# 無限個の phase を持つある作用素の Stokes geometry について

青木貴史 (近畿大・理工)
河合隆裕 (京大・数理研)
小池達也 (京大・理)
竹井義次 (京大・数理研)

## 1 Introduction

以下の結果は研究会後に得られたものであるが, 研究会における話題と密接に関係しており, 興味深いと思われるので, この講究録に収録させてもらうことにした.

本稿では large parameter $\eta$ を含んだ無限階の方程式

$$P(x,\partial_x,\eta)\,\psi = 0, \quad P = \cosh(\sqrt{\partial_x/\alpha\eta}) - x \quad (\alpha \in \mathbf{C}) \tag{1}$$

を考える. (後に主に考えるのは $\alpha = i$ の場合である.)

我々が現在興味を持っている作用素 $P(x,\partial_x,\eta) = P(x,\partial_x/\eta)$ は, その Borel 変換 $P_B(x,\partial_x/\partial_y)$ が $x$ に正則に依存する $\zeta = \xi/\eta$ の整函数を表象とする (0 階の)microdifferential operator となるものである. そのような作用素に関しては 3 階の作用素に対する局所理論 ([AKT1], Theorem 1.4 等) の自然な拡張が存在し, 又, $P_B$ に対する超局所解析を通して "new turning point" を導入できることも判ってきている. (詳細は現在準備中の論文に譲る.) 従ってそのような作用素に対しては本稿で論じるような Stokes geometry を考えることが出来るのである. そのような作用素の中には, 例えば $\exp(\partial_x^2/\eta^2) - a(x)$ と云う形の作用素も含まれており, これ等ひょっとしたら現実的な応用を持つのではないか (例えば [BB] 参照) とも期待しているが, 特にここで, よりおとなしそうな上述の作用素に限って議論を行う主な理由は次のような際立った特徴をこの作用素が持つことにある:

以下に見るようにこの作用素の変わり点は 2 点 ($x = \pm 1$) しかなく, これらの変わり点から出る Stokes curve は無限重の重なりを示している. 従って WKB 解の "接続公式" と云ったものがあり得るのかどうかはアプリオリには全く明らかではない. 勿論上に触れたように局所理論が確立された今 (平成 12 年 7 月) は "当然成り立つ" と言い切れるけれど, 我々自身最初一抹の不安があったことは事実である. 本稿で示すような解の積分表示における最急降下路のパターンの切り替わり方 (4 節) から "成り立つに違いない. 自信を持って前進しよう" と思ったのであった.

さて今 (1) の WKB 解を

$$\psi = \exp\left(\int^x (\eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1}S_1(x) + \cdots)dx\right) \tag{2}$$

の形で構成することにすれば, $S_{-1}$ は次の方程式を満たすことがわかる:

$$\cosh(\sqrt{S_{-1}/\alpha}) - x = 0. \tag{3}$$

以下

$$f(x,\zeta) = \cosh(\sqrt{\zeta/\alpha}) - x \tag{4}$$

とおこう. この時 $f(x,\zeta)=0$ を解くと $\zeta=f_n(x)$ が得られる. 但し

$$f_n(x)=\alpha\left(2n\pi i+\log(x+\sqrt{x^2-1})\right)^2 \quad (n\in\mathbf{Z}) \tag{5}$$

である. つまり, phase を記述する $S_{-1}$ は無限個存在する. (以下 $S_{-1}=f_n$ で始まる WKB 解を $\psi_n$ で表わすことにする.)

こうした無限個の phase を持つ方程式 (1) の Stokes curve や new Stokes curve を, コンピュータを用いた数値計算により求めることが本稿の目的である. さらに, そうして求めた Stokes geometry が, 解の積分表示における steepest descent path の配位と密接に関係していることも数値的に検証する. (本稿で行う数値計算及び図の作成にあたっては Mathematica 4.0 を用いた.)

## 2 Stokes curves

この節の目的は有限階の方程式の場合の議論をもとに (1) 式に対する変わり点, 及び Stokes curve について考察し, それらを図示することである.

まず,

$$f(x,\zeta)=\frac{\partial f}{\partial\zeta}(x,\zeta)=0 \tag{6}$$

の解 $x$ を変わり点と呼ぶことにしよう. 簡単な計算により

$$x=1,-1 \tag{7}$$

が変わり点であることがわかる.

次にこれらの変わり点から出る Stokes curve について考える. 以下では $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ の分枝を, まず, $x=1$ (resp. $x=-1$) からカットを正の (resp. 負の) 実軸にそって無限遠に引き,

$$\sqrt{x^2-1}\Big|_{x=0}=i,\quad \log(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_{x=0}=\frac{\pi}{2}i, \tag{8}$$

として定めることにする. この時 $x=1$ から出るカットを反時計回りに横切って原点の近傍から原点の近傍に至る経路に沿って (5) 式で定められている $f_n$ を解析接続すると $f_{-n}$ になることがわかる. 従って次式により定まる $x$ 平面内の曲線を $x=1$ から出る Stokes curve と呼ぶことにする.

$$\Im\int_1^x(f_n(x)-f_{-n}(x))dx=0 \quad (n\geq 1). \tag{9}$$

この (9) は

$$\Im\int_1^x i\alpha\log(x+\sqrt{x^2-1})dx=0 \tag{10}$$

に同値であることがわかる. この (10) は $n$ に依らないので, 変わり点 $x=1$ から出る Stokes curve は無限重に重なっていることがわかる. 同様に $f_n$ を $x=-1$ から出るカットを反時計回りに横切って原点の近傍に解析接続すると $f_{-n-1}$ になることがわかるので,

$$\Im\int_1^x(f_n(x)-f_{-n-1}(x))dx=0 \quad (n\geq 1) \tag{11}$$

により定まる曲線を $x=-1$ から出る Stokes curve と呼ぶことにする. この (11) は

$$\Im \int_{-1}^{x} i\alpha(-i\pi + \log(x+\sqrt{x^2-1}))dx = 0 \tag{12}$$

と同値であるから, やはり $x=1$ から出る Stokes curve と同様に (12) で定義される Stokes curve も無限重に重なっていることがわかる.

この (10) と (12) により定まる Stokes curve を以下に図示しよう. 以下の図は

$$\alpha = ie^{i\theta\pi} \tag{13}$$

とおき, $\theta$ を 0 から 2 まで 0.1 ずつ増やした時の Stokes curve を順に並べたものである.

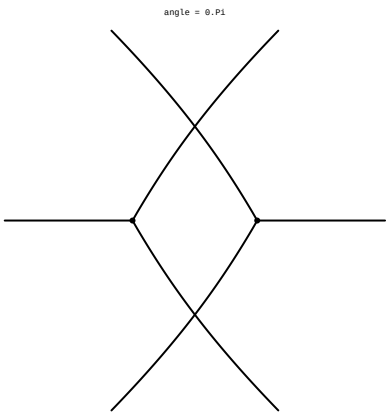


Figure 2-1

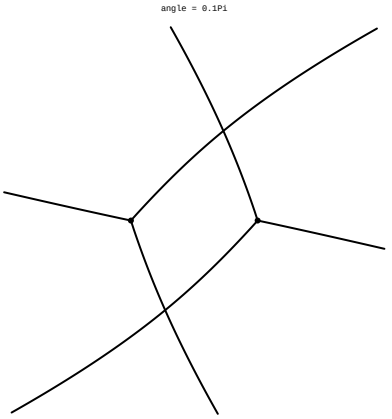


Figure 2-2

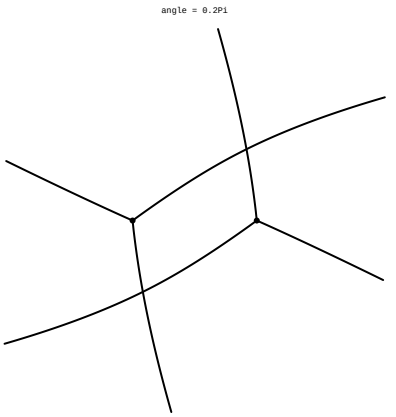


Figure 2-3

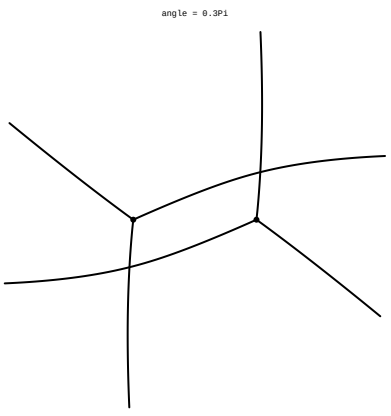


Figure 2-4

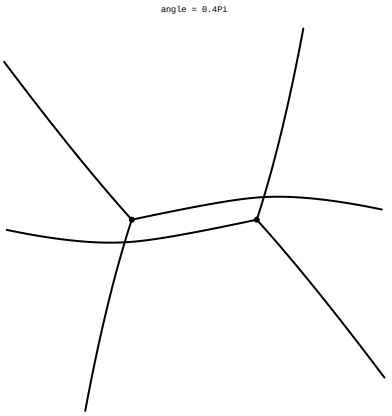


Figure 2-5

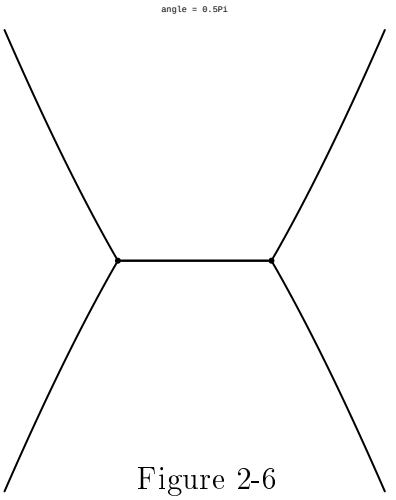


Figure 2-6

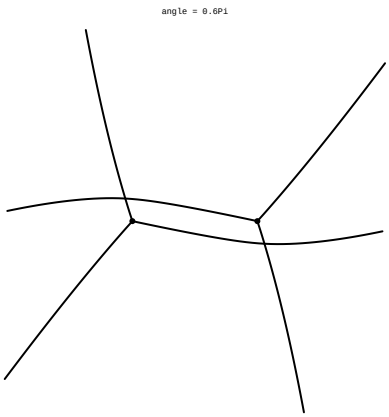


Figure 2-7

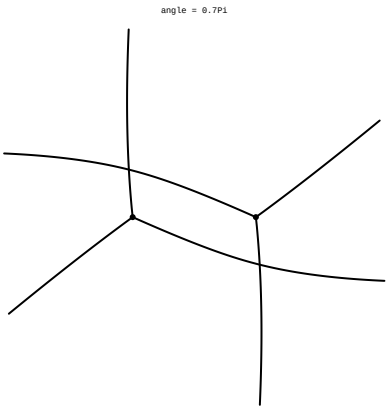


Figure 2-8

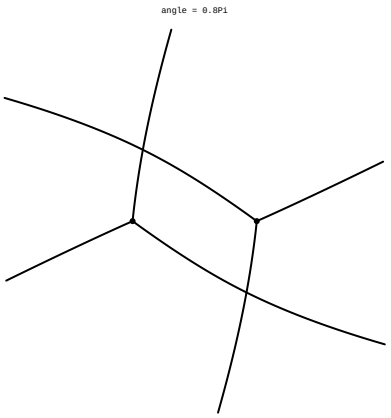


Figure 2-9

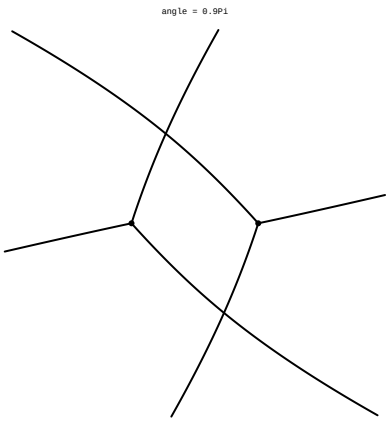


Figure 2-10

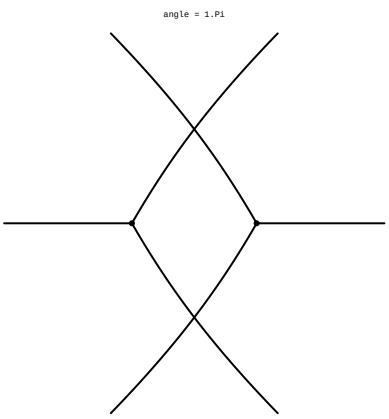


Figure 2-11

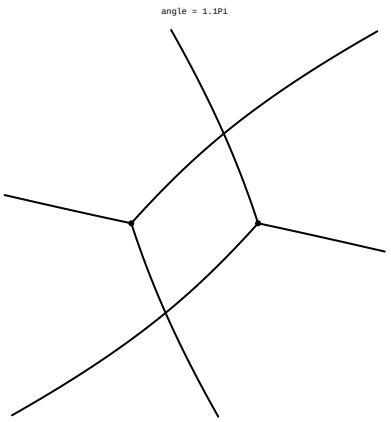


Figure 2-12

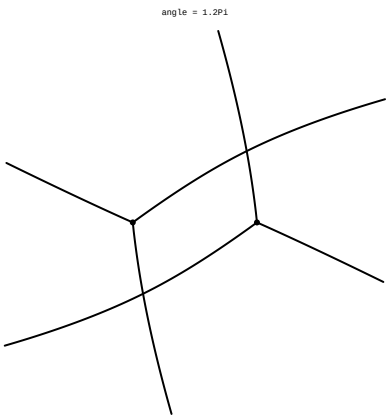


Figure 2-13

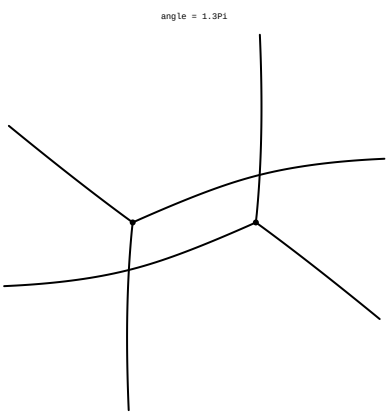


Figure 2-14

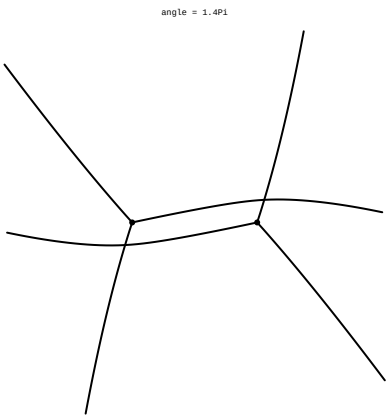


Figure 2-15

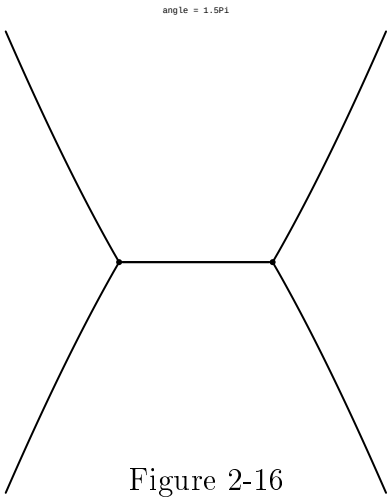


Figure 2-16

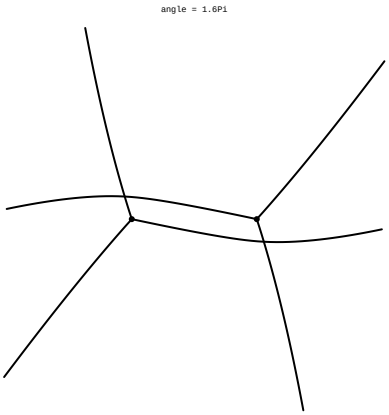


Figure 2-17

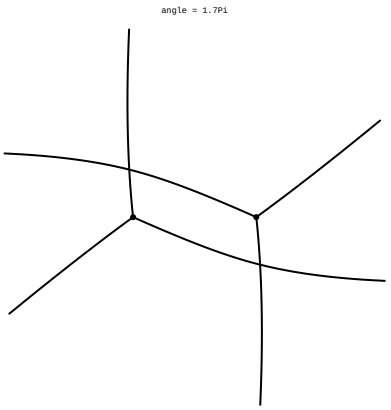


Figure 2-18

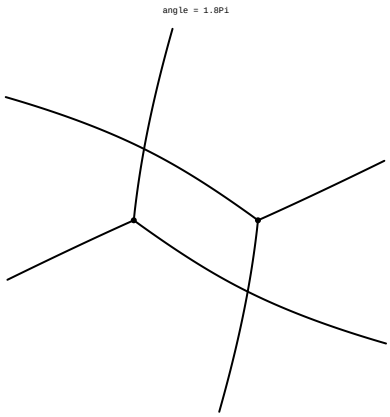


Figure 2-19

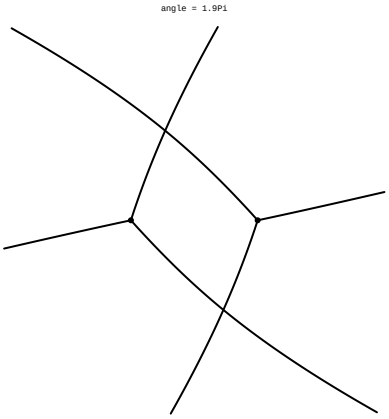


Figure 2-20

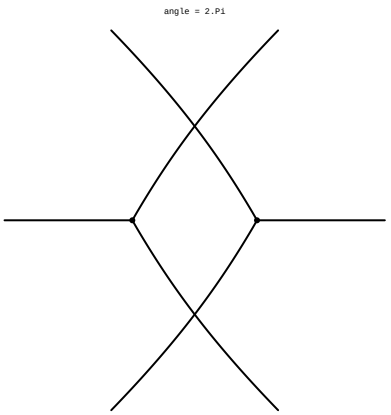


Figure 2-21

## 3 New Stokes curves

2 節における Stokes curve の図からわかるとおり, 今考えている方程式に対しては, 一般に, Stokes curve は交叉している. 有限階の方程式の場合の議論と同じく, Stokes geometry を決定するためにはその交点から出る new Stokes curve についての考察も必要となるであろう.

以下 $\alpha = i$, つまり,

$$P(x, \partial_x, \eta) = \cosh(\sqrt{\partial_x / i\eta}) - x \tag{14}$$

の場合について議論を進めることにする. (この方程式に対する Stokes curve は図 2-1 である.)

上半平面にある Stokes curve の交点を $x_0$, 下半平面にある交点を $x_1$ として, 最初に上半平面の交点 $x_0$ から出る new Stokes curve について考察しよう.

まず, $x = 1$ から出て $x_0$ に向かう Stokes curve に沿って

$$\Re \int_1^x (f_n(x) - f_{-n}(x))dx > 0 \quad (n > 0) \tag{15}$$

が成り立つことに注意する. つまり, この Stokes curve 上では $\psi_n$ が $\psi_{-n}$ に対して dominant となる. (以下 [AKT1] にならって, この事を "$n > -n$" と表わすことにする.) さらに $x = -1$ から出て $x_0$ に向かう Stokes curve に沿って

$$\Re \int_{-1}^x (f_n(x) - f_{-n-1}(x))dx < 0 \quad (n \geq 0), \tag{16}$$

つまり, "$-n-1 > n$" となっていることもわかる. これらの 2 つのことから $x = x_0$ において

$$\cdots > 3 > -3 > 2 > -2 > 1 > -1 > 0 \tag{17}$$

となっている事がわかる. (結果を先取りするようだが, 図 4-4-2 も参照.) Borel 平面で考えればこの (17) は WKB 解 $\psi_n$ の特異点 $y = g_n(x)$, 但し $g_n(x) = \int^x f_n(x)dx$, が実軸に平行な直線上に

$$\cdots < \Re g_3(x) < \Re g_{-3}(x) < \Re g_2(x) < \Re g_{-2}(x) < \Re g_1(x) < \Re g_{-1}(x) < \Re g_0(x) \tag{18}$$

と並んでいることを意味する. 従って次で定義される $x$ 平面における曲線が new Stokes curve の候補となることがわかる.

$$\Im \int_{x_0}^x (f_m(x) - f_n(x))dx = 0 \quad (m, n \in \mathbf{Z},\ m \neq -n,\ m \neq -n-1). \tag{19}$$

(ここで $m = -n$, および $m = -n-1$ をはずしているのは, それぞれ $x = 1$, $x = -1$ から出る Stokes curve となるからである.) 簡単な式変形の後, この (19) は

$$\Im \int_{x_0}^x (k\pi i + \log(x + \sqrt{x^2 - 1}))dx = 0 \quad (k = m + n \neq 0, -1) \tag{20}$$

となる. この曲線を図示しよう.

まず, $k = 1, 2, 3$ の場合は次の様になる.

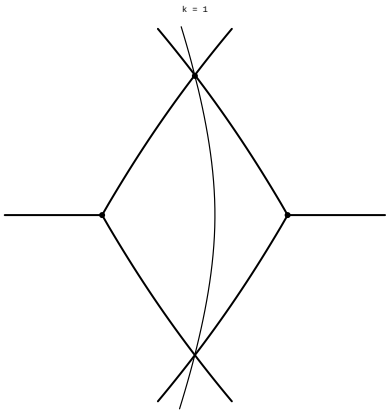


Figure 3-1

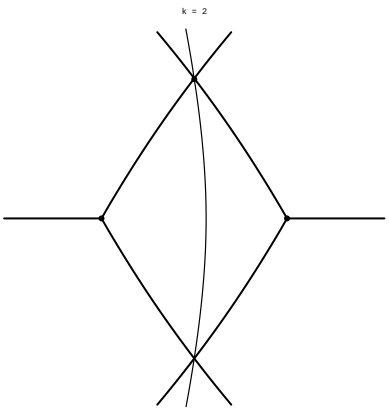


Figure 3-2

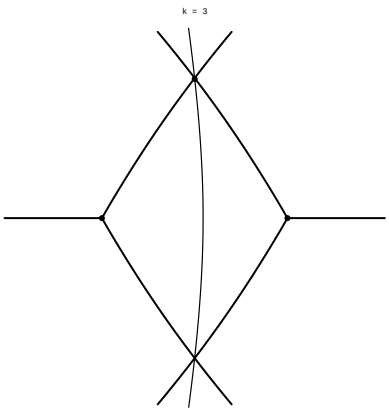


Figure 3-3

図からわかるとおり上半平面の交点 $x_0$ から伸ばした new Stokes curve が驚くべきことに下半平面の交点 $x_1$ を通過している. また $k$ が大きくなると new Stokes curve は虚軸に近づいていくこともわかる. 実際 $k = 100$ の場合は次の通り.

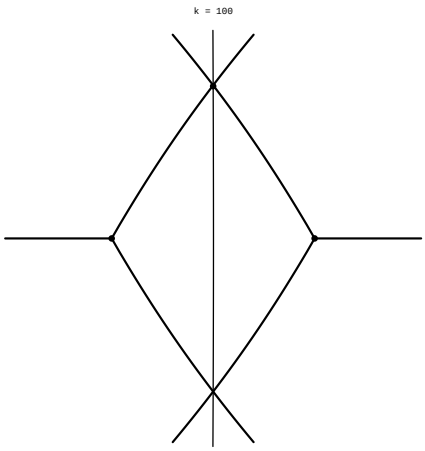


Figure 3-4

以上をまとめて $k = 1, 2, \ldots, 6$ に対応する new Stokes curve を重ねて図示すると次の様になる.

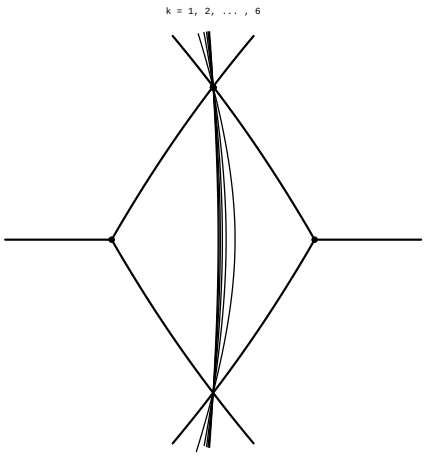

Figure 3-5

次に $k = -2, -3, -4$ の場合に new Stokes curve を図示する.

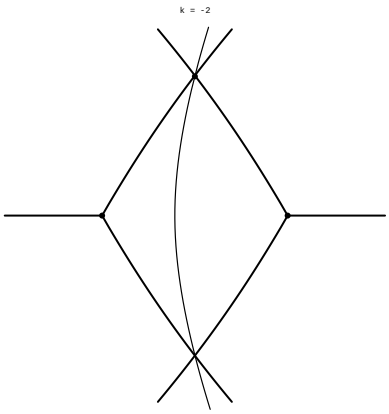

Figure 3-6

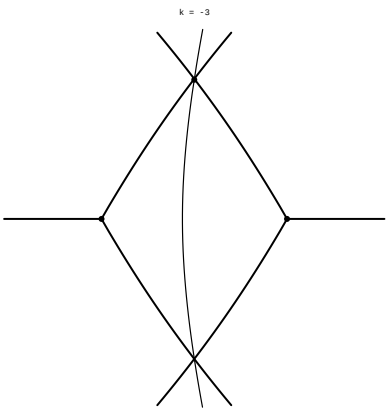

Figure 3-7

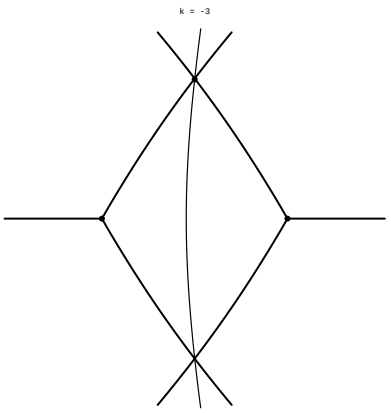

Figure 3-8

やはり $k$ の絶対値が大きくなると new Stokes curve は虚軸に近づいていくことがわかる. 例えば $k = -100$ の場合は次の通り:

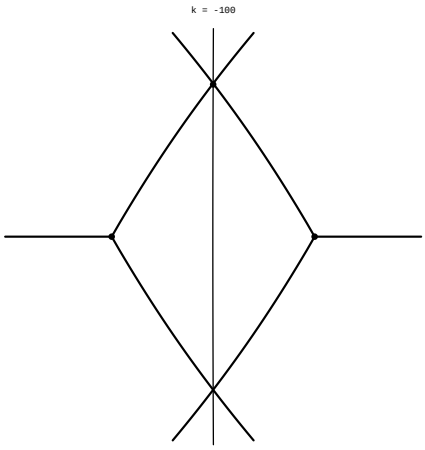


Figure 3-9

先ほどと同様に $k = -2, -3, \ldots, -6$ のに対応する new Stokes curve を重ねて図示すると次のようになる:

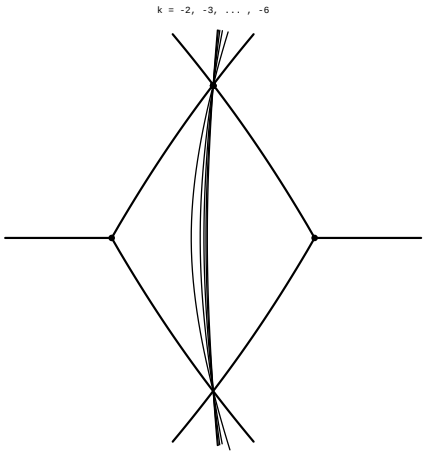


Figure 3-10

New Stokes curve で $-6 \leq k \leq 6$ $(k \neq 0, -1)$ に対応するものを重ねて図示すると次のようになる:

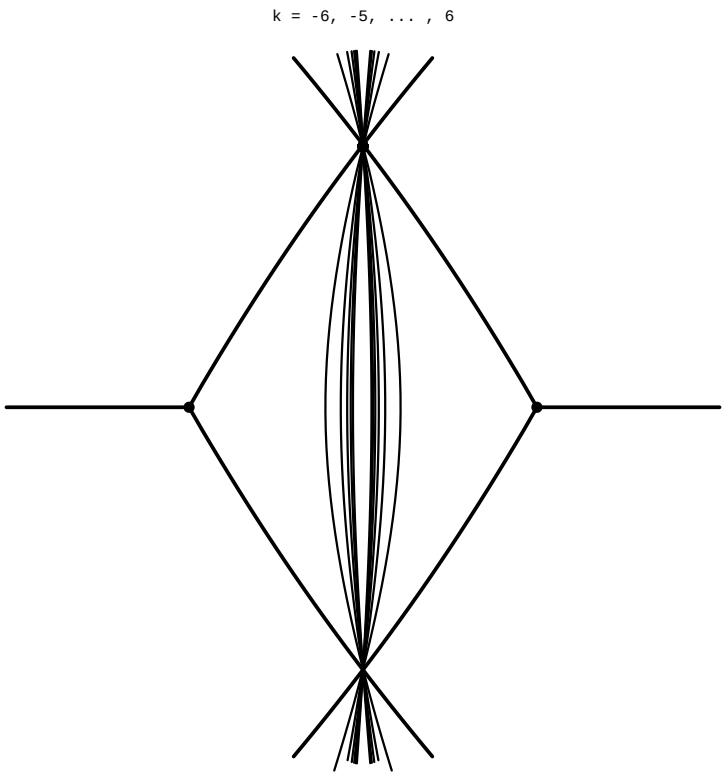

Figure 3-11

ここで簡単に new turning point との関連について触れておくことにする. まず, new turning point を [AKT1] に倣って定義すると, 詳しい計算は省略するが, 方程式 (14) に対する new turning point は

$$x = \pm \cos w \quad (\text{但し } w \text{ は } w = \tan w \text{ を満たす}) \tag{21}$$

となることがわかる. (これらの new turning point は $-1 \leq x \leq 1$ にあり, 原点に集積する.)

有限階の方程式の場合, [AKT1] において議論されている通り, new Stokes curve は new turning point から出るものとして考えることが出来た. 今考えている方程式についても同様のことが成り立つことが期待される. 以下の表は new Stokes curve と実軸の交点を数値的に求め, その値と new turning point とを比較したものである.

| new turning point | new Stokes curve と実軸の交点 | 比 |
|---|---|---|
| 0.21723362821122164 | 0.217245 | 1.00005234819706 |
| 0.12837455352589863 | 0.128381 | 1.00005021613649 |
| 0.09132520282305673 | 0.09133 | 1.00005252851124 |
| 0.07091345945046106 | 0.070917 | 1.0000499277509 |
| 0.05797180234615269 | 0.057975 | 1.00005515877923 |
| 0.0490296240140756 | 0.049032 | 1.00004846021099 |
| 0.0424796169776133 | 0.042482 | 1.00005609801962 |
| 0.03747451999392949 | 0.037476 | 1.00003949366318 |
| 0.03352513502139932 | 0.033527 | 1.00005562926442 |
| 0.030329171186311316 | 0.030331 | 1.00006029883499 |

この結果から上記のことが数値的には成り立っていることがわかる.

また有限階の方程式の場合の議論から, $x = 0$ を含み $x = \pm 1$ からでる Stokes curve によって囲まれる領域に含まれる new Stokes curve の当該部分は, 上の結果から new turning point を通っていると考えられるので Stokes geometry には無関係である (すなわち WKB 解はそこで Stokes 現象を起こさない) ことが期待される. これらの部分を点線で表わしたものが次の図である.

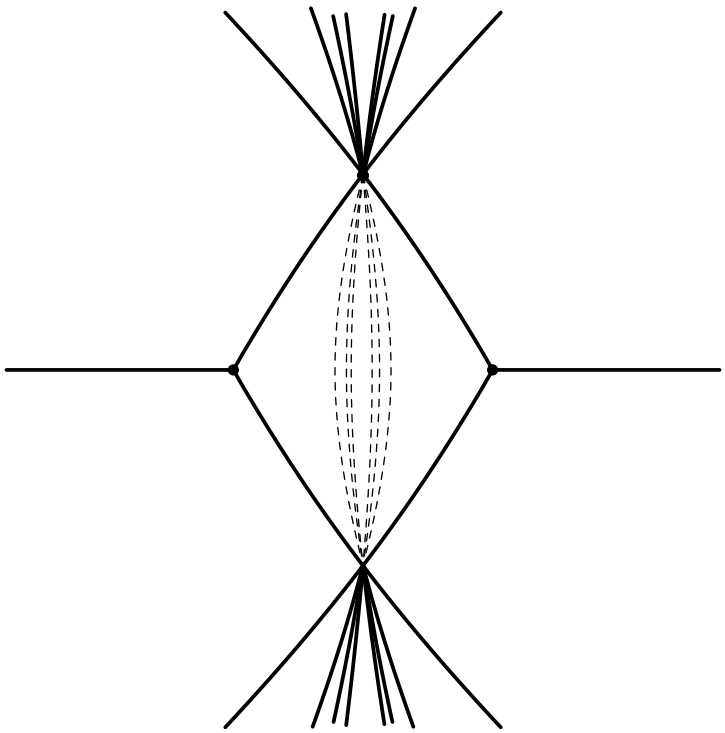

Figure 3-12

この節の締め括りとして $\alpha = ie^{i\theta\pi}$ として $\theta$ を 0 から 1.0 まで 0.1 ずつ増やした場合の $k = 1000$ に対する new Stokes curve を図示することにする. やはり片側の Stokes curve の交点から出た new Stokes curve が反対側の交点を通過していることに注意して貰いたい.

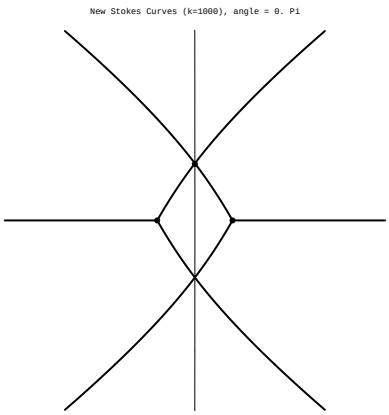


Figure 3-13

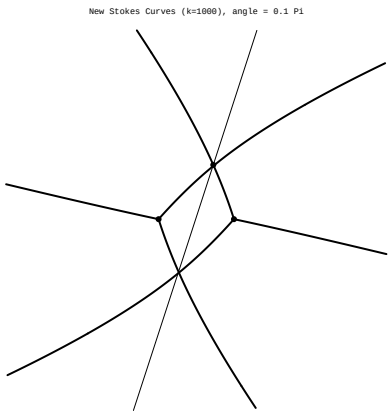


Figure 3-14

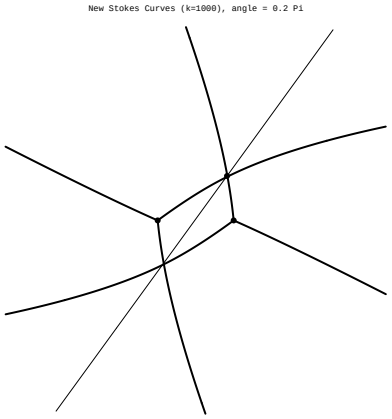


Figure 3-15

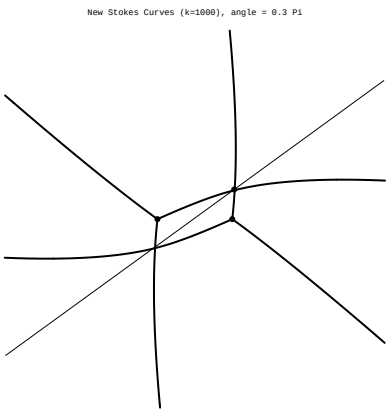


Figure 3-16

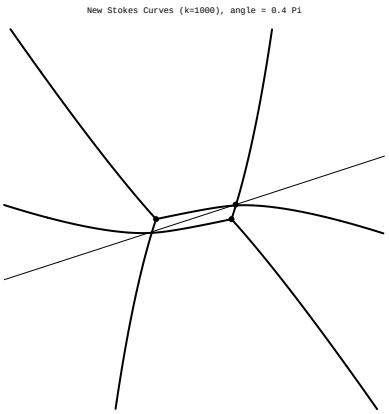


Figure 3-17

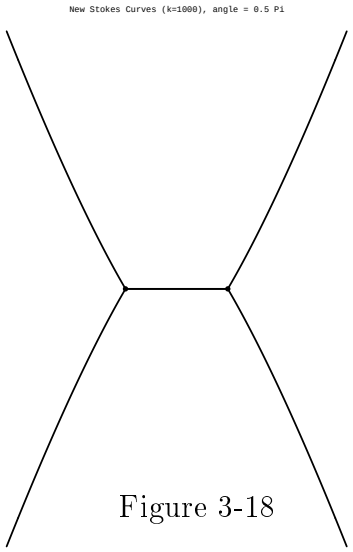


Figure 3-18

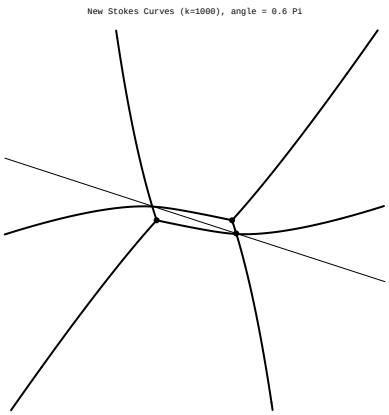


Figure 3-19

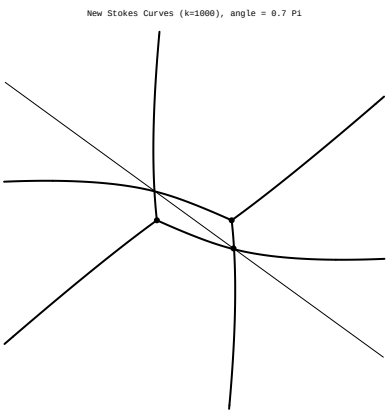


Figure 3-20

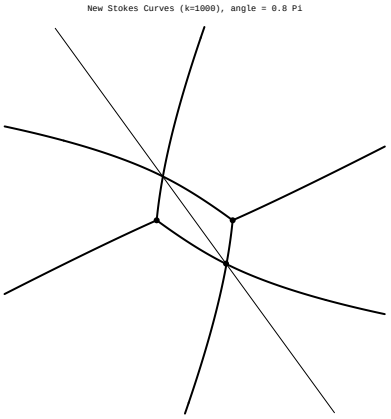


Figure 3-21

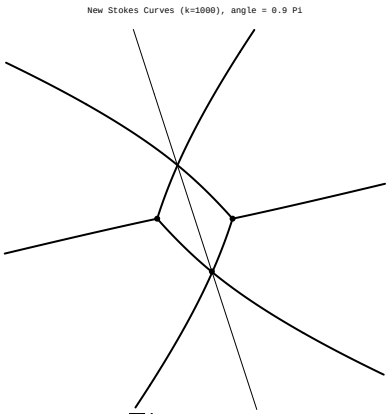


Figure 3-22

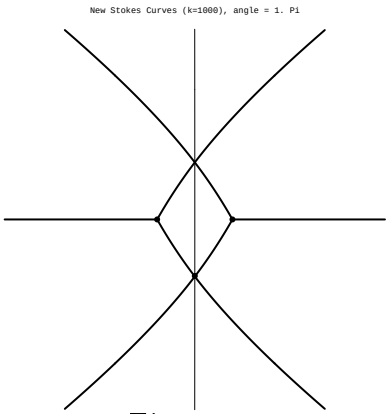


Figure 3-23

# 4 Steepest descent paths

有限階の Laplace 型方程式 (係数が 1 次函数である方程式) の場合は, 点 $x$ が Stokes curve あるいは new Stokes curve 上にあるという状況が, 積分表示の方で見れば, 2 つの鞍点を結ぶ steepest descent path が存在するという条件に対応していた ([AKT2], [T]).

今考えている方程式

$$P(x, \partial_x, \eta)\,\psi = 0, \quad P = \cosh(\sqrt{\partial_x/i\eta}) - x \tag{22}$$

は $x$ についての無限階の Laplace 型方程式と考えられ, 従って上記の有限階の場合の結果が同じように成立していると期待される.

以下では (22) の解の積分表示として

$$\psi = \int \exp\left(\eta\, h(x,\zeta)\right) d\zeta \tag{23}$$

(但し

$$h(x,\zeta) = x\zeta - 2i\sqrt{\zeta/i}\,\sinh(\sqrt{\zeta/i}) + 2i\cosh(\sqrt{\zeta/i}) \tag{24}$$

である.) を考え, $x$ をいろいろ動かした時の積分表示 (23) の鞍点

$$\zeta_n = i\left(2n\pi i + \log(x + \sqrt{x^2-1})\right)^2 \tag{25}$$

(この鞍点は (5) で与えられた $S_{-1}$ に一致することに注意.) と, その鞍点を通る steepest descent path を図示することにより, 2 節や 3 節で調べた Stokes curve 及び new Stokes curve の図や, この期待の正当性を検証する.

## 4.1 $x = 1$ の近傍

まず, $x$ が変わり点 $x = 1$ の近傍を動く時の steepest descent path の配位について考えることにする. 具体的には次の図の様に $x = 1 + 0.2e^{i\theta\pi}$ (但し $\theta$ は 0 から 2 まで 0.1 ずつ増やす) として考える.

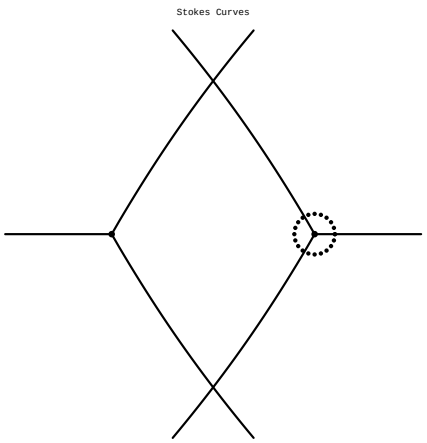


Figure 4-1-1

この様に $x$ を動かした時の鞍点 $\zeta_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3)$ と steepest descent path を調べてみると次の様になる.

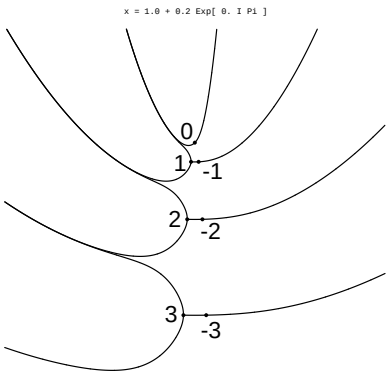


Figure 4-1-a1

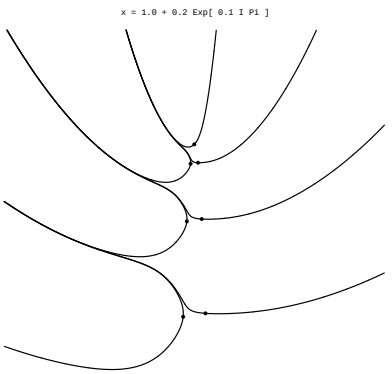


Figure 4-1-a2

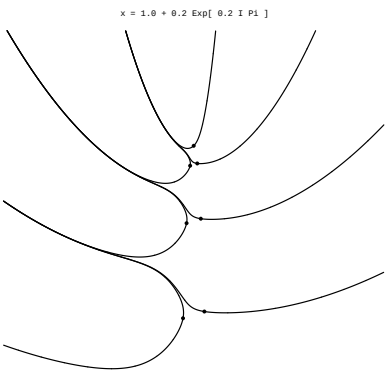


Figure 4-1-a3

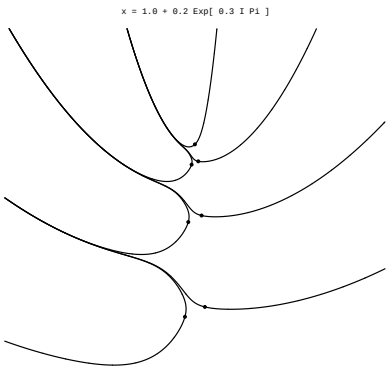


Figure 4-1-a4

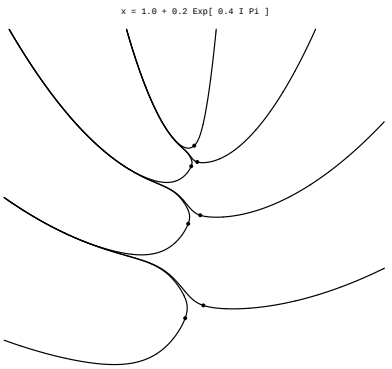


Figure 4-1-a5

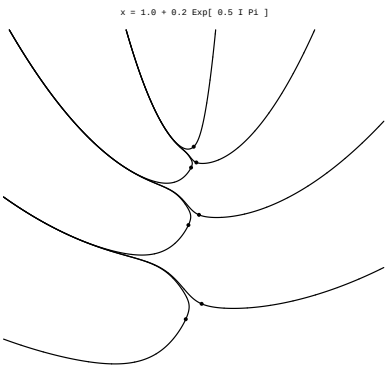


Figure 4-1-a6

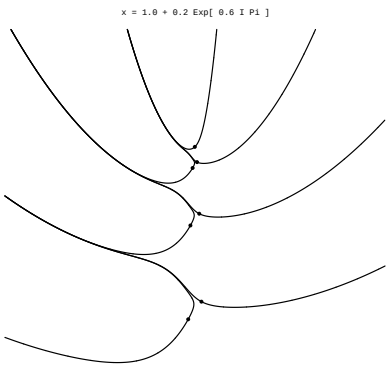


Figure 4-1-a7

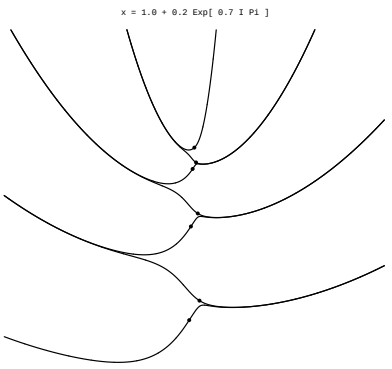


Figure 4-1-a8

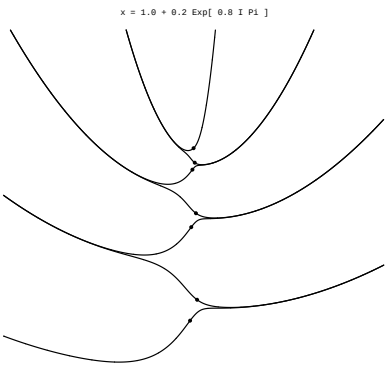


Figure 4-1-a9

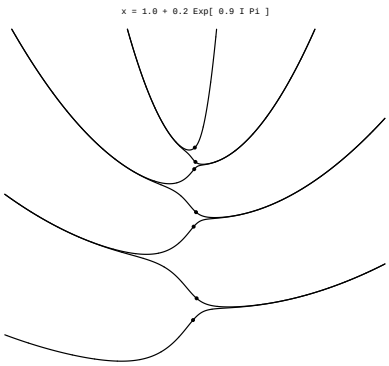


Figure 4-1-a10

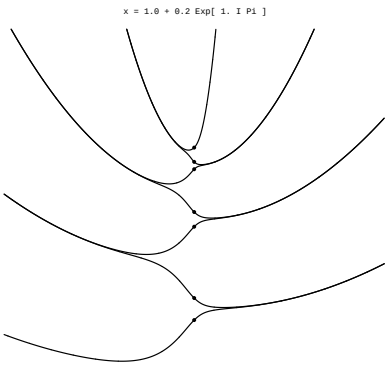


Figure 4-1-a11

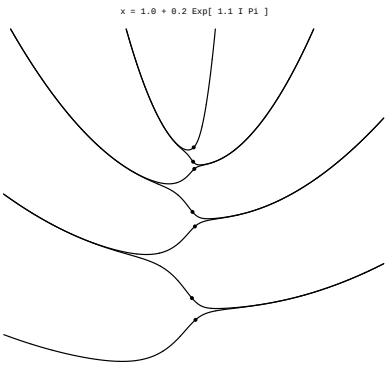


Figure 4-1-a12

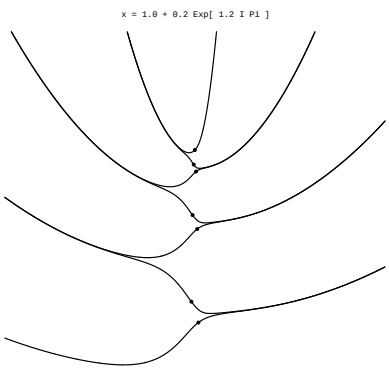


Figure 4-1-a13

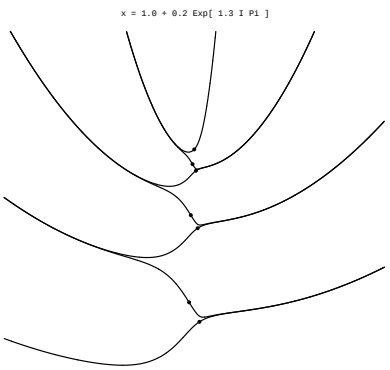


Figure 4-1-a14

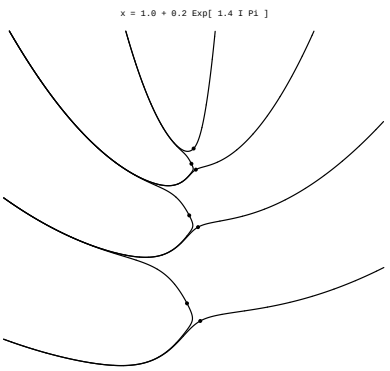


Figure 4-1-a15

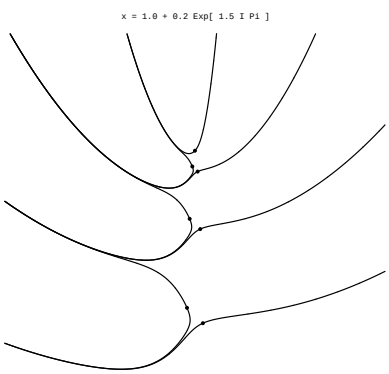


Figure 4-1-a16

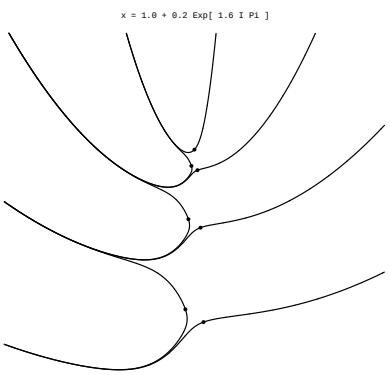


Figure 4-1-a17

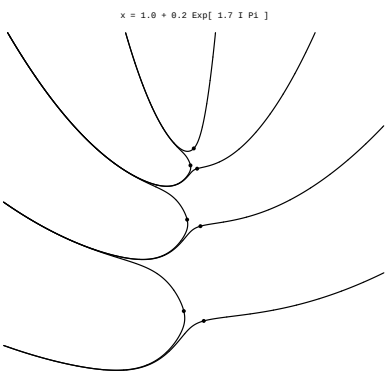


Figure 4-1-a18

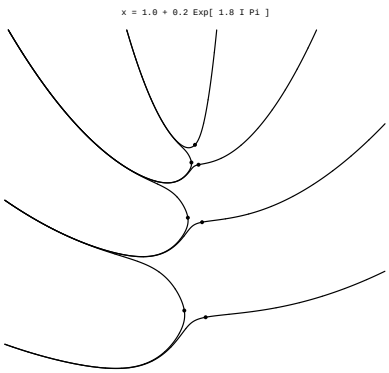


Figure 4-1-a19

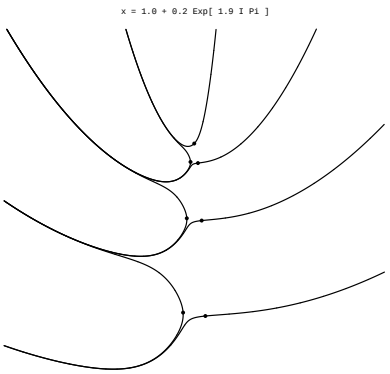


Figure 4-1-a20

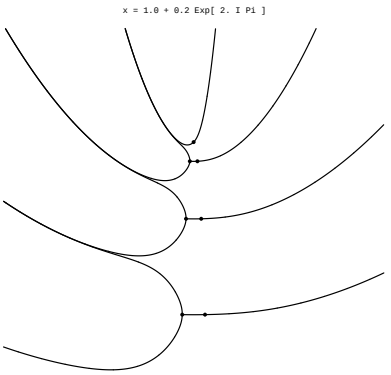


Figure 4-1-a21

以上の図では鞍点 $\zeta_0$,$\zeta_{\pm 1}$ から出る steepest descent path が見えにくいので改めてそれらの鞍点から出る steepest descent path を以下に図示する.

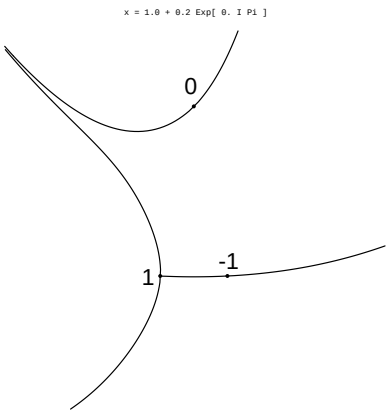


Figure 4-1-b1

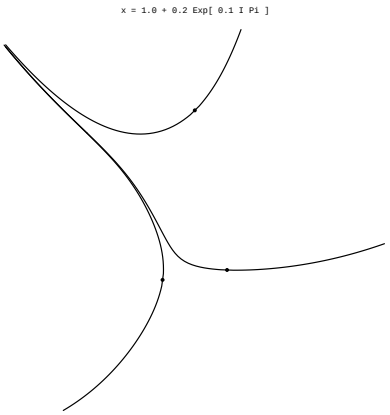


Figure 4-1-b2

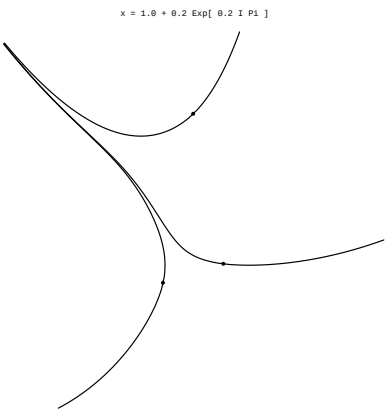


Figure 4-1-b3

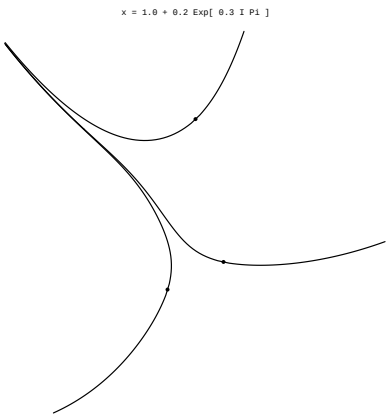


Figure 4-1-b4

Figure 4-1-b5

Figure 4-1-b6

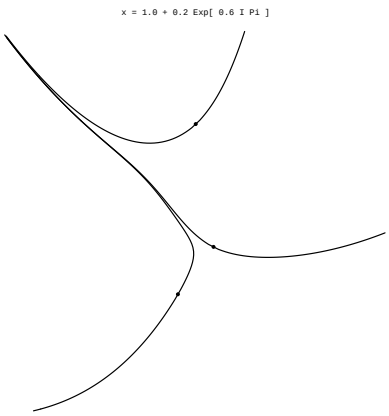


Figure 4-1-b7

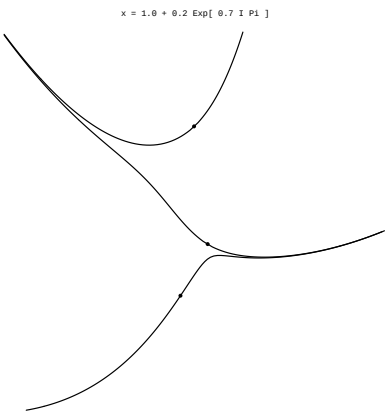


Figure 4-1-b8

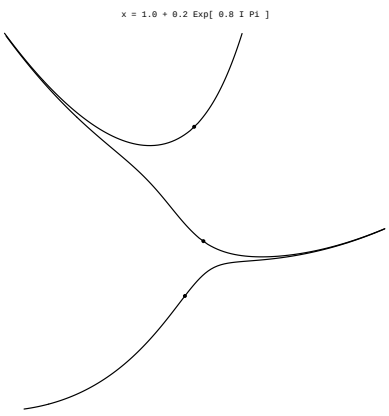


Figure 4-1-b9

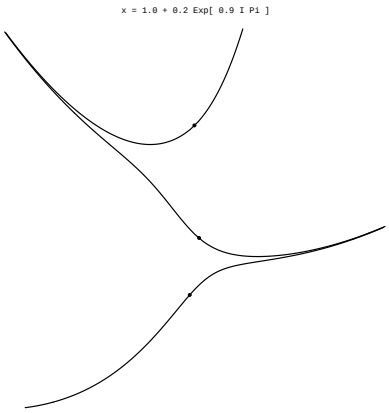


Figure 4-1-b10

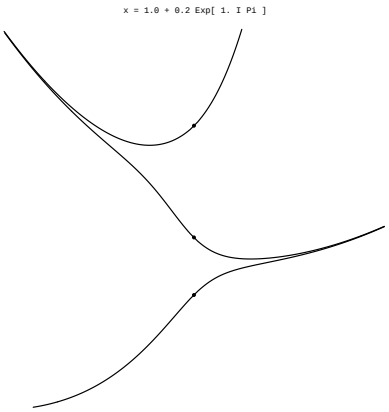


Figure 4-1-b11

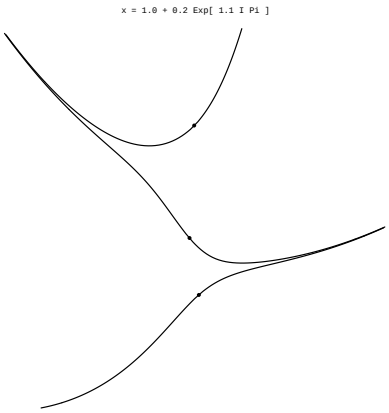


Figure 4-1-b12

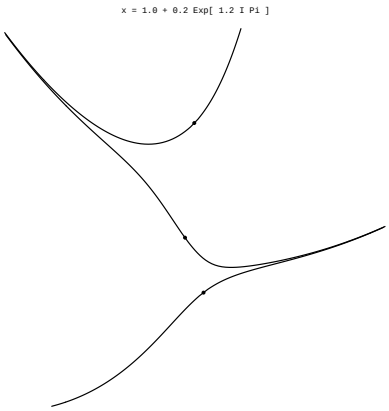


Figure 4-1-b13

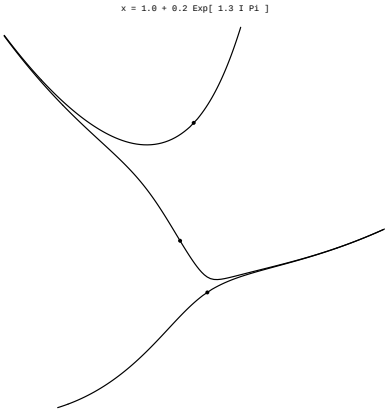


Figure 4-1-b14

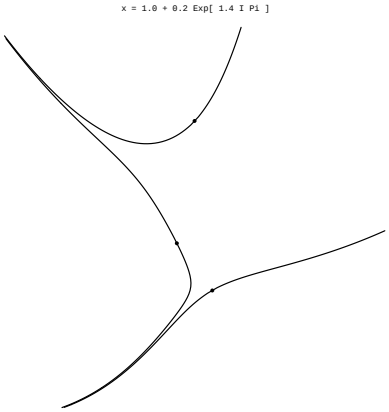


Figure 4-1-b15

Figure 4-1-b16

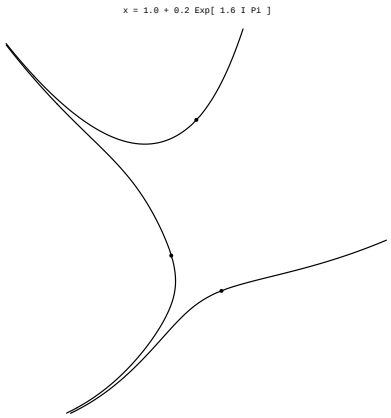


Figure 4-1-b17

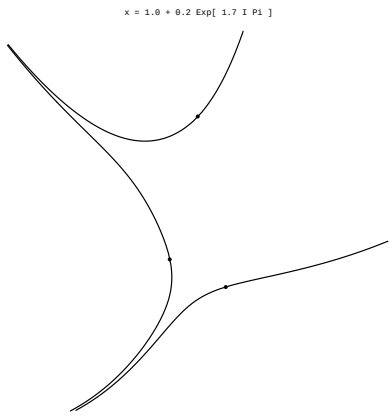


Figure 4-1-b18

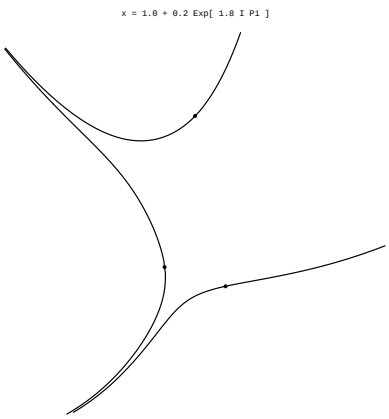


Figure 4-1-b19

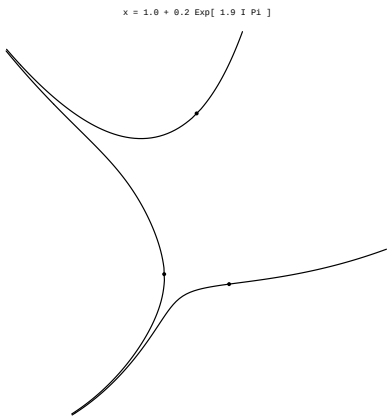


Figure 4-1-b20

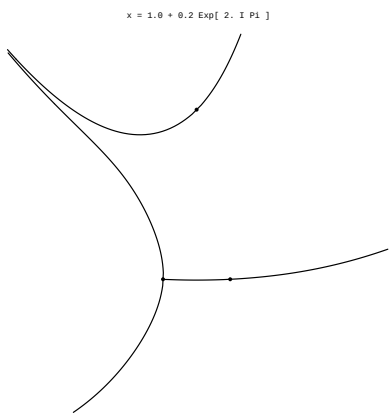


Figure 4-1-b21

以上の図から steepest descent path のパターンは $\theta = 0$(図 a1 あるいは図 b1) の前後, $\theta = 0.6\pi$(図 a7, b7) と $\theta = 0.7\pi$(図 a8,b8) の間, 及び $\theta = 1.3\pi$(図 a14, b14) と $\theta = 1.4\pi$(図 a15, b15) の間において切り替わることが見て取れるが, これらは丁度 $x$ が $x = 1$ から出る Stokes curve を横切る時である. その Stokes curve を横切る際に鞍点 $\zeta_n$ と $\zeta_{-n}$ が steepest descent path により結ばれるということも, $x = 1$ から出る Stokes curve が (9) で定義されていることと整合している. また, このことが全ての $n$ について一斉に起きていることが Stokes curve が無限重に重なっていることと対応している. さらに, 例えば, $x = 1$ から左上に出る Stokes curve は 3 節で見たように $\psi_n$ が $\psi_{-n}$ に対して dominant であったが, 図 a7 と図 a8(あるいは図 b7 と図 b8) を見比べるとこの Stokes curve 上では $\zeta_n$ から出ている steepest descent path が $\zeta_{-n}$ に入っていることも確認できる. つまり, こうした WKB 解の dominance の関係もうまく対応していることがわかる.

### 4.2 $x = -1$ の近傍

次にもう一つの変わり点 $x = -1$ の近傍において考える. 以下の図の様に $x$ が $x = -1 + 0.2e^{i\theta\pi}$ ($\theta$ は 0 から 2 まで 0.1 ずつ増やす) と動く場合を考える.

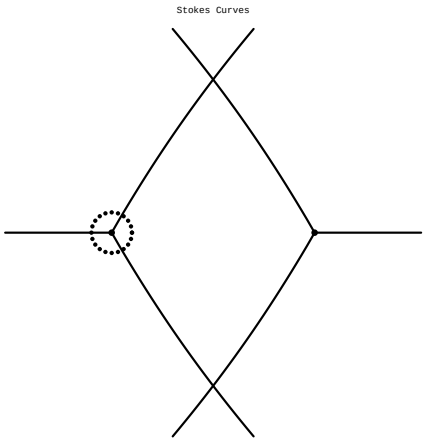


Figure 4-2-1

以下に鞍点 $\zeta_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3, -4)$ から出る steepest descent path について考える.

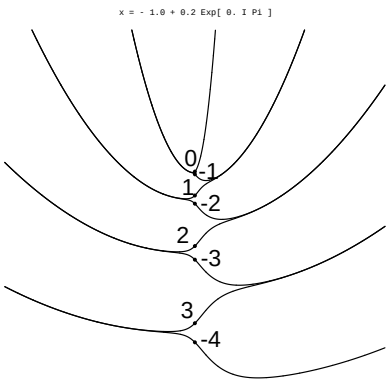


Figure 4-2-a1

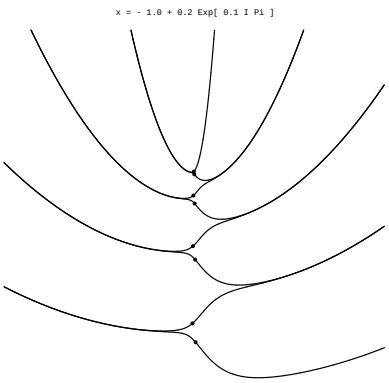


Figure 4-2-a2

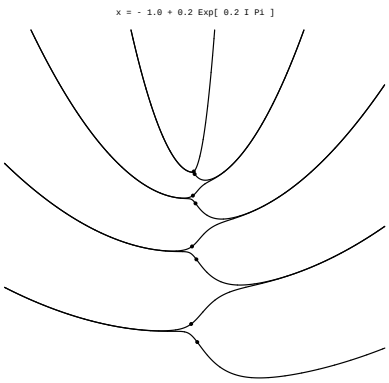


Figure 4-2-a3

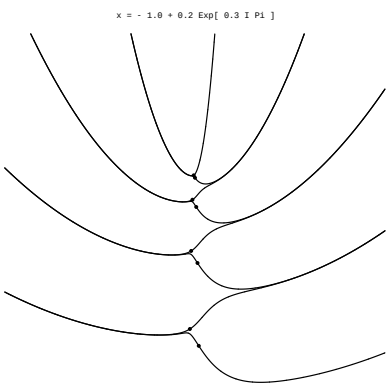


Figure 4-2-a4

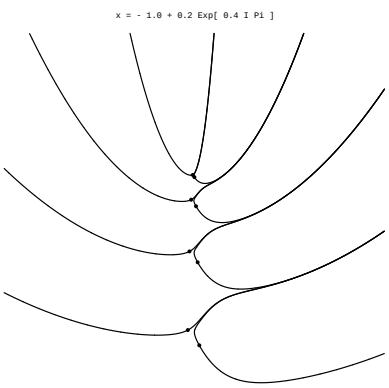


Figure 4-2-a5

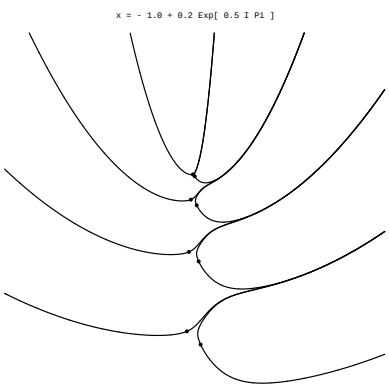


Figure 4-2-a6

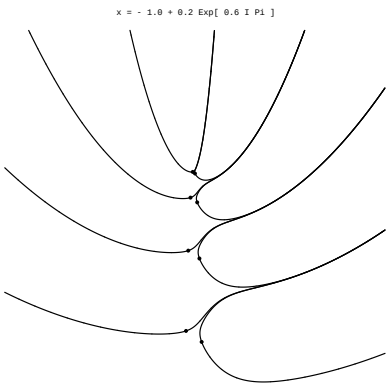


Figure 4-2-a7

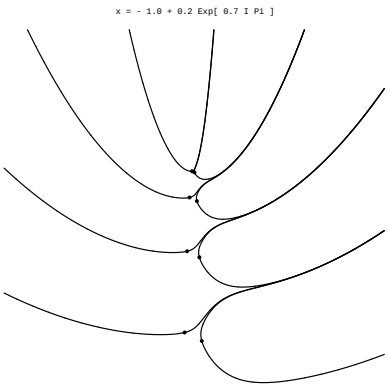


Figure 4-2-a8

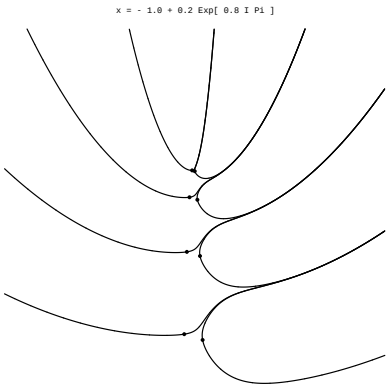


Figure 4-2-a9

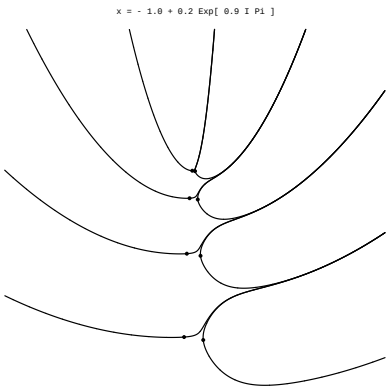


Figure 4-2-a10

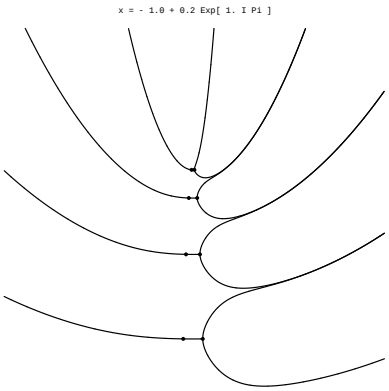


Figure 4-2-a11

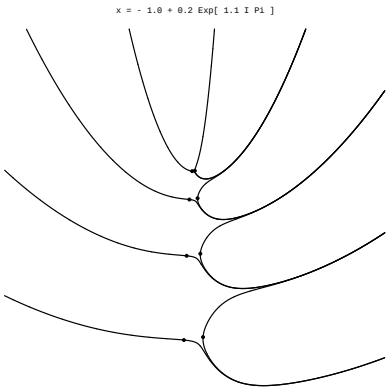


Figure 4-2-a12

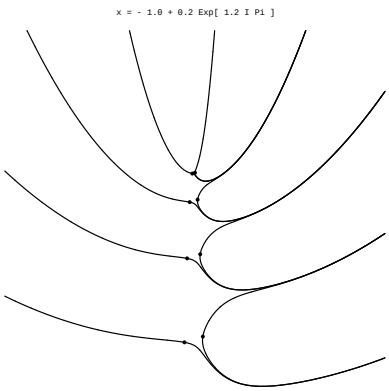


Figure 4-2-a13

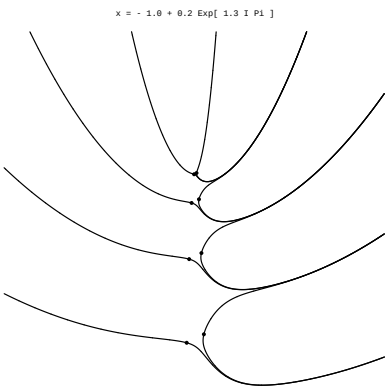


Figure 4-2-a14

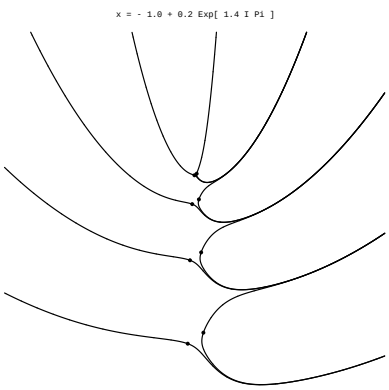


Figure 4-2-a15

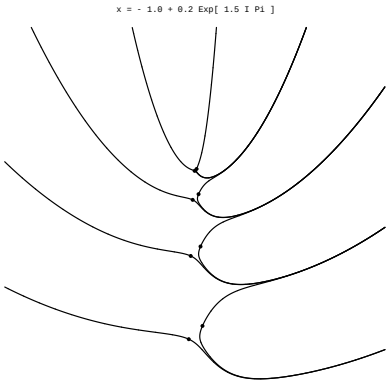


Figure 4-2-a16

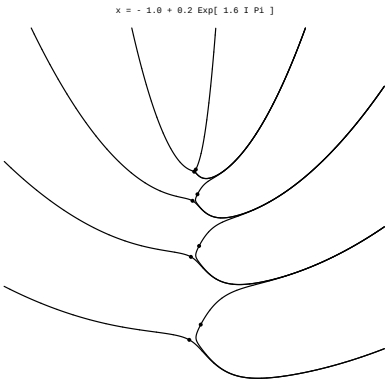


Figure 4-2-a17

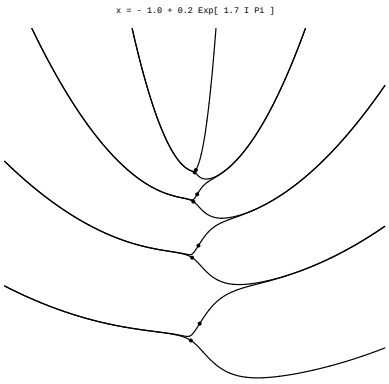


Figure 4-2-a18

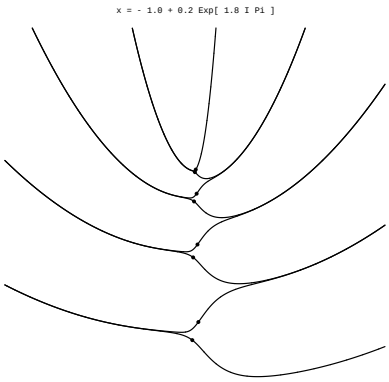


Figure 4-2-a19

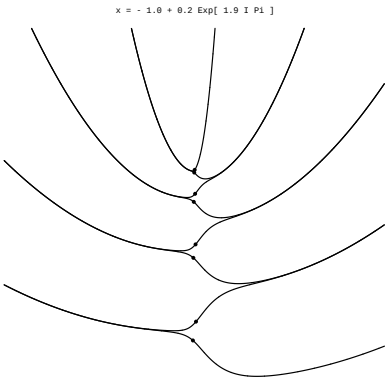


Figure 4-2-a20

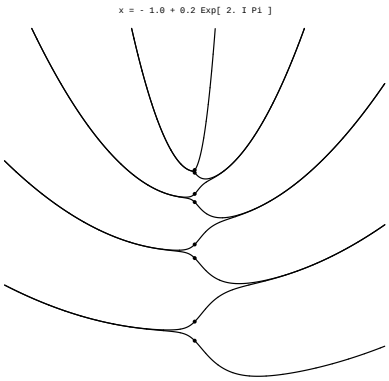


Figure 4-2-a21

やはり以上の図では鞍点 $\zeta_0$,$\zeta_{\pm 1}$ から出る steepest descent path が見えにくいので改めてそれらの付近の鞍点から出る steepest descent path を以下に図示する.

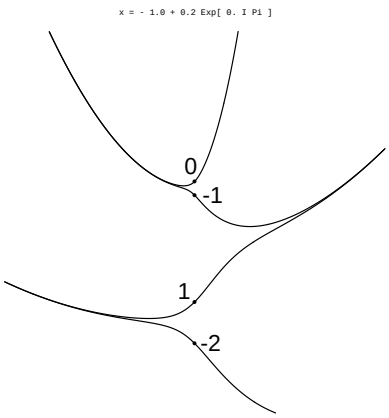


Figure 4-2-b1

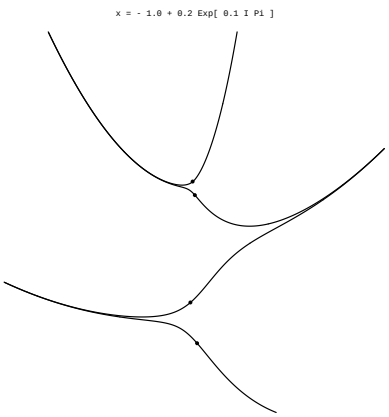


Figure 4-2-b2

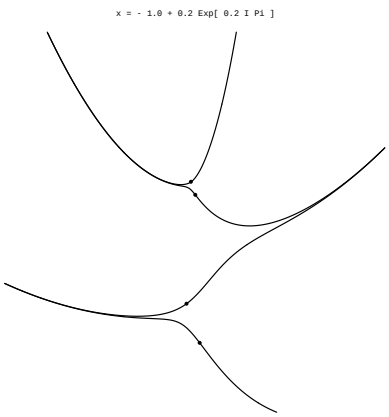


Figure 4-2-b3

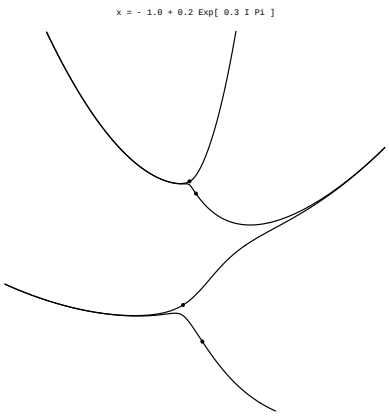


Figure 4-2-b4

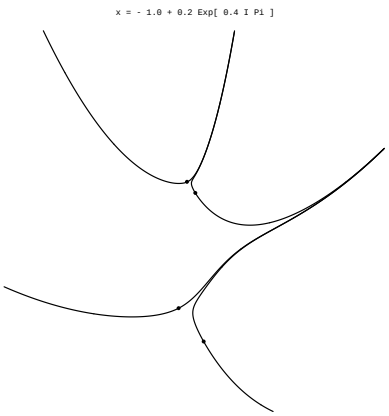


Figure 4-2-b5

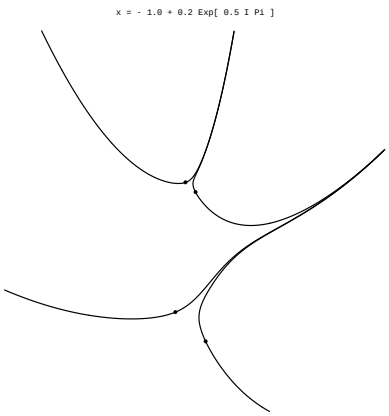


Figure 4-2-b6

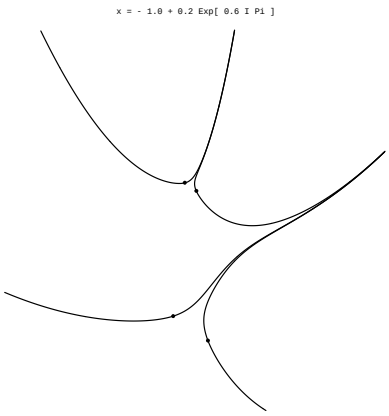


Figure 4-2-b7

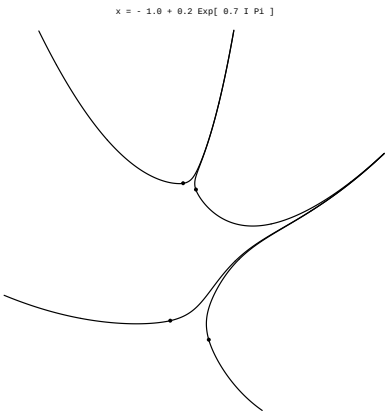


Figure 4-2-b8

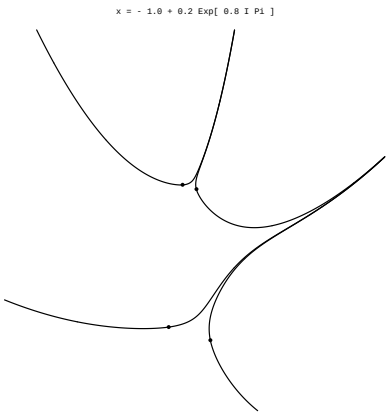


Figure 4-2-b9

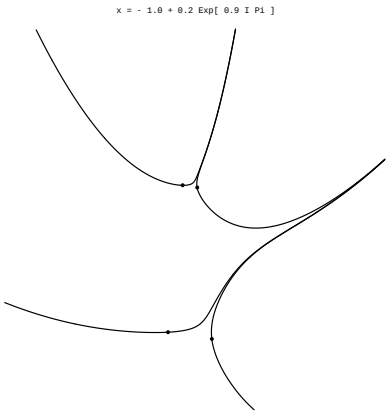


Figure 4-2-b10

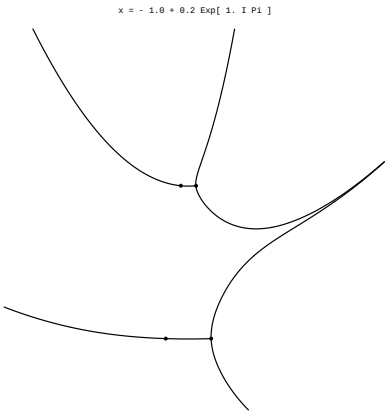


Figure 4-2-b11

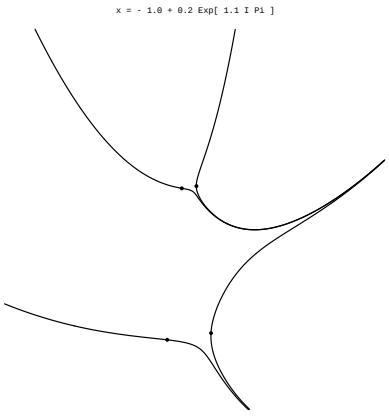


Figure 4-2-b12

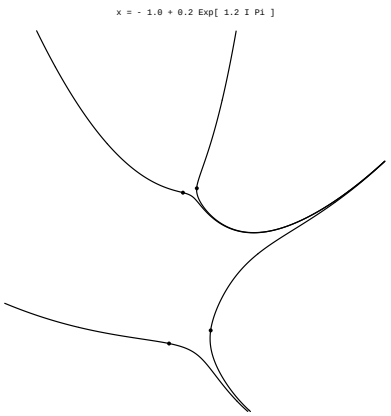


Figure 4-2-b13

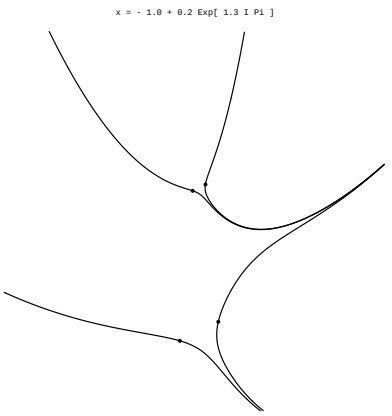


Figure 4-2-b14

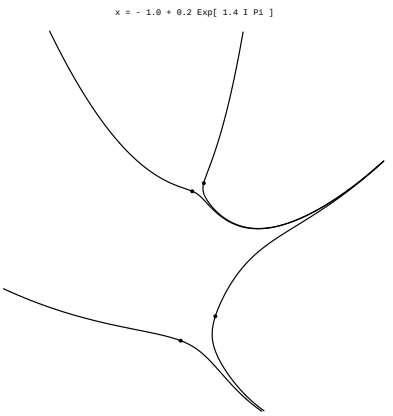


Figure 4-2-b15

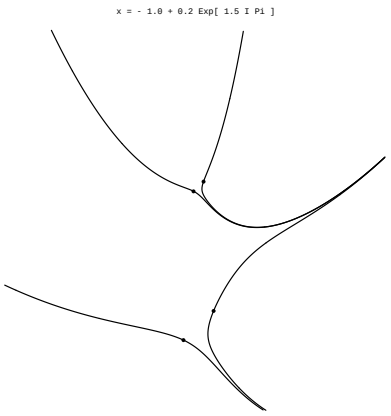


Figure 4-2-b16

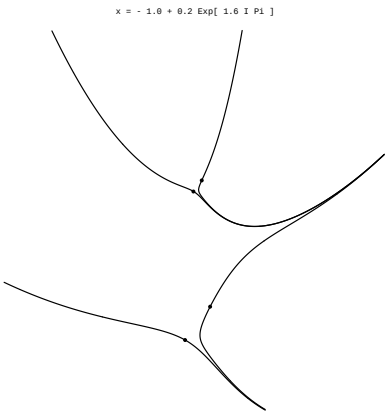


Figure 4-2-b17

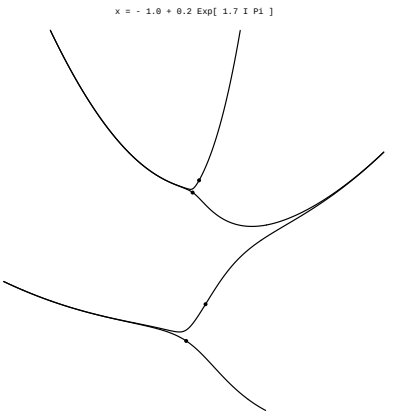


Figure 4-2-b18

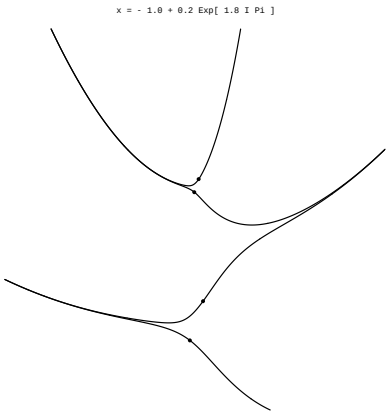


Figure 4-2-b19

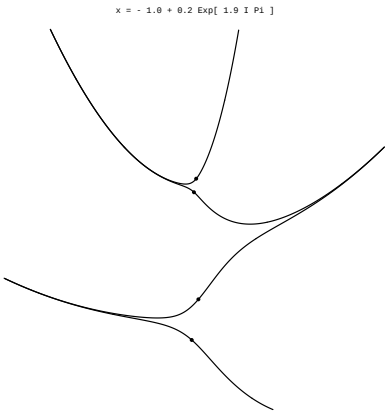


Figure 4-2-b20

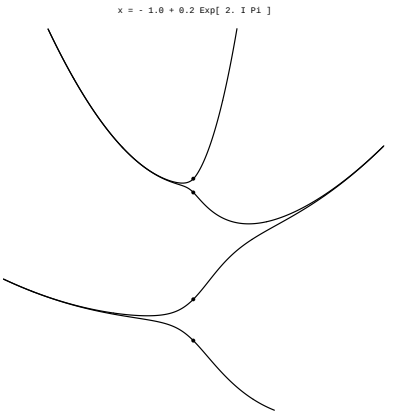


Figure 4-2-b21

4.1 節と同様に steepest descent path のパターンが切り替わるのは $x$ が $x = -1$ から出る Stokes curve を横切るときであることが見て取れる．なお $x = -1$ から出る Stokes curve は (11) で定められていたが, その Stokes curve を横切る際に $\zeta_n$ と $\zeta_{-n-1}$ の鞍点が steepest descent path によって結ばれていることもわかる．やはり, この事が全ての $n$ について一斉に起きており, これは Stokes curve が無限重に重なっていることを意味している.

### 4.3　上半平面上で実軸に沿って

続いて $x$ が実軸に沿って上半平面において動く場合を考えよう. 具体的には次の図の様に $x = t + 0.2i$ (ただし, $-1.5 \leq t \leq 1.5$ で $t$ は $0.1$ ずつ増える) として考える.

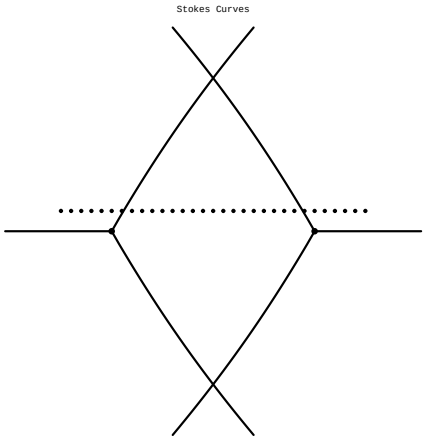


Figure 4-3-1

以下に鞍点 $\zeta_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3)$ から出る steepest descent path を図示する.

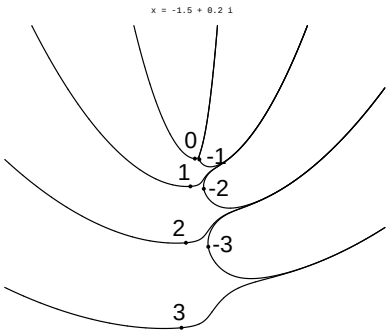


Figure 4-3-a1

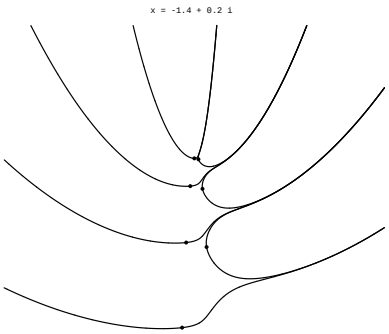


Figure 4-3-a2

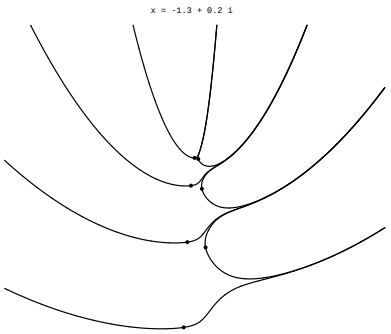


Figure 4-3-a3

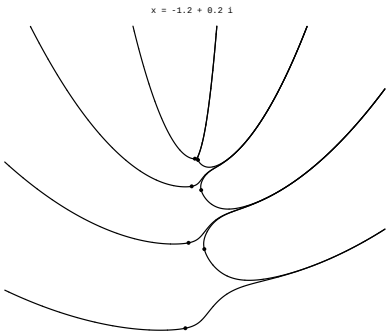


Figure 4-3-a4

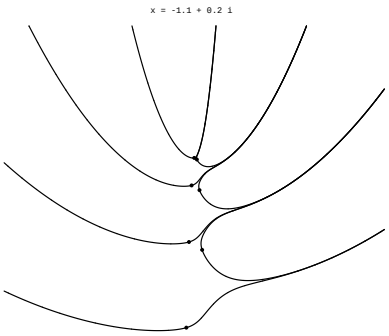


Figure 4-3-a5

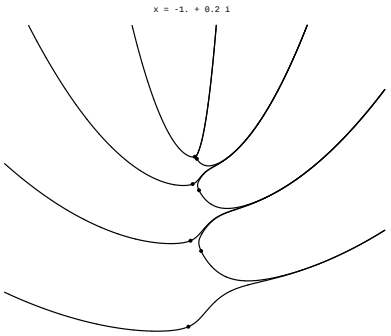


Figure 4-3-a6

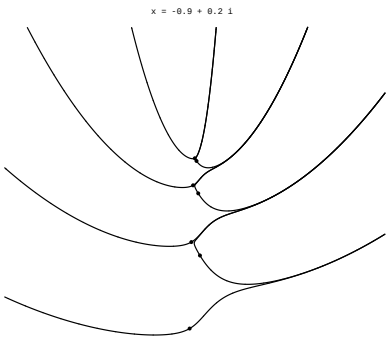


Figure 4-3-a7

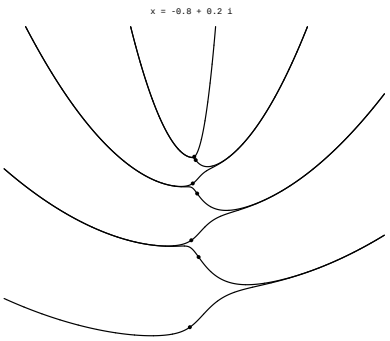


Figure 4-3-a8

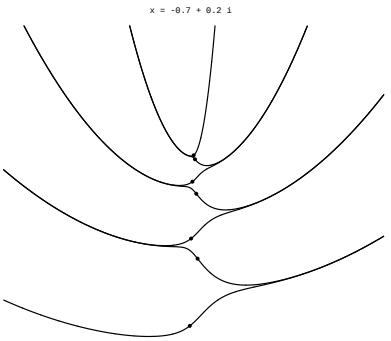


Figure 4-3-a9

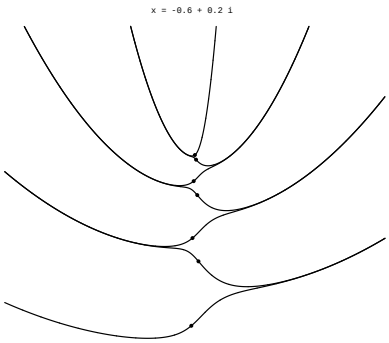


Figure 4-3-a10

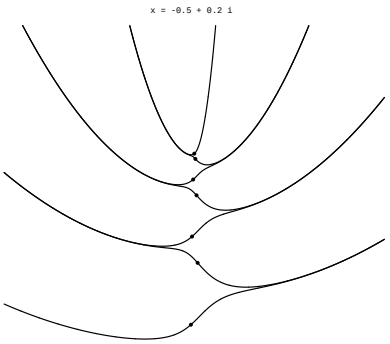


Figure 4-3-a11

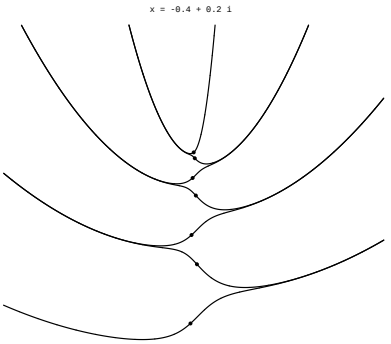


Figure 4-3-a12

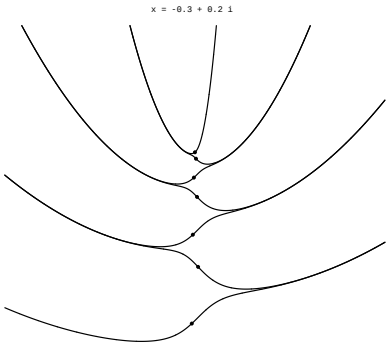


Figure 4-3-a13

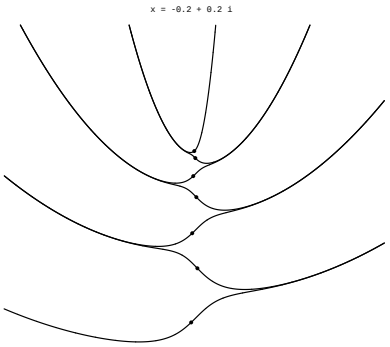


Figure 4-3-a14

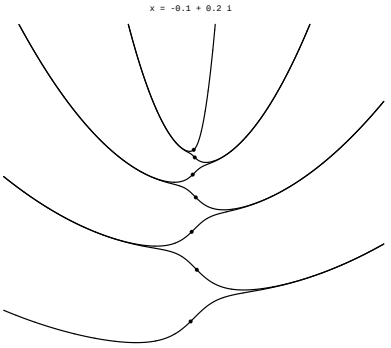


Figure 4-3-a15

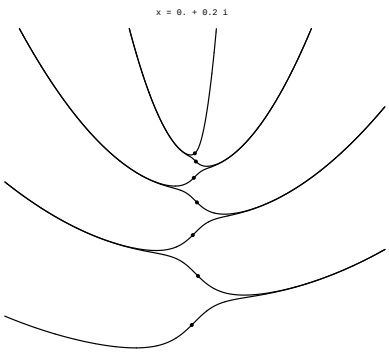


Figure 4-3-a16

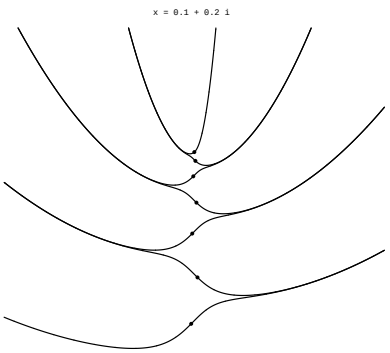


Figure 4-3-a17

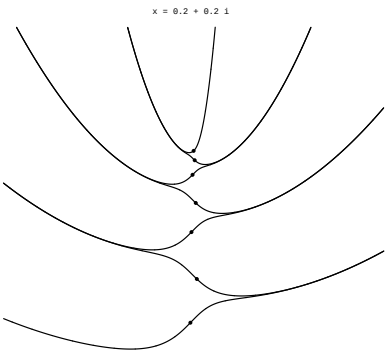


Figure 4-3-a18

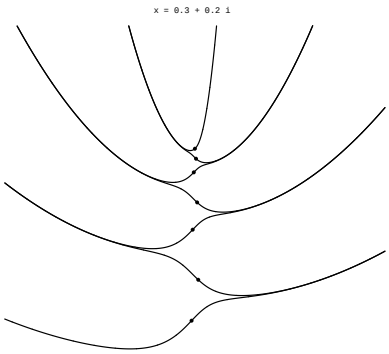


Figure 4-3-a19

Figure 4-3-a20

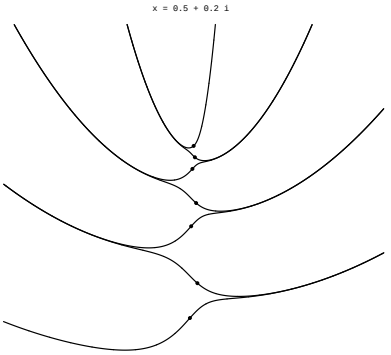


Figure 4-3-a21

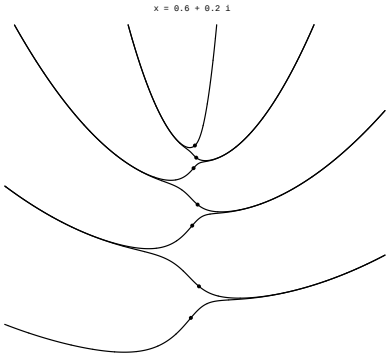


Figure 4-3-a22

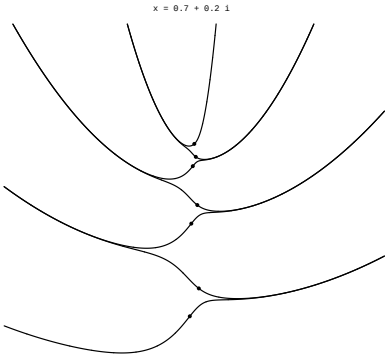


Figure 4-3-a23

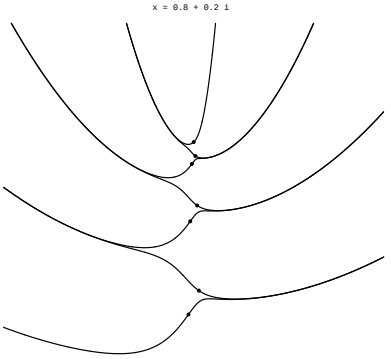


Figure 4-3-a24

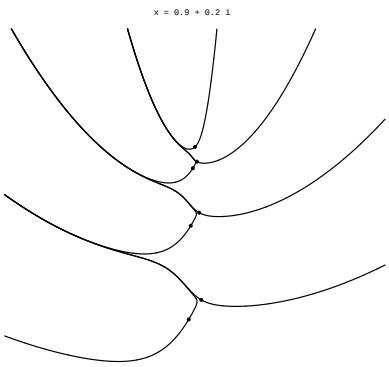


Figure 4-3-a25

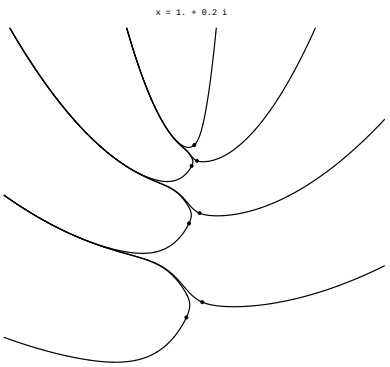


Figure 4-3-a26

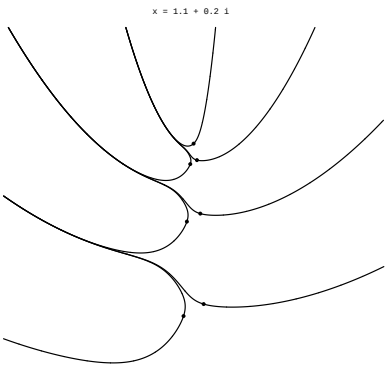


Figure 4-3-a27

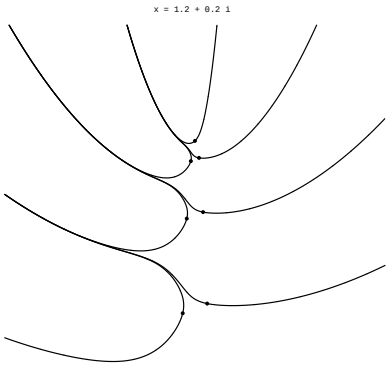


Figure 4-3-a26

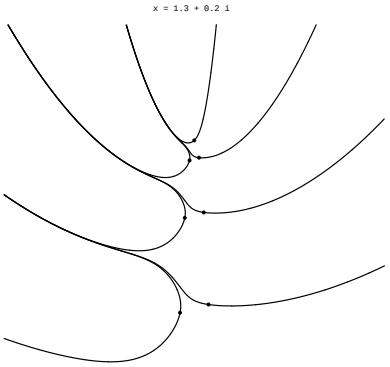


Figure 4-3-a27

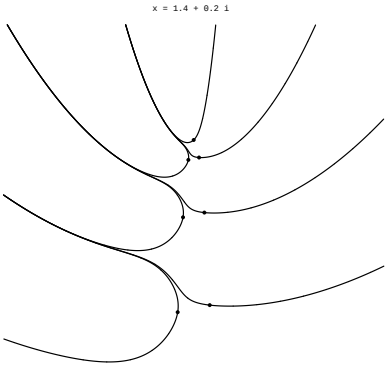


Figure 4-3-a28

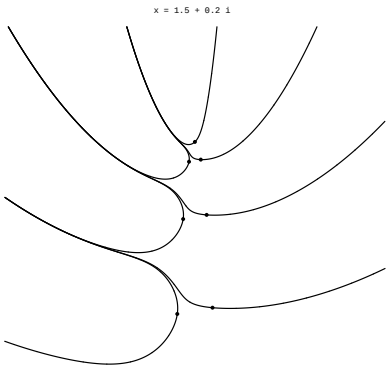


Figure 4-3-a29

これらの図においても $\zeta_0$,$\zeta_{\pm 1}$ から出る steepest descent path が見えにくいので改めてそれらの鞍点から出る steepest descent path を図示する.

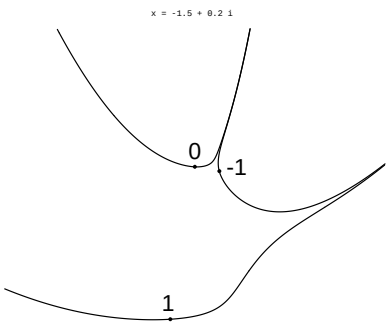


Figure 4-3-b1

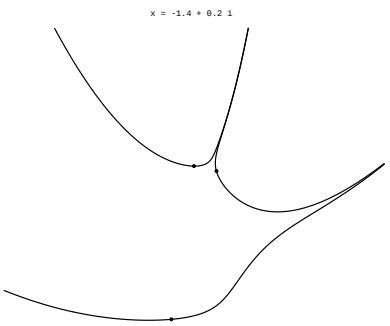


Figure 4-3-b2

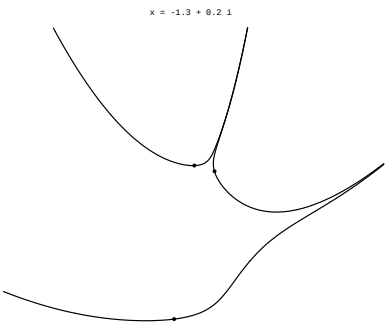


Figure 4-3-b3

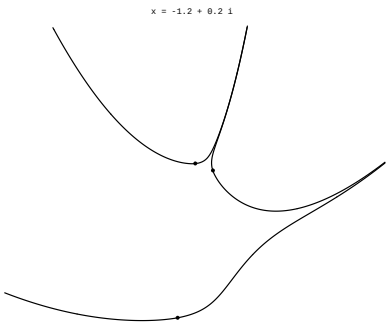


Figure 4-3-b4

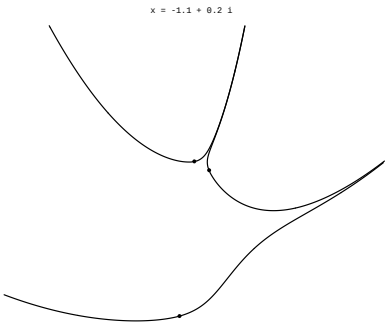


Figure 4-3-b5

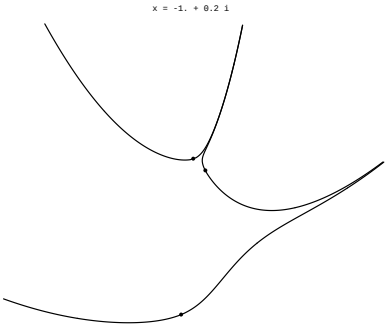


Figure 4-3-b6

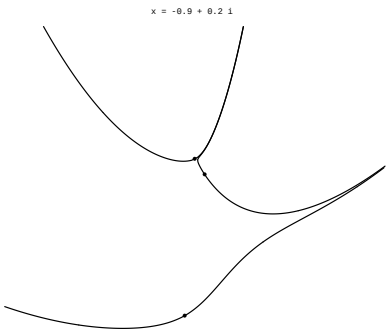


Figure 4-3-b7

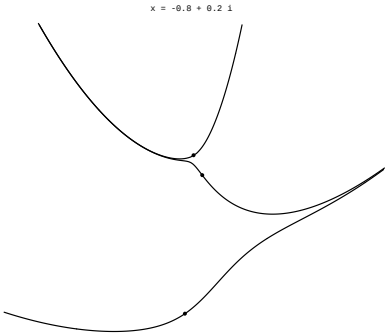


Figure 4-3-b8

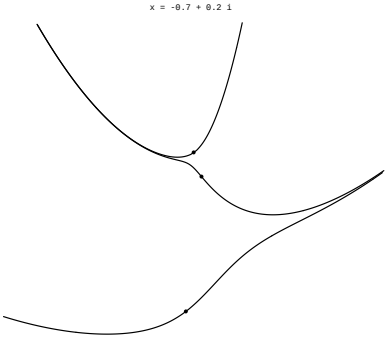


Figure 4-3-b9

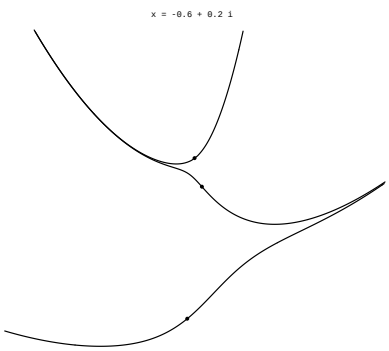


Figure 4-3-b10

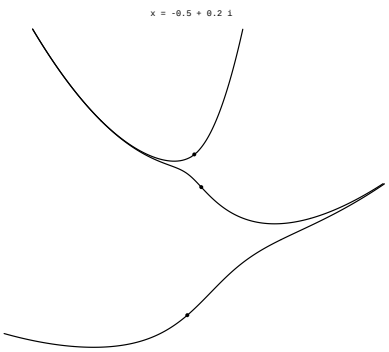


Figure 4-3-b11

Figure 4-3-b12

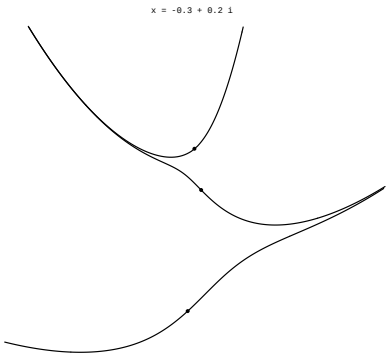


Figure 4-3-b13

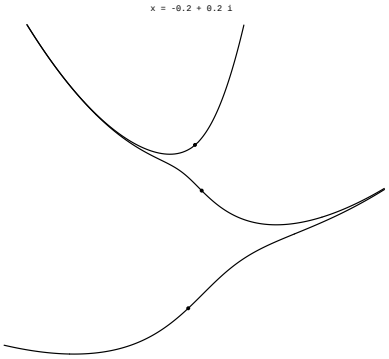


Figure 4-3-b14

Figure 4-3-b15

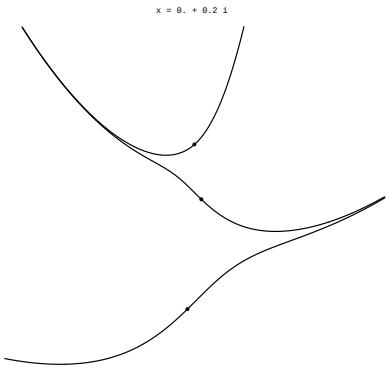


Figure 4-3-b16

Figure 4-3-b17

Figure 4-3-b18

Figure 4-3-b19

Figure 4-3-b20

Figure 4-3-b21

Figure 4-3-b22

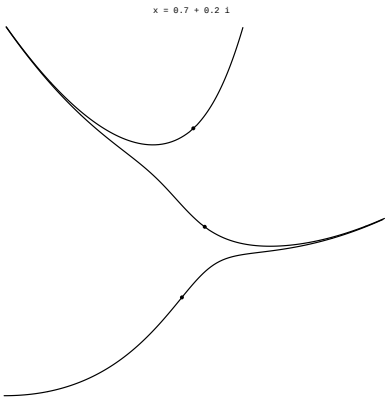


Figure 4-3-b23

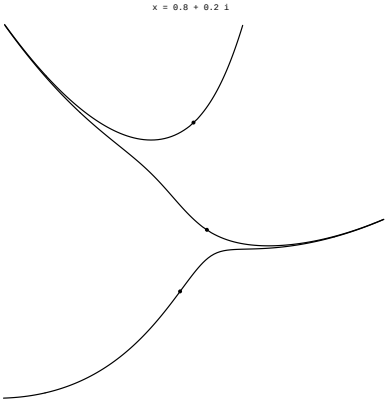


Figure 4-3-b24

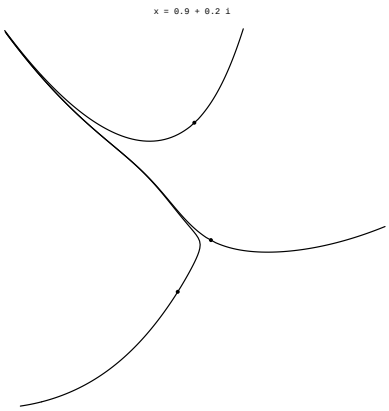


Figure 4-3-b25

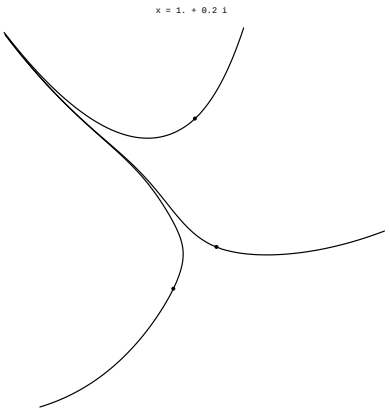


Figure 4-3-b26

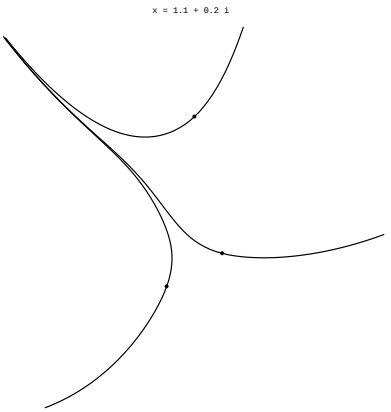


Figure 4-3-b27

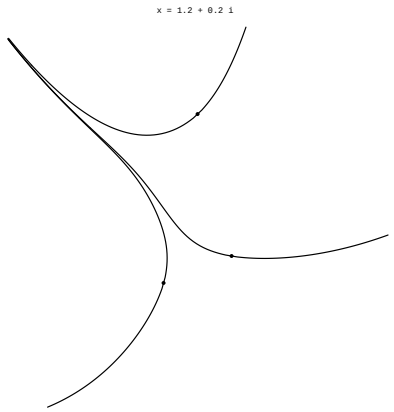


Figure 4-3-b26

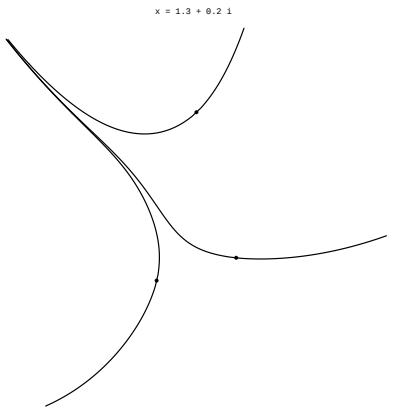


Figure 4-3-b27

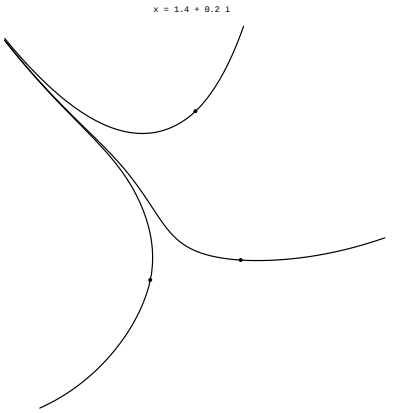


Figure 4-3-b28

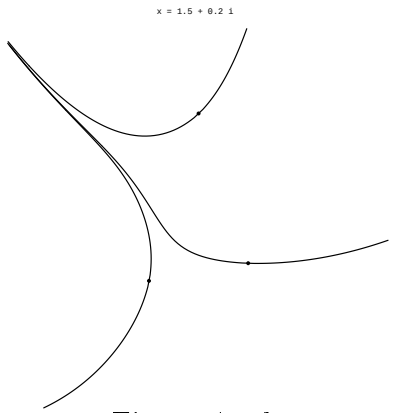


Figure 4-3-b29

以上の図において steepest descent path のパターンの切り替わりが起きるのは, 図 a6 から図 a8 にかけて (あるいは図 b6 から図 b8 にかけて) と, 図 a24 から図 a25 にかけて (あるいは図 b24 から図 b25 にかけて) であることがわかる. これらはそれぞれ, $x = -1$ から出る Stokes curve, 及び, $x = 1$ から出る Stokes curve を横切る時である. (また退化の仕方, つまり, steepest descent path を結ぶ鞍点の対についても 4.1 節, 及び 4.2 節の結果と整合している.)

それ以外のところでは steepest descent path のパターンは変わらない. 従って, 今考えていた経路と横切る new Stokes curve (図 3-12 において点線である部分) は Stokes geometry に関与してこないこともわかる.

### 4.4 Stokes curve の交点 $x = x_0$ の近傍

次に Stokes curve の上半平面の交点 $x = x_0$ の近傍における鞍点と steepest descent path について考えよう. まず以下の図のように $x = x_0 + 0.2e^{i\theta\pi}$ ($\theta$ は 0 から 2 まで 0.1 ずつ増やす.) として考える.

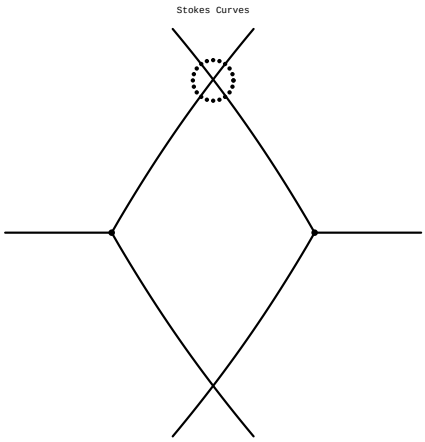


Figure 4-4-1

以下, 鞍点 $\zeta_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3)$ について考える.

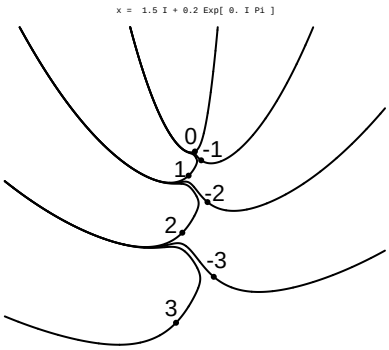


Figure 4-4-a1

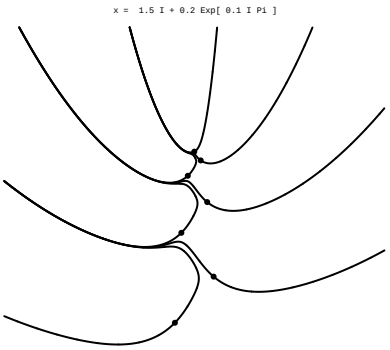


Figure 4-4-a2

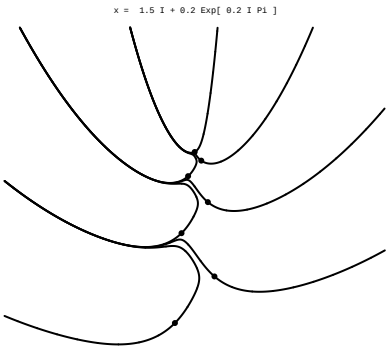


Figure 4-4-a3

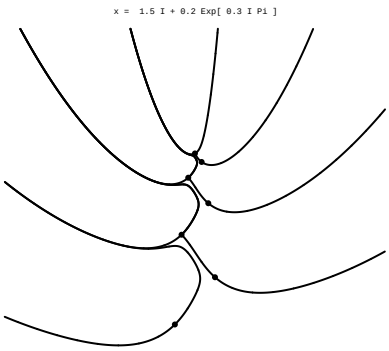


Figure 4-4-a4

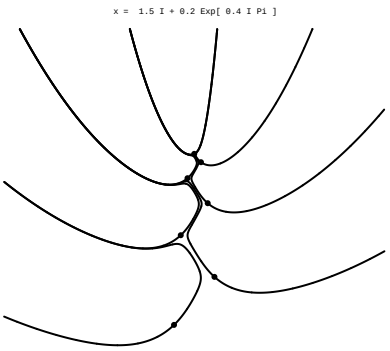


Figure 4-4-a5

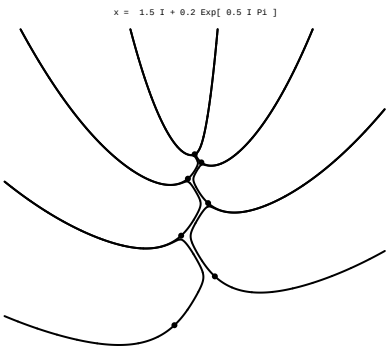


Figure 4-4-a6

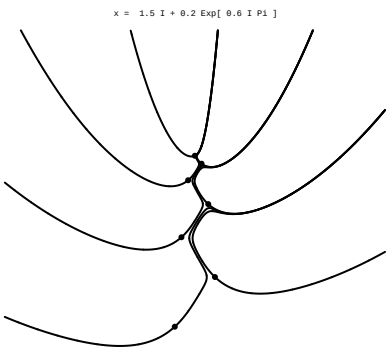


Figure 4-4-a7

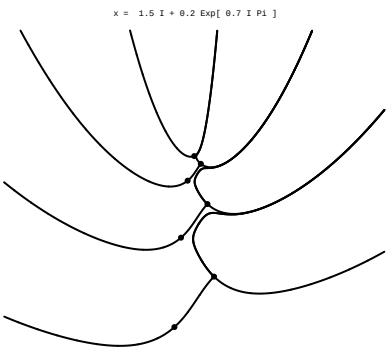


Figure 4-4-a8

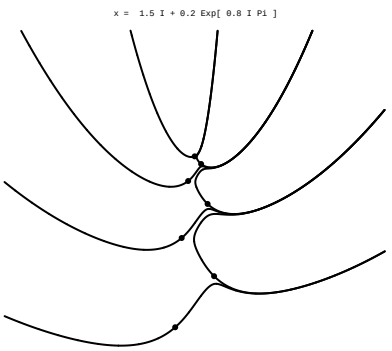


Figure 4-4-a9

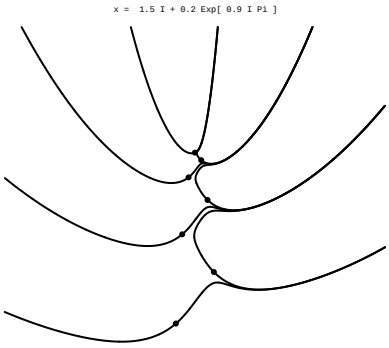


Figure 4-4-a10

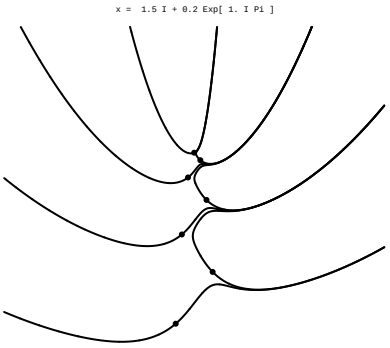


Figure 4-4-a11

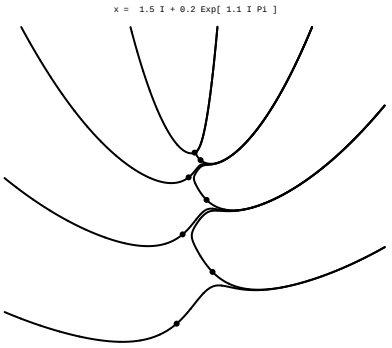


Figure 4-4-a12

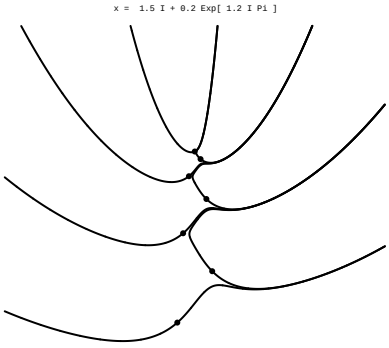


Figure 4-4-a13

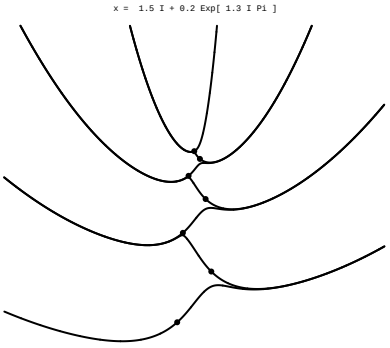


Figure 4-4-a14

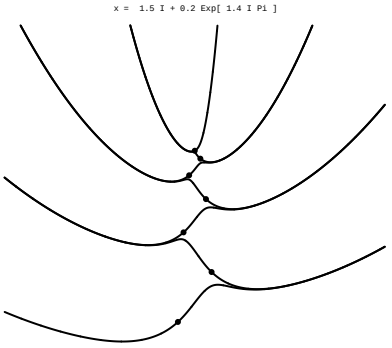


Figure 4-4-a15

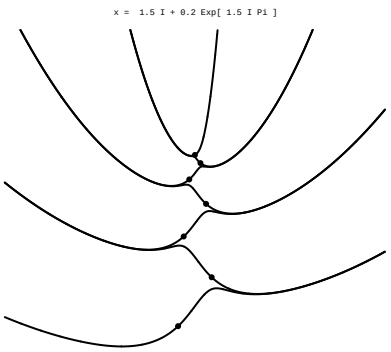


Figure 4-4-a16

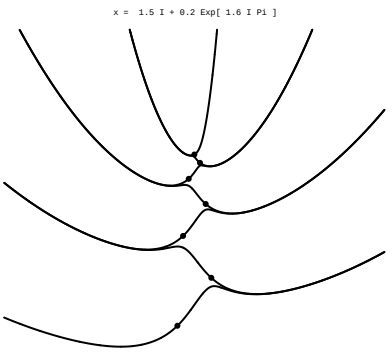


Figure 4-4-a17

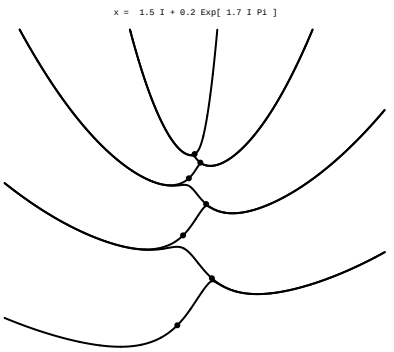


Figure 4-4-a18

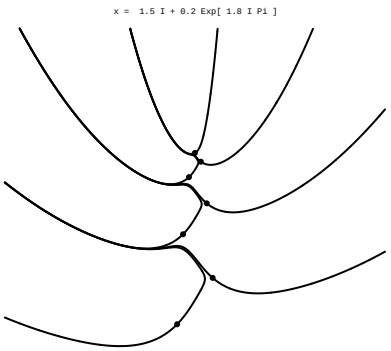


Figure 4-4-a19

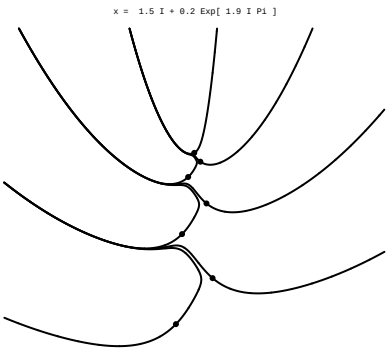


Figure 4-4-a20

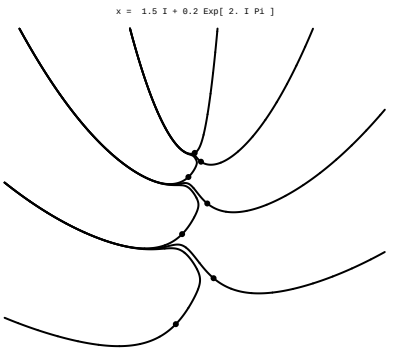


Figure 4-4-a21

まず, 交点 $x_0$ の下側, すなわち $\theta$ が 1 から 2 まで変わる場合については, steepest descent path のパターンの変化を読み取るのは易しい. 実際図 a13 から図 a15 にかけて, 及び図 a17 から図 a19 にかけての 2 ヶ所においてのみパターンが切り替わっていることがわかる. それらはそれぞれ, $x = -1$ から出る Stokes curve, 及び $x = 1$ から出る Stokes curve を横切る場合である. また点線で表わした new Stokes curve を横切る時には steepest descent path のパターンは変化しないこともわかる. これは 4.3 節の結果とも整合する.

次に, $\theta$ が 0 から 1 に変化する場合, つまり, $x$ が実線で表わした new Stokes curve を横切る際の steepest descent path の変化について見てみよう. 上記の図から読み取れるのは, 少なくとも $x = -1$ から出る Stokes curve を横切る図 a3 から図 a5 にかけて, 及び $x = 1$ から出る Stokes curve を横切る図 a7 から図 a9 にかけては, パターンの切り替わりが起こっているということである. しかし, 問題の new Stokes curve を横切る図 a5 から図 a7 にかけて (図 b5 から図 b7 にかけて) は, 図が粗過ぎてどのような変化が起こっているのか読み取りにくい. そこで, 以下に $x = x_0 + 0.2e^{i\theta\pi}$(但し $\theta$ は 0.25 から 0.5 まで 0.01 ずつ増やす) の場合に対応する鞍点 $\zeta_n$ $(n = -3, -2, -1, 0, 1, 2)$ 付近の様子を図示してみる. (以下の図に限って $\zeta_n$ $(n = -3, -2, -1, 0, 1, 2)$ 以外の鞍点から出る steepest descent path についても図中に加えてある. )

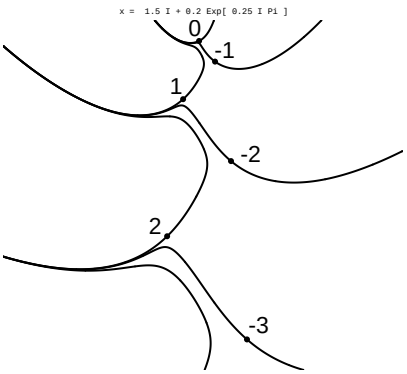


Figure 4-4-b1

Figure 4-4-b2

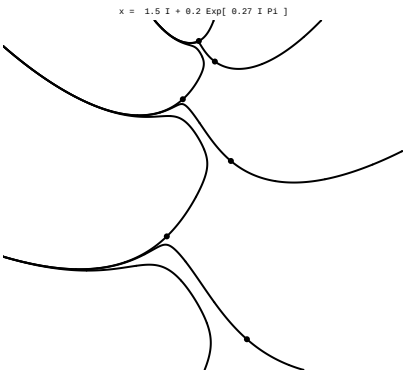


Figure 4-4-b3

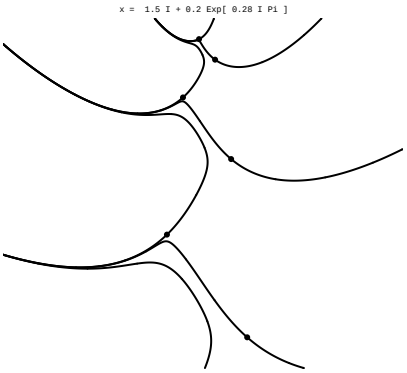


Figure 4-4-b4

Figure 4-4-b5

Figure 4-4-b6

Figure 4-4-b7

Figure 4-4-b8

Figure 4-4-b9

Figure 4-4-b10

Figure 4-4-b11

Figure 4-4-b12

Figure 4-4-b13

Figure 4-4-b14

Figure 4-4-b15

Figure 4-4-b16

Figure 4-4-b17

Figure 4-4-b18

Figure 4-4-b19

Figure 4-4-b20

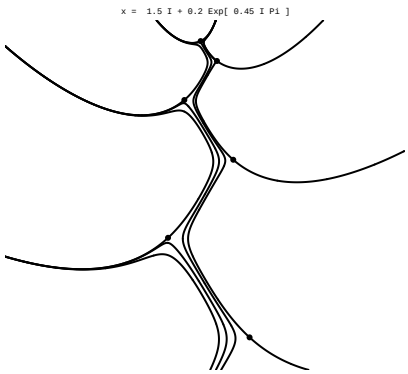


Figure 4-4-b21

Figure 4-4-b22

Figure 4-4-b23

Figure 4-4-b24

Figure 4-4-b25

Figure 4-4-b26

以上の図では鞍点 $\zeta_0, \zeta_{\pm 1}$ の付近が見えにくいのでその辺りを拡大した図を以下にあげる.

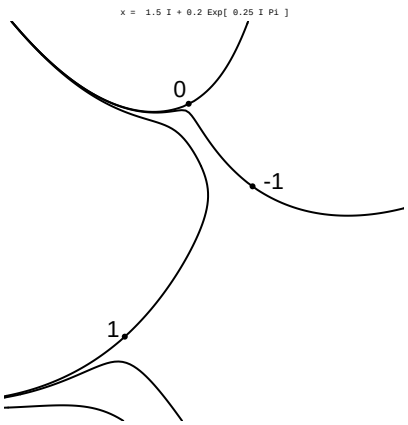

Figure 4-4-c1

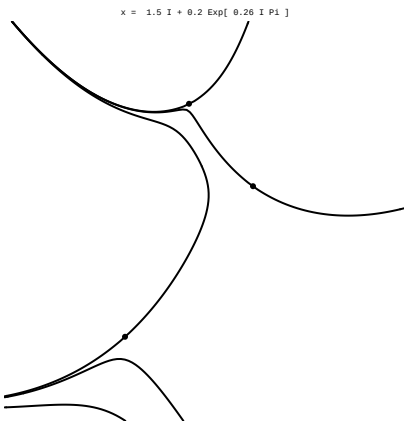

Figure 4-4-c2

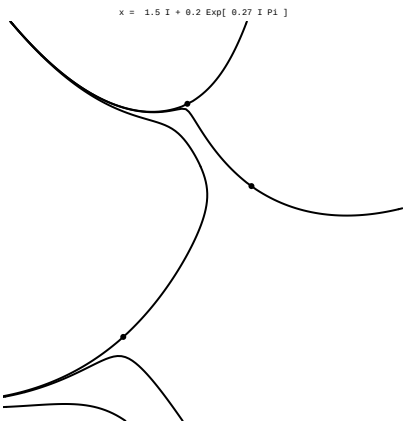

Figure 4-4-c3

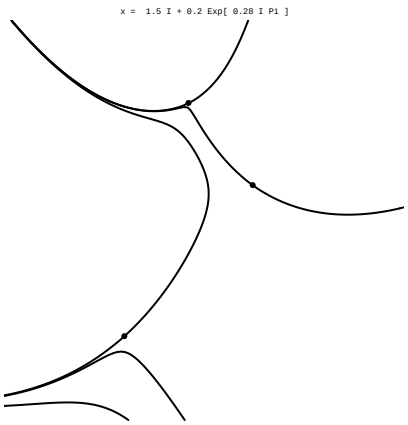

Figure 4-4-c4

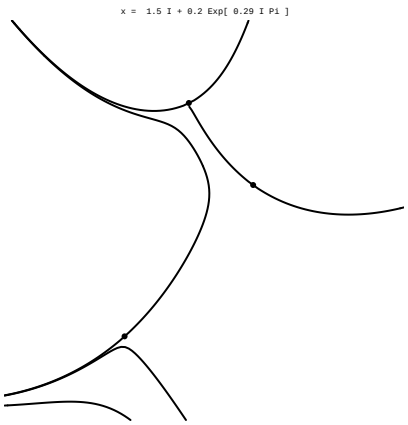

Figure 4-4-c5

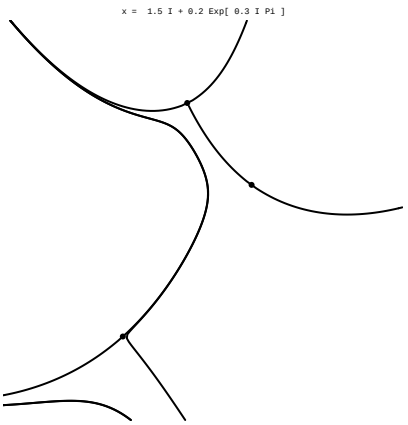

Figure 4-4-c6

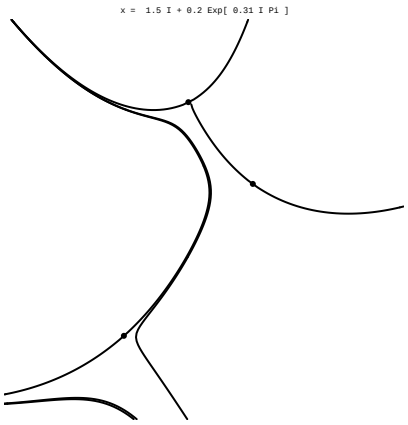

Figure 4-4-c7

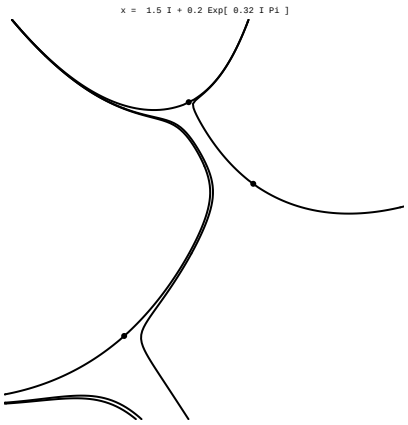

Figure 4-4-c8

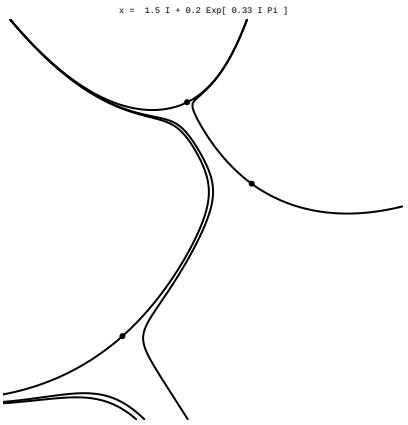

Figure 4-4-c9

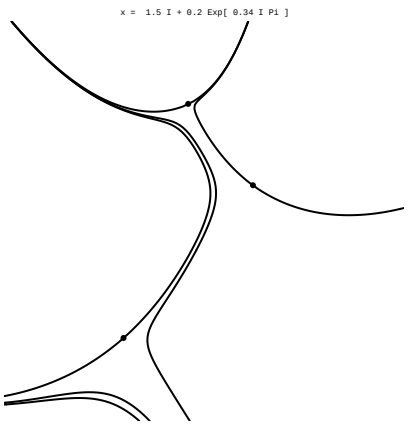

Figure 4-4-c10

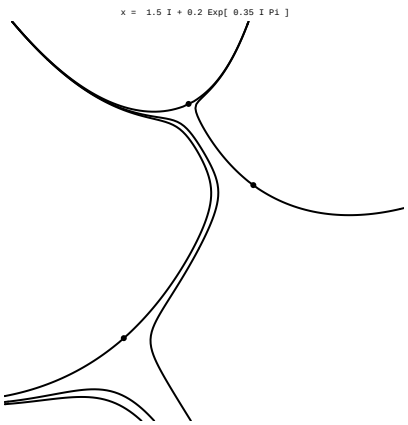

Figure 4-4-c11

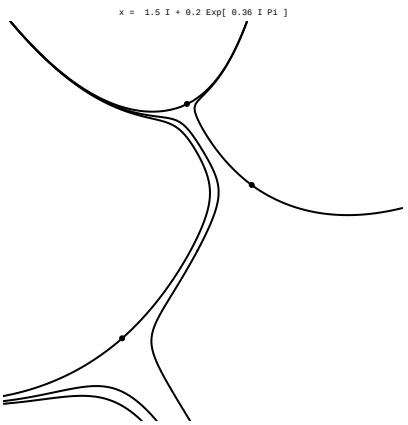

Figure 4-4-c12

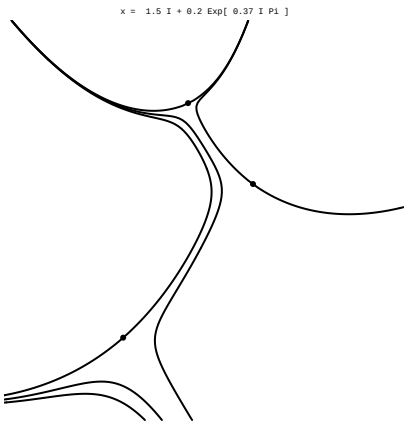

Figure 4-4-c13

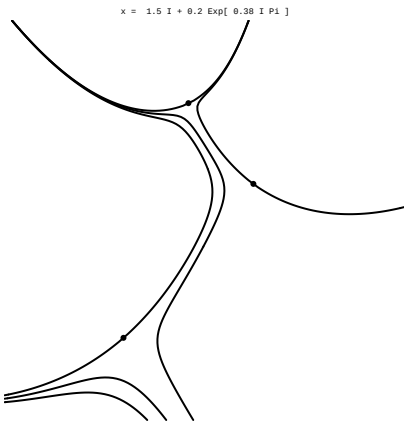

Figure 4-4-c14

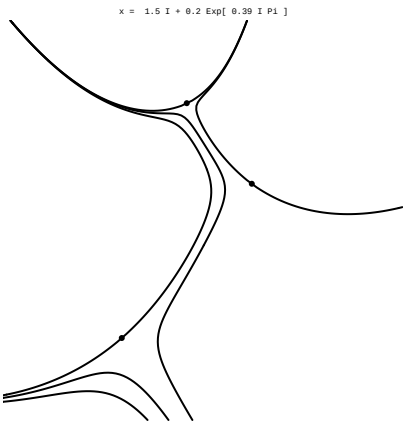

Figure 4-4-c15

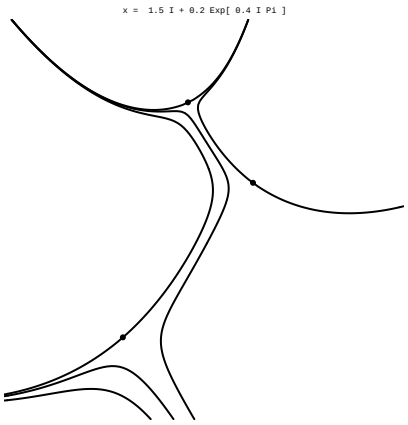

Figure 4-4-c16

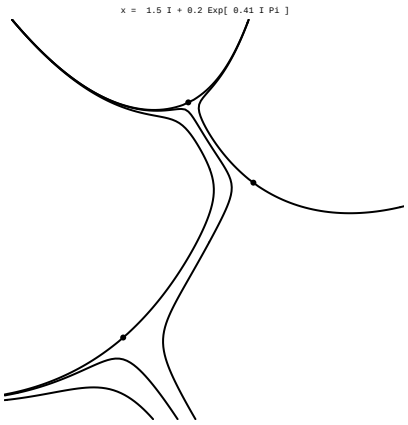

Figure 4-4-c17

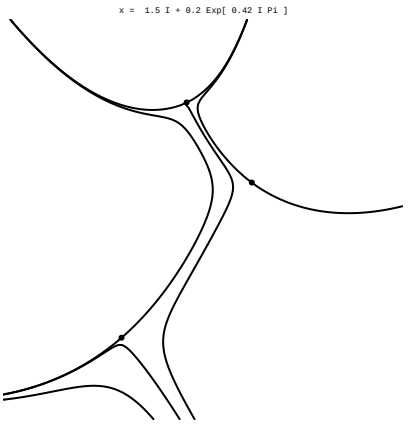

Figure 4-4-c18

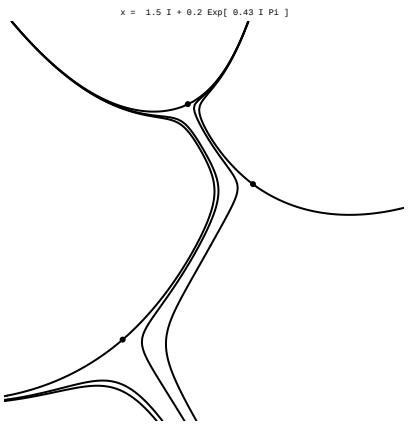


Figure 4-4-c19

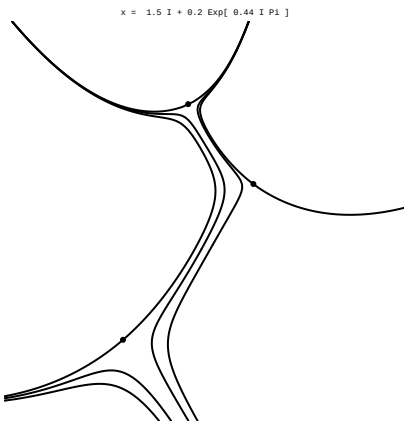


Figure 4-4-c20

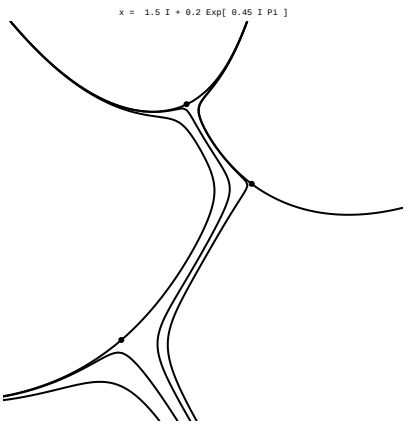


Figure 4-4-c21

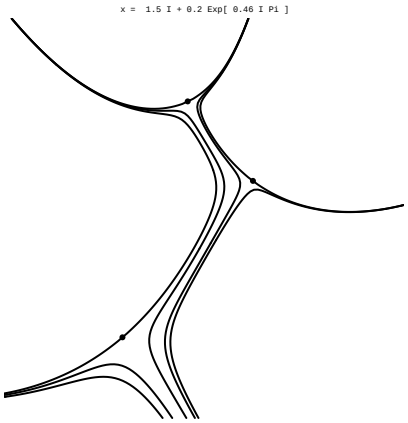


Figure 4-4-c22

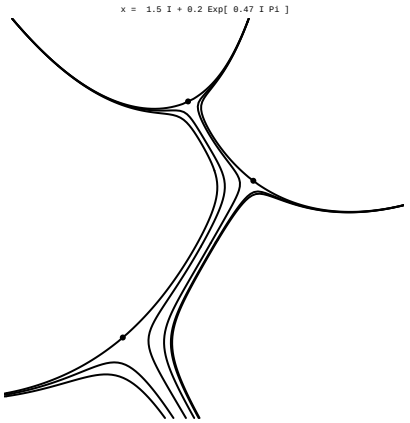


Figure 4-4-c23

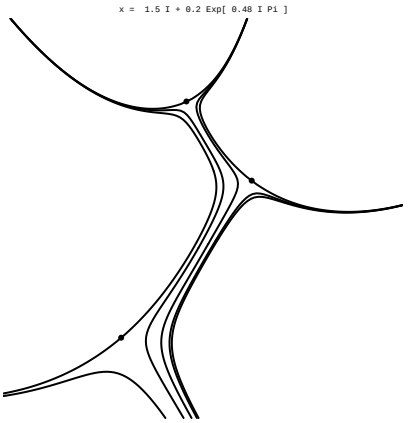


Figure 4-4-c24

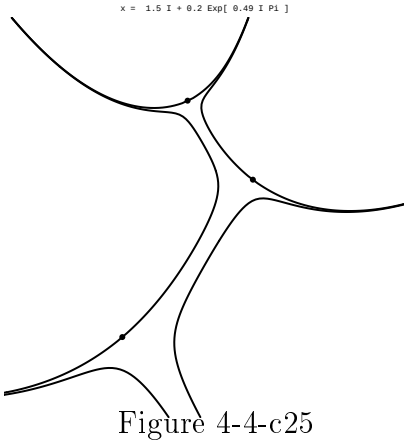


Figure 4-4-c25

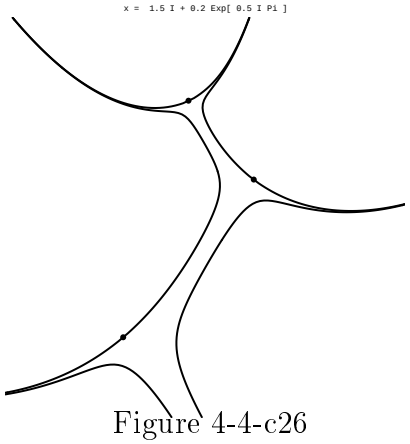


Figure 4-4-c26

これらの図を順に見ていくことにする. まず, 図 b5 から図 b7 にかけて (あるいは図 c5 から図 c7 にかけて) 一度鞍点同士が steepest descent path により結ばれていることがわかる. これは, 前にも述べた通り, $x = -1$ から出る Stokes curve を横切る際の変化である. (4.2 節の図とも比較のこと. )

次の steepest descent path の変化は図 b17 から図 b19 にかけて (図 c17 から図 c19 にかけて) 起きている. New Stokes curve の図と $\theta$ の値を見比べると, これは

$$\Im \int_{x_0}^{x} (f_n(x) - f_{-n-2}(x))dx = 0 \tag{26}$$

で定められていた new Stokes curve を横切る場合の変化である. また, 鞍点も $\zeta_n$ と $\zeta_{-n-2}$ が steepest descent path によって結ばれていることが見て取れる. さらに次の変化は図 b21 から図 b22 にかけて (図 c21 から図 c22 にかけて) 起きているが, これは

$$\Im \int_{x_0}^{x} (f_n(x) - f_{-n-3}(x))dx = 0 \tag{27}$$

により定められていた new Stokes curve を横切る場合である. この時 $\zeta_n$ と $\zeta_{-n-3}$ が steepest descent path によって結ばれている.

図から確実に読み取れるのはこの辺りまでだが, ここまでのパターンの切り替わり方から,

$$\Im \int_{x_0}^{x} (f_n(x) - f_{-n-k}(x))dx = 0 \quad (k = 4, 5, \ldots) \tag{28}$$

で定義された new Stokes curve の上でどんな現象が起こっているかを推測することは難しくないだろう. 例えば, かなり下の方に位置する鞍点 $\zeta_{-k}$ から出た steepest descent path が上の方まで上がってきて, (28) という new Stokes curve の上では最も上に位置する鞍点 $\zeta_0$ に入る訳である. (この時, $\zeta_n$ と $\zeta_{-n-k}$ が各 $n$ について一斉に steepest descent path によって結ばれる. )

3 節で見たように, new Stokes curve (28) は $k$ が大きくなるにつれ次第に虚軸に漸近して行く. 従って, $k$ が非常に大きい時の状況を数値的に検証するのは原理的に困難である. しかしその一方で, ある一つ固定した $n$ に対して WKB 解 $\psi_n$ を考えると, 交点 $x_0$ での dominance の関係が (17) の様になっていることから判るように, 最初の有限個の (new) Stokes curve を除いて $\psi_n$ は Stokes 現象を起こさない (他の無限個の new Stokes curve 上では $\psi_n$ は subdominant). つまり, steepest descent path の言葉で言えば, 鞍点 $\zeta_n$ を通る steepest descent path の配位は, 最初の有限個の (new) Stokes curve を横切った後には安定する. (虚軸の近傍では, 他の鞍点から出た steepest descent path が $\zeta_n$ に入ってくるだけで, $\zeta_n$ から出る path の方は他の鞍点には入らない. ) 上に挙げた図の中で, $x$ が虚軸上に在る場合に対応する図 b26(及び図 c26) が非常に簡明なのは, これが理由である.

最後に $x = x_0$ の時の steepest descent path の図を見ておくことにする.

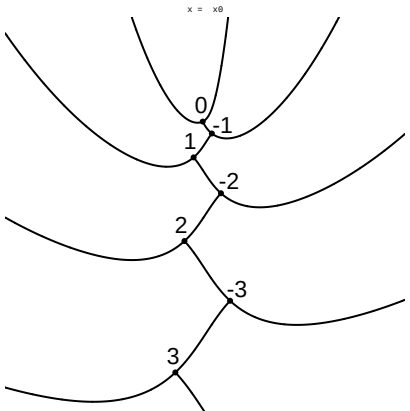

Figure 4-4-2

### 4.5 もう一つの交点 $x = x_1$ の近傍

最後に, 下半平面にある Stokes curve の交点 $x = x_1$ の近傍において考える. 以下の図のように $x = x_1 + 0.2e^{i\theta\pi}$($\theta$ は 0 から 2 まで 0.1 ずつ増やす) と $x$ を動かして考える.

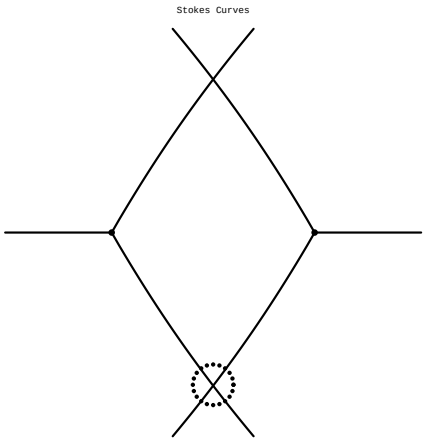

Figure 4-5-1

以下, 鞍点 $\zeta_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3)$ から出る steepest descent path を図示する.

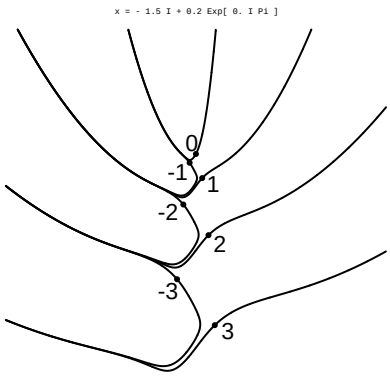

Figure 4-5-a1

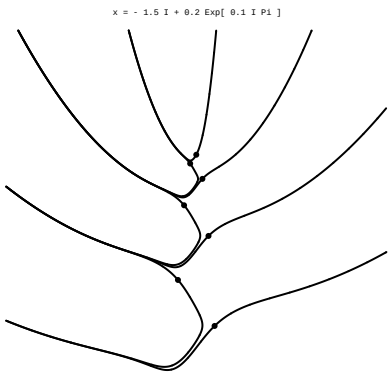

Figure 4-5-a2

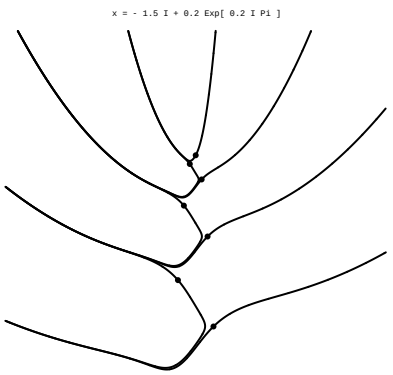

Figure 4-5-a3

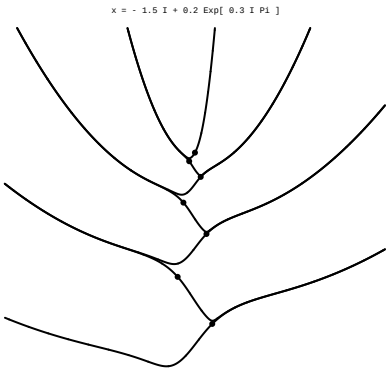


Figure 4-5-a4

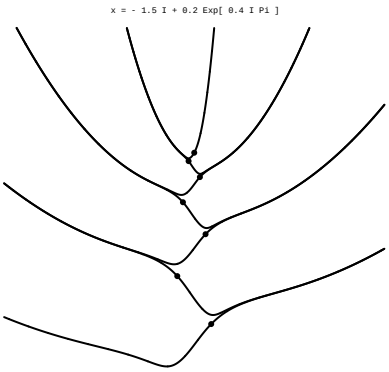


Figure 4-5-a5

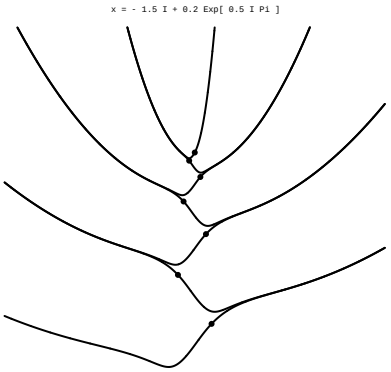


Figure 4-5-a6

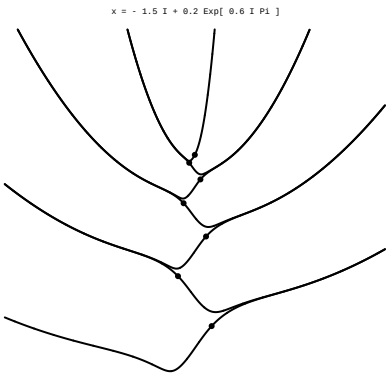


Figure 4-5-a7

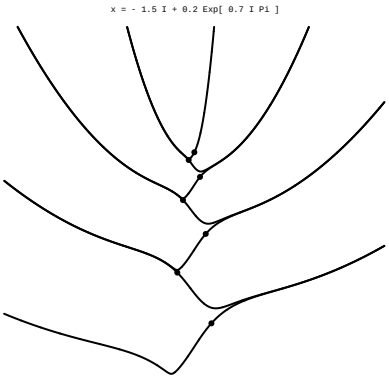


Figure 4-5-a8

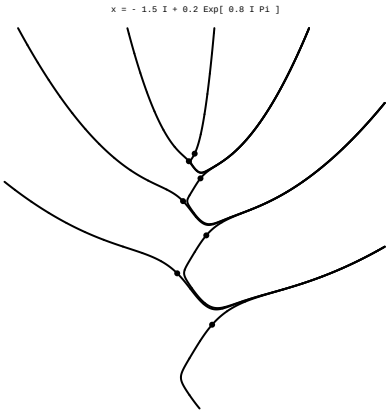


Figure 4-5-a9

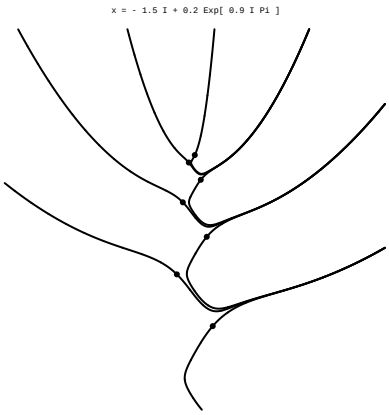


Figure 4-5-a10

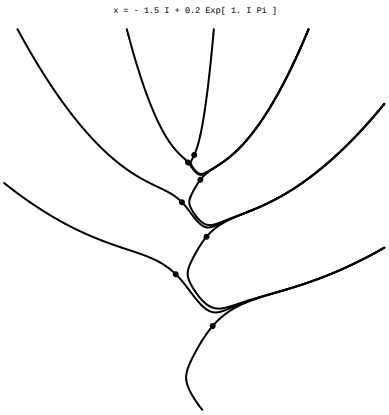


Figure 4-5-a11

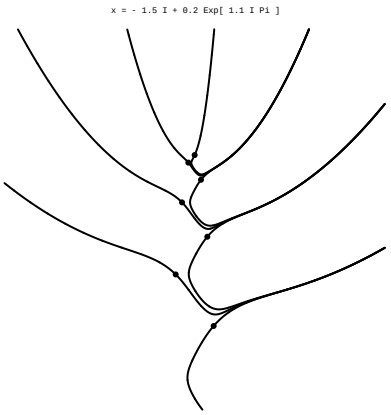


Figure 4-5-a12

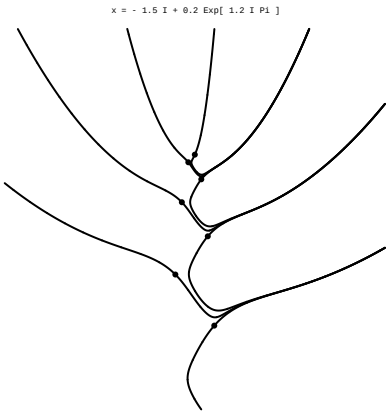


Figure 4-5-a13

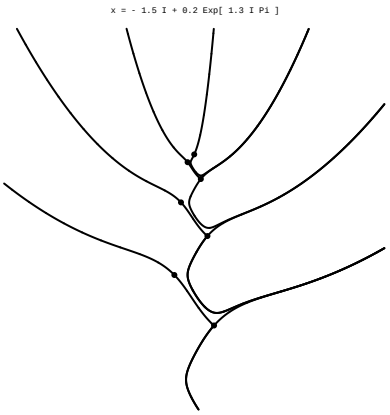


Figure 4-5-a14

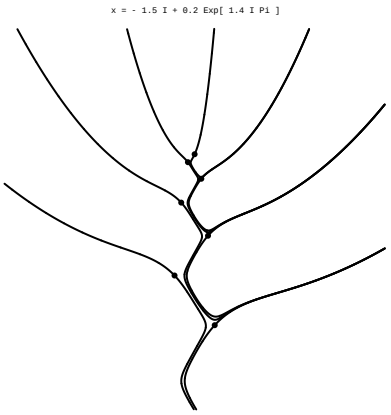


Figure 4-5-a15

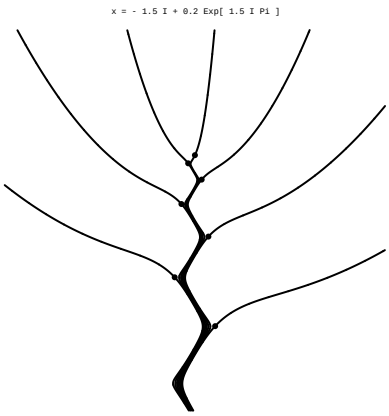


Figure 4-5-a16

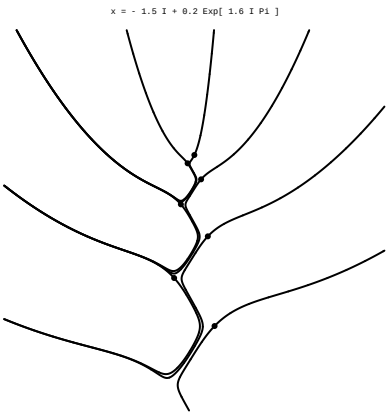


Figure 4-5-a17

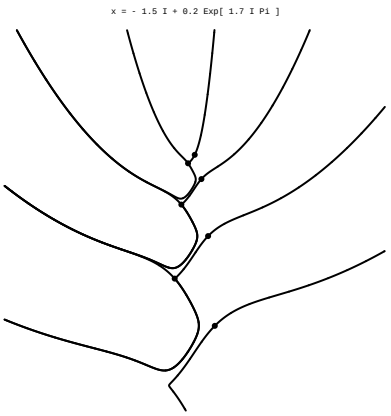


Figure 4-5-a18

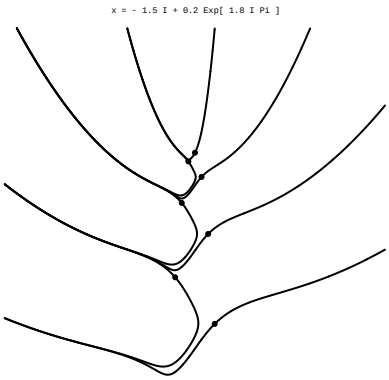


Figure 4-5-a19

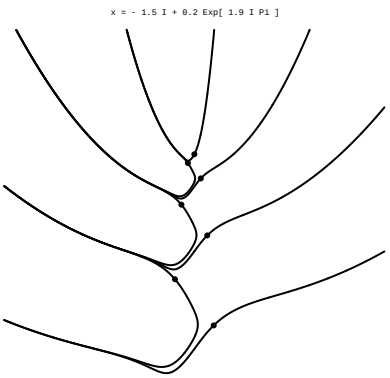


Figure 4-5-a20

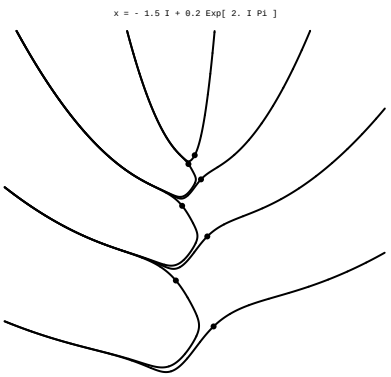


Figure 4-5-a21

4.4 節と同様, 交点 $x_1$ の上側, すなわち new Stokes curve が点線で表わされている側では, $x = \pm 1$ から出る Stokes curve を横切るところでのみ, steepest descent path のパターンが変化していることが見て取れる.

一方, 実線で表わした new Stokes curve を横切る際のパターンの変化を調べるために, $x = x_1 + 0.2e^{i\theta\pi}$(但し $\theta$ は 1.25 から 1.5 まで 0.01 ずつ増やす) の場合に対応する鞍点 $\zeta_n$

$(n = -3, -2, -1, 0, 1, 2)$ 付近の様子を図示してみよう.

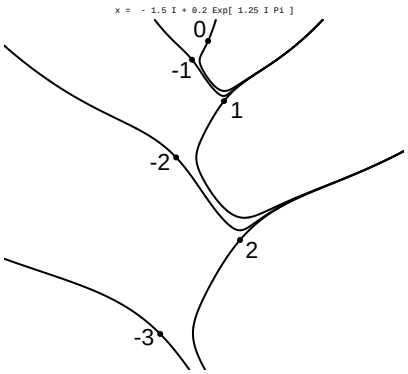


Figure 4-5-b1

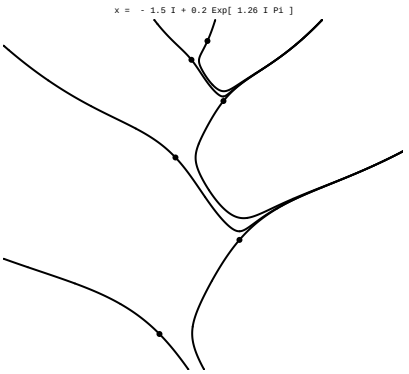


Figure 4-5-b2

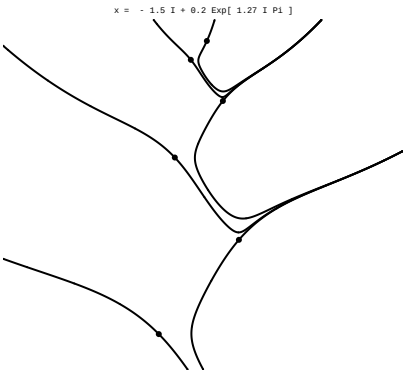


Figure 4-5-b3

Figure 4-5-b4

Figure 4-5-b5

Figure 4-5-b6

Figure 4-5-b7

Figure 4-5-b8

Figure 4-5-b9

Figure 4-5-b10

Figure 4-5-b11

Figure 4-5-b12

Figure 4-5-b13

Figure 4-5-b14

Figure 4-5-b15

Figure 4-5-b16

Figure 4-5-b17

Figure 4-5-b18

Figure 4-5-b19

Figure 4-5-b20

Figure 4-5-b21

Figure 4-5-b22

Figure 4-5-b23

Figure 4-5-b24

Figure 4-5-b25

Figure 4-5-b26

まず図 b5 から図 b7 にかけて, つまり $x = 1$ から出る Stokes curve を横切る際に最初の変化が起きている. 続いて図 b17 から図 b19 番目にかけて, そして図 b21 から図 b22 にかけて, それぞれ

$$\Im \int_{x_0}^{x} (f_n(x) - f_{-n+k}(x))dx = 0 \quad (k \geq 1) \tag{29}$$

の $k=1$ 及び $k=2$ により定義される new Stokes curve を横切る際に, steepest descent path のパターンが変化している. これらの図から容易に推測されるように, 一般の $k$ に対する new Stokes curve (29) の上では, 最も上に位置する鞍点 $\zeta_0$ から出た steepest descent path がうまく折れ曲がりながら下へと降りて行って, かなり下の方の鞍点 $\zeta_k$ に入るものと考えられる. (この時 $\zeta_n$ と $\zeta_{-n+k}$ が各 $n$ について一斉に steepest descent path によって結ばれる. )

このように, 下半平面の Stokes curve の交点 $x=x_1$ の近傍においても, 実線で表わされる new Stokes curve を横切る際に確かに steepest descent path のパターンが変化する. 但し, その変化の仕方は 4.4 節で見た上半平面の交点 $x=x_0$ の近傍におけるものとは異なっており, 実際, 例えば鞍点 $\zeta_0$ を通る steepest descent path の配位は, 虚軸の付近で無限回変化する. ($x$ が虚軸上に在る場合に対応する図 b26 を 4.4 節の図 4-4-b26(及び, 図 4-4-c26) と比較して欲しい. この 4.5 節の図の方が 4.4 節の図と比べて格段に複雑であることがわかる.) 従って, 対応する WKB 解 $\psi_0$ を考えれば, これは虚軸の付近で Stokes 現象を無限回起こしている訳である.

## 参考文献


[AKT1] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, pp.69–84.

[AKT2] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei: 完全最急降下法を目指して, 数理解析研究所講究録「完全最急降下法」に掲載予定.

[BB] H.L.Berk and D.L.Book: Plasma wave regeneration in inhomogeneous media, Phys. Fluids, **12**(1969), 649–661.

[T] Y.Takei: Integral representaion for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, 数理解析研究所講究録「完全最急降下法」に掲載予定.