Non-negativity of Fourier Coefficients of Eta-products

エータ積のフーリエ係数の非負性について

京都大学 数理解析研究所
齋藤 恭司 (Kyoji Saito)

これは 2003 年 2 月 16 ー 18 日 3 回にわたり 第 2 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンスにおいて 著者が行った講演のトランスペアレンシーのシートに手を加えて作成したものです。概念構成や論理の緻密さに難点はありますが
1。講義スタイルの方が書く側も (そして希望的に) 読む側にもやさしい、
2。講義内容は幾つかの例を手がかりに問題提起をする実験的なものであったと言うことで、不備な点は 文献を見て頂くことで ご容赦お願いします。[1]

Introduction

デデキントのエータ函数は $\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{\eta}),\ q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ で与えられる [R]。今、有限個の正整数からなる集合 I 及びその各元 $i\in I$ に対し整数 $e(i)\in\mathbb{Z}$ が定められているときに 次のような巾積を考え

$$\prod_{i\in I}\eta(i\cdot\tau)^{e(i)}$$

エータ積 と呼ぶ。エータ積を q の 分数巾の和に展開すると、何かの拍子にその係数 (いわゆる $\tau=i\infty$ におけるフーリエ係数) が、すべて非負になる事が起きる。例えば、その級数が或正定値格子の二次形式の母関数となる, 即ち格子のテータ関数になる (e.g. $\eta(2\tau)^5/\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}$) (本報告集に掲載される伊吹山知義氏の稿参照) 事がある。では「エータ積はいつある格子のテータ関数になるのか」という問が生じるが 筆者はその一般的答を知らない。一方、この例に含まれているかどうか (現時点で)

[1] 本講演の機会を設けて頂くと共に 内容に関心を持って頂いた伊吹山知義氏に深く感謝します。同氏の強いサポートなしには本稿は成立しなかったでしょう。
本稿は大体は文献 [Sa1,V][Sa3] に基づいていますが、それ等には書ききれなかった未完成ノートが残っておりそれらの内容をいつか纏めてみたいと思っていました。その一つが 第 1 日の予想で述べた 円分有理式系 $\{\Phi_h\}_{h\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に関する計算であり、もう一つが第 3 日予想で述べた dual rank $\nu_W=0$ となる weight 系 に関する計算です。残念ながらどちらにも深入りできませんでした. 機会あれば再チャレンジしたいと思います。

分からない フーリエ係数がすべて非負になると思われる面白そうなエータ積の例は大量 (無限) にある (第 1 日及び 第 3 日の予想)。この様なフーリエ係数の非負性という現象一般はあまり解明されてないようである。

この講義では「与えられたエータ積が整数ウエイトかつ正則の時その **Mellin** 変換である **Dirichlet** 級数をオイラー積 分解を持つ **L** 関数 (の差) で表示する事により 元のフーリエ係数達の非負性を明示的に判定する」という実験的アプローチを試みる。その方法がうまくいく 幾何に由来し楕円的と呼ばれる (**9.** 参照) エータ積が八つある。第 2日の講義で詳しく言うが 非負性が予想される四つの楕円的エータ積は正則ではあるがカスプ形式ではなく、対応する L 関数は Dirichlet L 関数の二次式の差に分解してしまう (対応するガロワ群がアーベルなので その既約表現は巡回表現しかない為)。その分解表示から Dirichlet 係数がすべて非負になると事が明示的に言え、元のフーリエ係数の非負性も言えるのである。これ等の例の他にも同様の方法でフーリエ係数の非負か否かの判定出来るエータ積が (Ramanujan の例も含め) 五つある (第 3 日の講義 **19.-23.**)。

これらの例はどのくらい一般的な現象なのであろうか。私は 保型形式の専門ではないのでうまく言えないが、 上記の格子に由来する例や L 関数を用いた計算例でもほの見えるように **Eisenstein** 級数の理論、つまりカスプ形式でない側の方の正則保型形式がフーリエ係数がすべて非負になるエータ積に深く関わっているようである。そこをうまく解明すれば上記の L 関数を用いるアプローチはウエイトが整数の正則エータ積の場合かなり一般的に有効な気がする。その全容の解明は私の手に余り (保型形式の専門でなく愚かな誤りを犯してないか心配) 専門家に御教示をお願いしたい。この講義ではそんな問題意識をうまく伝えられればと思う。幾つか予想もたてた。新しい研究が生まれるきっかけになればと思う。

以下に 3 日間の講義内容を説明する。

第一日： この日はエータ積及びその 双対エータ積なる概念を導入して両者間の関数等式、保型形式としての基本性質等の復習を行なう。エータ積全体のなす乗法群 H の中でフーリエ係数がすべて非負になるエータ積全体のなす半群を H_+と記し, H_+ の非自明な元の無限系列の予想を述べる (楕円的エータ積や Ramanujan の例はその系列に入っている)。H のなかでカスプ形式全体のなす部分集合 { カスプ形式 } と H_+ とは互いに disjoint であることを示して、両者を分離する都合のよい エータ積の不変量 (つまり H 上の '$\mathbb{Z}$ 値関数') dual-rank ν があることを説明する：即ち $H_+ \subset \{\nu \geq 0\}$ 及び {カスプ形式 }$\subset \{\nu < 0\}$ かつ { 正則形式 }$\subset \{\nu \leq 0\}$ が成り立つ。従って $H_+ \cap$ { 正則形式 }$\subset \{\nu = 0\}$ も言える。勿論これら

の包含関係は等号ではなく そのギャップにあるグレイゾーンがある。

第一日の後半では楕円的エータ積と呼ばれる一群のエータ積を、又第三日では ウエイト系に由来する一群のエータ積を取り上げる。後で見るように、それらはグレイゾーンに居ない よいクラスを形成している。

第二日： 初日に導入した楕円的エータ積 (全部で 8 種類) の L 関数 を具体的に Artin L 関数により表示する. その結果として「楕円エータ積が H_+ に属する $\Leftrightarrow$ $\nu \geq 0$ (実際には $\nu = 0$)」を示す。証明のキーは「$\nu = 0$ ならば H_+ に属する」を示すことである。それは次のように達成される。

例えば、$\nu = 0$ となる $D_4^{(1,1)}$-型楕円ルート系に対するエータ積は

$$\eta(8\tau)^4\eta(4\tau)^{-2} = q + 2q^5 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{17} + 3q^{25} + 2q^{29} + 2q^{37} + 2q^{41} + \cdots$$

で与えられる。対応するディリクレ級数 $1{+}2{\cdot}2^{-s}{+}9^{-s}{+}2{\cdot}13^{-s}{+}2{\cdot}17^{-s}{+}\cdots$ は つぎのオイラー積分解を持つ L 関数と一致することが示される：

$$L_{D_4^{(1,1)}}(s) = \prod_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{(1-p^{-2s})}$$

このオイラー積を改めてディリクレ級数に展開しなおせば明らかにその係数達は非負となる。一般に楕円エータ積の Mellin 変換は或クンマー体のガロワ表現に対する Artin の L-函数 [M] 又はその差となる事が示される (証明要)。すると、なんと有難いことに $\nu = 0$ である場合にはガロワ群がアベル群に退化し、上の例同様、L-函数がディリクレの L-函数等に分解し、その明示表示を使う事により、係数の非負性が初等的に示せる。細い事だが、ここでコンダクタの約数になる様な素数 (bad prime) に対してオイラー積 因子は 1 となる事も要チェックである。この事が楕円エータ積は初日に述べたグレイゾーンに属してないことを意味しているからである。

第三日： 第二日の楕円的エータ積以外でも L 関数のオイラー積分解を用いる方法が適用できる $\nu = 0$ となるエータ積を五つ分析する. 一例が、$\eta(5\tau)^5\eta(\tau)^{-1}{=}q{+}q^2{+}2q^3{+}3q^4{+}5q^5{+}2q^6{+}6q7{+}5q^8{+}7q^9{+}5q^{10}{+}12q^{11}{+}\cdots$である。これは Ramanujan が remarkable identityと呼んで計算したエータ積でもある。この例のウエイトは 2 となるが、第二日と同じようにオイラー積分解を用いて係数の非負性の証明ができる。一方逆にオイラー積分解からフーリエ係数に負数が混ざる事が分かる (グレイゾーンに居る) エータ積三例も分析する。そこでは bad prime に対するオイラー因子が原因になる。

最後に weight 系なる概念を導入して、正則かつ非負のエータ積の良例を量産する予定であったが未完である。何日の日かそれ等のエータ積のリストとそれに対応する Dirichlet 級数のオイラー積分解を決定したい。それは本研究の元来の目的: 原始形式の周期写像の理論に新しい insight をもたらすであろうという希望を述べて序の締め括りとする。

1　第1日

今日はまず、エータ積を円分有理式の立場から再定義する。その方が概念的に自然で他の問題ともスムースにつながる。その上で フーリエ係数がすべて非負になるエータ積の全体のなす半群 H_+ を導入する。H_+ は充分豊富な元をもつという予想を述べる。次に 双対円分有理式及び双対ランク なる概念を導入し それをキーに半群 H_+ を分析する。

幾何に由来する楕円ルート系から定まるエータ積が H_+ に属する事の判定の研究に導かれて L 関数を用いる方針となった経緯を説明する。

1. 問題提起

整数のなす加群 $\mathbb{Z}$ の 可算直和の元 $e \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ の 第 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成分を $e(i)$ と記すことにする。e にたいし定まる 変数 λ の有理式

$$1) \qquad \varphi_e(\lambda) := \prod_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} (1-\lambda^i)^{e(i)}$$

を円分有理式とよぶことにする。円分有理式の全体

$$2) \qquad H := \{\varphi_e \ \mid \ e \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_{>0}}\}$$

は自然な積により可換な乗法群であり、整数 $m \in \mathbb{Z}$ は 自然に巾 $\varphi \mapsto \varphi^m$ として H の準同型として作用する。他にも $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、H の自己準同型作用：$\varphi \mapsto {}^m\varphi$ が ${}^m\varphi(\lambda) := \varphi(\lambda^m)$ により定まる。φ が被約とは $\varphi \neq {}^m\psi$ ($m \geq 2$) なる $\psi \in H$ はないこととする。

円分有理式 $\varphi \in H$ 1) に対しエータ積 η_φ を

$$3) \qquad \eta_\varphi(\tau) := \prod_{i \in \mathbb{Z}_{>0}} \eta(i\tau)^{e(i)}$$

と定義する。但し $\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ $(q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau))$ はデデキントの η-函数。すると対応：$\varphi \mapsto \eta_\varphi$ は自明に乗法的：$\eta_{\varphi_1 \cdot \varphi_2} = \eta_{\varphi_1} \cdot \eta_{\varphi_2}$ であり、特に $\eta_{\varphi^n} = (\eta_\varphi)^n$ となる。また 2) で定めた $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ の作用 に対し、$\eta\ {}_m\varphi(\tau) = \eta_\varphi(m\tau)$ となることも明らかであろう。また対応：$\varphi \mapsto \eta_\varphi$ は 単射的なので, しばしば H とエータ積等のなす乗法群とを同一視する。

エータ積は (絶対収束する) 無限積 $\eta_\varphi(\tau) = q^{\frac{\sum_i ie(i)}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_i (1-q^{in})^{e(i)}$ で表せるので それを q の (有理) 巾級数に展開し

$$5) \qquad \eta_\varphi(\tau) = \sum_{n \in \frac{\mu}{24} + \mathbb{Z}_{\geq 0}} C_\varphi(n) q^n \ = \ q^{\mu/24} + \cdots .$$

その係数たちをフーリエ係数とよぶ。但しここで

$$6) \qquad \mu = \mu_\varphi := \sum_i ie(i)$$

を φ のランク と呼ぶ。勿論定義よりフーリエ係数は全て整数である。

$$C_\varphi(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{for} \quad \forall\, n \tag{7)}$$

問題. 全てのフーリエ係数 $C_\varphi(n)$ が非負となるような円分有理式 φ (エータ積 η_φ) の全体のなす半群

$$H^+ := \{\varphi \in H \mid \eta_\varphi\text{のフーリエ係数}\, C_\varphi(n) \geq 0 \quad \forall\, n\ \} \tag{8)}$$

を決定せよ。もっと具体的には、例えば、$\varphi \in H_+$ となる為の判定法はあるか？数値不変量で特徴付けられるか? 半群としての生成系をみつけよ。

2. 或る必要条件: このあと **7.** の補題で示すように、次が成立する。

条件：もし $\varphi \in H_+$ であると η_φ はカスプ形式でない。

略証: $\varphi \in H_+$ とすると $\lim_{x\uparrow\infty} \eta_\varphi(\frac{\sqrt{-1}}{x}) = \lim_{x\uparrow\infty} \sum_{n\in\mathbb{Q}} C(n)\exp(\frac{-2\pi n}{x}) > 0$ である. 他方 η_φ がカスプ形式だとすると $\lim_{x\uparrow\infty} \eta_\varphi(\sqrt{-1}/x) =$ (**7.** 参照) $\lim_{\exp(-\pi x)\downarrow 0}\{x^{a_0}\times$正巾から始まる変数 $\exp(-\pi x)$ に関する収束巾級数$\} = 0$ (ここで a_0 は η_φ のウエイト) となりとなり矛盾する。(証明終り)

この条件は $\varphi \in H_+$ である為必要だが充分ではない。第 2 日に調べる楕円ルート系に由来するエータ積の場合 では逆も正しい。更に、第 3 日に調べる一般の weight 系に由来するエータ積でも逆が正しいと予想される。

上記の必用条件は H の中で H_+ と $\{\varphi \in H \mid \eta_\varphi$ は カスプ形式 $\}$ は disjoint である事を言っているが その二者の間にグレイゾーンがある (**7.** の 模式図 参照)。グレイゾーンに属するエータ積の例を 第 3 日に 3 個あげるが (**21,22,23.** 参照) それらに対応する L 関数を見てみると上記のよい場合のエータ積などと殆んど同じ構造 (つまり Dirichlet の L 関数の 2 次式で表せる) を持つのであるが、2 や 3 等の悪い素数に対応するオイラー積 因子が Dirichlet 係数が 正になるのを妨害しているのが見て取れる。この辺の事情をもっと整理し はっきりさせるのは 将来の課題である。

3. 積と $\mathbb{Z}_{>0}$-作用に関する H_+ の **primitive** な元。

まずは、H_+ は充分大きいこと (無限生成) を示す例から始める (しかし、本節は本論とはあまり関係ないので飛ばして頂いてかまわない)。

例: 円分有理式の無限系列 $\{\Phi_h\}_{h=0,1,2,3,\cdots}$ を導入する : $\Phi_0 := \frac{1}{1-\lambda}$, $\Phi_1 := 1$. $h \geq 2$ に対しては h に関する帰納法により次の関係式で定義する :

$$\frac{(1-\lambda^h)^h}{1-\lambda} = \prod_{d\,\mid\, h} {}^{h/d}\Phi_d(\lambda)。 \tag{10)}$$

メビウスの反転公式を用いると 次の明示式が得られる。

$$\Phi_h(\lambda) = \frac{(1-\lambda^h)^{\phi(h)}}{\prod_{d|h}(1-\lambda^d)^{\mu(d)}}. \tag{11)}$$

但しここで ϕ, μ はそれぞれ オイラーの関数 及びメビウスの関数である。h が素数なら $\Phi_h = \frac{(1-\lambda^h)^h}{1-\lambda}$ である。非素数のときは $\Phi_4 = \frac{(1-\lambda^4)^2(1-\lambda^2)}{1-\lambda}$, $\Phi_6 = \frac{(1-\lambda^6)(1-\lambda^3)(1-\lambda^2)}{1-\lambda}$、$\Phi_{10} = \frac{(1-\lambda^{10})^3(1-\lambda^5)(1-\lambda^2)}{1-\lambda}$、$\Phi_{12} = \frac{(1-\lambda^{12})^4(1-\lambda^3)(1-\lambda^2)}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)}$ 等々。
予想：任意の $h = 0, 1, 2, 3, \cdots$ にたいし $\Phi_h \in H_+$ となる。

予想の背後には computer 実験がある。(興味ある方は是非実験をお奨めする)。$\eta_{\Phi_2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{8}(4n+1)^2}$(Gauss) は手計算で判る。$\Phi_2^2$、$\Phi_3$、$\Phi_4$、$\Phi_6$ に対する答は第二日にあたえる。Φ_5 に対する答は第三日にあたえる。

H_+ は $\mathbb{Z}_{>0}$-作用に関して閉じている (何故なら $C_{m\varphi}(n) = C_\varphi(n/m)$)。
問題. 半群 H_+ の任意の元はその有限個の primitive(即ち、積に関し既約かつ $\mathbb{Z}_{>0}$-作用に関し被約) な元への $\mathbb{Z}_{>0}$-作用 達の積に分解するか (正則なエータ積に限ればウエイトの正値性より正しい)。

一般に $\Phi_h(\lambda)$ は primitive ではない。例えば $\Phi_4 = {}^2\Phi_2\Phi_2, \Phi_{12} = {}^6\Phi_2^2\Phi_6, \ldots$ 等々と分解するが、更に細かく次の様な分解もある：

$$\Phi_6 = {}^3\Phi_2\ \Psi_6 \qquad \text{但し} \qquad \Psi_6 := \tfrac{(1-\lambda^2)(1-\lambda^3)^2}{(1-\lambda)(1-\lambda^6)},$$
$$\Phi_{10} = {}^5\Phi_2^2\ \Psi_{10} \qquad \text{但し} \qquad \Psi_{10} := \tfrac{(1-\lambda^2)(1-\lambda^5)^3}{(1-\lambda)(1-\lambda^{10})},$$
$$\Phi_{12} = {}^6\Phi_2\ {}^2\Phi_6\ \Psi_{12} \qquad \text{但し} \qquad \Psi_{12} := \tfrac{(1-\lambda^{12})(1-\lambda^3)(1-\lambda^2)^2}{(1-\lambda)(1-\lambda^4)(1-\lambda^6)},$$

後に (**14.** 注意) η_{Φ_h} ($h > 1$) 及び η_{Ψ_6}、$\eta_{\Psi_{10}}$、$\eta_{\Psi_{12}}$ は正則形式であって、カスプ $\tau = 0$ のみで非零であり それ以外のカスプでは消えることを示す。Ψ_6 及び Ψ_{12} に対応するエータ積は **Atkin** の意味での **unary-theta function** となり各々 $\eta_{\Psi_6} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{24}(6n+1)^2}$ 及び $\eta_{\Psi_{12}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{3}(3n+1)^2}$ と展開されることを九州大学の金子昌信氏お教え頂いたと記憶するが資料が直ぐに見当たらず未確認である.一方 Ψ_{10} はウエイトが 1 なので第三日にその Mellin 変換のオイラー積分解を用いて $\Psi_{10} \in H_+$ であることを示す。

' 困った' 事に $\Phi_6 = {}^2\Psi_6\Psi_{12}$ とも分解するので、上記の第一式と合わせて ${}^3\Phi_2\Psi_6 = {}^2\Psi_6\Psi_{12}$ を得る。別の' 困った' 分解例 $\Phi_2^2 = \frac{2^5}{1^2 4^2}\ {}^2\Phi_2$ もある。
問題. これ等の両辺は更に primitive な元に分解して最終的には primitive な元への分解は一意的になるのかそれとも分解の一意性はないのか？

どうも後者のように思える。

4. 幾何的背景

この節では 幾何的背景についてすこし説明する。後節 **5.** で導入する円分有理式の双対性は 当節で説明する 有限ルート系の自己双対性を一般化する形で導入したのである [Sa3,0.]。しかし、当節はエータ積とは殆んど関係ないので、大方の人は飛ばしていただいた方がよい。

ミラー対称性と呼ばれる双対性が二つの幾何の間で存在する。即ちミラーペアと呼ばれる複素多様体 M と シンプレクティク多様体 W の組

$$\underset{M}{\text{複素多様体}} \quad \leftrightarrow \quad \underset{W}{\text{シンプレクティク多様体}}$$

があり、両者の上に定まる様々な幾何構造のなすカテゴリーやそれ等の多様体の変型空間 (モデュライ空間) に入る平坦構造 (flat structure = Frobenius structure) は同型となると期待される。筆者はこの図式の左辺側を第一種楕円積分の理論を高次元一般化する原始形式の積分の周期理論を通して研究してきた (その詳細は本稿と直接関係ないので略す)。そこから派生した双対性の概念を説明するために簡単な場合の原始形式の分類とその自己双対性について述べる。

原始形式とは ある代数多様体の族の上に定義された 非常に特別な微分形式の族であるが (説明略) それにたいし特性多項式 φ と呼ばれる円分多項式と位数呼ばれる自然数 h とが定まっている。一方 原始形式の最も簡単な場合は有限ルート系で分類されるが (例えば楕円積分は A_2 型)、その場合の特性多項式と位数は対応する Coxeter 変換の特性多項式とその位数 (Coxeter 数) となる (表 1 。Dynkin 図式が一重線のみの場合)。

表 1 。

名前 :	ウエイト系	特性多項式
A_l :	$(1, b, l+1-b; l+1)$	$\frac{\lambda^{l+1}-1}{\lambda-1}$
D_l :	$(2, l-2, l-1; 2(l-1))$	$\frac{(\lambda^{2(l-1)}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^1-1)(\lambda^{l-1}-1)}$
E_6 :	$(3, 4, 6; 12)$	$\frac{(\lambda^{12}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^-1)(\lambda^4-1)(\lambda^6-1)}$
E_7 :	$(4, 6, 9; 18)$	$\frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)(\lambda^6-1)(\lambda^9-1)}$
E_6 :	$(6, 10, 15; 30)$	$\frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)(\lambda^6-1)(\lambda^{10}-1)(\lambda^{15}-1)}$

この表のウエイト系の項 (第 3 日に説明) の最後に与えられている数が位数である。この表から特性多項式が次の意味での自己双対性 :「分母分子の $\lambda^i - 1$ なる形の因子の間に 1 対 1 の対応であって 対応する巾指数 i を掛け会わせるると因子によらず一定の位数となる」を持つことが判る。この自己双対性は自明でも、偶然でもなく 証明される事であるが ([Sa3,11.]) この事を手がかりにして つぎの 一般概念に到達した。

二つの原始形式の理論が (string) dual である必要充分条件は、それぞれに対応する、Coxeter 数 h が相等しくかつ、対応する特性多項式が

$$12) \qquad \varphi(\lambda) = \prod_i (1-\lambda^i)^{e(i)} \quad \text{及び} \quad \varphi^*(\lambda) = \prod_i (1-\lambda^i)^{e^*(i)}$$

とすると

$$13) \qquad e(i) + e^*(h/i) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0} \quad s.t. \quad i|h$$

となる関係が成立する事である ([Sa3], [T] 参照)。

5. 円分有理式の双対性と エータ積の双対性。

前節にインスパイアされて 次の定義を行う。

定義二つの円分有理式 φ, φ^* が 12) 式のように与えられたとする時、両者が **Coxeter** 数 $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ に関して互いに双対であるとは i) $e(i) \neq 0$ または $e^*(i) \neq 0$ なる i は h の約数でありかつ、ii) 13) が成り立つこと。

注意 **1**。与えられた $\varphi(\lambda)$ にたいして Coxeter 数 h を指定しなければ双対円分有理式は決まらないのであるが それらは高々$\mathbb{Z}_{>0}$ 作用で移り変わる。φ の被約な双対式 は、$h := lcm\{i \mid e(i) \neq 0\}$ と置き $\varphi^*(\lambda) := \prod_i (1-\lambda^i)^{e(\frac{h}{i})}$ とすればよい。通常はこの定義で充分であり何も言わなければそれをさすが、被約でない円分有理式をも扱いたい為に上のような定義にした。

補題 φ, φ^* が Coxeter 数 h に関して互いに双対である必用十分条件は

$$\eta_\varphi(-\frac{1}{h\tau})\ \eta_{\varphi^*}(\tau) = \left(\frac{h\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{a_0} \sqrt{d_\varphi}。 \tag{14}$$

但しここで a_0, d_φ は 各々

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_i e(i) \qquad wieght\ (genus) \tag{15}$$

$$d_\varphi = \prod_i i^{e(i)} \qquad discriminant \tag{16}$$

で定義される半整数及び有理数で各々 $\varphi(\lambda)$ の weight (又は genus) 及び discriminant と呼ぶ。普通 weight は k と書かれるのであろうが、幾何的背景より genus とも呼び、この様な記法を用いた。

証明 $$\eta_\varphi(-\frac{1}{h\tau}) = \prod_i \eta(-\frac{1}{h\tau/i})^{e(i)}$$

$$= \prod_i \left(\sqrt{\frac{h\tau}{i\sqrt{-1}}}\right)^{e(i)} \eta(\frac{h\tau}{i})^{e(i)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\prod_i i^{e(i)}}} \left(\frac{h\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{a_0} \prod_j \eta(j\tau)^{e(h/j)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d_\varphi}} \left(\frac{h\tau}{\sqrt{-1}}\right)^{a_0} \eta_{\varphi^*}(\tau)^{-1} \qquad \text{証明終.}$$

注意 **2**。 前節の幾何の立場から見る。そこで定義された二つの原始形式間の双対性が、14) によりエータ積の函数等式の言葉で書けてしまった。これは一体何を意味するのであろうか。そこで、エータ積を計算機で具体的に書き下して、その等式の意味を探してみた。すると更にそれ等の

エータ積のフーリエ係数について おかしな事に気付く :「よい原始形式 (平坦構造を持つ) に対応するエータ積のフーリエ係数は非負である。」(8.2. の楕円ルート系の場合参照)。その意味も今のところ分からないが、とにかくフ-リエ係数の非負性をコンピュータ実験ではなく数学的に証明を与えようとしたのが本講演の元となった研究の出発点であった。

6. エータ積の保型性。

エータ積は適当なレベルとキャラクター付きの保型形式になることはよく知られており既にいろいろな著者がいろいろな結果を得ている (例えば 文献 [D-K-K][G-O][Ha][H-M][Koi][Mar][Mas])。本稿では双対円分有理式を用いると エータ積の保型性について、半整数 weight の場合も含めてこれから必要とするかなり シャープな結果が出るので まずそれを述べておく。その為にしばらく (標準的な) 言葉を用意する。

正の整数 $N > 0$ にたいし$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0(N) \right\}$

とおく。$\left(\frac{c}{d}\right)$ は Legendre symbol とする。$\varepsilon_d = \sqrt{(\frac{-1}{d})}$ と置く。但し $\sqrt{z}$ は 本稿では値域を $(\mathbb{R}_{>0} + \sqrt{-1}\mathbb{R}) \cup \sqrt{-1}\mathbb{R}_{\geq 0}$ とする分枝を表すものとする。Dirichilet character $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を一つ定めておく。

定義 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則函数 $f(\tau)$ は次の条件 1) 又は 2) を満たす時、タイプ (a_0, ε) レベル N の弱正則保型形式と呼ばれる (但し $2a_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$。$2a_0$ が奇数の時は $N \equiv 0(4)$、かつ $\varepsilon(-1)$ は $2a_0$ が奇、偶に応じて、1 又は $(-1)^{a_0}$)。任意の $A \in \Gamma_0(N)$ に対し

1) $2a_0$ が 偶数 (即ち$\varepsilon(-1) = (-1)^{a_0}$) の時は

$$17) \qquad f|_{a_0}A(\tau) := f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-a_0} = \varepsilon(d)f(\tau)$$

2) $2a_0$ が 奇数 (即ち$\varepsilon(-1) = 1$) の時は

$$18) \qquad f|_{a_0}\tilde{A}(\tau) := f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\left((\frac{c}{d})\varepsilon_d^{-1}\sqrt{c\tau + d}\right)^{-2a_0} = \varepsilon(d)f(\tau)。$$

次に円分有理式とその 双対円分有理式が 12) のように与えられているとする。ここで φ の weight 及び rank は各々 15) 及び 6) で与えられていることを思い起こそう。では φ^* の weight 及び rank (φ の dual weight 及び **dual rank** と呼ぶ) はどのような量であろうか。dual weight は 定義より すぐに $-a_0$ となり φ の weight から求まってしまうが、**dual rank** (ν_φ と書くことにする) は 非自明な量となる。即ち明示的に書いておくと

19) $$\nu_\varphi := \mu_{\varphi^*} = -\sum_{i|h} ie(\frac{h}{i})$$

で与えられる (厳密には h の選択に依っているので $\nu_{\varphi,h}$ と記すべきであろうが略す、 5. 注意 1 .)。更に、それを用いて以下の 3 つの量を導入する。

20) $$m := 24/gcd(24, \mu_\varphi), \quad m^* := 24/gcd(24, \nu_\varphi),$$

21) $$N_\varphi := hmm^*$$

補題 ([Sa3,Lemma13.3]) エータ積 $\eta_\varphi(\tau)$ 及び $\eta_{\varphi^*}(\tau)^{-1}$ はそれぞれタイプ $(a_0, \varepsilon_\varphi)$ 及び $(a_0, \varepsilon_\varphi^*)$ かつレベル N_φ の弱正則保型形式となる。ここでキャラクター は ε_φ 及び ε_φ^* は 次のように定まる。

1) $2a_0$ が偶数の時は

22) $$\varepsilon_\varphi(d) = \varepsilon_\varphi^*(d) = \begin{cases} \left(\frac{d_{sf}(-1)^{a_0}}{d}\right) & d : \text{奇数} \\ \left(\frac{d}{d_{sf}}\right) & d : \text{偶数} \end{cases}$$

2) $2a_0$ が奇数の時は

23) $$\begin{cases} \varepsilon_\varphi(d) = \left(\frac{2md_{sf}}{d}\right) & d : \text{奇数} \\ \varepsilon_\varphi^*(d) = \left(\frac{2m^*d_{sf}^*}{d}\right) & d : \text{偶数} \end{cases}$$

但し d_{sf}, d_{sf}^* はそれぞれ $d_\varphi/d_{sf}, d_{\varphi^*}/d_{sf}^* \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ となるような正の整数。

7. 最初の注意.

双対円分有理式なる概念がどのくらいまで役立つかは よく分からない。ひとつ はっきり役立つのは φ^* の rank 即ち φ の dual-rank である。即ち

補題. もし、エータ積 $\eta_\varphi(\tau)$ の $Fourier$ 係数はが全て非負であるならば

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \nu_\varphi \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \eta_\varphi(\tau) \text{ はカスプ } \tau = 0 \text{ で消えない} \\ &\Rightarrow \quad \eta_\varphi(\tau) \text{ はカスプ形式でない。} \end{aligned}$$

補題の証明. 双対公式 *14)* を書き直して

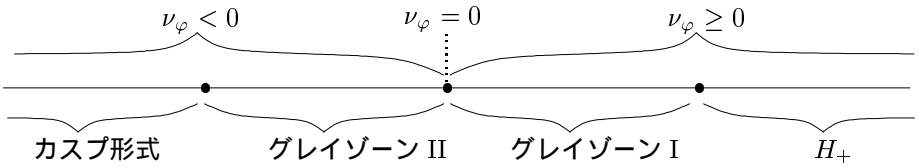
$$\eta_\varphi(\frac{-1}{h\tau})(\frac{\sqrt{-1}}{h\tau})^{a_0} = \frac{1}{\sqrt{a}}\eta_{\varphi^*}^{-1}(\tau)$$

より、η_φ のカスプ 0 における $Fourier$ 展開を考える事は、$\eta_{\varphi^*}^{-1}$ のカスプ $\sqrt{-1}\infty$ における $Fourier$ 展開を考える事に外ならない。$dual\ rank\ \nu = \nu_\varphi$ を用いて $\eta_{\varphi^*}(\tau) = q^\nu + \cdots$ であったから

$$\eta_\varphi(\frac{-1}{h\tau}) = const\ \tau^{a_0} q^{-\nu}(1 + *q + \cdots)$$

ここで $\tau = \sqrt{-1}x \uparrow \infty$ とおくと $s := \exp(2\pi\sqrt{-1}\frac{-1}{h\tau}) = \exp(\frac{-2\pi}{hx}) \uparrow 1$ なので左辺$=\sum_n C(n)s^n \uparrow \infty$ となる。他方 $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau) = \exp(-2\pi x)$ $\downarrow 0$ なのでもし $\nu < 0$ なら右辺 $= Cx^{a_0}e^{2\pi x\nu}(1+0) \downarrow 0$ 矛盾 !! よって $\nu \geq 0 \Rightarrow \eta_\varphi$ はカスプ形式でない。　　証明終

模式図. 補題の結果を描くとのようになる。まず H の元を ν_φ の値に応じて 数直線 ν の上に並べておく。すると ν 直線は図の様に分割される。



8. グレイゾーンのない例たち I.

前節では dual rank ν という量でひとまず円分有理式を仕分けてみた。その立場から 幾つかの例について見てみる。

0. 円分有理式 $\{\Phi_h, \Psi_h\}_{h=0,12,\cdots}$ の dual rank を計算する。$\nu_{\Phi_0} = 1$ である。$h \geq 1$ の場合明示式 11) 及び定義 19) をもちいると

$$24) \qquad \nu_{\Phi_h} = \sum_{i|h} i\mu(h/i) - \phi(h)\mu(1) = \phi(h) - \phi(h) = 0,$$

1. 有限ルート系。

4。で取り上げた 有限ルート系の特性多項式の場合 (エータ積の非負性の証明という立場だけから見れば詰まらない例なので飛ばしてよい)。

表 1 にある 特性多項式 φ は自己双対 $\varphi^* = \varphi$ なので $\nu_\varphi = \mu_\varphi$=ルート系のランク $= deg(\varphi) =: l > 0$ となる。従って、エータ積 η_φ はカスプ $\tau = 0$ で位数 μ_φ の極を持つ. 実際、この時 $\varphi \in H_+$ であることがつぎのようにして初等的にわかる: η_{φ^*} は次のような無限積展開を持ち ([Sa1,13.11*]), そのフーリエ係数非負となる。

$$25) \qquad \eta_{\varphi^*}(\tau) = q^{\nu_\varphi/24} / \prod_{n=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{l}(1 - q^{m_i+nh}).$$

但しここで $m_1, \cdots, m_l$ は exponent と呼ばれる 関係 $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{l}(\lambda - \exp(2\pi\sqrt{-1}m_i/h))$、$0 < m_i < h$ をみたす l 個の整数。すると双対性 $\varphi = \varphi^*$ より $\eta_\varphi = \eta_{\varphi^*}$ のフーリエ係数も非負となる。ちなみに、特性多項式 φ 等を $\{\Phi_h\}_{h\geq 0}$ の" $Z_{\geq 0}$ 一次結合" で表すのは 容易な演習問題である。

9. グレイゾーンのない例たち II. 楕円ルート系.

4。で 与えた 原始形式の (簡単な場合の) 有限ルート系による分類に続き、つぎのクラス の分類は 楕円ルート系と呼ばれるある種の無限ルート系で行われる ([Sa1])**。それらの定義等の詳細は本講演を理解するのに不必要であり明日の講演の** Appendix **に付け加える (** 本稿 16. 参照**)。ここではそれらの名前と特性多項式,** rank, dualrank, m, m^*, lebel N, discriminant **等の表を 以下に与える。(正確に言うとウェイト** $a_0 = 1$ **となる場合のみの楕円ルート系をリストアップするが、実質問題はない** (17. の 2) **参照)。)**

表 2。

タイプ	φ	h	μ	ν	m	m^*	N	d
$A_1^{(1,1)*}$	$(\lambda^2-1)(\lambda-1)$	2	3	-3	8	8	128	2
$B_3^{(1,1)}$	$(\lambda^2-1)^3(\lambda-1)^{-1}$	2	5	-1	24	24	1152	2^3
$B_2^{(1,2)}$	$(\lambda^2-1)^2$	2	4	-2	6	12	144	2^2
$C_2^{(1,2)}$	$(\lambda^2-1)^2$	2	4	-2	6	12	144	2^2
$C_3^{(2,2)}$	$(\lambda^2-1)^3(\lambda-1)^{-1}$	2	5	-1	24	24	1152	2^3
$BC_1^{(2,1)}$	$(\lambda^2-1)(\lambda-1)$	2	3	-3	8	8	128	2
$BC_2^{(2,2)}$	$(\lambda^2-1)^2$	2	4	-2	6	12	144	2^2
$D_4^{(1,1)}$	$(\lambda^2-1)^4(\lambda-1)^{-2}$	2	6	0	4	1	8	2^4
$E_6^{(1,1)}$	$(\lambda^3-1)^3(\lambda-1)^{-1}$	3	8	0	3	1	9	3^3
$E_7^{(1,1)}$	$\frac{(\lambda^4-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)}$	4	9	0	8	1	32	2^5
$E_8^{(1,1)}$	$\frac{(\lambda^6-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)}$	6	10	0	12	1	72	$2^2\cdot 3^2$
$F_4^{(1,1)}$	$(\lambda^3-1)^2$	3	6	-2	4	12	144	3^2
$F_4^{(1,2)}$	$(\lambda^4-1)(\lambda^2-1)$	4	6	-3	4	8	128	2^3
$G_2^{(1,1)}$	(λ^2-1)	2	4	-2	6	12	144	2^2
$G_2^{(1,3)}$	$(\lambda^3-1)(\lambda-1)$	3	4	-4	6	6	108	3

さて、この表の 特性多項式 φ **に対応するエータ積** η_φ **を楕円的エータ積と呼ぶことにする (記号として** $\eta_{(R,G)}, \eta_{D_4^{(1,1)}}, \cdots, etc.$ **等と記す事もある)。楕円的エータ積が** H **(または 7. の模式図) の何処にいるのかを知りたい。そこで表の** dualrank ν **の部分を見る。すると、表のうち横棒で囲まれた四つの場合** $D_4^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}$ **のみ 右側の** $\nu \geq 0$ **に属し、残りは皆 左側の** $\nu < 0$ **に属している。(表に依らぬ証明有り、16.** 1) **参照)。**

更に詳しく模式図の何処にいるのか知りたいわけであるが、ここで少し先走って、後で示すことの結論を先に述べると次のようになる。

１。四つの楕円ルート系 $D_4^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}$ の特性多項式は模式図の H^+ に属する。従ってグレイゾーン **I** にはない。

２。残りすべての場合の特性多項式は模式図の { カスプ形式 } に属する。従ってグレイゾーン **II** にはない。

即ち、楕円的エータ積にはグレイゾーンはなく dual rank ν の符号のみで非負性になるか カスプ形式になるか がきまる。

ちなみに、前にも少しふれたが、この四つの場合 $D_4^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}$ が 原始形式の理論の立場からは 非常に重要な場合であるが非負のフーリエ係数の幾何学的意味付けは いまのところ知られていない。また、それら四つの場合に対応する特性多項式は **3.** の予想で述べた primitive 多項式の $\Phi_2^2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_6$ になっている。

戻って、 上記 **1.** 及び **2.** を示すには何をしたらよいであろうか。

まず **2.** の方は初等的に示せることなのでそれのスケッチ以下に与えてかたずけてしまおう。**1.** については次節で考える。

双対公式 14) (又は **7)** の補題の証明) で分かるように、 dual rank ν_φ は大体エータ積 η_φ のカスプ $\tau = 0$ におけるフーリエ展開の初項の巾指数といえる。もっと一般に カスプ $\tau = a/c$ $(a, c \in \mathbb{Z})$ におけるフーリエ展開の初項の或局所変数に関し巾指数は $c\Phi(c)$ で与えられる。但しここで

$$\xi\Phi_\varphi(\xi) := \sum_{i|h} \frac{h(i,\xi)^2}{i} e(i) \quad \text{for} \quad \xi \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

この説明はいい加減で、局所変数を指定しなければ巾指数は決まらないが少なくともその符号はこれで分かるであろう。ここで特に $\Phi_\varphi(h) = \mu_\varphi$ かつ $\Phi_\varphi(1) = -\nu_\varphi$ となることに注意する。すると示すべき事は

命題。 もし $\Phi_\varphi(1) \geq 0$ ならば任意の $\xi \in \mathbb{Z}$ にたいし $\Phi_\varphi(\xi) \geq 0$ となる。更に最初の不等式が真の不等式ならば後の不等式も真の不等式となる。

この命題の証明は分類結果に基ずき初等的なので略す ([Sa1,V,2.8&2.9]). 勿論一般の保形形式ではカスプ $\tau = 0$ における挙動のみで他全てのカスプでの挙動が定まるはずはないから、なんらかの楕円的エータ積の特殊性が反映しているのであろうが、それが何であるか筆者にはわからない。

10. 非負性証明へのアプローチ ①, ② 及び ②'

次に前節 **9.**。の **1.** の証明を考える。即ち四つの場合 $D_4^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}, E_8^{(1,1)}$ のフーリエ係数の非負性を証明したい。以下に三つほどアプローチを述べる (二番目は Kac による variation がある)。結局筆者は三番目の

アプローチを採用し、それを明日説明する。その方法へ至った経過も多少思い入れがあるので述べてみる。

① circle meathod (Hardy)

一般に保形形式のフーリエ係数のよい近似を与えるものとして circle meathod なるもの ([Ap] 参照) があるが、それはカスプ形式の場合機能する。今は調べたい η_φ がカスプ形式でないのでうまく機能しない。

② 格子のテータ関数表示

調べたいエータ積が ある格子のテータ関数であることが分かれば勿論その係数は非負である。もっと一般にある格子の部分領域等の点の個数の Poincare 級数等を考える等してこの方法は 相当有効のようで、いろいろな方の研究があるようである (伊吹山、小池、小野、Zagier, $\cdots$)。詳しくは本報告集に載る (と思われる) 伊吹山知義氏の稿を参照されたい ([I])。

Atkin による unary θ-函数の理論も関係しているようであるが詳しくは九州大学の金子昌信氏に問い合わせられたい.

②' V. Kac のアプローチ

これは②の特別なものである。筆者の講演を聞いた V.Kac が四つの楕円エータ積の θ-函数表示を与える格子を古典的ルート系の言葉で記述出来ることに気が付きそれを個人的に communicate してきた、以下の結果である。天下りであるが、今回話題になっている四つの楕円ルート系と四つの rank 2 の古典ルート系 との間に 次の対応関係がある。

楕円ルート系	$\leftrightarrow$	古典ルート系
$D_4^{(1,1)}$	$\leftrightarrow$	$A_1 \times A_1$
$E_6^{(1,1)}$	$\leftrightarrow$	A_2
$E_7^{(1,1)}$	$\leftrightarrow$	$B_2 = C_2$
$E_8^{(1,1)}$	$\leftrightarrow$	G_2

V. Kac の観察 : rank 2 の古典ルート系 R のルート束 $Q(R)$ に Weyl vector ρ を加えた格子 $Q(R) + \mathbb{Z}\rho/h$ を考える。するとこの格子の θ-函数は上の表で対応する楕円ルート系に対するエータ積のフーリエ展開を与える。

2 次形式的アプローチに対する個人的感想

○ うまく、格子がみつかれば面白い。数学的に豊裕。特に Kac のアプローチは、古典ルート系と楕円ルート系の間の新たな関係を示唆している。

○ 格子をみつけるにあたって 偶然又は ad hoc な事象の影響はないか。一般の理論にしにくい。表示の一意性はあるのか ?

11. 非負性証明へのアプローチ ③ L-函数論的アプローチ

この方法は まずエータ積の Mellin 変換である Dirichlet 級数を考える。それのオイラー積表示が判れば それより逆に Dirichlet 係数 (=フーリエ係数) を明示計算してその非負性を直接示そうというものである。筆者はこの方法で四つの楕円エータ積の非負性を示した。 最初からこの様な方法がうまく行くと思っていたわけではない。かなり膨大な数値実験を行った結果である。多少個人的な思出であるが少し説明する。

まず $\eta_\varphi(\tau)$ はそのままでは q について分数巾なので変数変換 $q \mapsto q^{m_\varphi}$ 但し $m_\varphi = 24/gcd(24, \mu_\varphi)$ を行い (即ち円分有理式 φ を ${}^{m_\varphi}\varphi$ に置き換え)

$$\eta_\varphi(m_\varphi\tau) = \sum_n c(n)q^{m_\varphi n} = \sum_n c'(n)q^n = q^{\frac{\mu}{24}m_\varphi} + \cdots \tag{27}$$

(即ち $c(n) = c'(m_\varphi n)$) 整数巾級数に直しておき、対応する Dirichlet 級数

$$L_\varphi(s) := \sum_n \frac{c(n)}{(m_\varphi n)^s} = \sum_n \frac{c'(n)}{n^s} \tag{28}$$

を考える。数値実験によるとこの様に定義した直した 係数 $c'(n)$ は、ある (有理) 素数 p 及び $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、乗法性

$$c'(p^\ell \cdot n)) = c'(p^\ell)c'(n) \quad \text{for} \quad (p, n) = 1 \tag{29}$$

を示したからである。その様な素数 p に対しては $L_\varphi(s)$ から Euler 因子 $(1 - c'(p)p^{-s} + \varepsilon(p)p^{a_0-1-2s})^{-1}$ 等を分離できる。しかし、困ったことに乗法性はすべての素数に対しては成り立たない。即ち $\eta_\varphi(m\tau)$ は一般に **Hecke-eigen-form** ではない。例えば $E_8^{(1,1)}$ 型楕円エータ積

$$\begin{aligned}\eta_{E_8^{(1,1)}}(12\tau) &= \eta(72\tau)\eta(36\tau)\eta(24\tau)/\eta(12\tau) \\ &= q^5 + q^{17} + q^{29} + q^{41} + q^{53} + 2q^{65} + q^{89} + \ldots\end{aligned}$$

は $p \equiv 1\ (12)$, $p \equiv 7\ (12)$ 或いは $p \equiv 11\ (12)$ となる素数に対し 乗法性を示したが $p \equiv 5\ (12)$ なる素数に対しては乗法的でない。即ち

$$L_{E_8^{(1,1)}}(s) = \prod_{p\equiv 1(12)} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \times \prod_{p\equiv 7,11(12)} \frac{1}{1-p^{-2s}} \times ???$$

となるのであろうが、??? をどう処理したらよいか。こんな計算をしていたのが 1996 年初頭だったと思う。休日数研に出てきて更に 数万項に及ぶ係数の計算の結果 ??? の部分は二つの Euler 積の差になっているらしい。予想：

$$?? ? = \frac{1}{4}\Big(\prod_{p\equiv 5(12)} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} - \prod_{p\equiv 5(12)} \frac{1}{(1+p^{-s})^2}\Big)$$

に達する。そんな話を柏原正樹氏にした。僕の数式処理システムでは高々数万項しか計算出来ないがこの予想が典型的に影響する次数はその遥か先になると。すると柏原さんは Fortran でやれば出来るであろうと プログラムを組んでくれた。はたして数日後 彼より 次の email が届いた、

From masaki Mon Apr 29 09:05:07 1996
Received: from parsley.kurims.kyoto-u.ac.jp
From: Masaki Kashiwara ¡masaki¿
Date: Mon, 29 Apr 96 09:05:06 JST
Message-Id: ¡9604290005.AA28951@parsley¿
To: saito@kurims.kyoto-u.ac.jp
Subject: computer result
Status: R

Dear Kyoji,
Here is the result.
The 446370-th coefficient is 16 !!
I hope this is what you expected.
Best
Masaki

446325-th	2	446351-th	0
446326-th	0	446352-th	0
446327-th	0	446353-th	0
446328-th	0	446354-th	0
446329-th	2	446355-th	2
446330-th	2	446356-th	2
446331-th	0	446357-th	2
446332-th	0	446358-th	1
446333-th	0	446359-th	0
446334-th	2	446360-th	6
446335-th	0	446361-th	1
446336-th	0	446362-th	4
446337-th	2	446363-th	2
446338-th	1	446364-th	0
446339-th	0	446365-th	0
446340-th	0	446366-th	0
446341-th	2	446367-th	1
446342-th	0	446368-th	0
446343-th	0	446369-th	0
446344-th	1	**446370-th**	**16**
446345-th	2	446371-th	0
446346-th	2	446372-th	1
446347-th	0	446373-th	2
446348-th	0	446374-th	0
446349-th	1	446375-th	0
446350-th	2		

$E_8^{(1,1)}$ 型 楕円的エータ積 のフーリエ係数の一部 （これは再入力したもので オリジナルの email のコピーではありません。）

ここでジャンプしている 446370 項目の 16 は $q^{446370\cdot 12+5}$ のフーリエ係数である。一方 $446370\cdot 12+5 = 5356445 = 5\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53$ は $p \equiv 5 \bmod 12$ なる素数の五個の積に分解しているが、予想通り ??? の $(5\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53)^{-s}$ の Dirichlet 係数 16 と一致している!! ひたすら小さな数のフーリエ係数を並べて あれこれ可能性を実験し考えていた 時とは明らかに異なり、$L_\varphi(s)$ は二つのオイラー積をもつ L 関数の差で書ける事に確信がもてた。

今見てみると $L_\varphi(s)$ はなんとシンプルな型でラッキーであったと思う。しかし、その当時は個別の Hecke-eigen-form を考えると言うことはあっても異なる Hecke-eigen-form の差を考えると言うことはあまり普通ではなかったように思う (「数論では、こんな中途半端なものは考えません」と或先生に言われた記憶がある)。筆者にとって楕円的エータ積のメラン変換という 幾何的には自然にでてくる Dirichlet 級数が数論ではあまり見掛けない姿だったので一寸驚いたのである。もう一つラッキーであったのは、この例では 差となる Hecke-eigen-form たちが共通の Euler 積の因子を持っていたため予めフーリエ係数 $c'(n)$ が乗法的になる素数 (即ち $p \equiv 1\ (12)$, $p \equiv 7\ (12)$ 或いは $p \equiv 11\ (12)$ となる素数) が存在した。それが見えなかったらとても L 関数を調べる気にはならなかったであろう。

しかし一旦予想が確定してしまえばあとはそれをどう証明するかである。Dirichilet 係数と Fourier 係数を一つ一つ比較していては終りがない。それを有限ステップで終わらせる為には $\eta_\varphi(m\tau)$ の保型形式としての型を確定し $L_\varphi(s)$ の候補者の Mellin 逆変換が、そこに属し一致する事を言わねばならない。明日 **13.-15.** で説明するように $L_\varphi(s)$ の候補者として Artin の L 関数の差がとれる。それらのオイラー積を通して Dirichlet 係数が明示的に分かり更に **16.** で示すようにその非負性が目に見える。

注意。 11) の円分関数 Φ_h $(h \geq 1)$ の dual rank は $\nu_{\Phi_h} = 0$ であり、したがってエータ積 η_{Φ_h} は カスプ $\tau = 0$ で (非零) 正則であるが、さらに他の任意のカスプでは値零正則となることが次のように 26) を用いて示せる。即ち、$P := \{p|h$ となる素数 $\}$ とすると、任意の $\xi \in \mathbb{Z}$ にたいし

$$30) \qquad \begin{array}{ll} \xi\Phi_{\Phi_h}(\xi) & = (h,\xi)^2\phi(h) - \sum_{d|h} h\frac{(d,\xi)^2}{d}\mu(d) \\ & = h\prod_{\substack{p\in P\\ p|\xi}}(1-\frac{1}{p})\prod_{\substack{p\in P\\ p|\xi}}(p-1)\Big(\frac{(h,\xi)^2}{\prod_{\substack{p\in P(p)\\ p|\xi}}} - (-1)^{\#\{p\in P, p|\xi\}}\Big) \\ & \geq 0 \end{array}$$

は非負でありかつ 零となるのは $(\xi, h) = 1$ のときである。Ψ_6、Ψ_{10} 及び Ψ_{12} に対しても同様の計算により 同じ結論がいえる。

問題。円分関数 Φ_h や Ψ_h に対応する L 関数 $L_{\Phi_h}(s)$ や $L_{\Psi_h}(s)$ の具体形を求めよ。明日の講義で $\phi(h) = 2$ の場合 問いに答える。

2　第2日

今日は昨日予告したように 楕円的エータ積のメラン変換である楕円的 L 関数を決定し、その結果として $\nu = 0$ となる 四つの楕円的エータ積のフーリエ係数の非負性を証明する。もっと詳しくいうと、次を示す。

i) 各楕円エータ積 $\eta_{(R,G)}$ にたいし ある円分体の Kummer 拡大 $E(R,G)$ があり、楕円的 L 関数はそのガロア群のランク 2 かつ $\det = \varepsilon_{(R,G)}$ なる表現たちに付随する Artin L 関数 またはそれらの差であらわせる。

ii) エータ積の dual rank ν が消える事と Kummer 拡大が自明となる ($\leftrightarrow$ ガロア群 $\mathrm{Gal}(E(R,G),\mathbb{Q})$ は アベル群となる) 事とは同値である。

iii) 従って、$\nu = 0$ のとき i) のランク 2 のガロア表現は二つの Dirichlet キャラクターの直和であるが、そのキャラクタの具体形がわかる。即ち、楕円的 L 関数の Dirichlet L 関数による 2 次式表示が得られる。

iv) したがって Dirichlet 係数の明示式が得られその非負性も言える。

以上の構造 i)-iii) は全ての 楕円的エータ積に同じであるにも関わらず、その証明は個別に (計算機の助けを借りながら) 行わねばならない。詳細は略す (最後の **18.** に計算ノートの一部をコピーしたが今見て見るととても読めるものでない)。ひとつ救いは最後の **iv**) の非負性の証明はすべてのタイプに共通なので **16.** に纏めてある。それはいかにも楽で楽しい。

12. 楕円的エータ積

4. 表 2. で与えた 楕円ルート系に対する整巾化したエータ積 27) (全てウェイト $a_0 = 1$) とそのフーリエ展開の数項を書く。特性多項式が同じルート系を同じグループにまとめて 都合 8 グループ I,..., VIII に分ける。

I. Types: $B_2^{(2,1)},\ C_2^{(1,2)},\ BC_2^{(2,2)}(1),\ G_2^{(1,1)},\ G_2^{(3,3)},\ F_4^{(1,1)},\ F_4^{(2,2)}$
i) characteristic function: $\varphi_{\mathrm{I}}(\lambda) := (\lambda-1)^2$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{\mathrm{I}}(\tau) := \eta(12\tau)^2$
$= q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} - 2q^{73} - 2q^{97} - 2q^{109} + q^{121} + 2q^{157} + \cdots$

II. Types: $A_1^{(1,1)*},\ BC_1^{(2,1)},\ BC_1^{(2,4)},\ F_4^{(1,2)},\ F_4^{(2,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda-1)$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{\mathrm{II}}(\tau) := \eta(16\tau)\eta(8\tau)$
$= q - q^9 - 2q^{17} + q^{25} + 2q^{41} + q^{49} - 2q^{73} + q^{81} - 2^{89} - 2q^{97} + 2q^{113} - q^{121} \cdots$

III. Types: $B_3^{(1,1)},\quad C_3^{(2,2)}$
i) characteristic function: $\varphi_{\mathrm{III}}(\lambda) := \frac{(\lambda^2-1)^3}{(\lambda-1)}$

ii) elliptic eta-product: $\eta_{\mathrm{III}}(\tau) := \frac{\eta(48\tau)^3}{\eta(24\tau)}$
$= q^5+q^{29}-q^{53}-q^{101}-2q^{125}+q^{149}-q^{173}-q^{197}+q^{245}+q^{269}-q^{293}+q^{317}+\cdots$.

IV. Type: $D_4^{(1,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_{IV}(\lambda) = \frac{(\lambda^2-1)^4}{(\lambda-1)^{-2}}$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{IV}(\tau) := \eta(8\tau)^4\eta(4\tau)^{-2}$
$= q+2q^5+q^9+2q^{13}+2q^{17}+3q^{25}+2q^{29}+2q^{37}+2q^{41}+2q^{45}+q^{49}+2q^{53}\cdots$

V. Types: $G_2^{(1,3)}$, $G_2^{(3,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_V(\lambda) = (\lambda^3-1)(\lambda-1)$
ii) elliptic eta-product: $\eta_V(\tau) := \eta(18\tau)\eta(6\tau)$
$= q-q^7-q^{13}-q^{19}+q^{25}+2q^{31}-q^{37}+2q^{43}-q^{61}-q^{67}-q^{72}-q^{79}+q^{91}\cdots$

VI. Type $E_6^{(1,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_{VI}(\lambda) = \frac{(\lambda^3-1)^3}{\lambda-1}$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{VI}(\tau) := \eta(9\tau)^3\eta(3\tau)^{-1}$
$= q+q^4+2q^7+2q^{13}+q^{16}+2q^{19}+q^{25}+2q^{28}+2q^{31}+2q^{37}+2q^{43}+3q^{49}+\cdots$

VII. Type $E_7^{(1,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_{VII}(\lambda) = \frac{(\lambda^4-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)}$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{VII}(\tau) := \frac{\eta(32\tau)^2\eta(16\tau)}{\eta(8\tau)}$
$= q^3+q^{11}+q^{19}+2q^{27}+q^{43}+2q^{51}+q^{59}+q^{67}+q^{75}+q^{83}+q^{99}+q^{107}+2q^{123}\cdots$

VIII. Type $E_8^{(1,1)}$
i) characteristic function: $\varphi_{VII}(\lambda) = \frac{(\lambda^6-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)}$
ii) elliptic eta-product: $\eta_{VIII}(\tau) := \frac{\eta(72\tau)\eta(36\tau)\eta(24\tau)}{\eta(12\tau)}$
$= q^5+q^{17}+q^{29}+q^{41}+q^{53}+q^{65}+q^{89}+q^{101}+q^{113}+q^{125}+q^{137}+q^{149}\cdots$

13. 主定理 （楕円的 L 関数の Artin L 関数表示）
主定理を述べる。まず 記号の復習をしておく。
与えられた $P \in \{I, II, III, \cdots, VIII\}$ に対して 以下の記号を思い出す：
$\eta_P(\tau)$：= 前節 **12.** でリストした 八種類の整巾楕円的エータ積 27）。
$L_P(s)$：= 対応する Dirichlet 級数 28）。
$\nu_P :=$ P に対応する特性多項式 φ_P の dual rank 19）。
$\varepsilon_P :=$ P に対応する Dirichlet character 22)。
$m := m_\varphi := 20$) で与えた正の整数. 27）で normalization に用いた。
$m^* := 20$）で与えた正の整数。
$N_P := 21$) で与えた正の整数。η_P のレベルを与えている。
また正の整数 m にたいし 1 の原始根を $\zeta_m = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ とおく。

主定理. **1.** 各 P に対して円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ の或るクンマー拡大

31) $$E_P := \mathbb{Q}(\zeta_m, x^{1/m^*})$$

が存在して Dirichlet 級数 $L_P(s)$ は以下の三つの場合のいずれかになる。

a) ガロア表現 $\rho : Gal(E_P, \mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が存在して

32) $$L_P(s) = L(s, \rho).$$

b) ガロア表現 $\rho^{(+)}, \rho^{(-)} : Gal(E_P, \mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が存在して

33) $$L_P(s) = \frac{1}{4}(L(s, \rho^{(+)}) - L(s, \rho^{(-)})).$$

c) ガロア表現 $\rho : Gal(E_P, \mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}\sqrt{-1})$ が存在して

34) $$L_P(s) = \frac{1}{4\sqrt{-1}}(L(s, \rho) - L(s, \overline{\rho}).$$

いずれの場合も $\det(\rho) = \varepsilon_P$, $\varepsilon_P(-1) = -1$ かつ conductor は N_P となる。
又、N_P の約数になる素数 (bad prime) に対するオイラー因子は 1 となる。

2. 表現 ρ が可約となる ($\Leftrightarrow$ $\rho^{(+)}$ が可約となる $\Leftrightarrow$ $\rho^{(-)}$ が可約となる)

$\Leftrightarrow E_P = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ 即ちクンマー拡大が自明

$\Leftrightarrow m^* = 1$ 20) 参照

$\Leftrightarrow \nu_P = 0$ ($\Leftrightarrow \eta_P$ is not a cusp form)

$\Leftrightarrow$ 楕円ルート系は $D_4^{(1,1)}, E_6^{(1,1)}, E_7^{(1,1)}$ 又は $E_8^{(1,1)}$ のいずれか。

3. **2.** の時 **1.** の a) 又は b) しか起きず、各々 表現は次のように分解する。

a) $\rho = 1 \oplus \varepsilon_P$

b) $\rho^{(+)} = 1 \oplus \varepsilon_P, \quad \rho^{(-)} = \chi_P \oplus \chi_P^{-1}\varepsilon_P$ for $\exists \chi_P : (\mathbb{Z}/m)^\times \to \{\pm 1\}$。

注意。**1.** のクンマー拡大を定めるデータ x は **15.** で個別に与える。h, m, m^*, μ, ν 等の具体的な値は **9.** 表 2. にある。ウエイトは全て $a_0 = 1$ である。

14. 証明の方針.

主定理は八つの P の個別に計算をおこなうことにより証明される。本節ではその一般的方針をのべ次節でその計算結果を述べることにする。

1. の証明

a) η_P のレベル N_P 及び キャラクタ ε_P は前回の公式 21), 22) を使って計算しておく。特に $\varepsilon_P(-1) = -1$ であることに注意する。

b) η_P を Fourier 展開して 1 万項位求める。それから特に 乗法性 29) を持つと思われる素数のリストを作る。

$c)$ $b)$ の data を元にして、定理 1。の a), b) 又は c) の右辺の項の候補となる Euler 積 $L(s), L^+(s)$、$L^-(s)$ 等を 対応する Dirichlet 係数が充分高いところまで一致する様に推測する (この時点では $L(s)$ 等はまだ形式的なオイラー積)。

$d)$ $c)$ で推測した $L(s), L^+(s), L^-(s)$ 等が或る odd な Galois 表現に対応する Artin L-函数 ([M]) である事を示す。即ち ガロア体 E_P 及びその二次元表現 ρ, ρ^+, ρ^- 等を推測しその L 関数が $c)$ で推測した オイラー積と一致することを確認することを意味する。これにより初めて $L(s)$ は s の関数となる (up to Artin conjecture)。

$e)$ $L(s), L^+(s), L^-(s)$ の Mellin 逆変換して定まる Fourier 級数 f, f^+, f^- は η_P と同じレベル、キャラクタの保型形式である事を check する。これは 直ぐ下で説明する Hecke、Weil, Langlands, Deligne-Serre 等により確立された理論による (下記の **4.** 参照)。

$f)$ 同じレベル、キャラクタの保型形式は有限次元ヴェクトル空間. η_P と $f, \frac{1}{4}(f^+ - f^-)$ 又は $\frac{1}{4\sqrt{-1}}(f^+ - f^-)$ 等とは Fourier 係数が充分高い次数 $(N_P/12\prod_{p|N_P}(1+p^{-1}))$ まで一致しているので等しい ([O] 参照)。

このうち c) と d) は推測を含む為 話が飛躍して 最もハードかつ説明しにくい部分であるが また最も楽しい部分でもある。

2. の証明

最後三つの命題の同値関係は本稿では **9.** 表 2 。の分類結果から明らかであるが元来は分類によらず証明される (略 [Sa1,V])。また $m^* = 1$ なら自明なクンマー拡大になることは 31) より言える。するとガロア群がアーベル群なので 2 次元表現は完全可約となる。また、2 次元表現 ρ が可約だと 1 次元表現の直和 $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$ でかつ $\chi_1 \cdot \chi_2 = \varepsilon_P$ となるものに分解する。従って、対応する L-函数も $L(s, \rho) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)$ と Dirichlet L-函数の積に分解する。残るは「楕円 L 函数 L_P が Dirichlet L-函数の二次式に分解するならば $\nu_P = 0$ となる」を示すことで、その証明は 定理 1。の個別の計算結果 (次節 **15.** 参照) を用いる。

3. の証明。定理 1。で行なった個別の計算結果 (次節 **15.** 参照) を用いる。

4. 上記 1. の証明 e) で用いる定理。

ここで釈迦に説法ではあるが 使う結果の最低限の説明を付けておく。

Hecke [He,22-36] に始まり Weil [W], Langlands, Deligne-Serre [D-S],[Se] 等により確立された理論により Mellin 変換: $\sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$ は以下に **1.** 及び **2.** で述べる 1:1 対応を引き起こす。

1. normalize された (即ち $c(1)=1$)、ウェイト 1、レベル N、odd character ε (即ち $\varepsilon(-1)=-1$) となる new form $f(\tau)$ ([O] 参照) の集合と conductor N となる有理数体上の有限次拡大のガロア群の二次元表現 ρ であって $\varepsilon=\det(\rho)$ となる (特に $\det(\rho(\text{complex conj.}))=\varepsilon(-1)=-1$, $\det(\rho(p\text{th Frobenius action}))=\varepsilon(p)$ となる) ものにより定まる Artin L 関数

$$L(s,\rho)=\prod_p \det(1_2-p^{-s}\rho(\sigma_p))^{-1}=\prod_p(1-tr(\sigma_p)p^{-s}+\varepsilon(p)p^{-2s})^{-1}$$

([M] 参照) のなす集合との間に 1:1 の対応がある。

注。 一般に f が任意のウェイト a_0 の normalized new form でも Mellin 変換の 行き先はオイラー積分解

$$L_f(s)=\prod_{p\nmid N}(1-c(p)p^{-s}+\varepsilon(p)p^{a_0-1-2s})^{-1}\times\prod_{p|N}(1-c(p)p^{-s})^{-1}$$

をもち、$L_f(s)$ は関数等式を満す. しかしウェイト $a_0=1$ の時には 更に強く Delinge-Serre の結果により その様な Artin L 関数はある normalized new form に由来することを主張している。

2. 更に ここで new form のかわりに 適当に normalize されたウェイト 1 の原始 Eisenstein 級数の集合をとると 二次元の可約なガロア表現 (により定まる 分解する Artin L 関数) の集合と 1:1 の対応が付く [He,36].

私はこの理論は全くの門外漢で [Se] で必要知識を勉強したのみなので詳しくはその出典に当って頂きたい。ただ Delinge-Serre の定理 [D-S] はカスプ形式と既約ガロア表現の対応関係を言っており (その結果も 今回使わないわけではないが)、今回の場合むしろ Eisenstein 級数と可約ガロア表現の対応関係の方に興味があり、その場合は Hecke [He,36] に基ずく。(現代の高度に洗練された数学に比べて 数学の実体が目の当たりに見える Hecke の素朴なアプローチ ([He,22-36]) に引かれるものを感じる。次節 15. の 最初の例 η_I は 既に Hecke [22] に計算が載っている)。

15. 計算結果。

本節では八つの楕円的エータ積 η_P にたいし 前節の方針のもとに計算した結果を述べる。既に述べた通りコンピュータによるデータをもとに推測を行ない逆算してその推測が正しかったことを確認するという 途中のプロセスは (一番面白くはあるが) ここでは割愛する。以下 各 エータ積 η_P ($P\in\{I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII\}$) に対し, 次のデータ :

iii) Level N_P, Dirichlet character ε_P,

iv) Dirichlet series $L_P(s)$ の Artin L 関数 (の差による) 表示

及び 各々の項の オイラー積分解、

v) iv) を与える 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ とそのクンマー拡大体 E_P、

vi) iv) の Artin L 関数を与える ガロア群 $Gal(E_P, \mathbb{Q})$ の二次元表現 ρ を与える。L 関数の表示の仕方など多少標準的なものと異なるかも知れない。それも **16.** における非負性の証明の都合上と言うことでご容赦願う。

I. Types: $B_2^{(2,1)},\ C_2^{(1,2)},\ BC_2^{(2,2)}(1),\ G_2^{(1,1)},\ G_2^{(3,3)},\ F_4^{(1,1)},\ F_4^{(2,2)}$

この場合は [H 22,23, pp425,426,448], [Se, pp242,243,244] に既にある.

iii) Level and character: $N_{\mathrm{I}} = 144$.

$\varepsilon_{\mathrm{I}}(d) = \varepsilon_{\mathrm{I}}^*(d) = \left(\frac{-1}{d}\right),\ \ \varepsilon_{\mathrm{I}}(1) = \varepsilon_{\mathrm{I}}(5) = 1,\ \ \varepsilon_{\mathrm{I}}(7) = \varepsilon_{\mathrm{I}}(11) = -1.$

iv) Dirichlet series

$$L_{\mathrm{I}}(s) \quad = \quad L(s, \rho)$$
$$= \prod_{\substack{p\equiv 1(12)\\ 12\equiv \exists x^4(p)}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\equiv 1(12)\\ 12\not\equiv \forall x^4(p)}} \frac{1}{(1+p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 5(12)} \frac{1}{1+p^{-2s}} \prod_{p\equiv 7 or 11(12)} \frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{\mathrm{I}} := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{12}) = \mathbf{Q}(\zeta_{12}, \sqrt[4]{12})$$
$$\supset E^{ab} = \mathbf{Q}(\zeta_{12}), \text{where } \zeta_{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{-1})/2.$$

$$Gal(E_{\mathrm{I}}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_{1B}, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_{11} \mid \sigma_{1B}^2 = \sigma_7^2 = \sigma_{11}^2 = (\sigma_5\sigma_7)^2 = (\sigma_5\sigma_{11})^2 = 1,$$
$$\sigma_5^2 = (\sigma_7\sigma_{11})^2 = \sigma_{1B} \in center, \quad \sigma_5\sigma_7\sigma_{11} \in \langle \sigma_{1B} \rangle \rangle,$$

ここで σ_{1B} 素数たち $B := \{p \in \mathbf{Z_{>0}} \mid \text{prime number } p \equiv 1\ (12) \text{ and } \forall x^4 \not\equiv 12\ \ (p)\} = \{13, 73, 97, 109, 181, 229, 241, 277, 339,\ 409, 421, 457, 541, \cdots\}$ に対するフロベニウス作用を表す. アベル化は

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow Gal(E_{\mathrm{I}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times \longrightarrow 1,$$

となり、その核 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は σ_{1B} で生成される。

vi) Representation

$Gal(E_{\mathrm{I}}/\mathbf{Q})$ の線形表現 ρ は

$$\rho(\sigma_{1B}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(\sigma_5) = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\rho(\sigma_7) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(\sigma_{11}) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II. Types $A_1^{(1,1)*}$, $BC_1^{(2,1)}$, $BC_1^{(2,4)}$, $F_4^{(1,2)}$, $F_4^{(2,1)}$

iii) Level and character: $N_{\mathrm{II}} = 128$

$\varepsilon_{\mathrm{II}}(d) = \varepsilon_{\mathrm{II}}^*(d) = \left(\frac{-2}{d}\right)$, $\varepsilon_{\mathrm{II}}(1) = \varepsilon_{\mathrm{II}}(3) = 1$, $\varepsilon_{\mathrm{II}}(5) = \varepsilon_{\mathrm{II}}(7) = -1$.

iv) Dirichlet series

$$L_{\mathrm{II}}(s) = L(s, \rho)$$
$$= \prod_{\substack{p\equiv 1(8) \\ -4\equiv \exists x^8 (p)}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\equiv 1(8) \\ -4\not\equiv \forall x^8 (p)}} \frac{1}{(1+p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 3(8)} \frac{1}{1+p^{-2s}} \prod_{p\equiv 5 or 7(8)} \frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{\mathrm{II}} := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[8]{-4}) = \mathbf{Q}(\zeta_8, \sqrt[8]{-4})$$
$$\supset E_{\mathrm{II}}^{ab} = \mathbf{Q}(\zeta_8) \text{ where } \zeta_8 = (\sqrt{2} + \sqrt{-2})/2).$$

$$Gal(E_{\mathrm{II}}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_{1B}, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7 \mid \sigma_{1B}^2 = \sigma_5^2 = \sigma_7^2 = (\sigma_3\sigma_5)^2 = (\sigma_3\sigma_7)^2 = 1,$$
$$\sigma_3^2 = (\sigma_5\sigma_7)^2 = \sigma_{1B} \in center, \sigma_3\sigma_5\sigma_7 \in \langle \sigma_{1B} \rangle \rangle,$$

ここで σ_{1B} 素数たち $B := \{p \in \mathbf{Z_{>0}} \mid \text{prime number } p \equiv 1\ (8) \text{ and } \forall x^8 \not\equiv -4\ (p)\} = \{17, 73, 89, 97, 193, 233, 241, 281, 369, \cdots\}$ に対するフロベニウス作用を表す. アベル化は

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow Gal(E_{\mathrm{II}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \longrightarrow 1,$$

で与えられ、その核 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は σ_{1B} で生成される。

vi) Representation

$Gal(E_{\mathrm{II}}/\mathbf{Q})$ の線形表現 ρ は

$$\rho(\sigma_{1B}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_3) = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\rho(\sigma_5) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_7) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。符号 $\pm$ は独立かつ自由である。

III. Types $B_3^{(1,1)}$, $C_3^{(2,2)}$

iii) Level and character: $N_{\mathrm{III}} = 1152$,
$\varepsilon_{\mathrm{III}}(d) = \varepsilon^*_{\mathrm{III}}(d) = \left(\frac{-2}{d}\right)$, $\varepsilon_{\mathrm{III}}(1) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(11) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(17) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(19) = 1$,
$\varepsilon_{\mathrm{III}}(5) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(7) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(13) = \varepsilon_{\mathrm{III}}(23) = -1$.

iv) Dirichlet series

$$L_{\mathrm{III}}(s) = \frac{\sqrt{-1}}{4}\left(L(s,\rho^{(+)}) - L(s,\rho^{(-)})\right)$$

但しここで 各々 $\chi \in \{\pm\}$ に対し 次のように置く：

$$\begin{aligned} L(s,\rho^{(\chi)}) = & \prod_{\substack{p\equiv 1(24)\\ a\equiv\exists x^2(p)}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\equiv 1(24)\\ a\not\equiv\forall x^2(p)}} \frac{1}{(1+p^{-s})^2} \\ & \times \prod_{\substack{p\equiv 5(24)\\ U}} \frac{1}{(1-\chi\sqrt{-1}p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\equiv 5(24)\\ V}} \frac{1}{(1+\chi\sqrt{-1}p^{-s})^2} \\ & \times \prod_{p\equiv 7,13,23(24)} \frac{1}{1-p^{-2s}} \prod_{p\equiv 11,17 or 19(24)} \frac{1}{1+p^{-2s}}. \end{aligned}$$

v) Kummer extension and Galois group

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{III}} :&= \mathbf{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt[2]{a}) = \mathbf{Q}(\zeta_{24},\sqrt[2]{a}) \\ &\supset E^{ab}_{\mathrm{III}} = \mathbf{Q}(\zeta_{24}),\ \text{where } \zeta_{24} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{-3}-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Gal(E_{\mathrm{III}}/\mathbf{Q}) = \langle & \sigma_{1B},\sigma_{5U},\sigma_{5V},\sigma_7,\sigma_{11},\sigma_{13},\sigma_{17},\sigma_{19},\sigma_{23} \mid \sigma_{5U} = \sigma_{5V}^{-1} \in center, \\ & \sigma_{1B}^2 = \sigma_7^2 = \sigma_{13}^2 = \sigma_{23}^2 = 1, \quad \sigma_{5U}^2 = \sigma_{5V}^2 = \sigma_{1B} \\ & \sigma_7\sigma_{5U} = \sigma_{11},\ \sigma_{13}\sigma_{5U} = \sigma_{17},\ \sigma_{23}\sigma_{5U} = \sigma_{19}, \sigma_7\sigma_{13}\sigma_{23} = \sigma_{5U}^{\pm 1}\rangle, \end{aligned}$$

ここで σ_{1B}、σ_{5U} 及び σ_{5V} は各々 素数たち $B := \{p \in \mathbf{Z_{>0}} \mid \text{prime number } p \equiv 1\ (24) \text{ and } \forall x^2 \not\equiv a\ (p)\} = \{193, 337, 409, 433, 457, 601, 673, 769, 937, 1129, 1153, 1249, 1297, \cdots\}$、$U := \{p \in \mathbf{Z_{>0}} \mid \text{prime number } p \equiv 5\ (24) \text{ and } (*)\} = \{5, 29, 149, 269, 317, 389, 509, 677, 701, 1013, 1061, 1109, 1277, 1201, 1493, 1613, 1733, \cdots\}$ 及び $V := \{p \in \mathbf{Z_{>0}} \mid \text{prime number } p \equiv 5\ (24) \text{ and } (*)\} = \{53, 101, 173, 197, 293, 461, 557, 653, 773, 797, 821, 941, 1181, 1229, 1373,\ 1637, 1709, 1949, 1973, \cdots\}$ に対するフロベニウス作用を表す. この場合の 拡大体 E_{III} を定める整数 a 及び平方剰余の条件 $(*)$ は具体的には知られていない。アベル化は

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow Gal(E_{\mathrm{III}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow (\mathbf{Z}/24\mathbf{Z})^{\times} \longrightarrow 1,$$

で与えられ、その核 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は σ_{1B} で生成される。

vi) Representations:

$Gal(E_{\mathrm{III}}/\mathbf{Q})$ の表現 $\rho^{(\pm)}$ は互いに複素共役で、各 $\chi \in \{\pm\}$ にたいし

$$\rho^{(\chi)}(\sigma_{1B}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \rho^{(\chi)}(\sigma_{5U}) = -\rho^{(\chi)}(\sigma_{5V}) = \chi\cdot\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho^{(\chi)}(\sigma_7) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \rho^{(\chi)}(\sigma_{11}) = \pm\chi\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho^{(\chi)}(\sigma_{13}) = \pm\chi\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho^{(\chi)}(\sigma_{17}) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho^{(\chi)}(\sigma_{19}) = \pm\chi\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho^{(\chi)}(\sigma_{23}) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV. Types: $D_4^{(1,1)}$

iii) Level and character: $N_{IV} = 8$,

$\varepsilon_{IV}(d) = \varepsilon_{IV}^*(d) = \left(\frac{-1}{d}\right),\quad \varepsilon_{IV}(1) = 1,\ \ \varepsilon_{IV}(3) = -1.$

iv) Dirichlet series

$$L_{IV}(s) = L(s,1)L(s,\varepsilon_{IV}),$$

但しここで各々 $\varepsilon \in \{1, \varepsilon_{IV}\}$ にたいし次の様に置く：

$$L(s,\varepsilon) = \prod_{p\equiv 1(4)} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\equiv 3(4)} \frac{1}{1-\varepsilon(p)p^{-s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{IV} = E_{IV}^{ab} := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(\zeta_4),\ \text{where } \zeta_4 = \sqrt{-1}.$$

$$\mathrm{Gal}(E_{IV}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_3 \mid \sigma_3^2 = 1\rangle = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$$

vi) Representation

$$\rho = 1 \oplus \varepsilon_{IV}.$$

ここで 1 及び ε_{IV} は各々$(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ の自明及び非自明のキャラクタを表す。

V. Types: $G_2^{(1,3)}$, $G_2^{(3,1)}$

iii) Level and character: $N_V = 108$,

$\varepsilon_V(d) = \varepsilon_V^*(d) = \left(\frac{-3}{d}\right)$, $\varepsilon_V(1) = 1$, $\varepsilon_V(5) = -1$.

iv) Dirichlet series

$$L_V(s) = L(s,\rho) = \prod_{\substack{p\equiv 1(6)\\ 2\equiv \exists x^3(p)}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\equiv 1(6)\\ 2\not\equiv \forall x^3(p)}} \frac{1}{1+p^{-s}+p^{-2s}} \prod_{p\equiv 5(6)} \frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_V := \mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2}) = \mathbf{Q}(\zeta_6, \sqrt[3]{2})$$
$$\supset E_V^{ab} = \mathbf{Q}(\zeta_6), \text{ where } \zeta_6 = (1+\sqrt{-3})/2.$$
$$\mathrm{Gal}(E_V/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_{1B}, \sigma_5 \mid \sigma_{1B}^3 = \sigma_5^2 = (\sigma_{1B}\sigma_5)^2 = 1 \rangle,$$

ここで σ_{1B} 素数たち $B = \{p \in \mathbf{Z}_{>\mathbf{0}} \mid \text{prime number } p \equiv 1\ (6) \text{ and } \forall x^3 \not\equiv 2\ (p)\} = \{7, 13, 19, 37, 61, 67, 73, 79, 97, \cdots\}$ に対するフロベニウス作用を表す. アベル化は

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{Gal}(E_V/\mathbf{Q}) \longrightarrow (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^\times \longrightarrow 1,$$

で与えられ、その核 $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ は σ_{1B} で生成される。

vi) Representation

$\rho : \mathrm{Gal}(E_V/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2$

$$\rho(\sigma_{1B}) = \begin{pmatrix} -1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Type $E_6^{(1,1)}$

iii) Level and character: $N_{VI} = 9$,

$\varepsilon_{VI}(d) = \varepsilon_{VI}^*(d) = \left(\frac{-3}{d}\right)$, $\varepsilon_{VI}(1) = 1$, $\varepsilon_{VI}(2) = -1$.

iv) Dirichlet series

$$L_{VI}(s) = L(s,1)L(s,\varepsilon_V)、$$

但しここで各々 $\varepsilon \in \{1, \varepsilon_V\}$ にたいし次の様に置く：

$$L(s,\varepsilon) = \prod_{p\equiv 1(3)} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\equiv 2(3)} \frac{1}{1-\varepsilon(p)p^{-s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{VI} = E_{VI}^{ab} := \mathbf{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbf{Q}(\zeta_3), \text{ where } \zeta_3 = (-1+\sqrt{-3})/2.$$
$$\mathrm{Gal}(E_{VI}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_2 \mid \sigma_2^2 = 1 \rangle = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times$$

vi) Representation

$$\rho = 1 \oplus \varepsilon_{VI}.$$

ここで 1 及び ε_{VI} は各々$(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times$ の自明及び非自明のキャラクタを表す。

VII. Type $E_7^{(1,1)}$

iii) Level and character: $N_{VII} = 32$,
$\varepsilon_{VII}(d) = \varepsilon_{VII}^*(d) = (\frac{-2}{d})$,
$\varepsilon_{VII}(1) = \varepsilon_{VII}(3) = 1, \quad \varepsilon_{VII}(5) = \varepsilon_{VII}(7) = -1.$

iv) Dirichlet series

$$L_{VII}(s) = \frac{1}{4}(L(s,1)L(s,\varepsilon_{VII}) - L(s,\chi_{VII})L(s,\varepsilon_{VII}\chi_{VII}^{-1})),$$

但しここで $L(s,1) = L_{++}(s), L(s,\varepsilon_{VII}) = L_{-+}(s), L(s,\chi_{VII}) = L_{+-}(s)$ 及び $L(s,\varepsilon_{VII}\chi_{VII}^{-1}) = L_{--}(s)$ と置き、各々$\varepsilon, \chi \in \{\pm 1\}$ に対し 次のように置く：

$$L_{\varepsilon\chi}(s) = \prod_{p\equiv 1(8)} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\equiv 3(8)} \frac{1}{1-\chi p^{-s}} \prod_{p\equiv 5(8)} \frac{1}{1-\varepsilon p^{-s}} \prod_{p\equiv 7(8)} \frac{1}{1-\varepsilon\chi p^{-s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{VII} = E_{VII}^{ab} := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2}) = \mathbf{Q}(\zeta_8), \text{ where } \zeta_8 = (\sqrt{2}+\sqrt{-2})/2.$$
$$\mathrm{Gal}(E_{VII}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7 | \sigma_i^2 = (\sigma_{\sigma_i}\sigma_j)^2 = \sigma_3\sigma_5\sigma_7 = 1 \rangle = (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$$

vi) Representations

$$\rho^{(+)} = 1 \oplus \varepsilon_{VII}, \qquad \rho^{(-)} = \chi_{VII} \oplus \varepsilon_{VII}\cdot\chi_{VII}^{-1}.$$

但し ε_{VII}, χ_{VII} 及び $\varepsilon_{VII}\cdot\chi_{VII}^{-1}$ は各々 二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}), \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ 及び $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ に対するガロア群 $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_3\rangle, (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_5\rangle = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ 及び $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_7\rangle$ 上定義された非自明なキャラクタたちである。

VIII. Type $E_8^{(1,1)}$

iii) Level and character: $N_{VIII} = 72$,
$\varepsilon_{VIII}(d) = \varepsilon^*_{VIII}(d) = (\frac{-1}{d})$,
$\varepsilon_{VIII}(1) = \varepsilon_{VIII}(5) = 1, \quad \varepsilon_{VIII}(7) = \varepsilon_{VIII}(11) = -1.$

iv) Dirichlet series

$$L_{VIII}(s) = \frac{1}{4}(L(s,1)L(s,\varepsilon_{VIII}) - L(s,\chi)L(s,\varepsilon\chi^{-1})),$$

但しここで $L(s,1) = L_{++}(s), L(s,\varepsilon_{VIII}) = L_{+-}(s), L(s,\chi_{VIII}) = L_{+-}(s)$、$L(s,\varepsilon_{VIII}\chi_{VIII}^{-1}) = L_{--}(s)$ と置き、各々 $\varepsilon, \chi \in \{\pm 1\}$ に対し次のように置く:

$$L_{\varepsilon\chi}(s) = \prod_{p\equiv 1(12)} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{p\equiv 5(12)} \frac{1}{1-\chi p^{-s}} \prod_{p\equiv 7(12)} \frac{1}{1-\varepsilon p^{-s}} \prod_{p\equiv 11(12)} \frac{1}{1-\varepsilon\chi p^{-s}}.$$

v) Kummer extension and Galois group

$$E_{VIII} = E_{VIII}^{ab} := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-3}) = \mathbf{Q}(\zeta_{12}), \text{ where } \zeta_{12} = (\sqrt{3} + \sqrt{-1})/2.$$
$$\mathrm{Gal}(E_{VIII}/\mathbf{Q}) = \langle \sigma_5, \sigma_7, \sigma_{11} | \sigma_i^2 = (\sigma_i\sigma_j)^2 = \sigma_5\sigma_7\sigma_{11} = 1 \rangle = (\mathbf{Z}/12Z)^\times$$

vi) Representations

$$\rho^{(+)} = 1 \oplus \varepsilon_{VIII}, \qquad \rho^{(-)} = \chi_{VIII} \oplus \varepsilon_{VIII} \cdot \chi_{VIII}^{-1}.$$

ここで ε_{VII}, χ_{VIII} 及び $\varepsilon_{VIII} \cdot \chi_{VIII}^{-1}$ は各々 二次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}), \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ 及び $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ のガロア群 $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_5\rangle = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times, (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_7\rangle$ $= (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\times$ 及び $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times/\langle\sigma_{11}\rangle$ 上の非自明なキャラクタである。

16. Dirichlet 係数の 非負性の証明。

いよいよ本稿の主テーマである $L_P(s)$ の Dirichlet 係数の非負性の証明を与える。それは **12.** の主定理 3。で述べた L 関数の分解から あっけなく達成する。主定理 3。に於ける L_P の分解の仕方 a),b) に応じて証明する。

まず character ε_P 及び χ_P (但し a) の場合には $\chi_P = 1$ と思う) に応じて有理素数を四っつのグループに分けておく。

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \{p \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{prime s.t. } p \not| m^{red} \text{ and } \varepsilon_P(p) = 1, \quad \chi_P(p) = 1\} \\
P_\varepsilon &:= \{p \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{prime s.t. } p \not| m^{red} \text{ and } \varepsilon_P(p) = -1, \quad \chi_P(p) = 1\} \\
P_\chi &:= \{p \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{prime s.t. } p \not| m^{red} \text{ and } \varepsilon_P(p) = 1, \quad \chi_P(p) = -1\} \\
P_{\varepsilon\chi} &:= \{p \in \mathbf{Z}_{>0} \mid \text{prime s.t. } p \not| m^{red} \text{ and } \varepsilon_P(p) = -1, \quad \chi_P(p) = -1\}.
\end{aligned}$$

Case a)　楕円 L 関数は次のように分解する。

$$\begin{aligned}L_P(s) &= L(s,1_P)L(s,\varepsilon_P)\\ &= \Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)\Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1+p^{-s}}\Big)\\ &= \prod_{p\in P_1}\frac{1}{(1-p^{-s})^2}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1-p^{-2s}}.\end{aligned}$$

その各因子は次のように展開出来 $\frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$, $\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$ その各項の係数は明らかに正である。

Case b)　楕円 L 関数は次のように分解する。

$$\begin{aligned}L_P(s) &= \frac{1}{4}\Big\{L(s,1_P)L(s,\varepsilon_P)-L(s,\chi_P)L(s,\chi_P^{-1}\varepsilon_P)\Big\}\\ &= \frac{1}{4}\Big\{\Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_{\varepsilon\chi}}\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)\\ &\qquad\times\Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1+p^{-s}}\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_{\varepsilon\chi}}\frac{1}{1+p^{-s}}\Big)\\ &\qquad-\Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{1+p^{-s}}\prod_{p\in P_{\varepsilon\chi}}\frac{1}{1+p^{-s}}\Big)\\ &\qquad\times\Big(\prod_{p\in P_1}\frac{1}{1-p^{-s}}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1+p^{-s}}\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{1+p^{-s}}\prod_{p\in P_{\varepsilon\chi}}\frac{1}{1-p^{-s}}\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{4}\prod_{p\in P_1}\frac{1}{(1-p^{-s})^2}\prod_{p\in P_\varepsilon}\frac{1}{1-p^{-2s}}\prod_{p\in P_{\varepsilon\chi}}\frac{1}{1-p^{-2s}}\\ &\qquad\times\Big\{\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{(1-p^{-s})^2}-\prod_{p\in P_\chi}\frac{1}{(1+p^{-s})^2}\Big\}.\end{aligned}$$

その最初の因子は a) と同様に展開出来る。オイラー積の差になる因子は

$$\prod_i\frac{1}{(1-t_i)^2}\ -\ \prod_i\frac{1}{(1+t_i)^2}=\sum_{n_i=0}^{\infty}(1+(-1)^{\sum_i(n_i+1)})\prod_i(n_i+1)\prod_i t_i^{n_i}$$

と展開出来, その各項の係数は明らかに正である。　　非負性の証明終り。

楕円的エータ積の Fourier 係数=Dirichlet 係数の明示公式も各タイプに応じて 簡単に書き下せるが 当座必要ないので省略する。

17. 付録 I。楕円ルート系とその特性多項式

以下に **9. 表 2。** で与えた楕円ルート系とその特性多項式のリストを導く必要最小限のせつめいを行なう (楕円ルート系に関する詳細は [Sa1])。

公理 F を $\mathbb{R}$ 上 $l+2$ 次元ベクトル空間、$I : F \times F \to \mathbb{R}$ を符号は $(l, 2, 0)$ の正半定内積とする。F の部分集合 R で次の公理系 $1) \sim 4)$ を満すものを楕円ルート系と呼ぶ (下記の 注 4。参照)。

$1)$ R で生成される加群 $Q(R)$ は F の lattice (i.e. $Q(R) \otimes \mathbb{R} \simeq F$).

$2)$ $^\forall\alpha, \beta \in R$ に対し、$\frac{2I(\alpha,\beta)}{I(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$

$3)$ $^\forall\alpha \in R$ に対し、α に関する鏡映変換 w_α は R を保存

$4)$ $R = R_1 \cup R_2$ かつ $R_1 \perp R_2 \Rightarrow R_1 = \phi$ or $R_2 = \phi$

公理 $1)$ により F は $\mathbb{Q}$ 上定義されている。I の radical (2 次元) に含まれる $\mathbb{Q}$ 上定義された一次元部分空間 G を R の marking という。

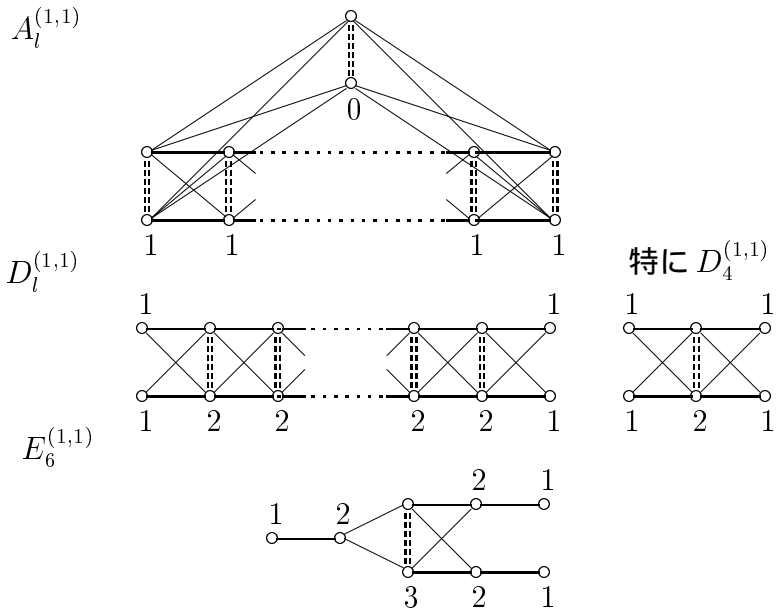
分類 Marking 付きの楕円ルート系 (R, G) は楕円的ディンキン図式 $\Gamma(R, G)$ により分類される。即ち $\Gamma(R, G)$ の頂点集合は R の或る有限部分集合であって (構成法 略)、頂点の間に次のルールで辺を入れたものである。

$\overset{\alpha}{\circ}\ \overset{\beta}{\circ}$ if $I(\alpha, \beta) = 0$

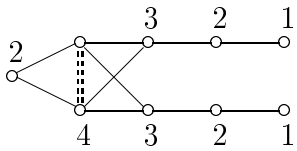
$\circ\!\!-\!\!\circ$ if $I(\alpha, \beta^\vee) = I(\alpha^\vee, \beta) = -1$

$\circ\!\!\cdots\!\!\circ$ if $I(\alpha, \beta^\vee) = (\alpha^\vee, \beta) = 2$

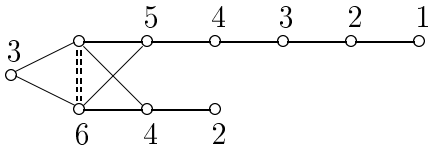
以下に楕円的ディンキン図式の中で simply laced なものを描く (他にも二重せん、三重せんを含む B 型、 C 型、 F 型、G 型等があるが略す)。



$E_7^{(1,1)}$



$E_8^{(1,1)}$



注。 1。ここで頂点 α の横に付した数 m_α が exponent と呼ばれる。特にその最大なものが Coxeter 数 $m_{(R,G)}$ である (表 2. では h と記した)。

2。 最大 exponent を持つ頂点 α が $\circ = = = \circ$ なる辺で別の頂点 β につながっていたとすると定義により $\alpha - \beta \in rad(I)$ であるが、更に $\alpha - \beta$ は marking G を生成する。

3。$\circ = = = \circ$ なる辺でつながる頂点を一点につぶすと上掲の楕円的ディンキン図式は通常よく知られているアフィンディンキン図式となる。

4。この様なルート系を楕円ルート系と呼ぶ理由は、それが楕円曲線の幾何と深く結び付いており、それに由来するからである ([Sa1] 参照)。たとえば I の radical のランクが 2 であることは (複素) 楕円曲線の lattice の rank が 2 であることに対応する。じっさい鏡映変換 w_α $(\alpha \in R)$ で生成される群 (楕円ワイル群) に関するテータ不変式を用いて楕円特異点のモジュライ空間とその上にある平坦構造 (Frobenius 多様体とも呼ばれる) が構成される (齋藤、佐竹)。

Coxeter 変換 と その特性多項式 図式 $\Gamma(R,G)$ の各頂点 α に対応する鏡映変換 w_α 全体の積 $Cox := \prod_{\alpha\in\Gamma(R,G)} w_\alpha$ を (R,G) の Coxeter 変換と呼ぶ。それは最大 exponent に等しい有限位数を持つ。Coxeter 変換の特性多項式 $\varphi_{R,G}(\lambda) := \det(\lambda I - Cox)$ を単に (R,G) の特性多項式とも呼ぶ。特性多項式は exponent と Coxeter 数により次のように分解される。

$$\varphi_{R,G}(\lambda) = (\lambda - 1)^c \prod_{\alpha\in\Gamma(R,G)} (\lambda - \exp(2\pi m_\alpha / m_{(R,G)}))$$

ここで c : = $\circ = = = \circ$ なる辺の個数。この公式と図式 $\Gamma(R,G)$ の解析により次の 2 点が示せる。(証明略)

1) 特性多項式 $\varphi_{R,G}(\lambda)$ の dual rank $\nu_{\varphi_{R,G}}$ は非正 (≤ 0) である。

2) $\nu_{\varphi_{R,G}} = 0$ の時は自動的に $a_0 = 1$ となる。

$a_0 = 1$ (ウェイトが 1) となる楕円ルート系は 8. 表 2 にリストアップした。

18. 付録 II。計算

以下 η_{III} の計算ノートの一部を入力してもらったものであるが、読み返してみてあまり参考にはならない気がする。

Type $B_3^{(1,1)}, C_3^{(2,2)}$

$\varphi_{III} = 2^3 \cdot 1^{-1}, \varphi^*_{III} = 2 \cdot 1^{-3}.$

$\eta(2\tau)^3\eta(\tau)^{-1} = q^{\frac{5}{24}}(1 + q - q^2 - q^4 - 2q^5 + q^6 - q^7 \cdots).$

$\mu = 5,\ \nu = -1,\ m = m^* = 24,\ N = 1152,$

Character:

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(11) = \varepsilon(17) = \varepsilon(19) = 1$$
$$\varepsilon(5) = \varepsilon(7) = \varepsilon(13) = \varepsilon(23) = -1$$

Classification of prime numbers:

$a_p = 0$ for $p \equiv 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots (24)$

$$a_p = \begin{cases} +2 & p \equiv 1\ (24),\ A = 73, 97, 241, 313, 577, 1009, 1033, 1201, 1321, \ldots, 1 \\ -2 & p \equiv 1\ (24),\ B = 193, 337, 409, 433, 457, 601, 673, 769, 937, 1129, 1153, 1249, 1297 \end{cases}$$

$$-a_p^{(2)} = a_p^{(1)} = \begin{cases} 2\sqrt{-1} & p \equiv 5_{(24)} U = \{5, 29, 149, 269 \\ -2\sqrt{-1} & p \equiv 5_{(24)} V = \{53, 101, 173, 197 \end{cases}$$

L-function:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{-1}}{4}(L^{(1)} - L^{(2)}) \\ &= \prod_{\substack{p \equiv 1\ (24) \\ A}} -\frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p \equiv 1\ (24) \\ B}} -\frac{1}{(1-p^{-s})^2} \\ &\quad \frac{\sqrt{-1}}{4}\Bigg(\prod_{\substack{p \equiv 5\ (24) \\ U}} \frac{1}{(1-\sqrt{-1}p^{-s})^2} \prod_{\substack{p \equiv 5\ (24) \\ V}} -\frac{1}{(1+\sqrt{-1}p^{-s})^2} \\ &\qquad\qquad - \prod_{\substack{p \equiv 5\ (24) \\ U}} -\frac{1}{(1+\sqrt{-1}p^{-s})^2} \prod_{\substack{p \equiv 5\ (24) \\ V}} -\frac{1}{(1-\sqrt{-1}p^{-s})^2} \Bigg) \\ &\quad \prod_{p \equiv 7,13,23\ (24)} \frac{1}{1-p^{-2s}} \\ &\quad \prod_{p \equiv 11,17,19\ (24)} \frac{1}{1+p^{-2s}} \end{aligned}$$

Kummer extension:

$$
\begin{array}{ccccccc}
G^{(1)} = G^{(1)} = \overline{G^{(2)}}E = \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{-2},\sqrt{-3},\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{6},4\sqrt{b}) & & & & & & \\
\quad\downarrow \qquad\qquad \cup & & & & & & 4\text{ 次拡大} \\
G_{ab} = (\mathbb{Z}/24)^{\times} & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{-2},\sqrt{-3}) & \supset & \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{6}) \leftrightarrow (\mathbb{Z}/24)^{\times}/\langle 5\rangle & & \\
\quad\swarrow \quad\downarrow \qquad\quad \cup & & & & & & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{-2}) \leftrightarrow (\mathbb{Z}/8)^{\times}(\mathbb{Z}/200)^{\times}/ker(\varepsilon) \leftrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) & & & & b = \pm\xi & &
\end{array}
$$

$\varphi = 2^3 \cdot 1^{-1}$ の Galois 表現:

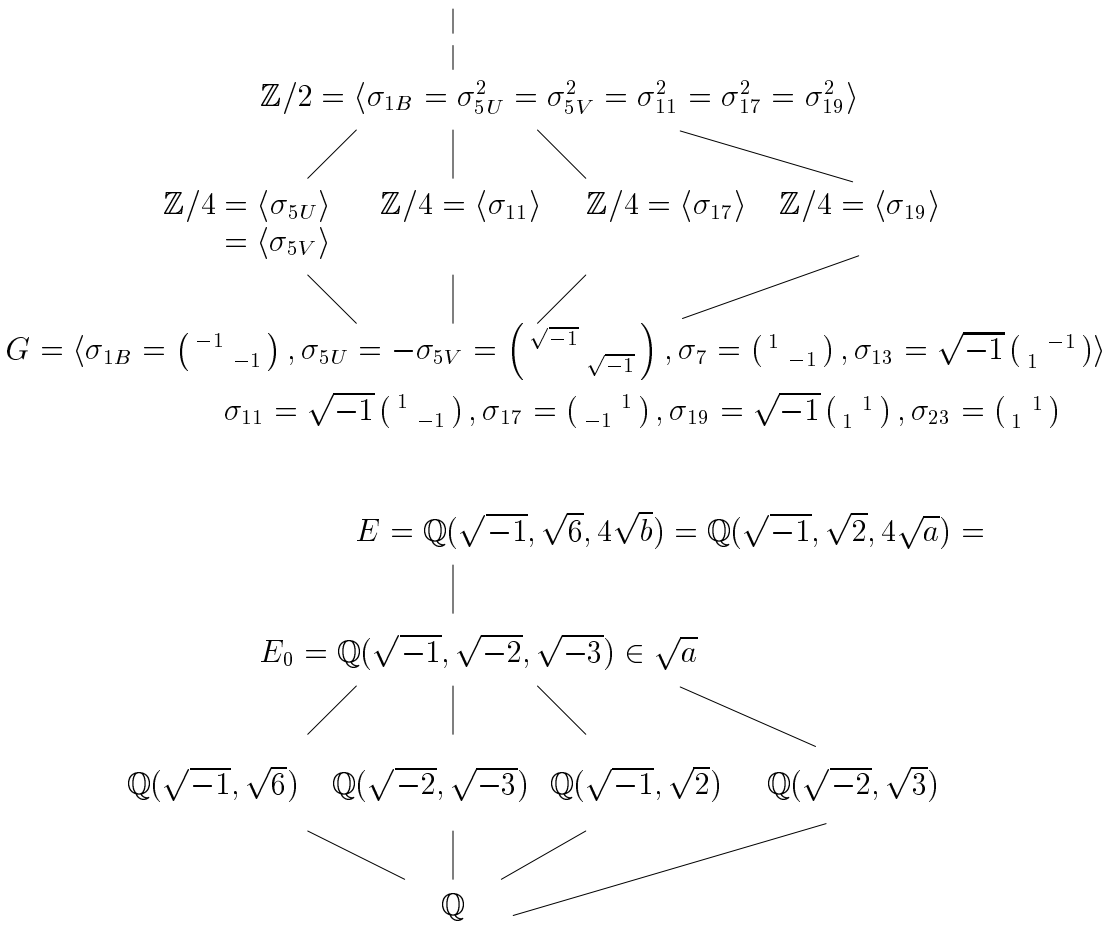
$$
\begin{array}{c}
\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\
\cup \\
0 \to \mathbb{Z}/2 \to G \to G_{ab} \simeq (\mathbb{Z}/24)^{\times} \simeq (\mathbb{Z}/2)^3 \to 0 \quad \pm \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & \\ & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
G = \Big\langle g_{1B} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, & g_{5U} = U, g_{5V} = -U, g_7 \sim g_{13} \sim g_{23} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\
& g_{11} \sim g_{17} \sim g_{19} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \sim \pm \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & \\ & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \Big\rangle
\end{aligned}
$$

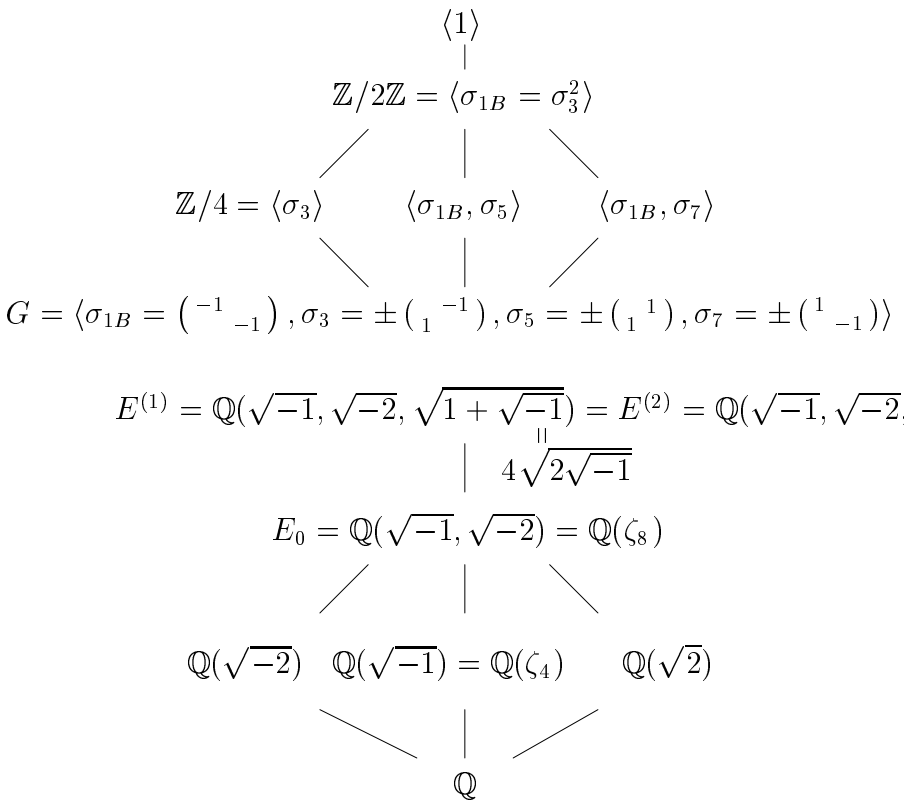
$$
\begin{array}{ll}
G \simeq \langle g_{5U}\rangle \rtimes \langle g_7 \sim g_{13} \sim g_{23}, g_{11} \sim g_{17} \sim g_{19}\rangle & \\
\quad\downarrow \qquad\qquad g_7^2 = g_{13}^2 = g_{23}^2 = 1, g_{11}^2 = g_{17}^2 = g_{19}^2 (= g_{5U}^2 = g_{1B} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}) & \\
G_{ab} \simeq \langle g_{5U}\rangle/\langle g_{5U}^2\rangle \rtimes \qquad\qquad [G,G] \ni g_{5U}^2 = g_{1B} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad g_{11}^2 = g_{17}^2 = g_{19}^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_{5U} = -g_{5V} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\
& g_7 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, g_{13} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \\
& g_{11} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, g_{17} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\
& g_{23} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, g_{19} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sharp\langle\sqrt{-1}\rangle \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 16 \\
& \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$



$\sigma_{1B}(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1},$	$\sigma_{1B}(\sqrt{+2}) = \sqrt{+2},$	$\sigma_{1B}(\sqrt{+3}) = \sqrt{+3},$	$\sigma_{1B}(4\sqrt{a}) = -4\sqrt{a}$
$\sigma_{5V}(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1},$	$\sigma_5(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},$	$\sigma_5(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},$	$\sigma_5(4\sqrt{a}) = \sqrt{-1}4\sqrt{a}$
$\sigma_7(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1},$	$\sigma_7(\sqrt{2}) = \sqrt{2},$	$\sigma_7(\sqrt{3}) = \sqrt{3},$	$\sigma_7(4\sqrt{a}) = \varepsilon_7 4\sqrt{e - f\sqrt{-1}}$
$\sigma_{11}(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1},$	$\sigma_{11}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},$	$\sigma_{11}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},$	$\sigma_{11}(4\sqrt{a}) = \varepsilon_{11} 4\sqrt{e - f\sqrt{-1}}$
$\sigma_{13}(\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1},$	$\sigma_{13}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},$	$\sigma_{13}(\sqrt{3}) = +\sqrt{3},$	$\varepsilon_{13} 4\sqrt{a}$
$\sigma_{17}(\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1},$	$\sigma_{17}(\sqrt{2}) = +\sqrt{2},$	$\sigma_{17}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},$	$\sigma_{17}(4\sqrt{a})$
			$= \sqrt{-1}4\sqrt{a}, \sigma_{17}(4\sqrt{e - \sqrt{-1}f})$
			$\varepsilon\sqrt{-1}4\sqrt{e - \sqrt{-1}f}$
$\sigma_{19}(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1},$	$\sigma_{19}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},$	$\sigma_{19}(\sqrt{3}) = +\sqrt{3},$	$\sigma_{19}(4\sqrt{a}) = \varepsilon_{19} 4\sqrt{e - f\sqrt{-1}}$
$\sigma_{23}(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1},$	$\sigma_{23}(\sqrt{2}) = +\sqrt{2},$	$\sigma_{23}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},$	$\sigma_{23}(4\sqrt{a}) = \varepsilon_{23} 4\sqrt{e - f\sqrt{-1}}$



$$\begin{array}{lll}
\sigma_{1B}(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}, & \sigma_{1B}(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}, & \sigma_{1B}(\sqrt{1+\sqrt{-1}}) = -\sqrt{1+\sqrt{-1}}) \\
 & & \sigma_{1B}(\sqrt{1-\sqrt{-1}}) = -\sqrt{1-\sqrt{-1}}) \\
\sigma_3(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}, & \sigma_3(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}, & \sigma_3(\sqrt{1+\sqrt{-1}}) = \varepsilon_3\sqrt{1-\sqrt{-1}}) \\
 & & \sigma_3(\sqrt{1-\sqrt{-1}}) = -\varepsilon_3 - \sqrt{1+\sqrt{-1}}) \\
\sigma_5(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}, & \sigma_5(\sqrt{-2}) = -\sqrt{-2}, & \sigma_5(\sqrt{1+\sqrt{-1}}) = \varepsilon_5 - \sqrt{1+\sqrt{-1}}) \\
 & & \sigma_5(\sqrt{1-\sqrt{-1}}) = -\varepsilon_5 - \sqrt{1-\sqrt{-1}}) \\
\sigma_7(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}, & \sigma_7(\sqrt{-2}) = -\sqrt{-2}, & \sigma_7(\sqrt{1+\sqrt{-1}}) = \varepsilon_7 - \sqrt{1-\sqrt{-1}}) \\
 & & \sigma_7(\sqrt{1-\sqrt{-1}}) = -\varepsilon_7\sqrt{1+\sqrt{-1}})
\end{array}$$

P.S. $\sqrt{1+\sqrt{-1}} = \zeta_p\sqrt{1-\sqrt{-1}}\ \sigma(\sqrt{1+\sqrt{-1}}) \equiv \sqrt{1+\sqrt{-1}}^{\,p} \bmod \beta_p$

3　第3日

昨日は楕円的エータ積に対し 対応する Dirichlet 級数の Artin L 関数表示を使って, そのフーリエ係数の非負性の判定を行なった。今日の前半でではその様な方法は楕円的エータ積に限られるものではないことを裏付ける (と思われる) 五つのエータ積の計算結果を示す。最初の **19.** 及び **20.** では $H_+ \cap \{$ 正則 $\} \subset \{\nu = 0\}$ に入る (つまり、良い) 例を与え, 後の **21. 22.** 及び **23.** では $H_+^c \cap \{$ 正則 $\} \cap \{\nu = 0\}$ に入る (つまり **8.** のグレイゾーンにいる悪い) 例を与える。**20.** は Ramnujan[R] が別の理由で興味を持ったエータ積であり、最後の三つは Conway 群の Frame shape としても登場する [Ko][Koi]. **20.** 及び **21. 22.23.** の L 関数表示は既に各々[Sa3] [Sa1] に書いてあるが **19.** の L 関数表示は筆者の未公開ノートより採った。

筆者としては **3.** の予想との関連で **19.** に興味がある。円分有理式 Ψ_{10} 今までのどの円分有理式とも異なっている。即ちそれは H_+ のなかで Φ_{10} の因子として登場したのみならず、Ψ_{10} は本当に有理式であり多項式でない。にも拘らず $\nu_{\Psi_{10}} = 0$ かつ $\Phi_{\Psi_{10}}(\xi) > 0$ $(\forall \xi \not\equiv 1 \bmod 10)$ (26) 参照) であるため エータ積 $\eta_{\Psi_{10}}$ は正則だが $\tau = 0$ 以外のカスプでは値零となっている。**3.** では Ψ_{10} は H_+ のなかで primitive であろうと予想している。

今日の後半は ウェイト系なる概念を用いて、$H_+ \cap \{$ 正則 $\} \subset \{\nu = 0\}$ に入ると予想される円分多項式を沢山作ろうという目標であった (出典は [Sa2,3])。しかし時間切れで 出来てない。まず **24.** で正規ウェイト系 (又は単にウェイト系) W 及びそれに付随した特性多項式 φ_W を導入する。ついで **25.** で対応するエータ積 $\eta_W := \eta_{\varphi_W}$ について説明し、楕円的エータ積と同様「フーリエ係数の非負性は dual rank ν_W の符号 ≥ 0 という条件のみで決まる」という予想を述べる。

ウェイト系は元々 原始形式の分類 (**4.** 参照) との関連で導入されたのであるが、その様な背景一切なしに 純粋に算術的なゲームとしても理解出来る。すると面白いことにウェイト系によりリストアップされた 円分多項式の系列には i) **4.** の表 1. 与えた 有限ルート系の特性多項式、ii) **9.** の表 2. で与えた 楕円ルート系 $E_6^{(1,1)}$, $E_7^{(1,1)}$ 及び $E_8^{(1,1)}$ の特性多項式、iii) **20.** で調べる (予定の) Ramanujan が研究した場合、iv) 14 個の自己双対な Arnold による strange dual な 特性多項式 (符号 (l+2,2) となる不定二次形式に対応する)、v) Conway 群の Frame shape 等など 次々と面白いものが出てくる。それでは、それらに続く次の面白いケースをリストアップしようかと思ったが (コンピュウター走らせる時間的余裕がなく) 今回は果たせなかった。興味ある方は是非自ら調べて頂ければ嬉しい。付録として ランクの小さいウェイト系に関連する話題を述べる。

凡例. 以下 **19.-23.** において dual rank $\nu = 0$ となる五つのエータ積について i) 円分式 φ、ii) エータ積 η_φ、iii) Coxeter number h, rank μ, dual rank ν, weight a_0, m, m^*, Level N and character ε そして iv) Dirichlet 級数 L_φ の オイラー積 分解の計算結果を書く。計算法は昨日と同じ (略)。

結果を見る限り、それらの Dirichlet 級数 L_φ は、昨日の楕円的の場合同様に、Dirichlet L 関数の二次式等に分解していることは変りない。しかしここでフーリエ係数の符号に関して新たに浮上してきたのは **bad prime** (N の約数) に対する L_φ のオイラー因子の振る舞いである。即ち五つの例では それらの悪い素数の因子の Dirichlet 展開が負の係数を持つか否かが L_φ 自身が 負の Dirichlet 展開係数を持つか否かを決定している。

振り反って見ると 楕円的エータ積の場合には bad prime に対するオイラー因子が自明 (=1) になるための自明な条件 ([S1,V,(2.23) and (C.7)ii]) を 既に円分式 φ が満たしていた。従って何の心配もなくフーリエ係数の非負性が言えた。しかし下記の五例共 その悪い素数に対するオイラー因子を 1 でなく決定する必要がある。そこで次の問題を問うのは素人の身勝手な期待であろうか (φ の代数的操作のみで答えられそうに思う)。

問題： bad prime に対するオイラー因子 (の分母) を予め 円分有理式 φ の段階で (直接) 見る方法を見つけよ。ここで bad prime と言っても実質 Coxeter 数 h の約数になるような素数を調べれば充分である。

19. Bad prime 5 の振る舞いが良くて 非負になる例 (その 1) .

i) 円分式：
$$\Psi_{10} = \frac{(1-t^2)(1-t^5)^3}{(1-t)(1-t^{10})}.$$

ii) エータ積：
$$\begin{aligned}\eta_{\,{}^4\Psi_{10}}(\tau) &= \eta(8\tau)\eta(20\tau)^3/\eta(4\tau)\eta(40\tau)\\ &= q + q^5 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{13} + 2q^{17} + q^{25} + 2q^{29} + 2q^{37}\\ &\quad +2q^{41} + q^{45} + q^{49} + 2q^{53} + 2q^{61} + 2q^{65} + 2q^{73} + q^{81} + \cdots\end{aligned}$$

iii) Level and character:
$$h = 10,\ \mu = 6,\ \nu = 0,\ a_0 = 1,\ m = 4,\ m^* = 1,\ N = 40\ .$$
$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \varepsilon(p) = \left(\frac{p}{4}\right), \quad 1\ (4) \mapsto 1,\ 3\ (4) \mapsto -1.$$

iv) Dirichlet series:
$$L_\varphi(s) = \frac{1}{1-5^{-s}} \prod_{p \neq 5} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-\varepsilon(p)p^{-s})}$$

Bad prime 5 に対するオイラー因子 $\frac{1}{1-5^{-s}}$ の展開の係数は非負である。その結果全ての **dirichlet** 係数は非負となる。

20. Bad prime 5 の振る舞いが良くて 非負になる例 (その 2) .

i) 円分式：
$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda^5-1)^5}{\lambda-1}$$

ii) エータ積：
$$\begin{aligned}\eta_{(1,1,2;5)}(\tau) &= \eta(5\tau)^5/\eta(\tau)\\ &= q+q^2+2q^3+3q^4+5q^5+2q^6+6q^7+5q^8+7q^9+5q^{10}\\ &\quad +12q^{11}+6q^{12}+12q^{13}+6q^{14}+10q^{15}+11q^{16}+16q^{17}+\cdots\end{aligned}$$

Ramanujan は このエータ積の或展開式を研究し [R] それを Remarkable idntity と呼んでいる。

iii) Level and character:

$h=5$, $\mu=24$, $\nu=0$, $m=1$, $m^*=1$, $N=5$, $a_0=2$,
$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \varepsilon(p) = \left(\frac{p}{5}\right), \quad 1,4 \mapsto 1,\ 2,3 \mapsto -1.$$

iv) Dirichlet series:
$$L_{(1,1,2;5)}(s) = \frac{1}{1-5^{-s+1}} \prod_{p\neq 5} \frac{1}{(1-p^{-s+1})(1-\left(\frac{p}{5}\right)p^{-s})}.$$

Bad prime 5 **に対するオイラー因子** $\frac{1}{1-5^{-s+1}}$ **の展開の係数は非負である. その結果全ての dirichlet 係数は非負となる。**

21. Bad prime 2 の振る舞いが悪くて 非負にならない例 1.

i) 円分式：
$$\varphi_1 := \frac{(\lambda^6-1)^6(\lambda-1)}{(\lambda^3-1)^3(\lambda^2-1)^2}$$

ii) エータ積：
$$\begin{aligned}\eta_{\varphi_1}(\tau) &= \eta(6\tau)^6\eta(\tau)/\eta(3\tau)^3\eta(2\tau)^2\\ &= q-q^2+q^3+q^4-q^6+2q^7-q^8+q^9+q^{12}+2q^{13}-2q^{14}\\ &\quad +q^{16}-q^{18}+2q^{19}+2q^{21}-q^{24}+q^{25}-2q^{26}+q^{27}+2q^{28}+\cdots\end{aligned}$$

iii) Level and character:

$h=6$, $\mu=24$, $\nu=0$, $a_0=1$, $m=1$, $m^*=1$, $N=6$.
$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \varepsilon(p) = \left(\frac{p}{6}\right), \quad 1 \mapsto 1,\ 5 \mapsto -1.$$

iv) Dirichlet series:
$$L_{\varphi_1}(s) = \frac{1}{1+2^{-s}}\frac{1}{1-3^{-s}} \prod_{p\equiv 1 \bmod (6)} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 5 \bmod (6)} \frac{1}{1-p^{-2s}},$$

Bad prime 2 に対するオイラー因子の展開 $\frac{1}{1+2^{-s}} = 1-2^{-s}+2^{-2s}-2^{-3s}+2^{-4s}-2^{-5s}+\cdots$ **が Dirichlet 係数を負にする要因になっている。**

22. Bad prime 2 の振る舞いが悪くて 非負にならない例 2.

i) 円分式：
$$\varphi_2 := \frac{(\lambda^2-1)(\lambda^3-1)^3(\lambda^{12}-1)^3}{(\lambda-1)(\lambda^4-1)(\lambda^6-1)^3}.$$

ii) エータ積：

$$\begin{aligned}\eta_{\varphi_2}(\tau) &= \eta(2\tau)\eta(3\tau)^3\eta(12\tau)^3/\eta(\tau)\eta(4\tau)\\ &= q+q^2+q^3-q^4+q^6+2q^7+q^8+q^9-q^{12}+2q^{13}+2q^{14}-q^{16}\\ &\quad +q^{18}+2q^{19}+2q^{21}+q^{24}+q^{25}+2q^{26}+q^{27}-2q^{28}+2q^{31}+\cdots\end{aligned}$$

iii) Level and character:

$h=12$, $\mu=24$, $\nu=0$, $a_0=1$, $m=1$, $m^*=1$, $N=12$,

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \varepsilon(p) = \left(\frac{p}{6}\right), \quad 1\ (6) \mapsto 1,\ 5\ (6) \mapsto -1.$$

iv) Dirichlet series:

$$L_{\varphi_2}(s) = \frac{1+2\cdot 2^{-s}}{1+2^{-s}}\frac{1}{1-3^{-s}}\prod_{p\equiv 1 \bmod (6)}\frac{1}{(1-p^{-s})^2}\prod_{p\equiv 5 \bmod (6)}\frac{1}{1-p^{-2s}},$$

Bad prime 2 に対するオイラー因子の展開 $\frac{1+2\cdot 2^{-s}}{1+2^{-s}} = 1+2^{-s}-2^{-2s}+2^{-3s}-2^{-4s}+2^{-5s}-\cdots$ **が Dirichlet 係数を負にする要因になっている。**

23. Bad prime 3 の振る舞いが悪くて 非負にならない例 1.

i) 円分式：
$$\varphi_3 := \frac{(\lambda^2-1)^3(\lambda^6-1)(\lambda^{12}-1)^2}{(\lambda-1)(\lambda^3-1)(\lambda^4-1)^2}.$$

ii) エータ積：

$$\begin{aligned}\eta_{\varphi_3}(\tau) &= \eta(2\tau)^3\eta(16\tau)\eta(12\tau)^2/\eta(\tau)\eta(3\tau)\eta(4)^2\\ &= q+q^2-q^3+q^4+2q^5-q^6+q^8+q^9+2q^{10}-q^{12}+2q^{13}\\ &\quad -2q^{15}+q^{16}+2q^{17}+q^{18}+2q^{20}-q^{24}+3q^{25}+2q^{26}-q^{27}+\cdots\end{aligned}$$

iii) Level and character:

$h=12$, $\mu=24$, $\nu=0$, $m=1$, $m^*=1$, $N=12$,

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \pm 1, \quad \varepsilon(p) = \left(\frac{p}{12}\right), \quad 1,5\ (12) \mapsto 1,\ 7,11\ (12) \mapsto -1.$$

iv) Dirichlet series:

$$L_{\varphi_3}(s) = \frac{1}{1-2^{-s}}\frac{1}{1+3^{-s}}\prod_{p\equiv 1,5 \bmod (12)}\frac{1}{(1-p^{-s})^2}\prod_{p\equiv 7,11 \bmod (12)}\frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

Bad prime 3 に対するオイラー因子の展開 $\frac{1}{1+3^{-s}} = 1-3^{-s}+3^{-2s}-3^{-3s}+3^{-4s}-3^{-5s}+\cdots$ **が Dirichlet 係数を負にする要因になっている。**

24. 正規ウェイト系 とその特性多項式
定義 ([Sa2]) 4 つの正整数の組

1) $$W := (a, b, c; h)$$

が次の 2 条件を満たす時、正規ウェイト系と呼び (以下単にウェイト系と呼ぶ) h をその **Coxeter** 数と言う。
i) $0 < a, b, c < h$ かつ $gcd(a, h, c, h) = 1$
ii) 次の有理式は原点以外極を持たない。

2) $$\chi_W(T) := T^{-h}\frac{(T^h - T^a)(T^h - T^b)(T^h - T^c)}{(T^a - 1)(T^b - 1)(T^c - 1)}.$$

定理 1. W がウェイト系とする。 すると $\chi_W(T)$ は T の Laurent 多項式として 有限個の momial の和と表わせる*:*

3) $$\chi_W(T) = T^{m_1} + T^{m_2} + \cdots + T^{m_{\mu_W}}$$

ただし巾指数 $m_i \in \mathbb{Z}$ (**exponent** と呼ぶ) は重複も許し、momial の個数は $\mu_W = \frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{abc}$ で与えられウェイト系のランクと呼ばれる。exponents を $m_1 \leq \cdots \leq m_\mu$ と整列しておく。この時、双対性

$$m_i + m_{\mu-i+1} = h \ (i = 1, \cdots, \mu)$$

が成り立つ ($\because T^h\chi_W(T^{-1}) = \chi_W(T)$ より)。最小 exponent は次の式

4) $$\varepsilon_W := a + b + c - h$$

で与えられ、その重複度は *1* である。

Remark. 三変数の重み付き多項式 $f(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j,k \\ ai+bj+ck=h}} C_{ijk}X^iY^jZ^k$ であって、原点に孤立した特異点を持つものが存在する為の必要充分条件は、W は正規ウェイト系となる事である。

ここで exponent m の重複度を a_m とおくと (昨日までの記号 a_0 の出典はここにある) 次の重要な事実がある：$mult(W) := a_{-1} + a_1 > 0$。
天下りではあるが W の特性多項式を次のように定義する。

5) $$\varphi_W(\lambda) := \prod_{i=1}^{\mu}(\lambda - \exp(2\pi\sqrt{-1}m_i/_h))$$

定理 2. ウェイト系 W の特性多項式は円分多項式である。従って分解

$$6) \qquad \varphi_W(\lambda) = \prod_{i|h} (\lambda^i - 1)^{e_W(i)}$$

がある。特にこの時 *Coxeter* 数の巾指数の 正値性が言える*:*

$$7) \qquad e_W(h) = \mathrm{mult}(W) := a_{-1} + a_1 > 0.$$

定義。ウェイト系にたいし rank, weight **等々とは 対応する特性多項式 φ_W にたいし初日定義されたそれのこととする:** $\mu_W := \deg(\varphi_W) = \sum_i i e_W(i)$、$a_0 = \frac{1}{2}\sum e_W(i)$ **等々. 同様に双対特性有理式もつぎで定まる:**

$$\varphi^*_W(\lambda) = \prod_{i|h} (\lambda^i - 1)^{-e}(h/i)\text{。}$$

25. ウェイト系 W に対するエータ積

ウェイト系 W に対し、エータ積 及び双対エータ積を

$$\eta_W(\tau) := \prod_{i|h} \eta(i\tau)^{e_w(i)} \quad \text{及び} \quad \eta^*_W(\tau) := \prod_{i|h} \eta(i\tau)^{-e_w(h/i)}$$

と定義する。 これらは 再び discriminant $d_W = \prod_{i|h} i^{e(i)}$ **に関し 双対公式** $14)$ **を満たしている。**

注意. ウェイト系 W に由来するウェイト a_0 は整数であり、*discriminant* d_W 及び *dual discriminant*d^*_W も正の整数となる事も証明できる。

ウェイト系に対応するエータ積は勝手なものではなく、予想としては初日 7. で述べたグレイゾーン I **にも** II **にも属さないと考えられている。グレイゾーン** II **に属さない為には「 η_W が正則 (又はカスピダル) になるか否かはカスプ点** 0 **を** check **さえすればよい」と言うことを示す必要がある。それを以下に簡単に示す。まず** dual rank **の定義の復習をする。**

$$\nu_W := -\sum_{i|h} i e_W(h/i).$$

補題. W をウェイト系とする。エータ積 η_W 及び η^{*-1}_W が正則な保型形式になる *(*又は カスプ形式になる) 必要充分条件は、$\nu_W \leq 0$ (又は $\nu_W < 0$) となる事である。このことは特にウェイト系に対応するエータ積はグレイゾーン *II* には いないことを意味する。

証明スケッチ: 楕円的エータ積の時の証明とほぼ同じ要領。任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ $(c \neq 0)$ に対し、$\eta_W|_{a_0} A = q^{\Phi_W(c)} + \cdots$ と展開される。但し $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau/24h)$ かつ $c \cdot \Phi_W(c) := \sum_{i|h}(h \cdot (i,c)^2/i)e_W(i)$。ここで 任意の $\xi \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ に対し不等式 $\xi \cdot \Phi_W(\xi) \geq \xi^2 \Phi_W(1) = -\xi^2 \nu_W$ が示せる ([Sa3,(13.10)]。 証明終り。

ウェイト系に対応する エータ積はグレイゾーン I にもいないであろうと予想される。その事をもう少し一般に述べるのが次の一連の予想である。これらの予想を述べるのが今日ウェイト系を導入した主要な動機である。その背景には昨日今日述べてきた例たちのほかに 大量なコンピュータの計算がある。しかしその定式化はまだ実験的な所があり、あまり本質を捕えたものとは思えない。とにかく第一歩を踏み出す為にかいてみる。

予想 **A.** [Sa3, Conj.13.5] W をウェイト系とする。

① $\nu \in \mathbb{Z}$ に対し、$\eta(h\tau)^\nu \ \eta_W(\tau) \in H_+ \ \Leftrightarrow \ \nu_W \geq \nu$

② $\mu \in \mathbb{Z}$ に対し、$\eta(h\tau)^\mu \ \eta_{W^*}(\tau) \in H_+ \ \Leftrightarrow \ \mu_W \geq \mu$

前記 A ①において とくに $\nu = 0$ と特殊化するとつぎになる。

予想 **B.** ①' $\eta_W(\tau) \in H_+ \Leftrightarrow \nu_W \geq 0$ $(\Leftrightarrow \ \eta_W$ はカスプ形式でない)。

このうち後半の同値関係 は 前掲 補題のカスプ形式の特徴付けそのものの再録である。前半の同値関係のうち $\Rightarrow$ も既に **7.** 補題で示されているので残るは $\Leftarrow$ のみである。それは η_W はグレイゾーン I にいないことを主張している。ちなみに前記 A ②において とくに $\mu = 0$ と置く. 常に $\mu_W > 0$ であることを思い出すと予想は「②' $\eta_W^*(\tau) \in H_+$」を主張している。この事が正しいことは [Sa3,13. Fact] で示されている。前記 B。に戻り特に $\nu_W = 0$ の場合に興味を持つ。前掲補題の正則形式の特徴付けと組み合わせるとつぎになる。

予想 **C.** ウェイト系 W に対し $\eta_W(\tau) \in H_+ \cap \{$ 正則 $\} \ \Leftrightarrow \ \nu_W = 0$

この中で本当に残るやるべきことは「ウェイト系 W に対し $\nu_W = 0 \Rightarrow \eta_W(\tau) \in H_+$」。それでは $\nu_W = 0$ なる ウェイト系 W はどのようなものがあるのか。以下その場合を含めてウェイト系の分類について簡単に述べる。

26. 簡単な分類 (その **1**)

少しでも手を動かして計算すれば分かるように 四つの正整数の組み W 1) にたいしウェイト系になるという条件はかなり強い制約でめったに起きない。とはいえ、そんなに希少価値というほどでもなくウェイト系

は無限個ある。それ等をどうリストアップするのが適切か？視点にも因ると思うがここでは４) で定義した最小 exponent を用いる。一つには最小 exponent ε_W を固定するとその様なウェイト系は有限個しかないということにも因るが、もっと大切なのは次のような事情による。即ち 定理 2 で述べたように特性多項式 φ_W は 1 の原始 h 乗根を根に持ち、従って exponent の双対性を考慮するとどんなウェイト系も 必ず 1 又は- 1 を exponent に持つことが判る。従ってもし最小 exponent が正ならばそれは自動的に 1 でなければならない。こうして $\varepsilon_W \leq 1$ なので 順次 $\varepsilon_W = 1, 0, -1, \cdots$ と分類して行けるのである。もっと幾何的な意味合いもあるがここでは不要であり略する (興味ある方は出典をご覧下さい)。

以下に $\varepsilon_W = 1, 0, -1$ なるウェイト系をリストアップする。

I. $\varepsilon_W = 1$**.**

二つの無限系列と三つのウェイト系からなる。

$$
\begin{array}{lll}
A_l : (1, b, l-b+1; l+1) & \mu = l, \nu = l & \varphi = \frac{(\lambda^{l+1}-1)}{(\lambda-1)} \\
D_l : (2, l-2, l-1; 2(l-1)) & \mu = l, \nu = l & \varphi = \frac{(\varphi^{2(l-1)}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{l-1}-1)(\lambda-1)} \\
E_6 : (3, 4, 6; 12) & \mu = 6, \nu = 6 & \varphi = \frac{(\lambda^{12}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda^4-1)(\lambda-1)} \\
E_7 : (4, 6, 9; 18) & \mu = 7, \nu = 7 & \varphi = \frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^9-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)} \\
E_8 : (6, 10, 15; 30) & \mu = 8, \nu = 8 & \varphi = \frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{15})(\lambda^{10}-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}
\end{array}
$$

各々の特性多項式は丁度第一日にリストアップした有限ルート系の特性多項式達と一致しており それに従って左辺の名前を付ける。既に $4.$ で注意したように特性多項式はすべて自己双対となる。従って $\mu_W = \nu_W > 0$ であるが $25)$ の無限積表示により $\eta_W \in H_+$ である。

II. $\varepsilon_W = 0$**.**

三つのウェイト系からなる

$$
\begin{array}{lll}
E_6^{(1,1)} : (1, 1, 1; 3) & \mu = 8, \nu = 0 & \varphi = \frac{(\lambda^3-1)}{(\lambda-1)} \\
E_7^{(1,1)} : (1, 1, 2; 4) & \mu = 9, \nu = 0 & \varphi = \frac{(\lambda^4-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)} \\
E_8^{(1,1)} : (1, 2, 3; 6) & \mu = 10, \nu = 0 & \varphi = \frac{(\lambda^6-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)}
\end{array}
$$

各々の特性多項式は丁度第一日にリストアップした楕円ルート系の特性多項式三つと一致しており それに従って左辺の名前を付ける。既に詳しく調べたように $\nu_W = 0$ であり $\eta_W \in H_+ \cap \{$ 正則 $\}$ である。

III. 1 $\varepsilon_W = -1$, $a_0 = 0$, **mult(W)=1.**

十四のウェイト系からなる。

$$
\begin{array}{lll}
(3,4,4;12) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{(\lambda^{12}-1)(\lambda^4-1)}{(\lambda^3-1)(\lambda-1)} \\
(3,4,5;13) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{\lambda^{13}-1}{\lambda-1} \\
(3,5,6;15) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{(\lambda^{15}-1)(\lambda^3-1)}{(\lambda^5-1)(\lambda-1)} \\
(4,5,10;20) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{(\lambda^{20}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{10}-1)(\lambda^4-1)(\lambda-1)} \\
(4,6,11;22) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{(\lambda^{22}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{11}-1)(\lambda-1)} \\
(6,14,21;42) & \mu=12,\nu=12 & \varphi = \frac{(\lambda^{42}-1)(\lambda^7-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{21}-1)(\lambda^{14}-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)} \\
(4,5,6;16) & \mu=11,\nu=13 & \varphi = \frac{(\lambda^{16}-1)(\lambda^4-1)}{(\lambda^8-1)(\lambda-1)} \\
(3,4,8;16) & \mu=13,\nu=11 & \varphi = \frac{(\lambda^{16}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^4-1)(\lambda-1)} \\
(4,6,7;18) & \mu=11,\nu=13 & \varphi = \frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^3-1)}{(\lambda^9-1)(\lambda-1)} \\
(3,5,9;18) & \mu=13,\nu=11 & \varphi = \frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda-1)} \\
(6,8,9;24) & \mu=10,\nu=14 & \varphi = \frac{(\lambda^{24}-1)(\lambda^4-1)(\lambda^3-1)}{(\lambda^{12}-1)(\lambda^8-1)(\lambda-1)} \\
(3,8,12;24) & \mu=14,\nu=10 & \varphi = \frac{(\lambda^{24}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^8-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)} \\
(6,8,15;30) & \mu=11,\nu=13 & \varphi = \frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{15}-1)(\lambda^{10}-1)(\lambda-1)} \\
(4,10,15;30) & \mu=13,\nu=11 & \varphi = \frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{15}-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}
\end{array}
$$

これ等は Arnold が strange dual の名前のもとにリストアップした 14 この例外特異点と 1:1 関係にある。Pinkham により、ある双対になる K3 曲面の族としての意味付けがある。これ等 14 個のウェイト系は双対 なペア $W \leftrightarrow W^*$ に別れ (自己双対も含む) 対応する特性多項式は初日の **5.** で定義した双対になる (即ち $\varphi^*_W = \varphi_{W^*}$ かつ $\nu_W \mu^*_W = \mu_{W^*} > 0$)。従ってエータ積も $\eta^*_W = \eta_{W^*}$ となり 25) の無限積表示より $\eta_W \in H_+$ がいえる。

IV. 1 $\varepsilon_W = -1$, $a_0 = 0$, **mult(W)¿1.**

八つのウェイト系からなる。

$$
\begin{array}{lll}
(2,2,5;10) & \mu=16,\nu=8 & \varphi = \frac{(\lambda^{10}-1)^3(\lambda^2-1)}{(\lambda^5-1)^3(\lambda-1)} \\
(2,2,3;8) & \mu=15,\nu=9 & \varphi = \frac{(\lambda^8-1)^3}{(\lambda^4-1)^2(\lambda-1)} \\
(2,3,3;9) & \mu=14,\nu=10 & \varphi = \frac{(\lambda^9-1)^2}{(\lambda^3-1)(\lambda-1)} \\
(2,3,4;10) & \mu=14,\nu=10 & \varphi = \frac{(\lambda^{10}-1)^2}{(\lambda^5-1)(\lambda-1)} \\
(2,3,6;12) & \mu=15,\nu=9 & \varphi = \frac{(\lambda^{12}-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda^4-1)(\lambda-1)} \\
(2,4,5;12) & \mu=14,\nu=10 & \varphi = \frac{(\lambda^{12}-1)^2(\lambda^3-1)}{(\lambda^6-1)^2(\lambda-1)} \\
(2,4,7;14) & \mu=15,\nu=9 & \varphi = \frac{(\lambda^{14}-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda^7-1)^2(\lambda-1)} \\
(2,6,9;18) & \mu=16,\nu=8 & \varphi = \frac{(\lambda^{18}-1)^2(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^9-1)^2(\lambda^6-1)(\lambda-1)}
\end{array}
$$

これらもある幾何的意味はあるが立ち入らない。$\mu+\nu=24$ となっている。

V。 $\varepsilon_W=-1$, $a_0>0$.

七つのウェイト系からなる。

$$\begin{array}{lll}
(1,1,2;5) & \mu=24,\nu=0 & \varphi=\frac{(\lambda^5-1)^5}{(\lambda-1)} \\
(1,2,2;6) & \mu=20,\nu=4 & \varphi=\frac{(\lambda^6-1)^4}{(\lambda^3-1)(\lambda-1)} \\
(1,2,3;7) & \mu=20,\nu=4 & \varphi=\frac{(\lambda^7-1)^3}{(\lambda-1)} \\
(1,2,4;8) & \mu=21,\nu=3 & \varphi=\frac{(\lambda^8-1)^3(\lambda^2-1)}{(\lambda^4-1)(\lambda-1)} \\
(1,3,4;9) & \mu=20,\nu=4 & \varphi=\frac{(\lambda^9-1)^2(\lambda^3-1)}{(\lambda-1)} \\
(1,3,5;10) & \mu=21,\nu=3 & \varphi=\frac{(\lambda^{10}-1)^2(\lambda^2-1)}{(\lambda-1)} \\
(1,4,6;12) & \mu=22,\nu=2 & \varphi=\frac{(\lambda^{12}-1)^2(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda-1)}
\end{array}$$

このグループの最初の例が $\nu_W=0$ となり、本日の **20.** 節で取り上げたそして Ramanujan [R] により研究された $\eta_W\in H_+\cap$**{正則}** なる場合である。

纏め。

以上に見るとウェイト系に対応する特性多項式は強い (自己) 双対性を示すグループ I、III と逆に双対性からは程遠いグループ II、V 、そしてそれらの中間にいるグループ IV 等に別れている。エータ積のフーリエ係数の非負性の視点から見ると双対性を示すグループのエータ積たちは無限積表示 25) のため非負性は殆んど自明に正しい。

むしろ興味があるのは双対性からは程遠いグループ **II**、**V** のなかに楕円的エータ積や **Ramanujan** の調べた場合が入ってきたことである。この先さらにどのような $\nu_W=0$ となるウェイト系があるのか？この講義ではその様な先にある例を幾つか提示して見たかったが残念ながら果たせなかった。別の機会を得てそれら全てを理論的にリストアップしてみたいと思う (それが可能であろうと信じる根拠もある [Sa4])。対応して定まるエータ積と その **Mellin** 変換である **Dirichlet** 級数はいかなるオイラー分解を持つのか？ またもや、その **L** 関数のうまい表示から **Dirichlet-**フーリエ係数の非負性が言えるだろうか。それにしても そうやって示されるべき非負になるフーリエ係数そのものの意味は何なんであろうか？

疑問は尽きないが 残念ながらこの講義はこれらの疑問に何ら答えるところなく終わらざるをえない。もっと多くを調べる必要がある。 もしこの講義により、エータ積のフーリエ係数の非負性という現象、或いは $\nu_W=0$ なるウェイト系に興味を持って頂いた人がいれば そして更なる例を増やし 理解を深める人が現れれば 筆者の喜びそれをすぐるものはない。

27. 付録 III。ランク 24 のウェイト系

最後に、ランク 24 となるウェイト系を list up する。但し、Coxter 数が等しい weight 系の形式的直和 $W_1 \oplus W_2$（そのランクは $\mu_{W_1} + \mu_{W_2}$ とする）等も考慮の対象に入れる。それ等は以下の 4 種類に分類できる。

1) I 型ウェイト系の 24 種の Niemeier type の直和

$$A_1^{24}, A_2^{12}, A_3^8, A_4^6, A_5^4, \oplus D_4, D_4^6, A_7^2, \oplus D_5^2, A_8^3, A_9^2, \oplus D_6, \cdots$$

2) III 型 ウェイト系の互に dual になる組の直和

$$(3,4,4;12)^2, (3,4,5;13)^2, (4,5,6;16), \oplus(3,4,8;16)\cdots$$

3)　負の exponents を持つ、次の 10 種

$$(3,7,7;21), (3,7,11;25), (3,11,15;33),$$
$$(4,7,12;28), (4,9,18;36), (4,14,23;46),$$
$$(6,9,11;33), (6,10,23;46), (6,26,39;78),$$
$$(10,14,35;70), (12,15,20;60)$$

4)　退化する ($a_0 > 0$) 9 種

$$3\tilde{E}_6, 2\tilde{E}_6 \oplus 4A_2, \tilde{E}_6 \oplus 8A_2, 2\tilde{E}_7 \oplus 2A_3, \tilde{E}_7 \oplus 5A_2,$$
$$2\tilde{E}_8 \oplus D_4, \tilde{E}_8 \oplus 2A_5 \oplus D_4, (1,2,2;6) \oplus D_4, (1,1,2;5)$$

この表について、観察を述べる。

1. 1), 2), 3) に対応する特性多項式は selfdual である。。

2。 1), 2), 3) に対応する disoriminants は平方数である。

3。 1), 2), 3) の特性多項式は Conway 群の元の特性多項式となる。逆に Conwey 群の元の特性多項式で selfdual になるものは 4 種を除いて、この様に表せる。

4。 4) の場すべて $a_0 > 0$ であり、対応するエータ積のフーリエ係数は非負である。

5。 各ウェイト系に Milnor 束 L_W を対応させる。すると

1) の場合：L_W は Niemeier lattice に埋め込める

2) の場合：L_W は K-3 lattice に埋め込める。

3) の場合： discriminant が平方数なので L_W はある unimodular lattice に拡張される可能性は充分あるが、その具体的構成は知られていない。Milnon fiber をコンパクト化して得られる曲面は、algebraic cycle を多量

に含む（つまり Picard 数が〝異常に大きい〟）かわった曲面である。詳しい研究（周期積分等）は非常に興味あるが、未だほとんど、何も研究されていない。

References

[B] Bourbaki, N., Groups et algebres de Lie, Chap 4,5 et 6, c Hermann, Paris 1968.

[D-S] Deligne, Pierre, & Serre, Jean-Pierre, Formes modulaires de poids 1, Ann. sci. E.N.S. 4^e ser., t.7, (1974) 507-530.

[D-K-K] Dummit,D., Kisilevski,H. & McKay,J., Multiplicative eta-products, Contemporary Math. 627 (1976),69-78.

[G-O] Granville, Andrew & Ono, Ken, Defect zero p-blocks for finite simple groups, Transaction of the AMS, Vol 348, Nu1, (1996), 331-347.

[Ha] Harada, Koichiro, "Moonshine" of Finite groups, Lecture Notes, Ohio State University.

[H-L] Harada, Koichiro and Mong Lung Lang, Some Elliptic curves arising from the Leech lattice, J. Alg., **125** (1989), 298-310.

[He, 22] Hecke, Erich, Einen neuen Zusammenhang zwischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen, no.22 in "Mathematische Werke", Vandenhoeck & Ruprecht, Goettingen, 1970 (2nd ed.).

[He, 23] Hecke, Erich, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, no.23 in "Werke".

[He, 24] Hecke, Erich, Theorie der Eisensteinschen Reihen höhereer Stufe und ihre Anwendung auf Funktiontheorie un Arithmetik, no.24 in "Werke".

[He, 36] Hecke, Erich, Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihhen mit Eulerscher Produktentwicklung II, no.36 in "Werke".

[H-M] Honda, Taira & Miyawaki, Isao, Zeta-function of elliptic curves of 2-power conductor, J. Math. Soc. Japan, vol.26, no.2, (1974), 362-373.

[I] Ibukiyama, Tomoyosi, Application of modular forms to lattices, Proceedings of 第 2 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (2003)。

[Ka] Kac, Victor G., Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's η-function, Classical Moebius Function and the Very Strange Formula, Advances in Mathematics **30**, 85-136 (1978).

[Kob] Koblitz, Neal, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo 1984, ISBN 0-387-96029-5

[Koi] Koike, Masao, Moonshines of $\mathrm{PSL}_2(F_q)$ and the automorphism group of Leech lattice, Japan J. Math., **12**;2 (1986),283-323.

[Ko] Kondo, Takeshi, The automophism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J.Math.Soc.Japan,**37** (1985), 337-362.

[M] Martinet, J., Character theory and Artin L-functions,

[Mar] Martin, Yves, Multiplicative η-Quotients, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 4825-4856.

[Ma1] Mason, Geoffrey, Frame shapes and rational characters of finite groups, J.Alg., **89** (1984), 237-246.

[Ma2] Mason, Geoffrey, M_{24} and certain automorphic forms, Contemp. Math., **45**, (1985) 223-244.

[Ma3] Mason, Geoffrey, Finite Groups and Hecke Operators, Math. Ann. **283** (1989), 381-409.

[O] Ogg, A., Survey of modular functions of one variable (Springer Lecture Notes vol. **320**,1973,1-36.

[On] Ono, Ken,

[R] Rademacher, Hans, Topics in analytic Number Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973, 3-540-o5447-2.

[Sa1] Saito, Kyoji, Extended Affine Root Systems,I, Publ. RIMS, Kyoto ., **21** (1985), 75-179; II, ibid, **26** (1990), 15-78; III with T. Takebayashi, ibid,**33** (1997), 301-329; IV with D. Yoshii, ibid, Vol.**36**, (2000), 385-421, V. Elliptic Eta-Products and Their Dirichlet Series, Centre de Recherches Mathematiques CRM Proceedings and Lectures Notes Vol. **30**,2001,pp185-222.

[Sa2] Saito, Kyoji, Regular system of weights and their associated singularities, *Adv. Stud. Pure Math.* **8** (1987), 472-596.

[Sa3] Saito, Kyoji, Duality for Regular Systems of Weights, ASJAN J. Math. Vol.**2**, No.4, pp.983-1048, 1998.

[Sa4] Saito, Kyoji, Regular Systems of Weights with vanishing dual rank, in preparation.

[Se] Serre, Jean-Pierre, Modular forms of weight one and Galois representations, Algebraic Number Fields (edit. A Froelich), Academic Press (1977), 193-268.

[Sh] Shimura, Goro, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[T] Takahashi, Atsushi, K.Saito's Duality for Regular Weight Systems and Duality for Orbifoldized Poincare Polynomilas, Comm. Math. Phys..

[W] Weil, Andre, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **168** (1967), 149-156.