^2 f_k/\partial\xi^2 \mid_{\xi=\xi_j(x)} \neq 0$ が成り立つから，$\xi$ についての積分は

$$f_k(x,\xi) = f_k(x,\xi_j(x)) - u^2, \quad u \in \mathbb{R} \tag{16}$$

なる最急降下路に沿って実行することになる．(13) を用いて (16) を具体的に書き下すと，

$$x\xi - \int_{\hat{a}}^{\xi} x_k(\xi)d\xi - \left( x\xi_j(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi \right) = -u^2. \tag{17}$$

このように積分 (11) の積分路を指定した上で，さらに $y = \tilde{y} - x\xi$ なる変数 $y$ を導入して $(\tilde{y},\xi) \mapsto (y,\xi)$ なる変数変換を (11)に施せば，

$$\varphi = \int\int \exp(-\eta y)\hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi dy \tag{18}$$

となる．この積分に於いて $(y,\xi)$ は，(12)，(17)より従う

$$y = -x\xi_j(x) + \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi + v + u^2 \tag{19}$$

と (17) を満たしている．ここで

$$s(x) = -x\xi_j(x) + \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi \tag{20}$$

と定めれば，

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= -\xi_j(x) - x\frac{d\xi_j}{dx} + x_k(\xi_j(x))\frac{d\xi_j}{dx} \\ &= -\xi_j(x) \end{aligned} \tag{21}$$

が成り立つことに注意しよう．即ち，(19) は

$$y = -\int^x \xi_j(x)dx + v + u^2 \tag{22}$$

と書ける．従って積分 (11) は，$\xi$ に関する積分を最初に行うとすれば，

$$\int \exp(-\eta y)\left(\int \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi\right)dy \tag{23}$$

とまさに Borel 和を与える積分の形になることがわかる．実際，$v \geq 0$ という条件により，$y$ に関する積分は

$$y = -\int^x \xi_j(x)dx + w, \quad \text{但し} \quad w \geq 0 \tag{24}$$

と云う積分路に沿う積分となり，また $(x, y)$（あるいは $(x, w)$）を固定すれば $u$ はコンパクトな領域しか動き得ないので，

$$\chi(x, y) = \int \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi \tag{25}$$

も well-defined である．従って，「Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換として与えられた積分 (11) は Stokes 図形を決定する為の “良い積分表示” か？」を判定する為に我々が考察すべきは，(25) で定義された $\chi(x, y)$ が方程式 $P\psi = 0$ の WKB 解の Borel 変換になっているかどうかを検証することである．

## §3　WKB 解の Borel 変換の局所的対応

前節末で述べた問題を考察する為に，$\xi$ 変数についての部分積分を利用して，$\chi(x, y)$ の満たす方程式を求めてみよう．積分 (25) は周回積分の形にも書けることに注意すれば，次式を得る．

$$\begin{aligned} P_B\chi(x, y) &= \sum a_{jl}x^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-j} \int \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi \\ &= \sum a_{jl} \int \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j+m-j} x^l \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi \end{aligned} \tag{26}$$

$$= \sum a_{jl} \int \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-l} \left(x\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y+x\xi)d\xi$$

$$= \sum a_{jl} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-l} \int \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^l \left(\xi^j \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y+x\zeta)\right)\Big|_{\zeta=\xi} d\xi$$

$$= \sum a_{jl} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-l} \int \left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^l \left(\xi^j \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y+x\zeta)\right)\Big|_{\zeta=\xi} d\xi.$$

この最後のステップでは，次の等式に基く部分積分を行った.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^j \varphi(\xi, y+x\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^j \varphi(\xi, y+x\zeta))\Big|_{\zeta=\xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\xi^j \varphi(\xi, y+x\zeta))\Big|_{\zeta=\xi}. \tag{27}$$

ここで (26) の最終行は $\widehat{P}_B \hat{\psi}_{k,B} = 0$ より 0 となるから，

$$P_B \chi(x,y) = 0 \tag{28}$$

が得られる．即ち，$\chi(x,y)$ は $P\psi = 0$ の WKB 解の Borel 変換と同じ方程式を満足する.

さらに，$\hat{\psi}_{k,B}(\xi, \tilde{y})$ が $\tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_k(\xi)d\xi$ で $(\tilde{y} - \int_{\hat{a}}^{\xi} x_k(\xi)d\xi)^\alpha$ の形の特異性を持てば，holonomic 函数の積分の理論に拠り，$\chi(x,y)$ は $y = -\int^x \xi_j(x)dx$ に $(y + \int^x \xi_j(x)dx)^{\alpha+1/2}$ という特異性（但し $\alpha + 1/2$ が自然数の時は $(y + \int^x \xi_j(x)dx)^{\alpha+1/2} \log(y + \int^x \xi_j(x)dx)$ と理解する）を持つことに注意しよう．従って，(28) を併せ考えれば，$\chi$ は $\exp(\eta \int^x \xi_j(x)dx + \cdots)/\eta$ の形をした $P\psi = 0$ の WKB 解 $\psi$ の Borel 変換 $\psi_B$ になっていることが判る.

こうして，Laplace 像の WKB 解の Borel 変換 $\hat{\psi}_{k,B}$ と，元の方程式の WKB 解の Borel 変換が (25) を通じて対応していることが示された．このような WKB 解の Borel 変換の対応は，今考えている積分領域に $\hat{\psi}_{k,B}$ の他の特異点が関係してこないと云う前提を暗黙の内に仮定していると云う意味で，

「鞍点 $\xi = \xi_j(x)$ の近傍での局所理論」

である． Borel 平面での解析に話を移したことに拠り，[BNR] の stationary phase の方法を用いての主要項の対応，と云う結果が一気にすべての次数迄こめての「完全な対応」となったことも面白いが，より重要なことは，上の $\hat{\psi}_{k,B}$ と $\psi_B$ の対応が核函数 $\delta(y-\tilde{y}+x\xi)$ を用いての「量子化 Legendre 変換」（例えば [K$^3$, p. 236] 参照）に拠り与えられているとも見られる，と云う事実である．（この重要性については，§7 でまた触れるであろう．）

## §4　いくつかの具体例に対する数値実験

前節の議論より，積分表示を持たない方程式 $P\psi = 0$ に対しても， Laplace 変換された方程式の WKB 解の逆 Laplace 積分 (11) に最急降下法（鞍点法）を適用することで， Stokes 図形の決定に関して何らかの良い情報が得られるのではないかと期待される．実際，この期待は “ある程度” 正しい．その辺の事情をいくつかの具体例を通して見てみることにしよう．

**Example 1**　まず Weber の微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2\left(\frac{x^2}{4}-E\right)\right)\psi = 0 \tag{29}$$

を考えよう．（但し，以下ではすべて $E=1$ とする．）この方程式の Stokes 曲線は Figure 1 のようになる． Weber の微分方程式の場合， $x^2=z$ という変数変換により所謂 Laplace 型の方程式に変換され，従って次のような解の積分表示が存在する．

$$\psi(x,\eta) = \int \frac{1}{(16\zeta^2-1)^{3/4}} \exp\left(\eta(x^2\zeta+\frac{E}{2}\log(4\zeta-1)-\frac{E}{2}\log(4\zeta+1))\right) d\zeta \tag{30}$$

この積分表示を用いれば， Figure 1 で与えられた (29) の Stokes 図形を決定することが可能である．例えば， Figure 1 に示された点列に沿って $x$ が右端から左へ動くとき，積分表示 (30) の最急降下路がどのように変化するかを示したのが本稿末尾の Figure A-1 である． Stokes 曲線に非常に近い点に対応する 3 番目（以下，図の

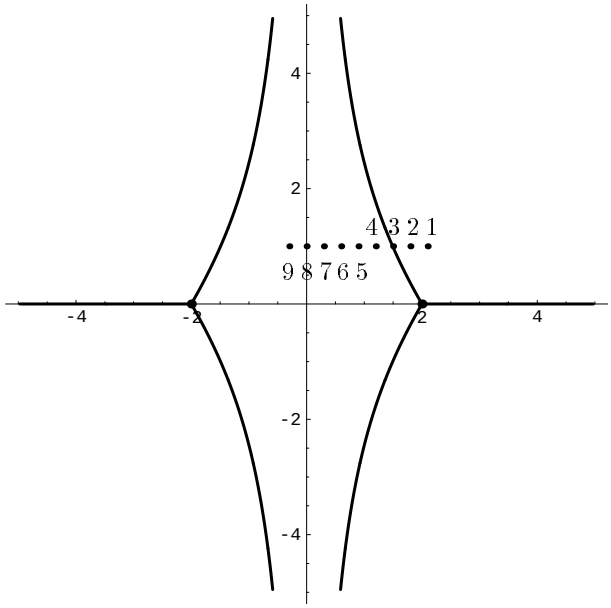



Figure 1 : 方程式 (29) の Stokes 曲線

順番は左上から始めて横方向に，そして最後まで来れば次の段へと数えて行くものとする）の図において，ある鞍点から出た最急降下路が他の鞍点にほぼ突っ込み，結果としてその前後で最急降下路のパターンの切替えが起こっていることが判る．このように，通常の意味で解の積分表示が存在する場合には，ある鞍点から出た最急降下路が他の鞍点に突っ込む（即ち，２つの鞍点を結ぶ最急降下路が存在する）かどうかでその点が Stokes 曲線上にのっているかどうかが判定できる（Laplace 型方程式の場合を論じた [T2] を参照）．

*Remark*　８番目の図の前後でもパターンの切替えが（しかも二重に）起こっているが，(30) の被積分函数の分枝を詳しく調べると，ここでは WKB 解の間には Stokes 現象は起きていないことが確かめられる．すなわち，この点は Stokes 曲線上の点ではない．尚，これと同様な現象は [AKT2, Example 2.1] でも見られた.

ここでは，Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換 (11) を (30) の代わりに用いても，同じような Stokes 曲線の判定が可能かどうかを検証してみたい．方程式 (29)

の Laplace 変換は

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}+4\eta^2\left(\xi^2+E\right)\right)\hat{\psi}=0 \tag{31}$$

である．従って (11)（あるいは (7)）は

$$\int \exp\left(\eta(x\xi\pm 2\int^{\xi}\sqrt{\xi^2+E}d\xi)+\cdots\right)d\xi \tag{32}$$

となり，

$$f_{\pm}(x,\xi)=x\xi\pm 2\int^{\xi}\sqrt{\xi^2+E}d\xi \tag{33}$$

の最急降下路が問題となる． Figure A-1 と同じく Figure 1 の点列に沿って右端から左へ $x$ が動いたときに，鞍点 $\xi=\pm\sqrt{x^2/4-E}$ を通るこの最急降下路の様子がどうなるかを図示したのが Figure A-2 である． Figure A-1 の場合と同様のパターンの切替えが，やはり 3 番目の図の前後で起こっている．尚，1 番目から 2 番目や 7 番目から 8 番目の間でもパターンの切替えが起こっているが，これらはある最急降下路が (31) の変わり点 $\xi=\pm i$ を横切った為に生じた変化で，2 つの鞍点が最急降下路で結ばれたことによる上記のパターンの切替えとは異質なものである．従って，この種のパターンの切替えは，元の方程式の Stokes 図形の決定とは無関係と考えられる．（実際 Figure 1 が示すように，こうした切替えが起こっている場所は， Stokes 曲線とは関係ない所である．）

結局， Weber の方程式 (29) の場合，(11) は Stokes 図形の決定に十分有用であるという結論を得る．さらに，最急降下路が変わり点を横切ることに伴うパターンの切替えは， Stokes 図形の決定とは無関係であることも判った.

**Example 2**　もう少し複雑な例として，係数が 2 次式である次のような 3 階方程式を取り上げよう.

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}+\eta^2(i-4x^2)\frac{d}{dx}+\eta^3(\frac{i}{2}-x^2)\right)\psi=0. \tag{34}$$

この方程式の Stokes 曲線を描いたのが Figure 2 である．（但し，変わり点から出る通常の Stokes 曲線のみが描かれている．新しい変わり点や Stokes 曲線の交点

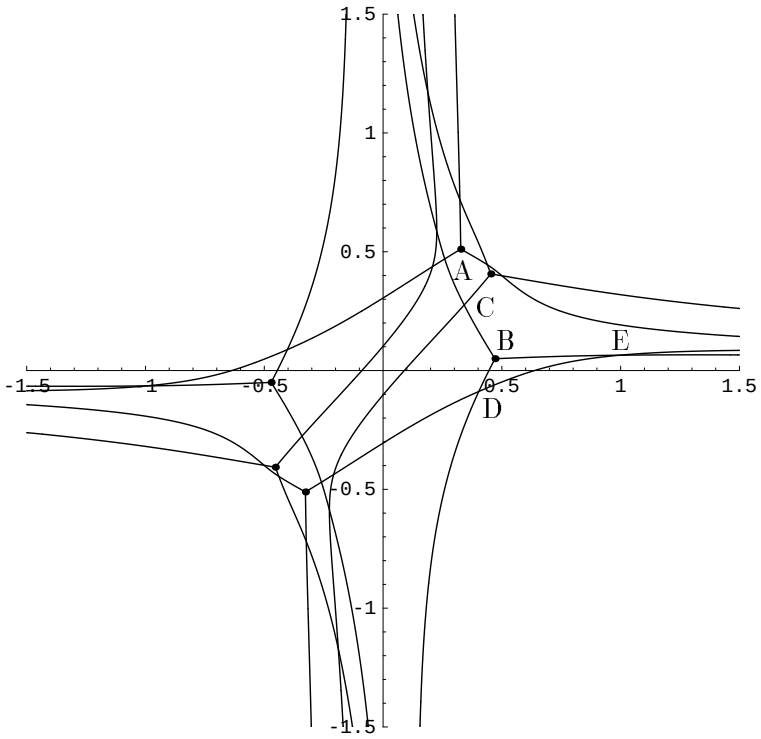



Figure 2 : 方程式 (34) の Stokes 曲線

を通る所謂「新たな Stokes 曲線」は記入されていない. ) この方程式についても, Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換として得られた (11) に上述の意味での最急降下法を適用することで, Stokes 図形が決定できるかどうかを検証してみたい. その為に, Figure 2 に示した点 A ~ 点 D の周り, 及び点 E の少し右側で, 逆 Laplace 変換 (11) (あるいは (7)) の最急降下路の様子を調べる.

まず変わり点 A の周りでの状況を図示したのが本稿末尾の Figure A-3 である. 点 A の複素座標を $x_0$ として,

$$x = x_0 + 0.05e^{\pi ik/6}, \quad k = 0, \cdots, 11 \tag{35}$$

という 12 個の点での鞍点を通る最急降下路が (この順番で) 図示されている. (黒丸は鞍点を表す. 尚, 以下の点 B ~ 点 D の周りを調べた Figure A-4 ~ Figure A-6

についても，それぞれ中心点の座標を $x_0$ として (35) で定義される 12 個の点での状況を図示している．）この Figure A-3 を見れば判る通り，4 番目，8 番目，12 番目の図の前後でそれぞれ，ある鞍点から出た最急降下路が他の鞍点に突っ込むことで生じる最急降下路のパターンの切替えが起こっている．Figure 2 及び (35) を見比べれば，このパターンの切替えはまさしく点 A から出る 3 本の Stokes 曲線上で起こっていることが判る．もう一つの変わり点 B の周りを図示した Figure A-4 においても状況はほぼ同様で，B から出る 3 本の Stokes 曲線に対応する 1 番目，5 番目，9 番目の図の前後でやはり同種のパターンの切替えが起こっていることが観察される．

次に，Stokes 曲線の交点である点 C の周りでの状況を記述した Figure A-5 を見てみよう．2 番目と 3 番目の間，5 番目の前後，7 番目と 8 番目の間，8 番目と 9 番目の間，11 番目の前後の計 5 箇所でパターンの切替えが起こっている．このうち 7 番目と 8 番目の間を除いた 4 箇所の切替えは，点 C を通る 4 本の Stokes 曲線に対応していると考えられる．他方，7 番目と 8 番目の間のパターンの切替えは，Stokes 曲線の交点である点 C から出る「新たな Stokes 曲線」の上で起こっていると考えるのが自然である．実際，この交点 C は所謂 “ordered crossing point” であり，こうした ordered crossing point からは新たな Stokes 曲線が 1 本出て行くことが知られている (cf. [AKT1])．即ち，(11) の最急降下路の様子を調べることで，新たな Stokes 曲線についての情報も得られたことになる．

ここまで見てきた限りでは，Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換 (11) に対する最急降下法は，通常の Stokes 曲線のみならず新たな Stokes 曲線を捕えるのにも有効であり，Stokes 図形の決定に関して非常に実用的で強力な方法を与えるのではないかという期待を抱かせる．しかし，話はそう単純ではない．Stokes 曲線の他の交点 D の周りの状況を図示した Figure A-6 を見て欲しい．（この Figure A-6 以降の図では，鞍点に加えて，それよりやや小さい黒丸で Laplace 像の変わり点も表示している．）パターンの切替えが，今度は 3 番目の前後，8 番目の前後，9 番目と 10 番目の間の 3 箇所でしか起こっていない．点 D を通る 4 本の Stokes 曲線のうち，最も右側に出て行く曲線上で，(11) の最急降下路のパターンの切替えが起こっていない訳である．[BNR] や [AKT1] の議論を思い出せば，ある点を通る Stokes

曲線の本数が3本というのは許されない．従って，これはやはりパターンの切替えを3箇所でしか検出できない最急降下法そのものに問題があることを意味していると思わざるを得ない．

もう一つ，Figure 2 に示した点 E の少し右側を，点 E から延びる2本の通常の Stokes 曲線を下から上に横切る形で9個の点を取り，それら9個の点で鞍点を通る最急降下路を図示してみると Figure A-7 のようになる．この Figure A-7 に依れば，下側の Stokes 曲線に対応する2番目の図の前後でしかパターンの切替えは起こっていない．実は，後ほど §6 で見るように，この場合上下2本の Stokes 曲線の間に点 E から出た新たな Stokes 曲線が走っている．単純な最急降下法では，上側の Stokes 曲線とこの新たな Stokes 曲線が検出できないのである．

## §5　完全 WKB 解析に基く大域理論と最急降下路の幾何

前節で見たように，Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 積分に最急降下法を適用するというアイデアは，“ある程度しか”うまく行かない．これは，§3 で示した WKB 解の Borel 変換の対応が，鞍点の近傍での局所理論にとどまっているからだと考えられる．調和振動子の場合の具体的計算（[T1]）が示唆しているのは，WKB 解の Borel 変換の対応を大域的に確立するには，完全 WKB 解析により記述される“指数的に小さい項”の影響（それは，今の設定に即して言えば，Borel 変換の間の対応を与える変換 (25) の積分領域に他の特異点が入り込んでくることの影響に他ならない）を考慮に入れなければならないと云うことである．本節では，このような完全 WKB 解析に基く大域理論と最急降下路の関係を（[T1] の結果を一般化する形で）論じる．

以下 $\widehat{P}$ は2階の作用素と仮定する．（完全 WKB 解析がよく判っているのがこの場合に限られているからだが，理論の大筋は2階に限らずに成立つと思っている．）この場合，WKB 解の正規化として積分端点 $\hat{a}$ を $\widehat{P}$ の変わり点に取ることが可能であり，またそうするのが都合がよい．以下その正規化を採用するものとし，Figure 3 のような幾何学的状況の下で議論を進める．即ち，鞍点 $\xi_j(x)$ を通る最急

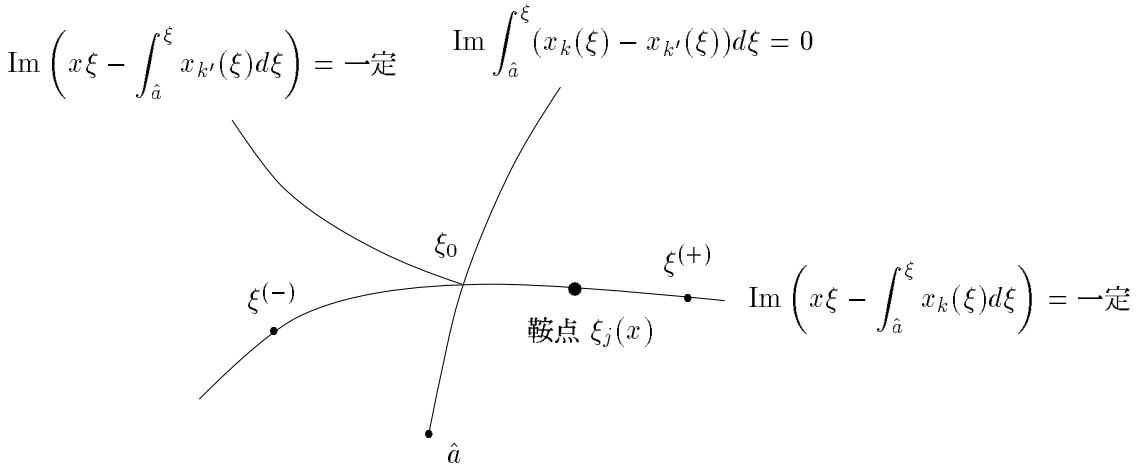



Figure 3

降下路が Stokes 曲線と交わり，その結果積分 (18) の積分領域に $\hat{\psi}_{k,B}(\xi, \tilde{y})$ の $\tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi$ $(k' \neq k)$ に在る特異点が入り込んでくる状況を調べる．

今 $\xi_0$ を Figure 3 のように鞍点 $\xi_j(x)$ を通る最急降下路と Stokes 曲線

$$\mathrm{Im}\int_{\hat{a}}^{\xi}(x_k(\xi) - x_{k'}(\xi))d\xi = 0 \tag{36}$$

との交点とし，この Stokes 曲線に沿って $\hat{\psi}_k$ が $\hat{\psi}_{k'}$ に比べて dominant であると仮定する．この時，$\xi_0$ は Stokes 曲線 (36) 上の点であるから，$\xi = \xi_0$ において $\hat{\psi}_k$ の Borel 和を定める積分の積分路上に $\hat{\psi}_{k,B}$ の新しい特異点 $\tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi$ が現われる．即ち，

$$v_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\hat{a}}^{\xi_0}(x_{k'}(\xi) - x_k(\xi))d\xi \tag{37}$$

及び

$$u_0^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} -x\xi_0 + \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_k(\xi)d\xi + x\xi_j(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi \tag{38}$$

と定めれば，(12), (17) の $(u,v)$ の定義に拠り，$(u,v)=(u_0,v_0)$ で積分 (11) の被積分函数が新しい特異点にぶつかることになる．（$\hat{\psi}_k$ が $\hat{\psi}_{k'}$ に比べて dominant であることから $v_0$ は正の実数であることに注意．）従って，積分 (23) の $y$ に関する積分のパラメータ $w$ が $w_0 \stackrel{\text{def}}{=} u_0^2+v_0$ より大きくなると，積分 (23) は完全 WKB 解析で謂う「接続公式」を反映した新しい項を拾い込むこととなる．その項の具体的記述を与えることが以下の目標である．今 $w>w_0$ の時（$x$ の函数として定まる）積分 (25) の端点を $\xi^{(\pm)}$ と記そう．（これまでは (25) をパラメータ $u$ に関する積分と考えていた訳だが，ここではそれを本来の変数 $\xi$ についての積分と見なしている．すると $u=u_0$ は $\xi=\xi_0$ に対応する．また，積分端点 $\xi^{(\pm)}$ の複号は対応する $u=\pm\sqrt{w}$ の符合に依る．特に $\xi^{(-)}$ は，鞍点 $\xi_j(x)$ を通る最急降下路が Stokes 曲線 $\mathrm{Im}(\int_{\hat{a}}^{\xi}(x_k(\xi)-x_{k'}(\xi))d\xi=0$ と交わった後に現われる積分端点と規約しておく．）即ち我々の目標は，Figure 4 のように（$\hat{\psi}_{k,B}$ の特異点 $\tilde{y}=\int_{\hat{a}}^{\xi}x_{k'}(\xi)d\xi$ に対応する）

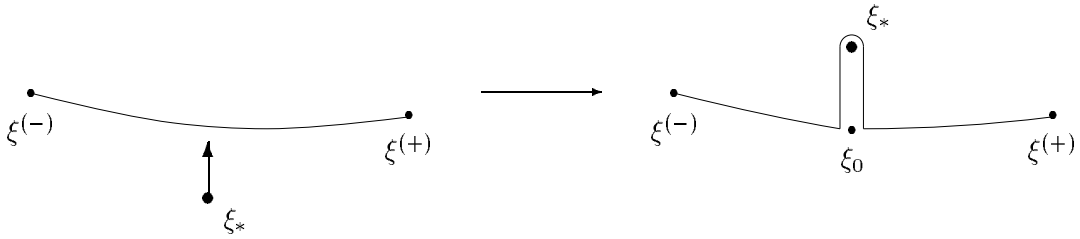



Figure 4

特異点 $\xi_*$ が積分路にぶつかった後に余分に加えるべき $\xi_0$ から $\xi_*$ 迄の積分の具体的記述を与えることである．

さて，今 $\hat{P}$ は 2 階であり WKB 解 $\hat{\psi}_k$ の正規化としては上述のものを採用しているから，$\hat{\psi}_k$ が Stokes 曲線 (36) を越す時に拾い込む項は

$$\pm i\hat{\psi}_{k'} \qquad (\pm \text{ は簡単の為以下省略}) \tag{39}$$

である．従ってこの積分が Figure 4 の右図で付け加わる項に関係すると思われる．実際，調和振動子の場合の計算（[T1]）に基き，以下の (41), (42) のように積分路を

定めた上で，$\hat{\psi}_{k'}$ の逆 Laplace 変換として次の積分 (40) を考えれば，求める望ましい結果が得られることを以下で示そう．

$$
\begin{aligned}
(40) \qquad & i\int\int \exp(\eta(x\xi-\tilde{y}))\hat{\psi}_{k',B}(\xi,\tilde{y})d\xi d\tilde{y} \\
& = i\int \exp(-\eta y)\left(\int \hat{\psi}_{k',B}(\xi, y+x\xi)d\xi\right)dy,
\end{aligned}
$$

但し積分路は，

$$
(41) \qquad \tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi + \tilde{v}, \quad \tilde{v} \geq 0,
$$

$$
(42) \qquad x\xi - \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi - (x\xi_0 - \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi) = -\tilde{u}, \quad \tilde{u} \geq 0.
$$

（即ち $\xi_0$ を通る $f_{k'} \stackrel{\text{def}}{=} x\xi - \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi$ の実部に関する最急降下路；$\xi_0$ は $f_{k'}$ の鞍点ではないことに注意．）

まず，$y$ の動く範囲は

$$
\begin{aligned}
(43) \qquad y &= \tilde{y} - x\xi \\
&= -x\xi_0 + \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi + \tilde{u} + \tilde{v}
\end{aligned}
$$

となる．ここで (20) 及び (21) を用いて変形すると，

$$
\begin{aligned}
(44) \qquad y &= -\int^{x} \xi_j(x)dx + x\xi_j(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi \\
& \quad -x\xi_0 + \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi + \tilde{u} + \tilde{v}.
\end{aligned}
$$

更に (37), (38) により，

$$
(45) \qquad x\xi_j(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi - x\xi_0 + \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi = u_0^2 + v_0 = w_0.
$$

従って

$$
(46) \qquad y = -\int^{x} \xi_j(x)dx + w, \quad w = w_0 + \tilde{u} + \tilde{v}
$$

となり，$w > w_0$ としているから (40) の $\xi$ に関する積分を記述するパラメータ $\tilde{u}$ の変域は

$$0 \leq \tilde{u} \leq w - w_0. \tag{47}$$

ここで $\tilde{u} = 0$ に対応する $\xi$ は $\xi_0$（即ち最急降下路と Stokes 曲線の交点）であり，又，$\tilde{u} = w - w_0$ に対応する $\xi$ を $\xi'_*$ と書くことにすれば，$\xi'_*$ は

$$\begin{aligned} x\xi'_* - \int_{\hat{a}}^{\xi'_*} x_{k'}(\xi)d\xi &= x\xi_0 - \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi - (w - w_0) \\ &= \int^{x} \xi_j(x)dx - w \\ &= -y \end{aligned} \tag{48}$$

を満たすような，$\xi_0$ から出る $\mathrm{Re} f_{k'}$ の最急降下路上の点である．結局，積分 (40) は

$$\int_{\substack{y=-\int^x \xi_j(x)dx+w \\ w\geq w_0}} \exp(-\eta y) \left( i \int_{\xi_0}^{\xi'_*} \hat{\psi}_{k',B}(\xi, y + x\xi)d\xi \right) dy \tag{49}$$

と云う形に表されることになる．（特に，$\xi = \xi'_*$ のとき $\tilde{y} = y + x\xi'_*$ は $\hat{\psi}_{k',B}(\xi, \tilde{y})$ の特異点 $\int_{\hat{a}}^{\xi'_*} x_{k'}(\xi)d\xi$ となることに注意．）

一方，Figure 4 の右図で新しく現れる積分の積分端点 $\xi_*$ は，$\hat{\psi}_{k,B}(\xi, \tilde{y})$ の特異点 $\tilde{y} = \int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi$ に対応する点であるから，

$$y = \int_{\hat{a}}^{\xi_*} x_{k'}(\xi)d\xi - x\xi_* \tag{50}$$

を満足する．(48) と (50) を比較すれば，$\xi_*$ は $\xi'_*$ と同一の点であって，$\xi_0$ から出る $\mathrm{Re} f_{k'}$ の最急降下路上に $\xi_*$ も存在していることが判る．従って，問題の余分に加えるべき積分は

$$\int_{\gamma} \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi)d\xi \tag{51}$$

（積分路 $\gamma$ は，$\xi_0$ から $\mathrm{Re} f_{k'}$ の最急降下路に沿って $\xi_* = \xi'_*$ まで行き，$\xi_*$ のまわりを一周してから再び $\xi_0$ まで戻る路）と表わされる．ここで，$\hat{\psi}_k$ の Borel 和（Borel

変換）に関する接続公式を思い起こそう．今 $\int_{\hat{a}}^{\xi} x_{k'}(\xi)d\xi$ を $\sigma(\xi)$ と記し，$\tilde{y}=\sigma(\xi)+\tilde{v}$ $(\tilde{v}\geq 0)$ なる cut に沿っての $\hat{\psi}_{k,B}(\xi,\tilde{y})$ の discontinuity を $\Delta_{\tilde{y}=\sigma}\hat{\psi}_{k,B}$ と記すことにすれば，次の接続公式が成立する．

$$\Delta_{\tilde{y}=\sigma}\hat{\psi}_{k,B}(\xi,\tilde{y})=i\hat{\psi}_{k',B}(\xi,\tilde{y}). \tag{52}$$

よって (49), (51), (52) により，期待通り，問題の余分に加えるべき積分が $i\int_{\xi_0}^{\xi'_*}\hat{\psi}_{k',B}(\xi,y+x\xi)d\xi$，即ち $\hat{\psi}_{k'}$ の逆 Laplace 変換である積分 (40) からの寄与として与えられることが示された．

このように，積分 (25) を $y$ に関し大域的に考えると，鞍点 $\xi_j(x)$ を通る $\mathrm{Re}(x\xi-\int_{\hat{a}}^{\xi}x_k(\xi)d\xi)$ の最急降下路だけでなく，それと Stokes 曲線の交点から他の最急降下路を分岐させて考える必要がある．そして，もしそれが他の鞍点にぶつかれば，そのような点 $x$ では元の方程式 $P\psi=0$ の WKB 解の Borel 和に異常が起こっている（Stokes 現象が起きている），即ち，そうした点 $x$ は $x$-空間の Stokes 曲線上にある，と考えるのが自然であろう．こうして，積分表示を持つ Laplace 型方程式の場合の結果（cf. [T2]）の一般化である，次の予想に導かれる．

## Conjecture

**鞍点 $\xi=\xi_j(x)$ を通る $\mathrm{Re}f_k=\mathrm{Re}(x\xi-\int_{\hat{a}}^{\xi}x_k(\xi)d\xi)$ の最急降下路が，$\hat{P}\hat{\psi}=0$ の "type $k>k'$" の Stokes 曲線（即ち，それを横切る時 $\hat{\psi}_k$ が $\hat{\psi}_{k'}$ の定数倍を拾い込むような Stokes 曲線）と交わるたびに，その交点から $\mathrm{Re}f_{k'}$ の最急降下路を分岐させる．この操作を繰り返してできる最急降下路の全体（和集合）を「完全最急降下路」と呼ぶことにすれば，元の方程式 $P\psi=0$ の WKB 解の Borel 和に Stokes 現象が起きるのは，こうした完全最急降下路が２つの鞍点を結ぶ時，かつその時に限る．**

# §6　再び具体例に対する数値実験

前節で述べた予想に依れば，方程式 $P\psi=0$ の Stokes 図形を決定する為には，$\widehat{P}\hat{\psi}=0$ の WKB 解の逆 Laplace 変換 (11) に対する通常の最急降下路だけでな

く完全最急降下路を考えねばならない．本節では，§4 の議論を引き継ぐ形でいくつかの具体例を考察する中で，この予想の正当性を検証してみたい．

**Example 2 revisited**　再び方程式

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}+\eta^2(i-4x^2)\frac{d}{dx}+\eta^3(\frac{i}{2}-x^2)\right)\psi=0 \tag{53}$$

を取り上げる．§4 で論じたように，Figure 2 に示した点 D の周り及び点 E の少し右側においては，逆 Laplace 変換 (11) に対する通常の最急降下路を考えるだけでは Stokes 図形を決定するには不十分であった．そこで，これらの点において今度は完全最急降下路を調べてみよう．

Figure A-8 は，点 D の周りの状況を記述した Figure A-6 の 1 番目と 2 番目の間の適当な 2 ヶ所（従って 1 番目と 2 番目の間をもう少し細かく見ていることになる）において，完全最急降下路（の一部）を図示したものである．鞍点を通る最急降下路に加えて，第 4 象限の鞍点から出た最急降下路が Laplace 像の Stokes 曲線とすぐ近くで交わったその交点から分岐した新たな最急降下路が，太い実線で描かれている．（図が複雑になることを恐れて，完全最急降下路の全体は描いていない．尚，細い実線は Laplace 像の Stokes 曲線を表す．これは以下の Figure A-9, Figure A-10, Figure A-11, Figure A-14 についても同様．但し，Laplace 像の単純極 $\xi=-1/4$ から出る Stokes 曲線については，本稿では余り重要な役割を果たさないので省略してある．）この新たに分岐した最急降下路が他の鞍点に突っ込み，その結果パターンの切替えが起こっていることが読み取れる．通常の最急降下路の解析だけでは検出できなかった点 D から最も右側に出て行く Stokes 曲線が，完全最急降下路を考えることで捕えられた訳である．

同様に，点 E の右側についても，通常の最急降下路を用いるだけでは検出できなかった上側の Stokes 曲線と 2 本の Stokes 曲線の間を走る新たな Stokes 曲線が，完全最急降下路を調べることにより捕えられる．例えば，Figure A-7 の 4 番目と 5 番目の図に完全最急降下路の一部を付け加えたのが Figure A-9 である．正の実軸付近の鞍点を通る最急降下路と Stokes 曲線の交点から分岐させた新たな最急降下路が，$\xi=-3$ 付近の鞍点に突っ込むことで生じるパターンの切替えが見て取れる．この切

替えは，２本の Stokes 曲線の間に存在する点 E から延びる新たな Stokes 曲線に対応している．また Figure A-10 は，Figure A-7 の６番目と７番目の図に，直前の Figure A-9 と同じ新たな最急降下路を加えたものである．この図はいくつかの最急降下路がほとんど重なり合っていて非常に見づらいので，Figure A-10 から新たな最急降下路のみを取り出して描いてみると Figure A-11 のようになる．新たに分岐した最急降下路が原点付近の鞍点に突っ込み，結果としてこの２つの図の間でやはりパターンの切替えが起こっている．（Figure A-11 における最急降下路の走り方は，一見した所やや不自然な印象を与えるかもしれない．これは原点付近の鞍点のすぐ左下，鞍点から非常に近い $\xi = -1/4$ に単純極が存在しており，これが最急降下路を描く際には特異点として振舞う為である．Figure A-11 の上図においてはこの特異点 $\xi = -1/4$ の下側からやや巻き気味に鞍点をかすめて左上方に逃げていた最急降下路が，$\xi = -1/4$ を巻いて鞍点に突っ込んだ後，Figure A-11 の下図では今度は $\xi = -1/4$ を完全に巻き込んで左下方へと延びていくという状況に変化しているのである．）この６番目と７番目の間で起こっているパターンの切替えが，Figure 2 の点 E から右方向に延びる上側の Stokes 曲線に対応している．

こうして，通常の最急降下路では決定できなかった方程式 (53) の Stokes 図形が，完全最急降下路を持ち出すことでより精密に捕えられるようになった訳である．

**Example 3**　[AKT2] で論じた Carroll-Hioe の方程式

$$
\begin{aligned}
(54)\qquad & \frac{d^3\psi}{dx^3} + 2i(r_1+r_2+r_3)\eta x\frac{d^2\psi}{dx^2} \\
& + \left\{(-4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\eta^2x^2 + 2ic_1\eta + \frac{1}{4}[(\Omega_{12})^2+(\Omega_{23})^2]\eta^2\right\}\frac{d\psi}{dx} \\
& + \left\{-8ir_1r_2r_3\eta^3x^3 - 4c_2\eta^2x + \frac{i}{2}[(\Omega_{12})^2r_3+(\Omega_{23})^2r_1]\eta^3x\right\}\psi = 0,
\end{aligned}
$$

但し，パラメータの値を

$$
\begin{aligned}
(55)\qquad & r_1 = -2+i, \quad r_2 = \frac{1}{2}+2i, \quad r_3 = 1-2i, \\
& \Omega_{12} = -3+4i, \quad \Omega_{23} = 1-3i, \\
& c_1, c_2 : \text{arbitrarily fixed constant}
\end{aligned}
$$

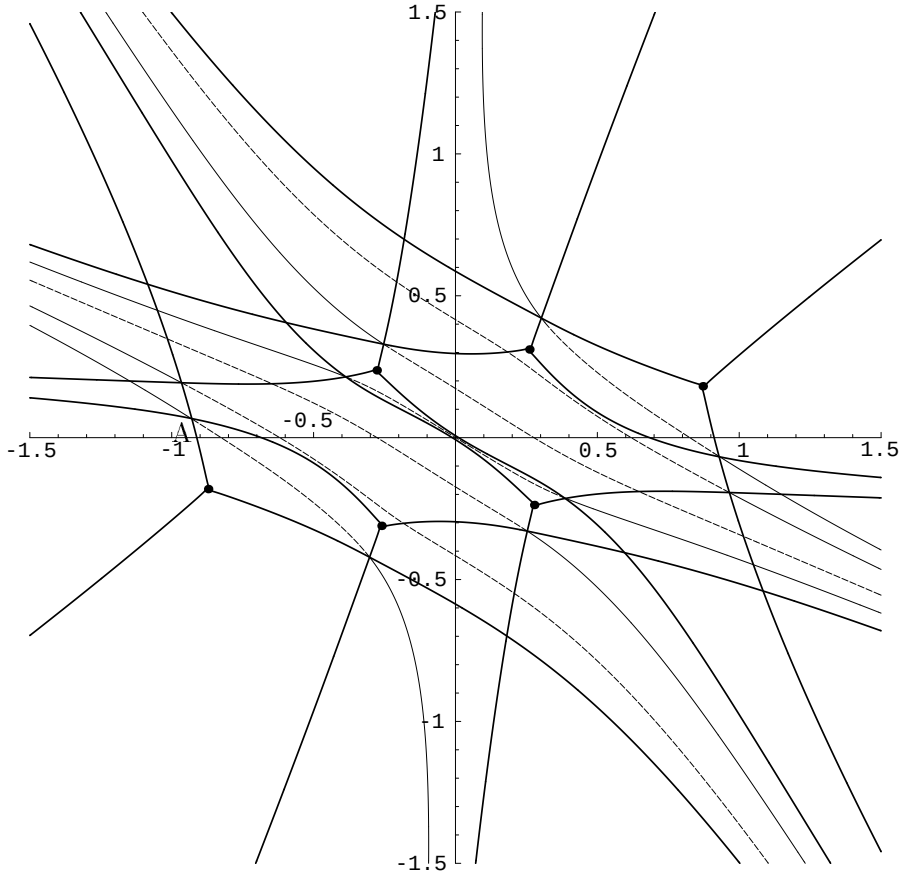



Figure 5 : 方程式 (54) の Stokes 図形

と指定したものを考える. [AKT2] で与えられているように, この方程式 (54) の Stokes 図形 (即ち通常の Stokes 曲線と新たな Stokes 曲線) は Figure 5 のようになる. (点線は, 当該の部分を横切る際に WKB 解の間に Stokes 現象は起こらないことを示す. )

Weber の方程式と同様に, Carroll-Hioe の方程式も $x^2 = z$ とおけば Laplace 型の方程式に変換され, 従って解の積分表示が存在する. 一般に Laplace 像が高階の方程式のときは, その Stokes 図形が完全には決定できないので完全最急降下路の定義も曖昧にならざるを得ない (それゆえ前節では Laplace 像が 2 階という制限を設

けた訳である）が，幸い Carroll-Hioe の方程式の場合，この解の積分表示を用いることで Stokes 図形についての完全な情報が得られる．（実際 Figure 5 はこの積分表示を数値的に解析することで得られた．）そこでこの Example 3 では，この解の積分表示に通常の最急降下法を適用して得られる結果と Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換の完全最急降下路を解析して得られるそれとを比較することで，前節で述べた予想の正当性をより実証的に検証する．

以下，Figure 5 に示した点 A（Stokes 曲線の或る交点）の周りでの状況を考察する．Figure A-12, Figure A-13 はそれぞれ，

$$x = x_0 + 0.05e^{\pi ik/6}, \quad k = 0, \cdots, 11 \tag{56}$$

（$x_0$ は点 A の複素座標）という 12 個の点での解の積分表示の最急降下路，及び同じ点での逆 Laplace 変換の通常の最急降下路（完全最急降下路ではない）を図示したものである．Figure A-12 では，点 A を通る 4 本の Stokes 曲線と 1 本の新たな Stokes 曲線に応じて，4 番目と 5 番目の間，6 番目と 7 番目の間，7 番目と 8 番目の間，10 番目と 11 番目の間，12 番目と最初の間の計 5 箇所でパターンの切替えが起こっている．それに対し Figure A-13 では，6 番目と 7 番目の間，7 番目と 8 番目の間，10 番目と 11 番目の間，12 番目と最初の間の計 4 箇所でしかパターンの切替えは見られず，4 番目と 5 番目の間で起こるべき切替えが読み取れない．そこで，Figure A-13 の 4 番目と 5 番目の間をもう少し細かく見て，その間の適当な 2 ヶ所で完全最急降下路の一部を図示してみると Figure A-14 のようになる．図から明らかなように，左下の鞍点から出た最急降下路が Laplace 像の Stokes 曲線と交わった所から新たな最急降下路を分岐させると，この新たに分岐した最急降下路が他の鞍点に突っ込み，結果として完全最急降下路のパターンには確かに切替えが起こっていることが判る．

こうして，Laplace 像の WKB 解の逆 Laplace 変換 (11) を一種の積分表示と見なし，そして通常の最急降下路に加えて完全最急降下路を考えれば元の方程式の Stokes 図形を決定できるということが数値実験の面からも確かめられた．完全最急降下路が実に自然な対象であるという事実は，単に通常の最急降下路を考えるだけで

は最急降下路が変わり点を横切る際に「見かけ上のパターンの切替え」が生じてしまう（§4 の Example 1 の所でも触れたように，これは本来 Stokes 図形の決定とは無関係である）のに対し，完全最急降下路を持ち出すと最急降下路が変わり点を横切ってもこうしたパターンの切替えが起こらないという所にも現われている．前節の議論と本節で行った具体例に対する数値実験の結果は，完全最急降下路の自然さと上述の予想の正当性を強く支持していると思われる．

## §7　結び — 超局所解析と完全 WKB 解析

§3 の最後に述べたように，WKB 解の Borel 変換の局所的対応は量子化 Legendre 変換により与えられているとも見なし得る．そして，§5 で完全 WKB 解析を用いて議論したその大域理論は，まさにこの超局所解析的表現を許す局所理論と補完的な位置を占めている．本稿の結論を一言で標語的に言えば，

**「WKB 解析の局所理論が超局所解析，大域理論が完全 WKB 解析」**

勿論，超局所解析と完全 WKB 解析とは，特性多様体と云う共通の根を通して密接に関連している．本稿の終わりに，そうした関連の一つの証左として，§5 で述べた予想についての一つの注意を述べておこう．

§5 の予想では，完全最急下路が 2 つの鞍点 $\xi_j(x)$, $\xi_{j'}(x)$ を結ぶ状況を問題にした．ここではもう少し条件を弱めて，

$$\mathrm{Im}\left(x\xi_j(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi\right) = \mathrm{Im}\left(x\xi_0 - \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_k(\xi)d\xi\right), \tag{57}$$

$$\mathrm{Im}\left(x\xi_{j'}(x) - \int_{\hat{a}}^{\xi_{j'}(x)} x_{k'}(\xi)d\xi\right) = \mathrm{Im}\left(x\xi_0 - \int_{\hat{a}}^{\xi_0} x_{k'}(\xi)d\xi\right), \tag{58}$$

$$\mathrm{Im}\int_{\hat{a}}^{\xi_0} (x_k(\xi) - x_{k'}(\xi))d\xi = 0 \tag{59}$$

が成立する状況を考える．即ち，$\mathrm{Re} f_k$ 及び $\mathrm{Re} f_{k'}$ の最急降下路で結ばれるとは限らないが，変わり点 $\hat{a}$ を始点とする Stokes 曲線上の点 $\xi_0$ を仲立として，$\xi_j(x)$ と

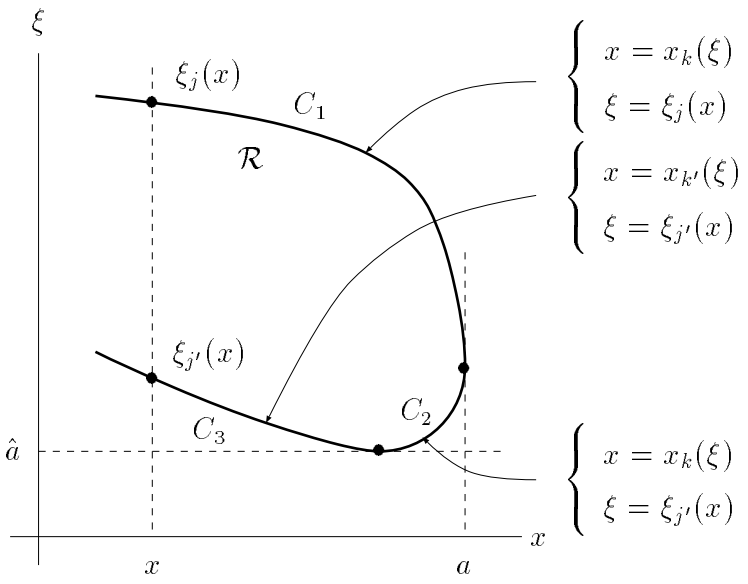



Figure 6

$\xi_{j'}(x)$ が $\mathrm{Im} f_k$ 及び $\mathrm{Im} f_{k'}$ の等高線（一般には連結でないことに注意）上にのっているような状況を考える．さらに，簡単の為，これら $\xi_j(x), \xi_{j'}(x), x_k(\xi), x_{k'}(\xi)$ 達を定義している特性多項式 $p(x,\xi)$ の零点集合（以下 $\mathcal{R}$ で表す）が，問題の部分で Figure 6 のようになっていると仮定する．この時，$d(x\xi) = xd\xi + \xi dx$ に注意して，例えば $C_1$ 上で部分積分すると，

$$x\xi_j(x) - a\xi_j(a) = \int_{\xi_j(a)}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi + \int_a^x \xi_j(x)dx. \tag{60}$$

$C_2$ 及び $C_3$ 上で同様に考えると，

$$a\xi_{j'}(a) - x_k(\hat{a})\hat{a} = \int_{\hat{a}}^{\xi_{j'}(a)} x_k(\xi)d\xi + \int_{x_k(\hat{a})}^{a} \xi_{j'}(x)dx, \tag{61}$$

$$x_{k'}(\hat{a})\hat{a} - x\xi_{j'}(x) = \int_{\xi_{j'}(x)}^{\hat{a}} x_{k'}(\xi)d\xi + \int_x^{x_{k'}(\hat{a})} \xi_{j'}(x)dx. \tag{62}$$

(60), (61), (62) を辺々足し合わせて，

$$x\xi_j(x) - x\xi_{j'}(x) \tag{63}$$

$$= \int_{\hat{a}}^{\xi_j(x)} x_k(\xi)d\xi + \int_{\xi_{j'}(x)}^{\hat{a}} x_{k'}(\xi)d\xi + \int_a^x \xi_j(x)dx + \int_x^a \xi_{j'}(x)dx.$$

この両辺の虚部を取れば，(57) ～ (59) と組み合わせて次式が得られる．

$$\mathrm{Im} \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x))dx = 0. \tag{64}$$

これはまさしく $P\psi = 0$ の Stokes 曲線の定義式に他ならない．

このように §5 の予想の背後には，特性多様体 $\mathcal{R} = \{p(x,\xi) = 0\}$ の幾何学的な構造が隠れている．特に，完全最急降下路を考える，即ち最急降下路が $\widehat{P}\hat{\psi} = 0$ の Stokes 曲線と交わるたびに新たな最急降下路を分岐させる必要が生じたのは，$\widehat{P}\hat{\psi} = 0$ の変わり点 $\hat{a}$ が存在した為だった訳である．（この意味では変わり点はやはり重要な点であると言うことができよう．尚，この観点から言えば，[T2] で論じた Laplace 型方程式の場合に完全最急降下路を考える必要がなかったのは，$\widehat{P}$ が変わり点を持たなかった為である．）さらに，§5 の予想より弱い条件の下で Stokes 曲線の定義式 (64) が得られたのも興味深い．この事実は，完全最急降下路の幾何が，$P\psi = 0$ の WKB 解の Borel 変換の所謂 “Riemann sheet structure”（より正確に言えば，その特異点の位置に関する情報を Riemann 面の各シート上にまで持ち上げた構造）を記述していることを意味する．それがゆえに，本稿で論じた完全最急降下路を用いた方法（“完全最急降下法”！）が高階常微分方程式の Stokes 図形の決定に有用なのである．

# References


[AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, pp. 69–84.

[AKT2] ———: On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, Asian J. Math., **2**(1998), 625–640.

[BNR] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts: New Stokes lines in WKB theory, J. Math. Phys., **23**(1982), 988–1002.

[K$^3$] M. Kashiwara, T. Kawai and T. Kimura: 代数解析学の基礎, 紀伊國屋書店, 1980.

[T1] Y. Takei: Exact WKB analysis of the harmonic oscillator and its Fourier transform — An example of interplay between exact WKB analysis and Fourier analysis —, 数理解析研究所講究録 「シュレディンガー方程式の超局所解析とその周辺」, to appear.

[T2] ———: Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, in this volume.

[U1] K. Uchiyama: On examples of Voros analysis of complex WKB theory, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, pp. 104–109.

[U2] ———: Graphical illustration of Stokes phenomenon of integrals with saddles, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 87–96.

[WSW] T. Watanabe, H. Sanuki and M. Watanabe: New treatment of eigenmode analysis for an inhomogeneous Vlasov plasma, J. Phys. Soc. Japan, **47**(1979), 286–293.

# Appendix

以下，本文で引用しながら，スペースの関係や読み易さの為に末尾にまわさざるを得なかったいくつかの図を，まとめて掲載する．（なお，この Appendix にまわした図の番号には “Figure A-1” のように “A” という文字を入れて，本文中に収録した図と区別できるようにしてある．）

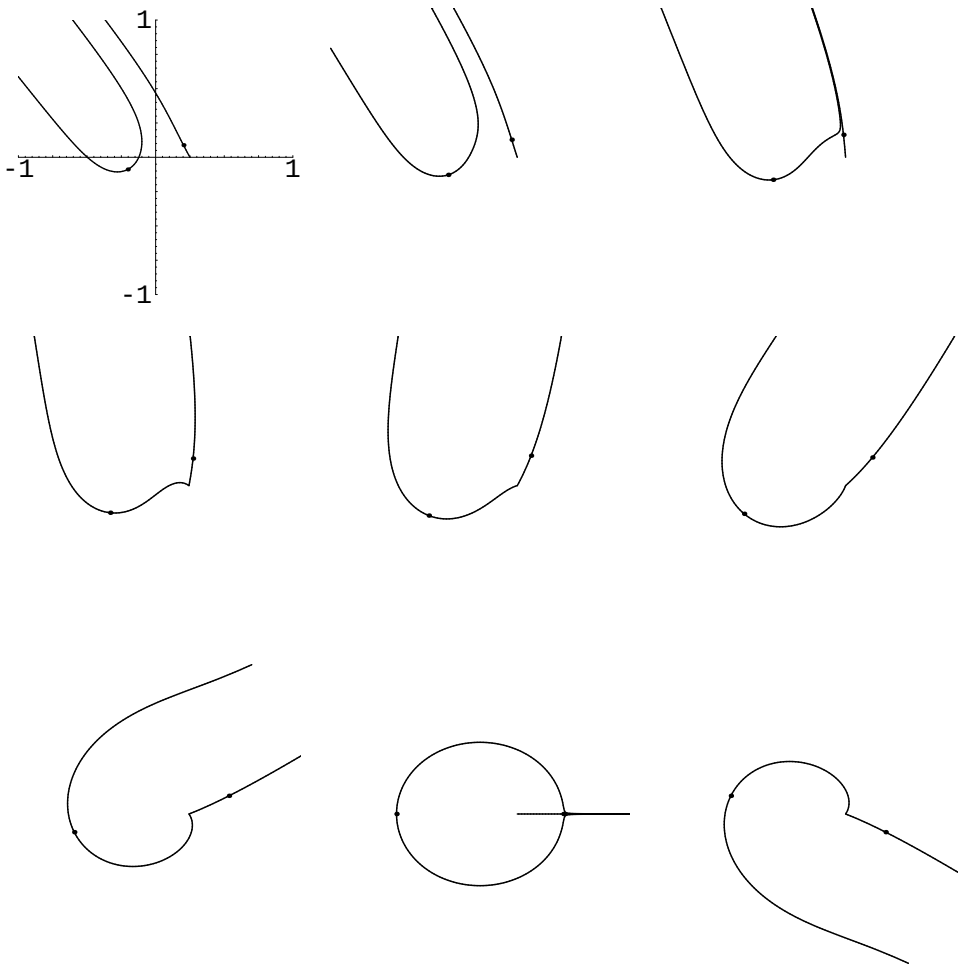



Figure A-1

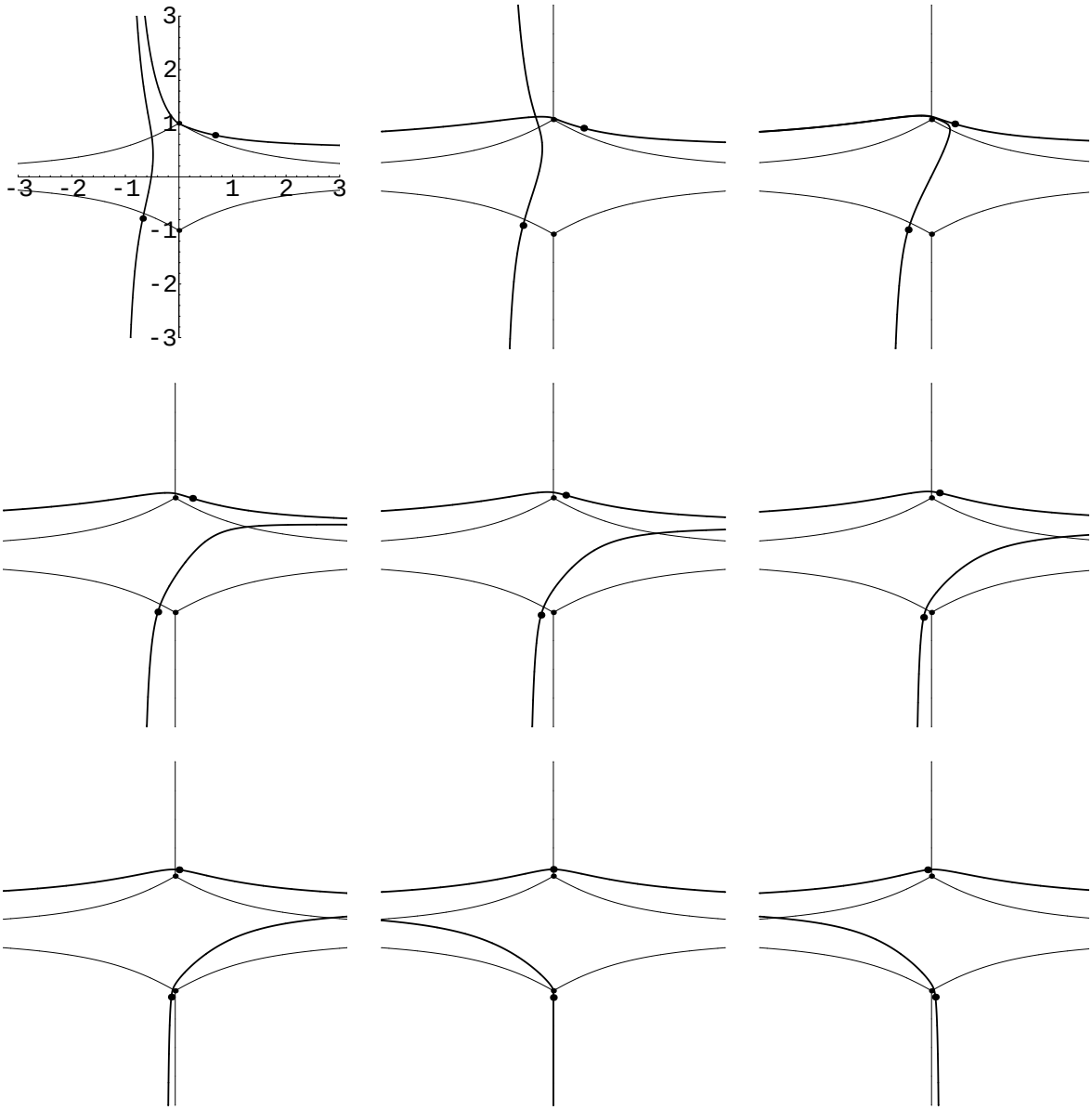



Figure A-2

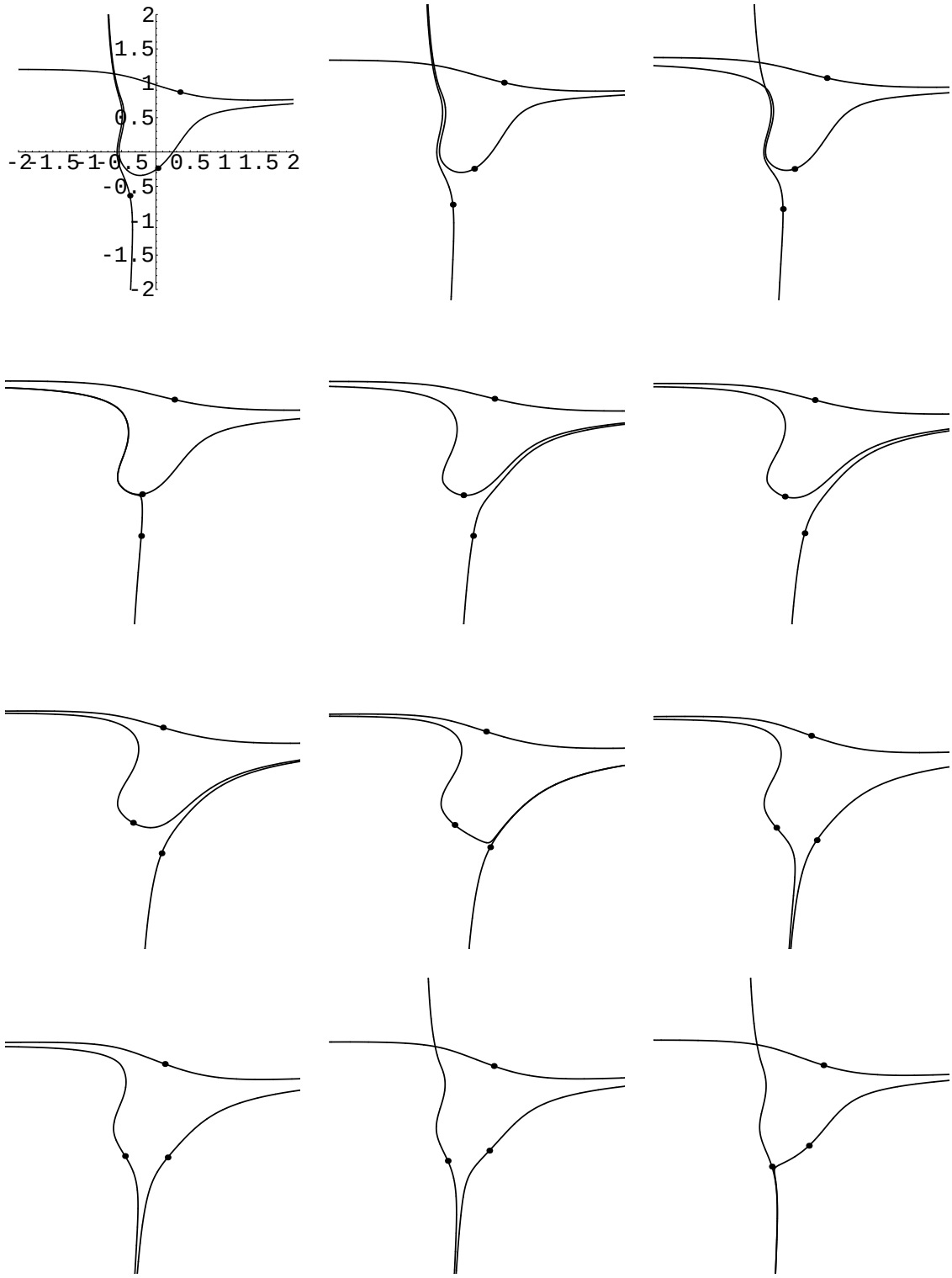



Figure A-3 : 変わり点 $x = 0.32689 + 0.5109\,i$ の周り

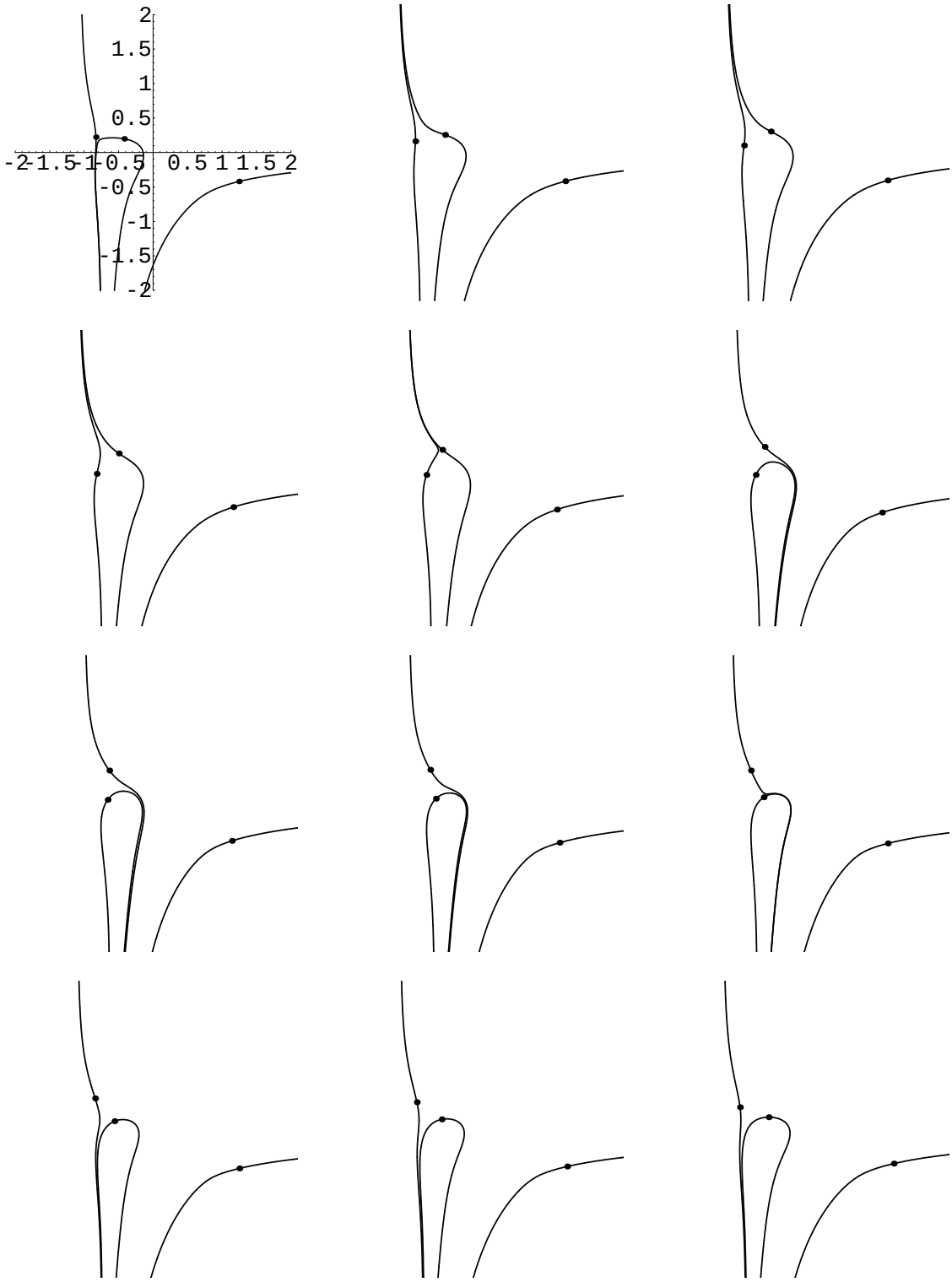



Figure A-4 : 変わり点 $x = 0.471143 + 0.0498704\,i$ の周り

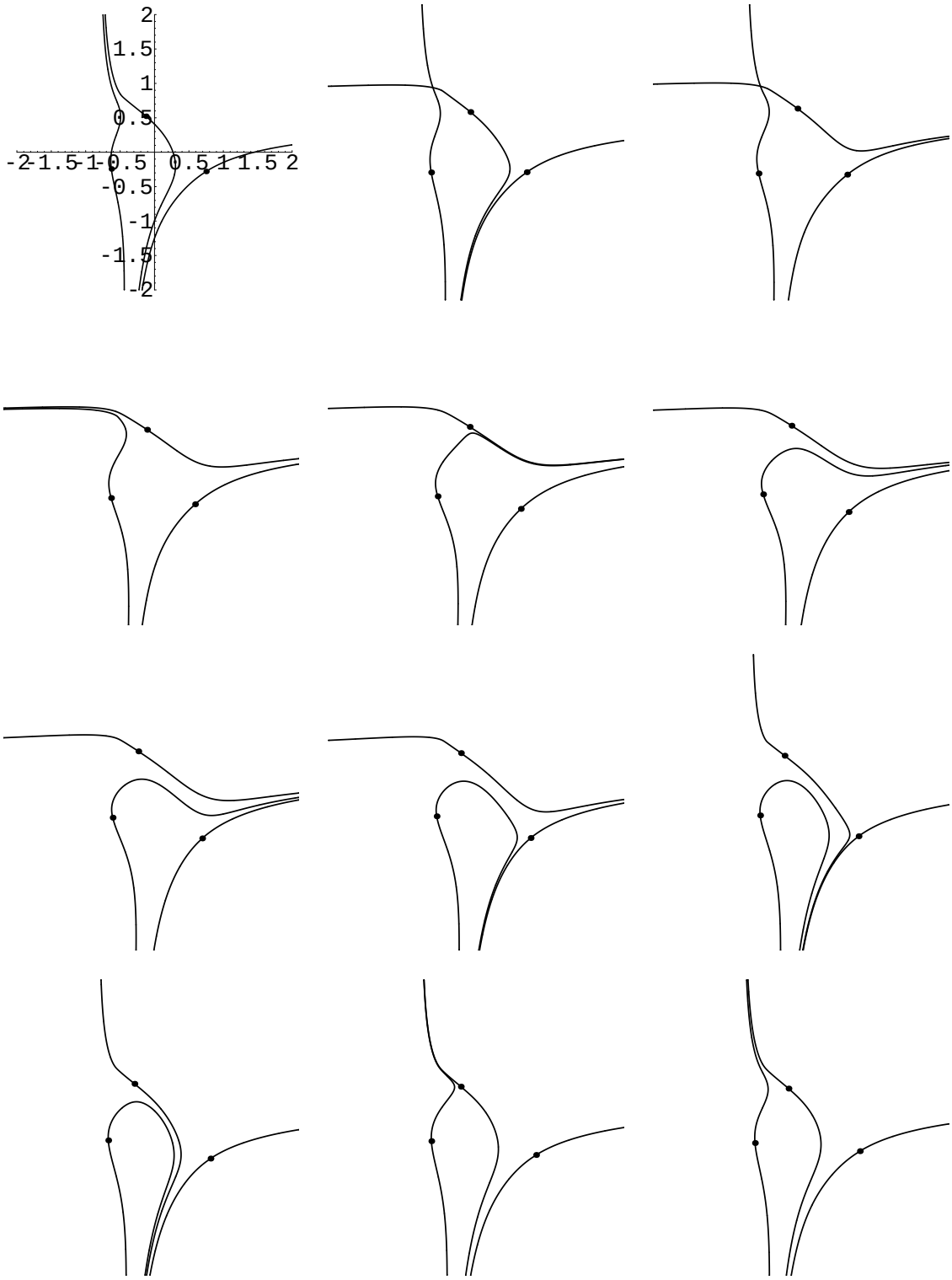



Figure A-5 : $x = 0.338 + 0.283\,i$ 付近の交点の周り

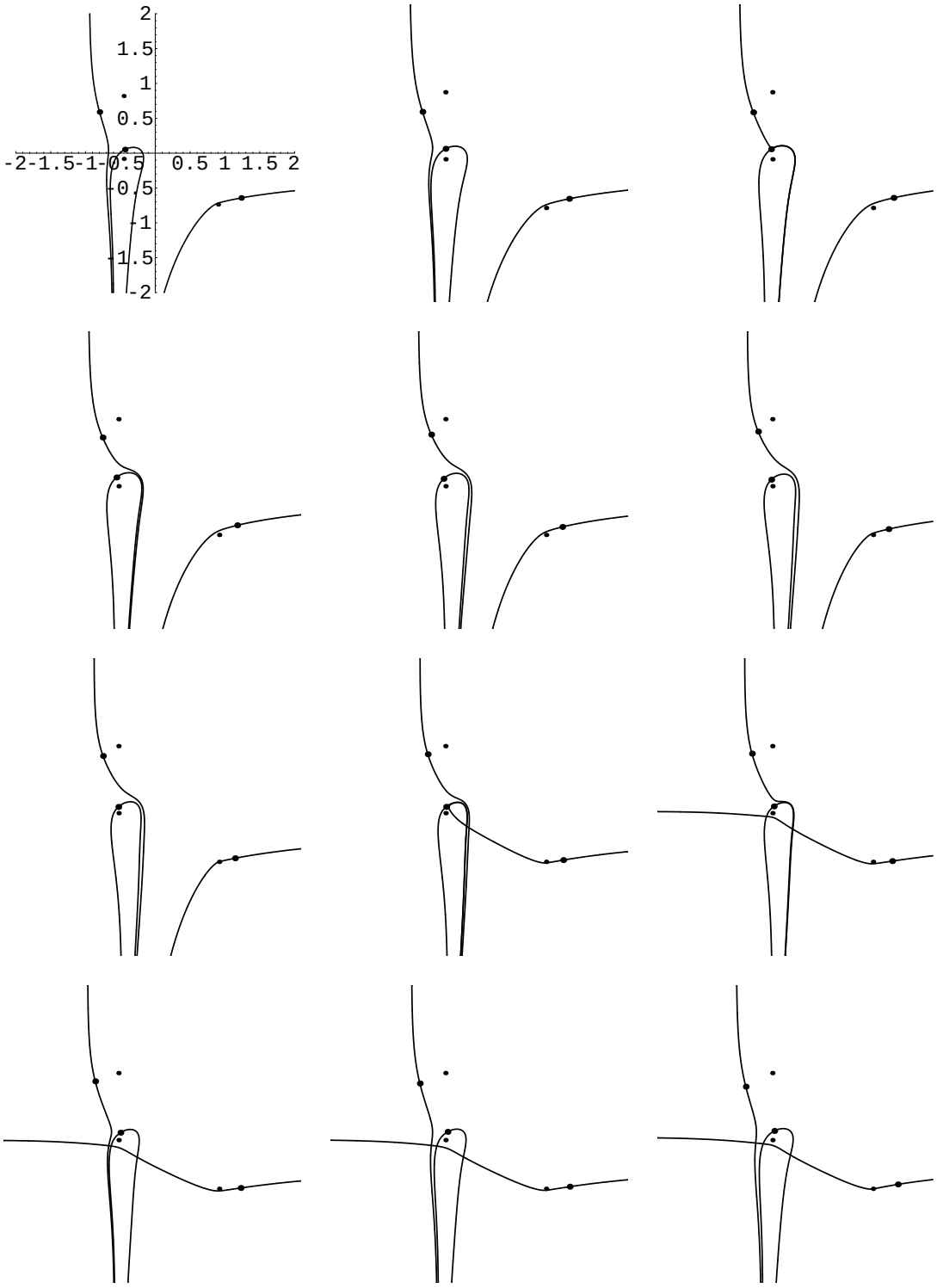



Figure A-6 : $x = 0.4 - 0.08\,i$ 付近の交点の周り

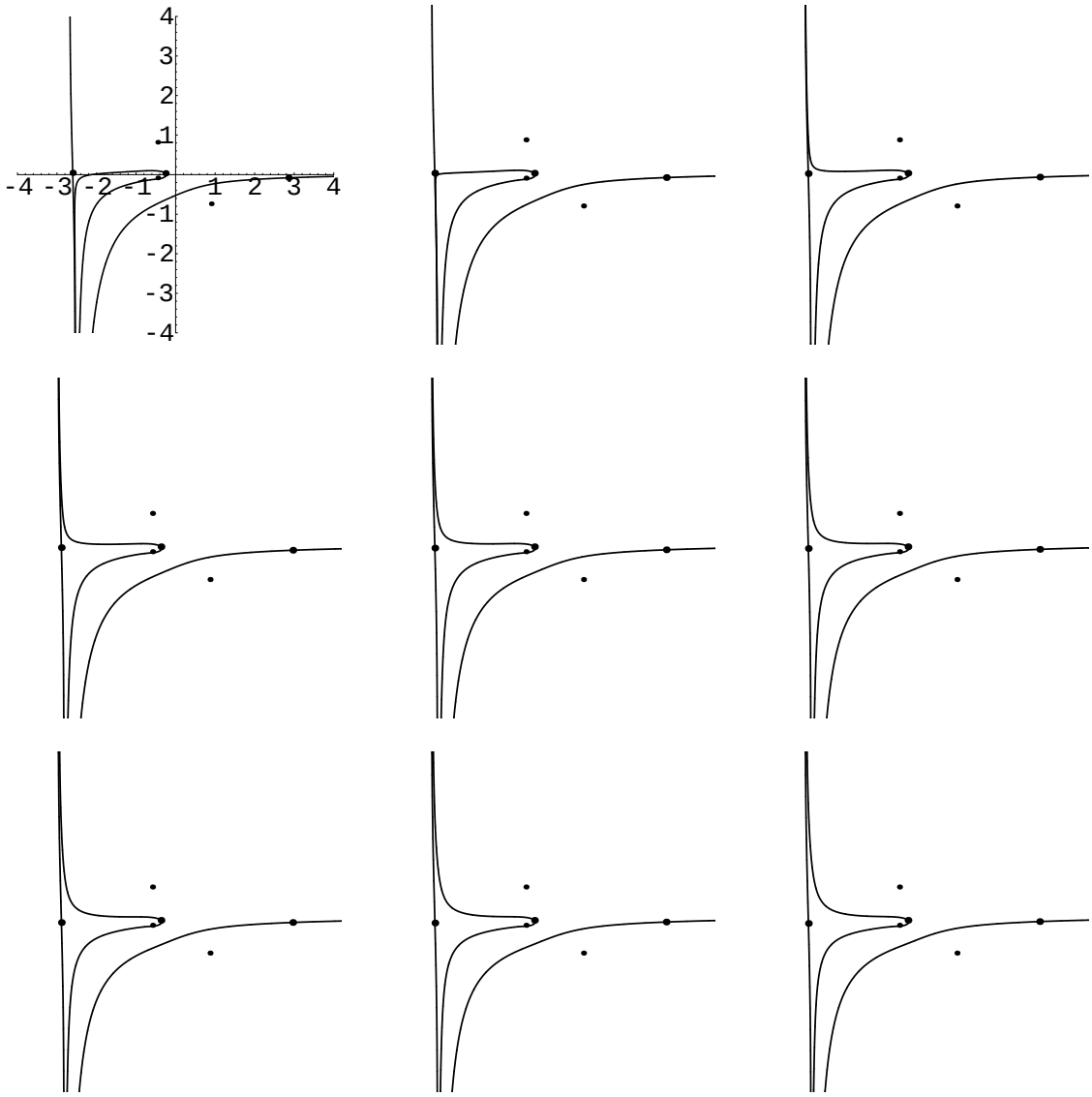
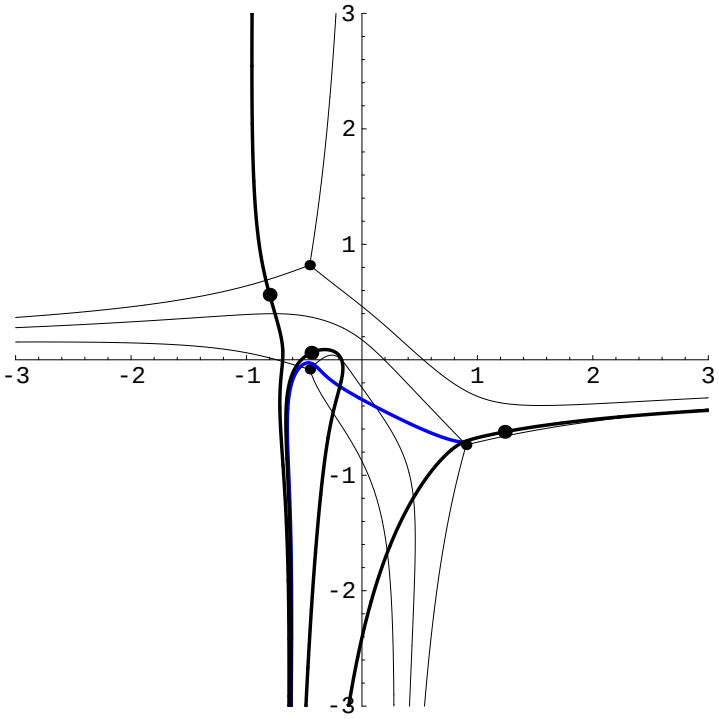
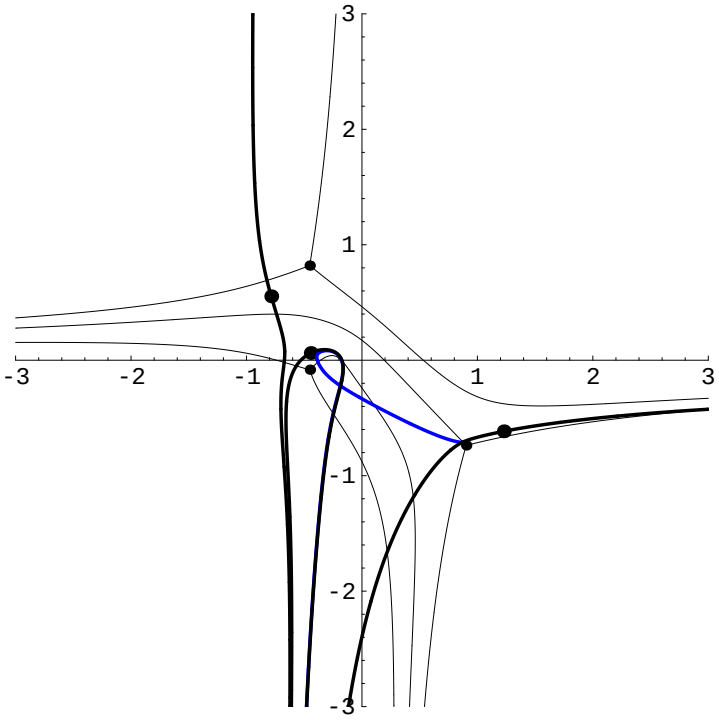



Figure A-7 : 直線 $\mathrm{Re}\, x = 1.37$ に沿って Stokes 曲線を横断

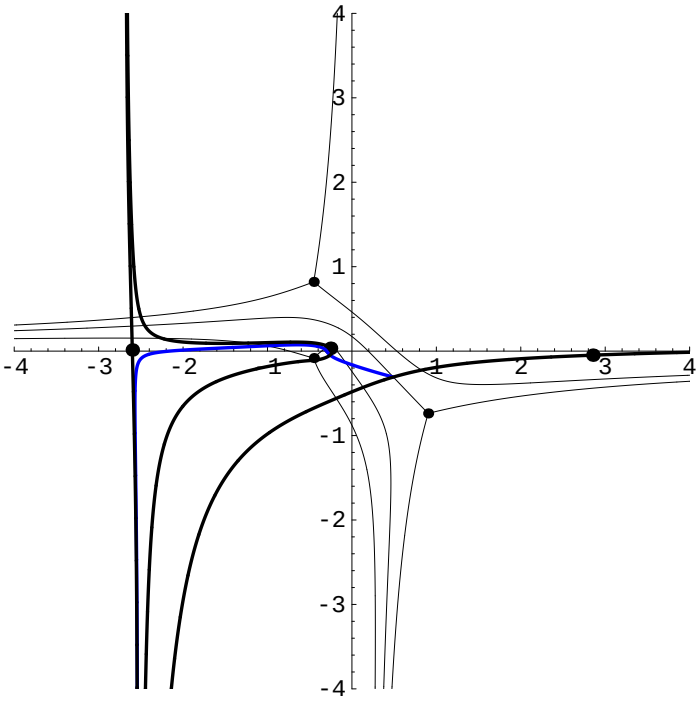



$x = 0.45936 - 0.067718\ i$

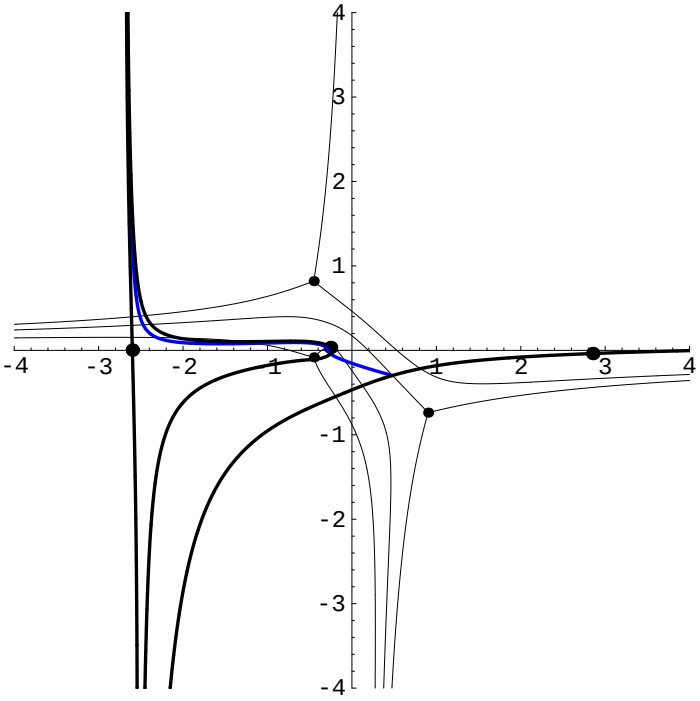



$x = 0.45597 - 0.0600894\ i$

Figure A-8

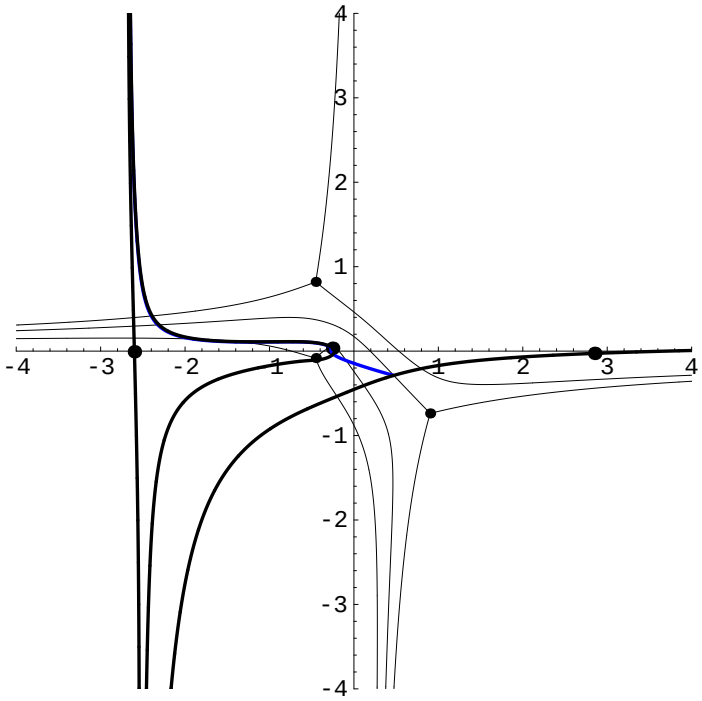



$x = 1.37 + 0.07475\ i$

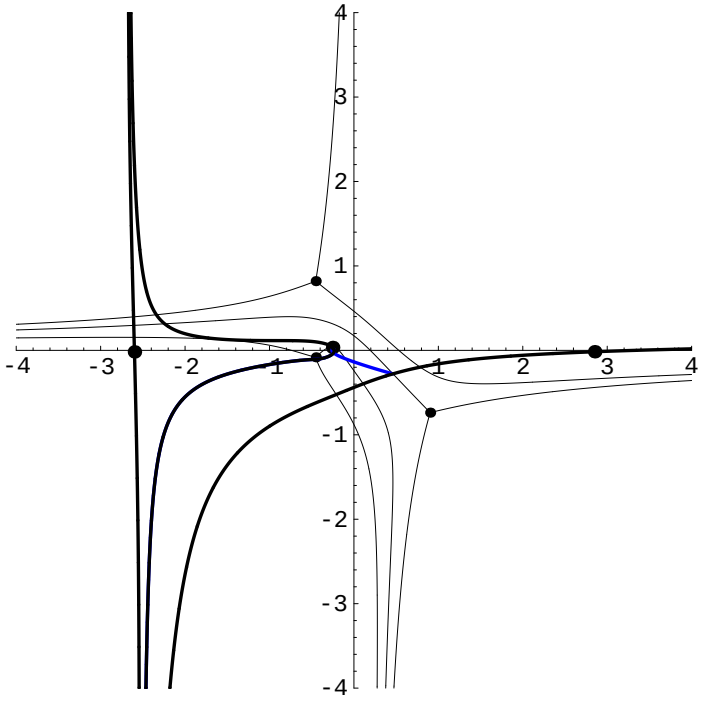



$x = 1.37 + 0.08\ i$

Figure A-9

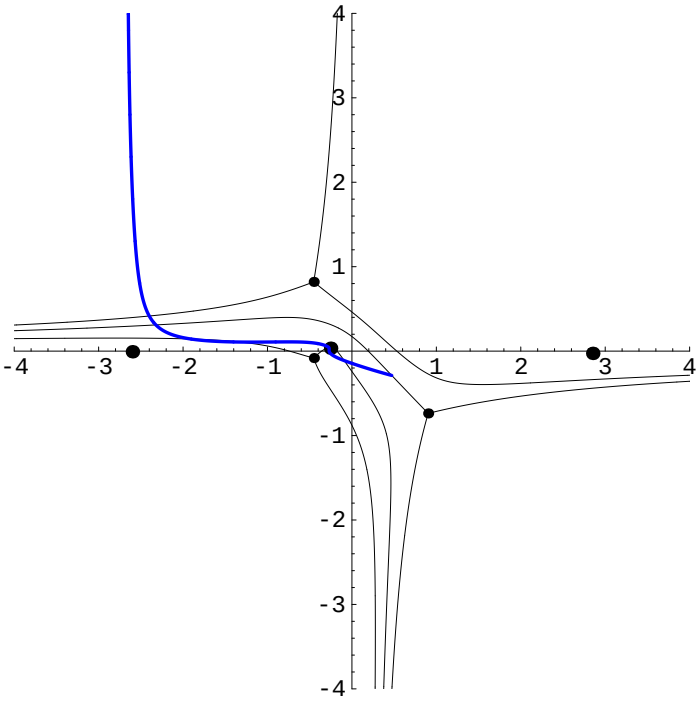



$x = 1.37 + 0.08525\ i$

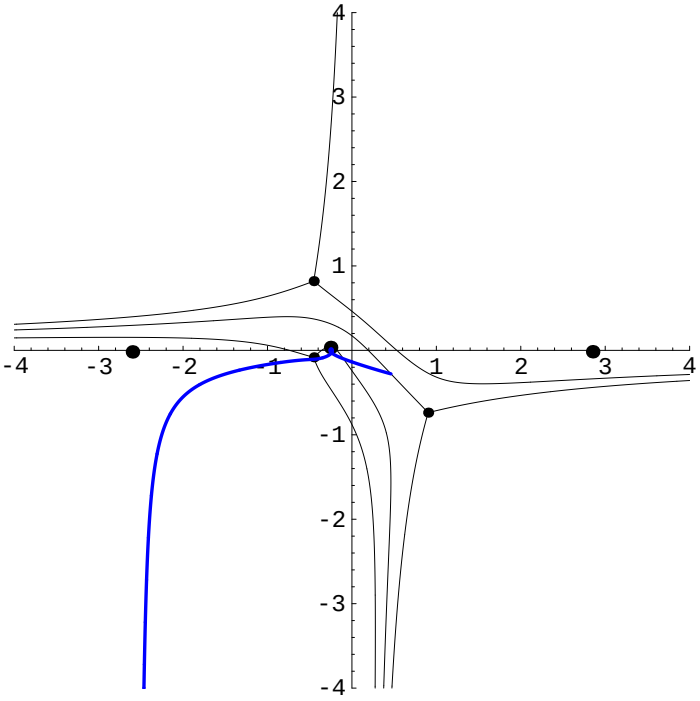



$x = 1.37 + 0.0905\ i$

Figure A-10




$x = 1.37 + 0.08525\ i$




$x = 1.37 + 0.0905\ i$

Figure A-11

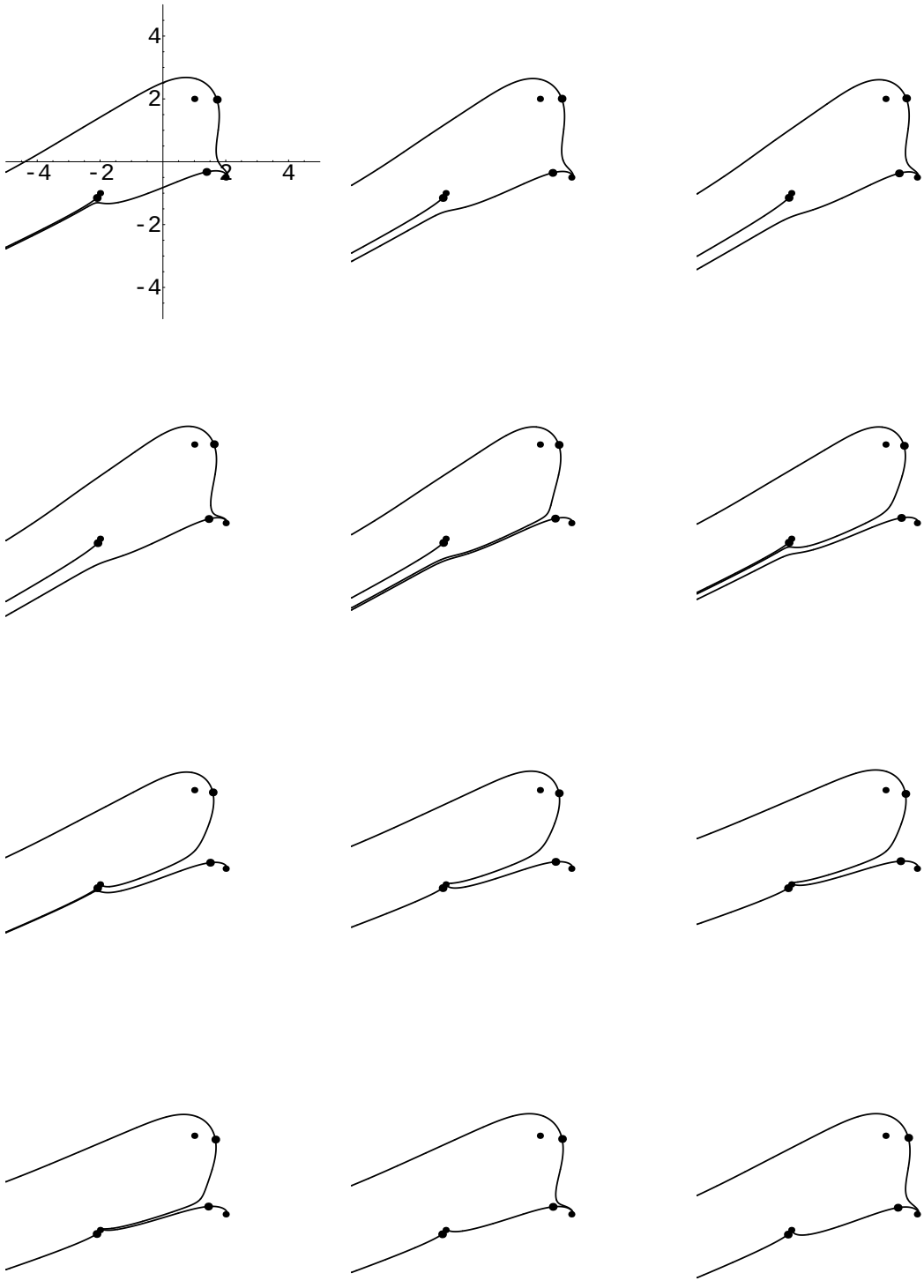



Figure A-12

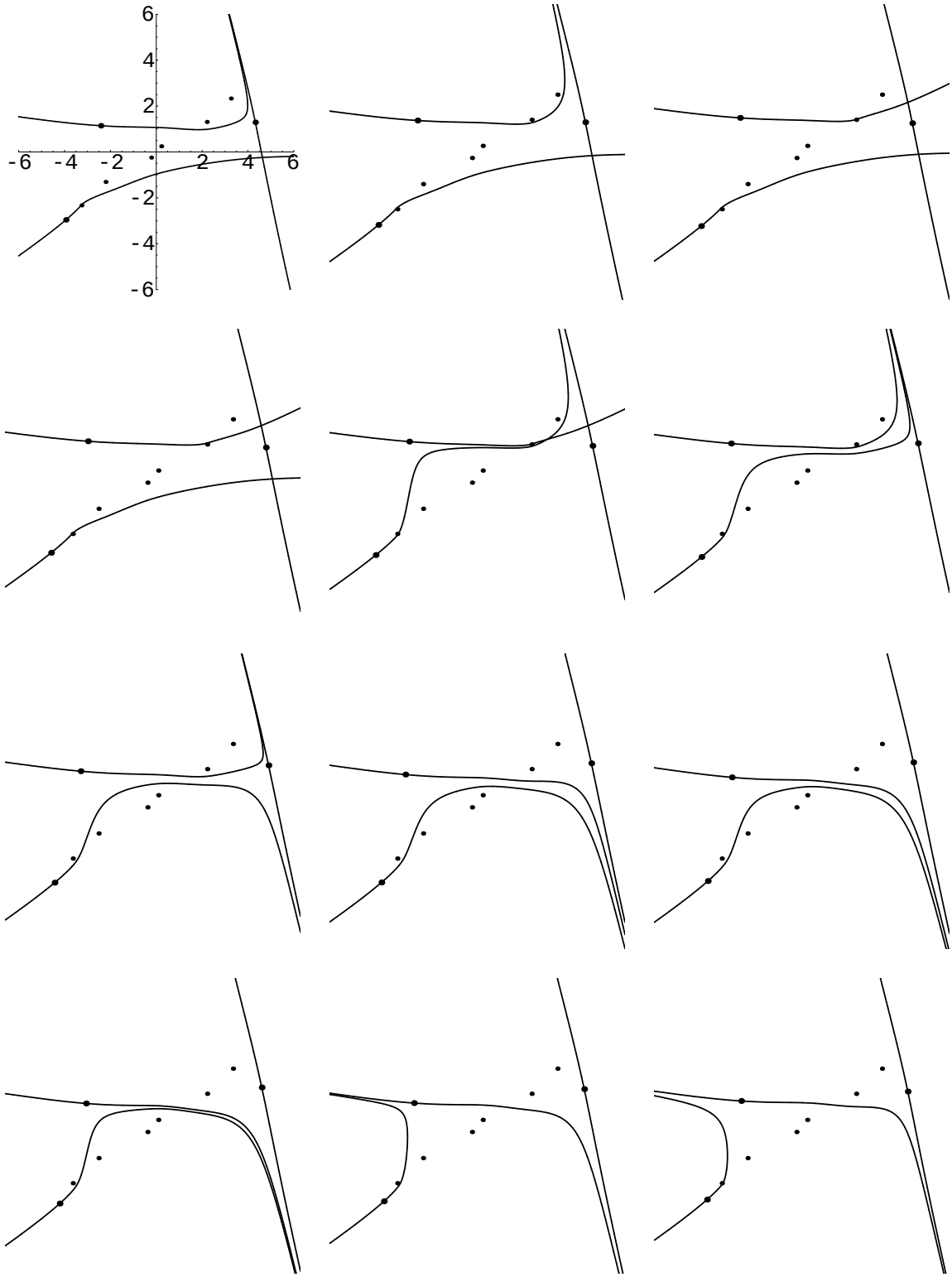
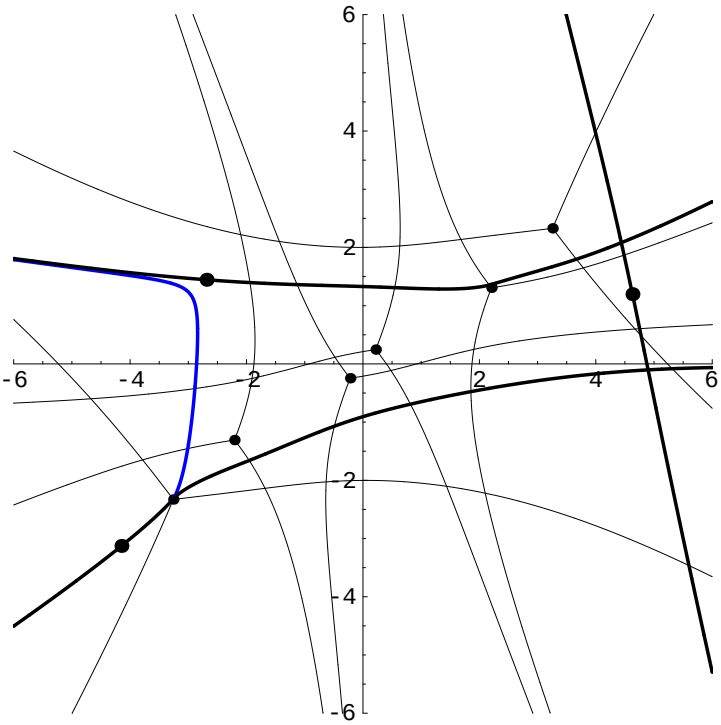
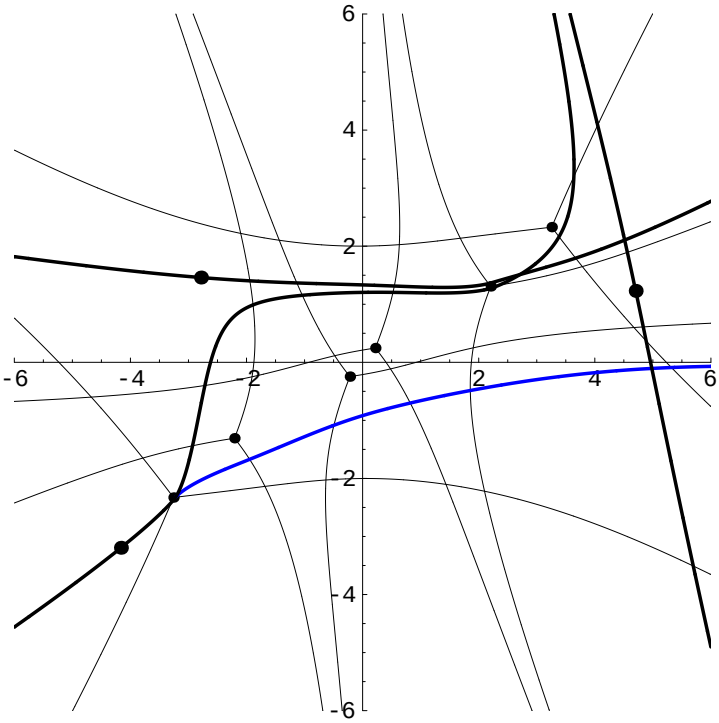



Figure A-13




$x = -0.978776 + 0.247106\ i$




$x = -0.998081 + 0.247106\ i$

Figure A-14