RIMS-1767

THE THEORY OF MATHEMATICAL PHYSICS IN CLASSICAL FLUID DYNAMICS

By

Shigeru MASUDA

January 2013

京都大学　数理解析研究所

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES

KYOTO UNIVERSITY, Kyoto, Japan

THE THEORY OF MATHEMATICAL PHYSICS IN CLASSICAL FLUID DYNAMICS

京都大学・数理解析研究所 長期研究員 増田 茂
SHIGERU MASUDA
RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES,
KYOTO UNIVERSITY

Abstract.

1. Our motivation in this paper, is to discuss introductorily how the mathematical physic theories have been deduced, comes from that we have the interest in the mathematical physics in classical fluid dynamics including the heat theory.

2. Owing to the arrival of continuum theory, many mathematical physical works are introduced, such as that Fourier and Poisson struggle to deduce the trigonometric series in the heat theory and heat diffusion equations. In the curent of formularizing process of the fluid dynamics, Navier, Poisson, Cauchy and Stokes struggle to deduce the wave equations and the Navier-Stokes equations. Of cource, there are many proceding researches before these topics, however, for lack of space, we must pick up at least, the essentials such as following contents :

3. At first, we introduce the heat theory and heat diffusion equations based on the oscillating equations of cords, especially, we treate the theoretical contrarieties between Fourier and Lagrange, and next, between Fourier and Poisson , and then, the microscopically descriptive fluid equations, especially, we treate the theoretical contrariety between Navier and Poisson, and finally, the collaboration on the proof of describability of the trigonometric series of an arbitrary function up to the 20th Centuries.

4. Since 1811, Poisson issued many papers on the definite integral, containing transcendental, and remarked on the necessity of careful handling to the diversion from real to imaginary, especially, to Fourier explicitly.

To Euler and Laplace, Poisson owes many knowledge, and builds up his principle of integral, consulting Lagrange, Lacroix, Legendre, etc. On the other hand, Poisson feels incompatibility with Laplace's 'passage', on which Laplace had issued a paper in 1809, entitled : On the 'reciprocal' passage of results between real and imaginary, after presenting the sequential papers on the occurring of 'one-way' passage in 1782-3.

To these passages, Poisson proposes the direct, double integral in 1811,13,15 and 20.

6. As a contemporary, Fourier is made a victim by Poisson. To Fourier's main work : *The analytical theory of heat* in 1822, and to the relating papers, Poisson points the diversion applying the what-Poisson-called-it 'algebraic' theorem of De Gua or the method of cascades by Roll, to transcendental equation. Moreover, about their contrarieties, Darboux, the editor of *Œuvres de Fourier*, evaluates on the correctness of Poisson's reasonings in 1888. Drichlet also mentions about Fourier's method as a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite.

7. In the last pages of a paper of fluid dynamics in 1831, Poisson remembers to put again the restriction, saying that the provings of eternity of time in the exact differential become necessarily defective, for it includes the series of transcendental.

8. About the describability of the trigonometric series of an arbitrary function, nobody succeeds in it including Fourier, himself. According to Dirichlet, Cauchy is the only person challenges it in vain. Poisson tries it from another angle. Dirichlet and Riemann step into the kernel of the question. Up tp the middle of or after the 20th Centuries, these collaborations are continued, finally in 1966, by Carleson proved in L^2, and in 1968, by Hunt in L^p.

Contents

Date: 2013/01/17.

1. Preliminary

[1], [2], [3], [4], [5], [6] The forewords or afterwords are generally to be written not by the author but by other. From our point of view, we would like to talk about Fourier's works as the following four frames :

(1) The preworks of Fourier's
(2) The main theory including the manuscript, or the first version in 1807 : *Sur la propagation de la chaleur* and the second version in 1822 : *Théorie analytique de la chaleur*
(3) Refutations to Poisson and enhansement of Fourier's theory
(4) The collaboration on the proof of describability of the trigonometric series of an arbitrary function up to the 20th Centuries

We talk about (1)-(3) in the forwords and treate the rest in the afterwords. cf. Table 1.

2. The forewords and afterwords to the Fourier's works

3. Introdiction to Forewords

As Riemann[108, p.5] says, d'Alembert is the progenitor of the problem of the vibrating cord. For gaining a general solution of the differential equation, he proposes the series by trigonometric fonction, d'Alembert, Euler, D. Bernoulli and Lagrange extend each solution of the same problem. d'Alembert concludes after his observations in *Recherches sur les vibrations des Cordes sonores* [16, pp.1-64,65-73], priding the superiority to both Euler and Bernoulli, as follows :

> De toutes ces réfléxions je crois être en droit de conclure ;
>
> (1) que la solution que j'ai donnée la premier du Probleme des cordes vibrantes, n'est nullement renfermée dans la fonction de M. Taylor, s'étend beaucoup plus loin, & est aussi générale que la nature de la question le permet ;
> (2) que l'extension que M. Euler y a voulu donner, est capable d'conduire *en error* ;
> (3) que sa construction est contraire à ce qui avance lui-même en termes formels sur l'*identité* & l'*imparité* des fonctions $\varphi(x+t)$ & $\psi(x-t)$;
> (4) que cette construction ne satisfait point à l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$;
> (5) que dans l'équation $y = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$, les fonctions doivent demontrer toujours de la même forme, comme M. Euler l'a tacitement supposé lui-même ;
> (6) que si on se permettoit[7] de faire varier la forme de ces fonctions, il faudroit renverser la principe de toutes les constructions & fonctions analytiques, & des démonstrations les plus généralement avouées ;
> (7) qu'en faisant varier cette forme, le Problême n'auroit plus de solution possible, & resteroit indéterminé ;

[1]Basically, we treat the exponential / trigonometric / logarithmic / π / et al. / functions as the transcendental functions.

[2]Translation from Latin/French/German into English/Japanese mine.

[3]We use the symbols § : chapter, ¶ : article of the original.

[4]The Japanese sentences are not mine, but our translation from the original. Our assertions are only in English.

[5]The left equation numbers with the subindex of initial in a line are that of original, and the right numbers in a line are by the author.

[6]To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Daniel Bernoulli(1700-82), Euler(1707-83), d'Alembert(1717-83), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Poisson(1781-1840), Bessel(1784-1846), Navier(1785-1836), Cauchy(1789-1857), Dirichlet(1805-59), Stokes(1819-1903), Riemann(1826-66).

[7]sic., As today's usage, 'permettrions'. In bellow, as the same, faudroit($\Rightarrow$ fallût), auroit($\Rightarrow$ aurions), etc.

Table 1. The contributions in four frames before, through and after Fourier's works

no	frame	Contributions by Fourier	Contribution by Poisson	et al.
1	The pre-works succeeded to Fourier's works	· to take in the descriminant of roots by Descartes [19] · to take in the methods by De Gua or cascades by Rolle · to take in the trigonometric series by Lagrange	· to promote the preceding works of the trigonometric series by Lagrange · to counter diversion from real to transcendental by Euler and Laplace · definite integral against Euler and Laplace	· d'Alembert · Euler · D.Bernouille · Lagrange (cf. Table 15)
2	The main theory	· heat diffusion/heat equations · trigonometric series against Lagrange · root of transcendental equation · discriminant of root against Descartes and Budan [5] · (improved) allpication of De Gua's and Rolle's theorem to transcendental equation · diversion from algebraic equation to transcendental equation	· heat diffusion/heat equations against Fourier · wave equation · trigonometric series · root of transcendental equation · oscillation of cord against Euler, d'Alembert and Lagrange · oscillation of sound against d'Alembert and Lagrange · fluid dynamics/statics equations against Navier · capillary action against Laplace and Gauss · magnetics · optics against Fresnel · to counter diversion from real to transcendental by Fourier · to counter allpication of De Gua's theorem to transcendental equation by Fourier · to counter diversion from algebraic equation to transcendental equation by Fourier · etc.	· Gauss [40] cf. § 14 · Bessel [4] cf. § 14 · Budan [5] cf. § 12.2 · Arago [18, p.310-12] cf. § 12.2
3	Refutations to Poisson and enhansement of Fourier's theory	· heat diffusion/heat equations · root of transcendental equation · to anticounter diversion from real to transcendental · to anticounter allpication of De Gua's theorem to transcendental equation · to anticounter diversion of rule from algebraic equation to transcendental equation	· proof of convergence of trigonometric series · exact differrential in transcendental series · to counter diversion from real to transcendental by Fourier · to counter allpication of De Gua's theorem to transcendental equation by Fourier · to counter diversion from algebraic equation to transcendental equation by Fourier	· Darboux [17] cf. § 12
4	The collaboration on the proof up to Carleson and Hunt in 21C	· proof of orthonormal relation	· Poisson kernel · (Dirichlet kernel by Dirichlet) · proof of convergence of trigonometric series	· Cauchy · Dirichlet · Sturm · Liouville · Riemann · Paul du-Bois Raymond · Heine · R.Fujisawa · Harnack · Carleson · Hunt (cf. Table 15)

(8) que cette solution ne represente pas mieux que la mienne , la vrai mouvement de la corde ;

(9) enfin que la solution de M. Daniel Bernoulli, quelqu'ingénieuse qu'elle puisse être, est trop limitée, & n'ajoute absolument à la mienne aucune simplification ; qu'en un mot, le calcul analytique de Problême, & l'exemen synthétique que M. Bernoulli *m'accuse* à *tort de n'avoir point fait*, sont l'un & l'autre, ce me semble, à l'avantage de ma méthode.

[16, pp.63-64]

Fourier's works are summerized by Dirichlet, a disciple of Fourier, as follows :

- a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite
- to offer a new example of the *prolificity* of the analytic process

The first is our topics which Fourier and Poisson point this problem in life and the other is, in other words, the sowing seeds to be solved from then on. Dirichlet says in the following contents, Fourier (1768-1830) couldn't solve in life the question in relation to the mathematical theory of heat, in *Solution d'une question relative a le théorie mathématiques de la chaleur* (The solution of a question relative to the mathematical theory of heat) [22] :

> La question qui va nous occuper et qui a pour objet de determiner l' états successifs d'une barre primitivement échauffée d'une manière quelconque et dont les deux extrémités sont entretenues à des températures données en fonction de temps, a dèjà été résolue par M. Fourier dans un Mémoire inséré dans le Vol. VIII de la collection de l'Académie Royale des Sciences de Paris. *La méthode dont cet illustre géomètre a fait usage dans cette recherche est une espèce singulière de passage du fini a l'infini, et offre un nouvel exemple de la fécondité de ce procédé analytique qui avait déjà conduit l'auteur à tant de résultats remarquables dans son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur.* J'ai traité la même question par une analyse dont la marche differe beaucoup de celle de Fourier et qui donne lieu à l'emploi de quelques *artifices de calcul*, qui paraisent pouvoir être utiles dans d'autres recherches. [22, p.161] (Italics mine.)
>
> The question which we would occupy with and consider as the object to determine the continuous state of the bar originally heated of any method and of which both edges are keeped with the temperature given by the function of time, was given by Fourier, then solved by him, which is in the archives of Mémoire (Vol. VIII) of l'Académie Royale des Sciences de Paris.[8] *This method what this gifted mathematician has made use in this research is a sort of singularity transferring from the finite to the infinite, and would offer a new example of the prolificity of the analytic process, which urged the author on the many remarkable results in the great works on the heat theory.* I had discussed the same question by an analysis, whose method is very different with that of Fourier, and he gives many skillfull techniques, however, these are likely to be utilized for the other researches. (Translation mine.)

This is the originality of the method due to the what we called *Dirichlet condition*, which gives the constant boundary condition by any method.

After his professor Fourier's death, Dirichlet [23] says in *Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinusreihen* (On the describablity of all the arbitrary functions with the series by sine and cosine) :

> Die merkwürdigen Reihen, welch in einen bestimmten Intervalle Functionen darstellen, welch ganz gesetzlos sind order in verschiedenen Theilen dieses Intervalls ganz verschiedenen Gesetzen folgen, haben seit der Begrundung der mathematischen Wärmelehre durch Fourier so zahlreiche Anwendungen in der analytischen Behandlung physikalischer Probleme gefunden, daß es zweckmäßig

[8] Fourier, [35], cf. Chapter 11.2.

erscheint, die für die folgenden Bände dieses Werkes bestemmten Auszüge aus den neuesten Arbeiten über einige Theile der mathematischen Physik durch die Entwickelung einiger der wichtigsten dieser Reihen einzuleiten. [23, p.135]

This remarkable series, which describe in an arbitrary interval, the function, which is independent at all, or of various parts of interval, don't follow all the laws, the mathematical heat theory by Fourier, are much applicable to physical problems, that have many purposes, which are introduced in the following volumes of works. To deduce these series, we introduce an extract of the newest works on a part of mathematical physics, by the development of one of the most important.

In 1867, Riemann [108] says in *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (On the describabiblty of a function by a trigonometric series) :

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentrich verschidenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkührlichen (graphisch gegenbenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrischen metrischen Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, whelch man die erste grüundliche Arbeit über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, *whelche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle* umfaßt. Es war nötig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigekeit voraufzuschcken. [108, p.3]

3.1. **The trigonometric series by Lagrange and Fourier.** Riemann studies the history of research on Fourier series up to then (*Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkührlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe*, [108, pp.4-17].)
We cite one paragraph of his interesting description from the view of mathematical history as follows :

Als Fourier in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegtet [9], (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, daß eine ganz willkührlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken laße, war diese Behauptung dem greisen Lagrange's unerwartet, daß er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es soll [10] sich hierüber noch ein Schriftstrück in Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist [11] Poisson überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkürlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in Lagrange's Arbeiten über die schwingenden Saiten, wo sich diese Darstellungensweise finden soll. Um diese Bahauptung, die sich nur aus der bekannten Rivalität zwischen Fourier und Poisson erklären laßt [12], zuwiderlegen, sehen wir uns genöthigt, noch einmal auf die Abhandlung Lagrange's zurüchzukommen ; denn über jeden über jenen Vorgang in der Akademie findet sich nichts veröffentlicht. [108, p.10]

● Fourier が熱に関する最初の論文 (21, Dec., 1807) を提出した時、ある全く任意の (グラフによる具象的な) 既知関数を三角関数の級数展開で表現させようとするものであり、最初は流石の白髪の Lagrange [13]もこの論文にかなり当惑したが、きっぱりと拒否した。●

[9] sic. Bulletin des sciences p. la soc. philomatique Tome I. p.112

[10] sic. Nach einer mündlichen Mittheilung des Herr Professor Dirichlet.

[11] sic. Unter Andern in den verbreiteten Traité de mécanique Nro. 323. p. 638.

[12] sic. Der Bericht in bulletin des sciences über die von Fourier der Akademie vorgelegte Abhandlung ist von Poisson.

[13] Lagrange was then seventy-one years old.

その論文は今もフランス国立文書館に収納されているという。（注２。Dirichlet 博士の口頭報告による）● それがため、Poisson は全体を注意深く熟読し、即座に、Lagrange の振動する弦に関する論文の一節に、ある任意の関数の記述のために三角関数の級数展開を使用している個所があるが、そこでこの記述方法を発見したに違いないと異議申し立てた。● Fourier と Poisson の知られた対抗関係を如実に物語るこの申立ての誤りを論駁するため急いで方向転換して、Lagrange の論文にもう一度立ち返りたい ； そうすれば何一つ明らかになっていないアカデミーの中の、こうした出来事に行き着ける。

Riemann cites exactly the French original which we show in (10) as follows :

Man findet inder That an der von Poisson citirten Stelle die Formel:

$$\begin{aligned} y \;=\;& 2\int Y\sin X\pi dX\ \ \sin x\pi + 2\int Y\sin 2X\pi dX\ \ \sin 2x\pi + 2\int Y\sin 3X\pi dX\ \ \sin 3x\pi + \cdots \\ +\;& 2\int Y\sin nX\pi dX\ \ \sin nx\pi, \end{aligned} \tag{1}$$

de sort que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonné qui répond à l'abscisse X. Diese Formel sieht nun allerdinga ganz so aus wie die Fourier'sche Reihe ; so daßbei flüchtigerAnsicht eine Verwerwechselung leicht möglich ist ; aber dieser Schein rührt bloss daher, weil Lagrange das Zeichen $\int dX$ anwendte, wo er heute das Zeichen $\sum \Delta X$ angewandt haben würde. $\cdots$ Wenn man aber seine Abhandlung durchliest, so sieht man, daßer weit davon entfernt ist zu glauben, eine ganz willkührliche Function laße sich wirklich durch eine unendliche Sinusreihe darstellen. [108, pp.10-11]

● 事実、Poisson により引用された一節は (1) である事が分かる。 従って、x = X とすれば、y = Y となり、Y は横軸 X に対応する縦軸である。● この形式は確かにフーリエ級数とは全く違う ； 一見して、ある取り違えの可能性が充分にある ； しかし、それは単なる外見でしかない。何故なら Lagrange が積分記法 ∫ dX を使っている事が（誤解される原因）だ。今日なら Σ Δ X の記法を使っていただろう。● 彼の論文を通読すると、彼がある全く任意の関数をある無限個の sine による級数展開で任意に記述しようとしたとは信じるにはほど遠い事がわかる。

A.Freeman, *The analytical theory of heat by Joseph Fourier*, (Translated in English, with Notes) [37, p.185, footnote], comments Lagrange's statement as follows :

$$\begin{aligned} y \;=\;& 2\Big(\sum_{r=1}^{\infty} Y_r\sin X_r\pi\Delta X\Big)\sin x\pi + 2\Big(\sum_{r=1}^{\infty} Y_r\sin 2X_r\pi\Delta X\Big)\sin 2x\pi + 2\Big(\sum_{r=1}^{\infty} Y_r\sin 3X_r\pi\Delta X\Big)\sin 3x\pi + \cdots \\ +\;& 2\Big(\sum_{r=1}^{\infty} Y_r\sin iX_r\pi\Delta X\Big)\sin ix\pi, \end{aligned} \tag{2}$$

however, (2) is commented by Freeman [37, p.185, footnote] in 1878 with the replacement of $\int dX$ in (1) with $\sum \Delta X$ in compliance with the statement by Riemann in 1867. Poisson says more straight than Riemenn says as follows :

Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de sembles expressions ; [84, ¶28, p.46]

The corresponding of the Fourier's trigonometric series in the 2nd version is as follows :

$$\begin{aligned} (D)_F\quad \frac{\pi}{2}\varphi(x) =\;& \sin x\int \sin x\varphi(x)dx + \sin 2x\int \sin 2x\varphi(x)dx + \sin 3x\int \sin 3x\varphi(x)dx + \cdots \\ +\;& \sin ix\int \sin ix\varphi(x)dx + \cdots ; \end{aligned} \tag{3}$$

[17, ¶219, p.208]

By the way, Fourier's trigonometric series in the first version are as follows :

$$\frac{\pi}{2}\varphi x = \sin x\ S(\varphi x\sin .xdx) + \sin 2x\ S(\varphi x\sin .2xdx) + \cdots + \sin ix\ S(\varphi x\sin .ixdx)\cdots ; \tag{4}$$

TABLE 2. The expressions of deductive steps into trigonometric series in our paper

no	steps	Lagrange	Fourier manuscript	Poisson extract	Fourier prize paper	Fourier 2nd edition	Poisson	Dirichlet	Riemann
1	bibliography year	[51]1759, [55]1762-65	[43]1807	[75]1808	[43]1811	[17]1822	[84]1823	[23]1837	[108]1867
2	arbitrary function by trigonometric series : $f(x) =$	(8)				(39)	(29)		(122)
3	transfer array	§ 3.2				§ 6.1	§ 4.6.1	§ 16.3	
4	transfer matrix(mine)	(5)				(47)	(30)	(106)	
5	multiply $2\sin *$ and sum						(31)	(107)	
6	difference of term by term						(32)-(33)	(108)	
7	general coefficient expression 1	(7)						(107)	
8	general coefficient expression 2	(7)				(48)	(34)	(110)	
9	coefficient a_n, b_n by integral	(9)				(41)	(35)	(111),(114)	
10	expression by integral	(10)=(1)				(40),(44),(45)			
11	expression by sum	(2) by Freeman	(4)=(42)						
12	final expression	(10)=(1)	(4)=(42)			(3)=(40)	(35)	(114),(115), (116)	

[43, p.217]

By Grattan-Guinness, S means that :

> Having used “S” as a summation symbol for *finite* trigonometric series in his n-body-model analysis. [14] Fourier now began to employ it as an integration sign to denote specially significant integrals, such as the coefficients for the trigonometric series. [43, p.211, footnote 10]

We discuss this remark in the below chapter 8.3. cf Grattan-Guinness [43, pp.241-9].

3.2. ***Recherches sur la Nature et la Propagation du Son* by Lagrange [51], 1759.**

Lagrange explains the motion of sound diffusing along with time t by the trigonometric series of the original sample which the after ages, such as Fourier, Poisson, Dirichlet, et al. refer to it. Here, $\varpi = \pi$.

¶ 23. (pp.79-81).

$$P_\nu \equiv Y_1 \sin\frac{\varpi}{2m} + Y_2 \sin\frac{2\varpi}{2m} + Y_3 \sin\frac{3\varpi}{2m} + \cdots + Y_{m-1} \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m}$$

$$Q_\nu \equiv V_1 \sin\frac{\varpi}{2m} + V_2 \sin\frac{2\varpi}{2m} + V_3 \sin\frac{3\varpi}{2m} + \cdots + V_{m-1} \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m}$$

$$\begin{aligned} & y_1 \sin\frac{\varpi}{2m} + y_2 \sin\frac{2\varpi}{2m} + y_3 \sin\frac{3\varpi}{2m} + \cdots + y_n \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} \\ = \ & P_\nu \cos\left(2t\sqrt{e}\sin\frac{\nu\varpi}{4m}\right) + \frac{Q_\nu \sin\left(2t\sqrt{e}\sin\frac{\nu\varpi}{4m}\right)}{2\sqrt{e}\frac{\nu\varpi}{4m}} \equiv S_\nu \end{aligned}$$

[14]cf. § 3.3.

3.2. Transfer array by Lagrange.

$$y_1 \sin\frac{\varpi}{2m} + y_2 \sin\frac{2\varpi}{2m} + y_3 \sin\frac{3\varpi}{2m} + \cdots + y_{m-1} \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} = S_1$$
$$y_1 \sin\frac{2\varpi}{2m} + y_2 \sin\frac{4\varpi}{2m} + y_3 \sin\frac{6\varpi}{2m} + \cdots + y_{m-1} \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} = S_2$$
$$y_1 \sin\frac{3\varpi}{2m} + y_2 \sin\frac{6\varpi}{2m} + y_3 \sin\frac{9\varpi}{2m} + \cdots + y_{m-1} \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} = S_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_1 \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} + y_2 \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} + y_3 \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} + \cdots + y_{m-1} \sin\frac{(m-1)^2\varpi}{2m} = S_{m-1}$$

Here, we can show with a today's style of $(m-1) \times (m-1)$ transform matrix :[15]

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\varpi}{2m} & \sin\frac{2\varpi}{2m} & \sin\frac{3\varpi}{2m} & \cdots & \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} \\ \sin\frac{2\varpi}{2m} & \sin\frac{4\varpi}{2m} & \sin\frac{6\varpi}{2m} & \cdots & \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} \\ \sin\frac{3\varpi}{2m} & \sin\frac{6\varpi}{2m} & \sin\frac{9\varpi}{2m} & \cdots & \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} \\ \cdots & & & & \\ \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} & \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} & \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} & \cdots & \sin\frac{(m-1)^2\varpi}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

¶ 24. (pp.81-82). We assume $D_1 = 1$.

$$\begin{aligned} & y_1 \Big[D_1 \sin\frac{\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{2\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{3\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} \Big] \\ + \;& y_2 \Big[D_1 \sin\frac{2\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{4\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{6\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} \Big] \\ + \;& y_3 \Big[D_1 \sin\frac{3\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{6\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{9\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} \Big] \\ + \;& \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \;& y_{m-1} \Big[D_1 \sin\frac{(m-1)\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{2(m-1)\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{3(m-1)\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{(m-1)^2\varpi}{2m} \Big] \\ = \;& D_1 S_1 + D_2 S_2 + D_3 S_3 + \cdots + D_{m-1} S_{m-1} \end{aligned}$$

In general, we may state as follows :

$$\begin{aligned} & y_\mu \Big[D_1 \sin\frac{\mu\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{2\mu\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{3\mu\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{(m-1)\mu\varpi}{2m} \Big] \\ = \;& D_1 S_1 + D_2 S_2 + D_3 S_3 + \cdots + D_{m-1} S_{m-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

Generally speaking,

$$D_1 \sin\frac{\lambda\varpi}{2m} + D_2 \sin\frac{2\lambda\varpi}{2m} + D_3 \sin\frac{3\lambda\varpi}{2m} + \cdots + D_{m-1} \sin\frac{(m-1)\lambda\varpi}{2m} = 0, \quad \text{for } \forall\lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

¶ 25. (pp.82-87).

$$\sin(m-s)\frac{\mu\varpi}{2m} = \sin\left(\frac{\mu\varpi}{2} - \frac{s\mu\varpi}{2m}\right) = \pm \sin\frac{s\mu\varpi}{2m}, \quad m, s, \mu \in \mathbb{Z}$$

where,

$$\begin{cases} + & \text{mod } (\mu, 2) = 1, \\ - & \text{mod } (\mu, 2) = 0 \end{cases}$$

[15] Lagrange didn't use the transform-matrix symbol, but mine. cf. Poisson's expression (30) and Dirichlet's expression (106)

Assuming L : const,

$$D_s = \pm\Big(\frac{L}{2^{m-2}}\Big)\frac{\sin\frac{s\mu\varpi}{\sin}}{\sin\frac{\mu\varpi}{2m}}$$

¶ 26. (pp.87-89.)

$$\begin{aligned} & y_\mu\Big[D_1\sin\frac{\mu\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2\mu\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{3\mu\varpi}{2m}+\cdots+D_{m-1}\sin\frac{(m-1)\mu\varpi}{2m}\Big] \\ = \quad & \pm\frac{L}{2^{m-2}\sin\frac{\mu\varpi}{2m}}\Big[S_1\sin\frac{\mu\varpi}{2m}+S_2\sin\frac{2\mu\varpi}{2m}+S_3\sin\frac{3\mu\varpi}{2m}+\cdots+S_{m-1}\sin\frac{(m-1)\mu\varpi}{2m}\Big]\end{aligned}$$

$$D_1\sin\frac{\lambda\varpi}{2m}+D_2\sin\frac{2\lambda\varpi}{2m}+D_3\sin\frac{3\lambda\varpi}{2m}+\cdots+D_{m-1}\sin\ \frac{(m-1)\lambda\varpi}{2m}=\pm\Big(\frac{L}{2^{m-1}}\Big)\frac{m}{\sin\frac{\mu\varpi}{2m}}$$

$$\pm y_\mu\frac{Lm}{2^{m-1}}=\pm\frac{L}{2^{m-2}}\Big[S_1\sin\frac{\mu\varpi}{2m}+S_2\sin\frac{2\mu\varpi}{2m}+S_3\sin\frac{3\mu\varpi}{2m}+\cdots+S_{m-1}\sin\ \frac{(m-1)\mu\varpi}{2m}\Big]$$

[16] Finally, Lagrange gets the coefficient y_μ :

$$y_\mu=\frac{2}{m}\Big[S_1\sin\frac{\mu\varpi}{2m}+S_2\sin\frac{2\mu\varpi}{2m}+S_3\sin\frac{3\mu\varpi}{2m}+\cdots+S_{m-1}\sin\frac{(m-1)\mu\varpi}{2m}\Big] \tag{7}$$

[51, ¶23-26, pp.79-89]

Lagrange states the next steps of deduction of integral in the next section 3.3.

3.3. ***Solution de différents problèmes de calcul intégral. Des vibrations d'une corde tendue et changée d'un nombre quelconque de poids*** **by Lagrange** [55]**, 1762-65.**

We can see *Miscellanea Taurinensia, III*, which Poisson and Riemann cite as the alledged 'original' trigonometric series (1), that is, (10).

¶ 40. (The n-body model of the sonic cord.)

> Supposons présentement que le nombre n des corps soit très grand, et que, par conséquent, la distance a d'un corps à l'autre soit très-petit, la longeur de toute la corde étant égale à 1 ; il est clair que les différences $\Delta^2 Y,\ \Delta^4 Y,\ \cdots$ deviendront très-petite du second ordre, du quatrième, $\cdots$; donc, puisque $k=\sqrt{\frac{nc^2}{a}}=\frac{c}{a}$, à cause de $n=\frac{1}{a}$, les quantités $k\Delta^2 Y,\ k\Delta^4 Y,\ k^2\Delta^6 Y,\ \cdots$ seront très-petite du second ordre, du quatrième, $\cdots$; et par conséquent les quantités P et Q pourront être regardées et traitées comme nulles sans erreur sensible.
>
> Ainsi, dans cette hypothèse, on aura à très-peu près le mouvement de la corde, en faisant passer par les sommets des ordonnées très-proches $Y',\ Y'',\ Y''',\ \cdots$, lesquelles représentent la figure initial du polygone vibrant, une courbe dont l'équation sont
>
> $$y=\alpha\sin\pi x+\beta\sin 2\pi x+\gamma\sin 3\pi x+\cdots+\omega\sin n\pi x, \tag{8}$$
>
> et que j'appellerai *génératrice*, et prenant ensuit pour l'ordonnée du polygone vibrant, qui répond à une abscisse quelconque $\frac{s}{n+1}=x$, la demi-somme de deux ordonnées de cette courbe, desquelle l'une réponde à l'abscisse $\frac{s+kt}{n+1}=x+ct$, et l'autrer éponde à l'abscisse $\frac{s-kt}{n+1}=x-ct$; et cette détermination sera toujours d'autant plus exacte que le nombre n sera plus grand. Or il est évident que plus le nombre des poids est grand, plus le polygone initial doit s'approcher de la courbe circonscrite ; d'où il s'ensuit qu'en supposant le nombre des poids infini, ce qui est le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe génératrice, et qu'ainsi pour avoir cette courbe il n'y aura qu'à transporter la coubre initial alternativement au-desus et

[16] Dirichlet also uses the same style of expression (107) with (7).

au-dessus de l'axe à l'infini (numéro précédent). [55, ¶ 40, p.551-2]

¶ 41. (Deduction of trigonometric series and its coefficients.)

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coincident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de poids aussi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l'équation

$$y = \frac{2Y_1}{n+1}\sin x\pi + \frac{2Y_2}{n+1}\sin 2x\pi + \frac{2Y_3}{n+1}\sin 3x\pi + \cdots + \frac{2Y_n}{n+1}\sin nx\pi$$

et, par ce que j'ai démontré dans le n^o 39, j'aurai, lorsque $x = \frac{s}{n+1}$, $y = Y^{(')}$.

Soient maintenant $n+1 = \frac{1}{dX}$, $\frac{s}{n+1} = X$, on aura

$$y_m = \int Y \sin mX\pi = (n+1)\int Y \sin mX\pi dX, \tag{9}$$

cette intégral étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$; par conséquent

$$\begin{aligned} y = \;& 2\int Y \sin X\pi dX \;\; \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi dX \;\; \sin 2x\pi + 2\int Y \sin 3x\pi \sin 3x\pi + \cdots \\ + \;& 2\int Y \sin nX\pi dX \;\; \sin nx\pi \end{aligned} \tag{10}$$

de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonné qui réspond à l'sbscisse X.

[55, ¶ 41, p.553]

Lagrange's (5), (7) and (10) corresponds with Poisson's (30), (34) and (35), and Dirichlet's (106), (110) and (114)-(115)-(116) respectively. We can observe each sequential steps to deduce the trigonometric series by the Table 2, which tells each meticulousness.

3.4. **Poisson's paradigm of universal truth.**

Poisson attacks the definite integral by Euler and Laplace, and Fourier's analytical theory of heat, and manages to construct universal truth in the paradigms.

One of the paradigms is made by Euler and Laplace. The formulae (12) deduced by Euler, are the target of criticism by Poisson. Laplace succeeds to Euler and states the passage from real to imaginary or reciprocal passage between two, which we mention in below.

The other is Fourier's application of Du Gua. The diversion from (91) to (90) is Fourier's essential tool for the analytical theory of heat.

Dirichlet calls these passages a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. cf. Chapter 1. We think that Poisson's strategy is to destruct both paradigms and make his own paradigm to establish the univarsal truth between mathematics and physics. We would like to show it from this point of view in our paper.

4. Poisson's propositions on the passage from real to imaginary

4.1. **The definite integral of an example by Euler.**

Euler states the definite integral in *Supplement V to Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser.I, XI, Sectio Prima, Caput VIII*, [28] in 1781, as follows :

4) On the definite integral of the interval of variable limit from $x = 0$ to $x = \infty$.

§124.

In the following forms, the interval from $x = 0$ to $x = \infty$, the most simple case is on the circle, $\int \frac{\partial x}{(1+x)^2}$, whose value is $\frac{\pi}{2}$, where, assuming the diameter $= 1$, then the length of circumference is π.

Next, by the method, which is known as only one absolutely,

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(1+x)^n}\begin{bmatrix} x=0 \\ x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}, \qquad \text{namely,} \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{(1+x)^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

Next, our integral of problem will be $\int x^\lambda \partial x \cdot e^{-x} = \lambda x^{\lambda-1}\partial x \cdot e^{-x}$, with the help of the formula : $\int_0^\infty \partial x \cdot e^{-x} = 1$, the values of sequential integrals are deduced as follows :

$$\int x\partial x \cdot e^{-x} = 1,\ \int x^2\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2,\ \int x^3\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2\cdot 3,\ \int x^4\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,$$

(omitted.)

§133.

If we assume $p = f\cos\ \theta,\quad q = f\sin\ \theta,\quad \Rightarrow$

$$(p+q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos\ n\theta + \sqrt{-1}\sin\ n\theta),\quad (p-q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos\ n\theta - \sqrt{-1}\sin\ n\theta) \quad (11)$$

where, $\theta = \frac{q}{p},\quad f = \sqrt{p^2+q^2},\quad \Delta = \int x^{n-1}\partial x \cdot e^{-x}$. Then, our integral expression turns into :

$$\frac{\Delta}{p+q\sqrt{-1}} = \frac{\Delta}{f^n(\cos\ n\theta + \sqrt{-1}\sin\ n\theta)}$$

§134.

従って積分公式 (11) を辺々加えるならば、$\displaystyle\int y^{n-1}\partial y \cdot e^{-py}\cos\ qy = \frac{\Delta\cos\ n\theta}{f^n}$. しかしもし、積分公式 (11) を辺々引き、$2\sqrt{-1}$ で割ると、$\displaystyle\int y^{n-1}\partial y \cdot e^{-py}\sin\ qy = \frac{\Delta\sin\ n\theta}{f^n}$.
これらの２つの積分公式は最も長期間に亘り、 これまで完全に任意の p と q の数としたまま放置して来たが、それは、考察したが、p に対しては負の数でないもので甘んじて来た。

従って、挑戦する価値があるのは、これらの後述する対を為す定理の２つの積分公式について理解することである。$\Delta = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)$ と置く、p と q に正の任意の数を与え、 $\sqrt{(p^2+q^2)} = f$ と置く。これで出来る角度を θ とする、 即ち、$\theta = \frac{q}{p}$ である。
この注目すべき積分は以下の値となる。

$$\text{公式 I}: \int_0^\infty x^{n-1}\partial x \cdot e^{-px}\cos\ qx = \frac{\Delta\cos\ n\theta}{f^n},\quad \text{公式 II}: \int_0^\infty x^{n-1}\partial x \cdot e^{-px}\sin\ qx = \frac{\Delta\sin\ n\theta}{f^n} \quad (12)$$

[28, p.337-343]

Poisson talks about Euler's integral method as follows :

> These formulas owe to Euler, which however, he have discovered by a sort of induction based on diversion from real to imaginary ; although the induction is allowed as the discovering method, however, we must verify the result with the direct and strict method. [77, ¶ 1, p.219], cf. Chapter 4.5.

4.2. The Lacroix's introduction of definite integral by Euler.

(1079) Puisque la formule $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}}$ peut toujours se ramener à une autre dans laquelle l'exposant de x, hors de la parenthèse, soit moindre que n, et celui de la parenthèse un fraction nágative, il suffit de considérer les transcendantes contenues dans l'expression

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1},$$

en y supposant $m-1<n$ et $p<n$, les nombres $m,\ n$ et p étant d'ailleurs entiers et positifs. Si l'on fait d'abord $1-x^n = y^n$, on aura

$$x^m = (1-y^n)^{\frac{m}{n}},\quad mx^{m-1}dx = -my^{n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

d'oú il résultera

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = -\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

mais, en observant que les limites $x = 0$ et $x = 1$, répondent à $y = 1$ et $y = 0$, on changera le signe de la seconde intégrale en changeant l'ordre de ses limites, et l'on en conclura que

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}} \quad \left(\Rightarrow \quad \int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \int_1^0 y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}\right)$$

lorsqu'on prend l'une et l'autre intégrale entre les limites 0 et 1. Rien n'empêchant qu'on n'écrive dans la seconde membre x à la place de y, on voit par là que l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x)^{\frac{p-n}{n}}$, prise entre les limites 0 et 1, conserve la même valeur lorsque l'on y permute les exposants m et p ; si donc on fait pour abrége,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \varphi(m,p), \qquad \int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \varphi(p,m),$$

on aura cette équation remarquable

$$(1)_L \quad \varphi(m,p) = \varphi(p,m)$$

[50, p.398]

Lacroix [50] states Euler's integral method of this formula :

(1083) Pour obtenir par des séries convergentes la valeur d l'intégrale $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-p}{n}}}$, Euler la partage en deux parties, l'une prise entre les limites $x = 0$ et $x^n = \frac{1}{2}$, et l'autre entre $x^n = \frac{1}{2}$ et $x = 1$; nommant M la premiè, P la seconde, et formant la série par la developpement de $\frac{1}{(1-x^n)^{\frac{n-p}{n}}}$, suivant les puissances ascendantes de x, il trouve

$$P = \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{1}{m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+m} + \cdots\right\}, \quad (13)$$

résultat dont chaque terme est moindre que la moitié de celui qui le précède. Faisant ensuit $1-x^n = y^n$, il change la formule proposée en $-\int p^{p-1}dy(1-y)^{\frac{m-n}{n}}$ (no.1079), qu'il faut prendre entre les limites $y = \frac{1}{2}$ et $y^n = 0$; et l'ordre de ces limites étant renversé, il vient $P = \int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$, ou

$$P = \frac{1}{2^{\frac{p}{n}}}\left\{\frac{1}{p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \cdots\right\}, (14)$$

puis enfin $\varphi(m,p) = M + P$. [50, p.410]

It is remarkable that (13) and (14) are made with the permutation of $p \Leftrightarrow m$.

4.3. ***Mémoire sur divers points d'analyse*, by Laplace [60], 1809.**

In 1809, Laplace states *Mémoire sur divers points d'analyse*, in which he introduces the techniques of integral.

Sur les intégrales définies des Équations à différences partielles.

J'ai donné, dans les Mémoires déjà cités de l'Académie des sciences de l'année 1779, une méthode pour intégrer dans un grand nombre de cas, les équations lineáres aux differences partielles finies ou infiniment petites, au moyen d'intégrales défines, lorsque l'intégration n'est pas possible en termes finies. Plusierurs géomètres se sont occupés depuis du même objet, mais sans s'assujettir à la condition que l'expression en intégrales définies, devienne l'intégrale en termes finis, lorsqu'elle est possible. [60, p.235]

For example, he introduce how to derive the following expression.

$$y = \quad \Phi(x') + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d\Phi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{d^2\Phi(x')}{dx'^2} + \cdots + x \cdot \Psi(x') + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d\Psi(x')}{dx'} + \cdots$$

$\Phi(x')$ et $\Psi(x')$ étant deux fonctions arbitraires de x'. Cettet expression parait donc, au premier coup-d'œil, plus généralement que la précédente, qui ne enferme qu'une seule fonction arbitraire ; mais nous allons faire voir qu'elle en dérive. Supposons que $\Gamma^{(2r-1)}\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big]$ soit une fonction arbitraire qui ne renferme que des puissances paires de $x + 2z\sqrt{x'}$; on satisfera par ce qui précéde, à l'équation proposée aux différences partielles, en faisant

$$y = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big]$$

En développant cette expression de y par rapport aux puissances de x, on aura

$$y = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Big\{\Gamma\Big[2z\sqrt{x'}\Big] + x \cdot \Gamma'\Big[2z\sqrt{x'}\Big] + \frac{x^2}{2!} \cdot \Gamma''\Big[2z\sqrt{x'} \cdots\Big]\Big\}$$

$\Gamma\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$ ne renfermant que des puissances *paires* de $2z\sqrt{x'}$, $\Gamma'\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$ ne renfermant que des puissances *impaires* de la même quantité ; en sorte que on aura

$$\Gamma'\Big[-2z\sqrt{x'}\Big] = -\Gamma'\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$$

en par conséquent $\int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma'\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$ est nul dans les limites $z = -\infty$ et $z = \infty$. De plus, on a

$$\int c^{-z^2} \cdot zdz \cdot \Gamma^{(2r)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big] = \frac{c^{-z^2}}{2\sqrt{x'}} \cdot \Gamma^{(2r-1)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big] + \int \frac{c^{-z^2} \cdot zdz}{\sqrt{x'}} \cdot \Gamma^{(2r-1)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big];$$

Le premier de ce deux termes est nul dans les limits $z = -\infty$ et $z = \infty$, parce que nous supposons généralement $\Gamma^{(2r-1)}\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big]$ tel que son produit par c^{-z^2} disparaisse lorsque z est fini. Le terme $\int \frac{c^{-z^2} \cdot zdz}{\sqrt{x'}} \cdot \Gamma^{(2r-1)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$ est égal à

$$\frac{d}{dx'} \cdot \int c^{-z^2} \cdot dz \cdot \Gamma^{(2r-2)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big];$$

on aura ainsi généralement

$$\int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma^{(2r)}\Big[2z\sqrt{x'}\Big] = \frac{d^r}{dx'^r} \cdot \int c^{-z^2} \cdot dz \cdot \Gamma\Big[2z\sqrt{x'}\Big];$$

en désignant donc par $\Phi(x')$ l'intégrale $\int c^{-z^2} \cdot dz \cdot \Gamma\Big[2z\sqrt{x'}\Big]$, on aura

$$y = \Phi(x') + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d\Phi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{d^2\Phi(x')}{dx'^2} + \cdots = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \tag{15}$$

Si l'on désigne maintenent par $\Pi\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big]$ une fonction qui ne renferme que des puissances impaires de $x + 2z\sqrt{x'}$, on aura

$$y = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Big\{x \cdot \Pi'\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] + \frac{x^3}{3!} \cdot \Pi'''\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] + \cdots\Big\},$$

fonction que l'on réduira, comm ci-dessus, à la suivante, en faisant

$$\int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Pi'\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \equiv \Psi(x'),$$

$$y = x \cdot \Psi(x') + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d\Psi(x')}{dx'} + \cdots = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Pi\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \tag{16}$$

En réunissant ces deux expressions de y, comme on le peut, l'équation proposée aux différences partielles étant linéaire, on aura

y に関する（偶数冪 (15) と奇数冪 (16) の）２つの式を合わせると、それが出来るとして、線形性を持つ偏微分で提示した方程式は単関数Φだけの以下の形になる。

$$\begin{aligned} y = \;& \Phi(x') + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d\Phi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{d^2\Phi(x')}{dx'^2} + \cdots + x \cdot \Psi(x') + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d\Psi(x')}{dx'} + \cdots \\ = \;& \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] + \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Pi\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \\ = \;& \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Phi[x + 2z\sqrt{x'}] \end{aligned}$$

[60, p.243]

Laplace uses also the divisional integral like Euler, here Poisson critisizes both methods.

Sur le passage réciproque des Résultats réels aux Résultats imaginaire.

Lorsque les résultats sont exprimés en quantités indéterminées, la généralité de la notation embrasse tous les cas, soit réeles, soit imaginaires. L'analyse a tiré un grand parti de cette extension, sur-tout dans le calcul des sinus et des cosinus, qui peuvent, comme l'on sait, être représentés par des exponnentielles imaginaires. J'ai fait voir, dans ma *Théorie des Approximations des formules qui sont fonctions de trés-grands nombres*, inséré dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année 1782, que ce *passage du réel à l'imaginaire*, pourait encore avoire lieu, même lorsque les résultats sont exprimés en quantités déterminées ; et j'en ai conclu les valeurs de quelques intégrales définies, qu'il serait difficile d'obtinir par d'autre moyens. Je vais donner ici quelques nouvelles applications de cet artifice remarquable. [60, p.244]

Poisson critisizes Laplace's diversion from real to imaginary from here.

4.4. ***Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson [76], 1811.**

Dans le 15^e cahier de Journal de l'Ecole polytechnique, M. Laplace donné des intégrales définies formules qui contiennement des sinus et cosinus. Il les a déduites des intégrales des exponentielies, par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réeles aux imaginaires. Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats, et d'y parvenir directement par considerátion des intégrales *multiples* dont M. Laplace s'est déjà servi dans un article de son mémoire sur les Fonctions de grands nombres (Académie des Sciences de Paris, année 1782, page 11);[17] et pour réunir sous un même point de vue ce qu'on a trouve de plus général jusqu'à présent sur les intégrales définies, nous commencerons par nous occuper de celles qui renferment des exponentielles. [76, p.243]

4.5. ***Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson [77], 1813.**

Poisson issued *Mémoire sur les intégrales définies* [77] in 1813, in which he called our attention to induce from real to imaginary number, using the following example.

[17] Laplace [59]

¶ 1.

$$\int e^{-bx}\cos ax\ x^{n-1}dx = y, \quad \int e^{-bx}\sin ax\ x^{n-1}dx = z \tag{17}$$

$$\frac{dy}{da} = -\int e^{-bx}\sin ax\ x^n dx, \quad \frac{dz}{da} = \int e^{-bx}\cos ax\ x^n dx \tag{18}$$

$$\begin{cases} \int e^{-bx}\sin ax\ x^n dx = -\frac{1}{b}e^{-bx}\sin ax\ x^n + \frac{a}{b}\int e^{-bx}\cos ax\ x^{n-1}dx + \frac{n}{b}\int e^{-bx}\sin ax\ x^{n-1}dx, \\ \int e^{-bx}\cos ax\ x^n dx = -\frac{1}{b}e^{-bx}\cos ax\ x^n - \frac{a}{b}\int e^{-bx}\cos ax\ x^{n-1}dx + \frac{n}{b}\int e^{-bx}\cos ax\ x^{n-1}dx \end{cases}$$

where, we assume b and n positive.

$$\frac{dy}{da} = \frac{a}{b}\frac{dz}{da} + \frac{n}{b}z, \quad \frac{dz}{da} = \frac{a}{b}\frac{dy}{da} + \frac{n}{b}y \tag{19}$$

$$\frac{d.(b^2+a^2)\frac{dy}{da}}{da} + 2na\frac{dy}{da} + (n+n^2)y = 0 \tag{20}$$

Here we put t is the arc of $\tan\frac{a}{b}$, namely $t = \arctan\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{a}{b}$,

$$\tan^{-1}\frac{a}{b} = t \quad \Big(\Rightarrow \quad \frac{d\tan^{-1}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\Big) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{da}\tan^{-1}\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\frac{b^2}{b^2+a^2} = dt,$$

then

$$da = (b^2+a^2)\frac{dt}{b} \quad \Rightarrow \quad (b^2+a^2)\frac{dy}{da} = b\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad (b^2+a^2)\frac{d.(b^2+a^2)\frac{dy}{da}}{da} = (b^2+a^2)\frac{d.b\frac{dy}{dt}}{da} = b^2\frac{d^2y}{dt^2} \tag{21}$$

Multiply (20) with (b^2+a^2) and using (21), then we get :

$$\underbrace{(b^2+a^2)\frac{d.(b^2+a^2)\frac{dy}{da}}{da}}_{b^2\frac{d^2y}{dt^2}} + 2na\underbrace{(b^2+a^2)\frac{dy}{da}}_{b\frac{dy}{dt}} + (n+n^2)(b^2+a^2)y = 0$$

$$\Rightarrow \quad b^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2nba\frac{dy}{dt} + n(1+n)(b^2+a^2)y = 0 \tag{22}$$

Here, we suppose

$$y = (b^2+a^2)^m u$$

where, we put u as a new variable, m as an independent exponent, then

$$\frac{dy}{dt} = (b^2+a^2)^m\frac{du}{dt} + \frac{2ma}{b}(b^2+a^2)^m u = (b^2+a^2)^m\Big(\frac{du}{dt} + \frac{2ma}{b}u\Big) \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= (b^2+a^2)^m\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{4ma}{b}(b^2+a^2)^m\frac{du}{dt} + \Big[\frac{2m}{b^2}(b^2+a^2) + \frac{4m^2a^2}{b^2}\Big](b^2+a^2)^m u \\ &= (b^2+a^2)^m\Big(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{4ma}{b}\frac{du}{dt} + \Big[\frac{2m}{b^2}(b^2+a^2) + \frac{4m^2a^2}{b^2}\Big]u\Big) \end{aligned} \tag{24}$$

After dividing (23) and (24) by $(b^2+a^2)^m$, substituting for (22), then

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{4ma}{b}\frac{du}{dt} + \Big[\frac{2m}{b^2}(b^2+a^2) + \frac{4m^2a^2}{b^2}\Big]u + 2nba\Big(\frac{du}{dt} + \frac{2ma}{b}u\Big) + n(1+n)(b^2+a^2)u = 0$$

The coefficient of term u :

$$\begin{aligned} &\Big(2m + n(1+n)\Big)b^2 + \Big(2m + 4mn + n(1+n) + 4m^2\Big)a^2 \\ =\ &\Big(2m + n(1+n)\Big)b^2 + \Big(2m(1+2n) + n(1+n) + 4m^2\Big)a^2 \end{aligned}$$

$$b^2\frac{d^2u}{dt^2} + 2(n+2m)ba\frac{du}{dt} + \Big[(n+n^2+2m)b^2 + (n+2m)(1+n+2m)a^2\Big]u = 0, \tag{25}$$

Taking $m = -\frac{n}{2}$, (25) reduces to :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = 0$$

Namely, of (25), taking $m = -\frac{n}{2}$, or $2m + n = 0$, then

$$u = A\cos nt + B\sin nt,$$

where A and B are arbitrary constants. We integrate (22), then

$$y = \frac{A\cos nt + B\sin nt}{\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \tag{26}$$

To determinate A and B, we put $a = 0$ into (26), then

$$y = Ab^{-n}, \quad \frac{dy}{da} = Bnb^{-n}$$

we put $a = 0$ into y of (17) and $\frac{dy}{da}$ of (18), then

$$y = \int e^{-bx}x^{n-1}dx, \quad \frac{dy}{da} = 0,$$

$$A = b^n \int e^{-bx}x^{n-1}dx, \quad B = 0,$$

This value of A is independent of b, for if $bx = \theta$, then we get

$$A = b^n \int e^{-bx}x^{n-1}dx = \int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$$

$$y = \frac{\cos nt}{\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$$

From (19), by eliminating $\frac{dz}{da}$, we get the following :

$$nbz + nby + (b^2 + a^2)\frac{dy}{da} = 0.$$

We get the value of z :

$$z = \frac{\sin nt}{\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$$

$$\int e^{-bx}\cos ax\; x^{n-1}dx = \frac{\cos nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta, \quad \int e^{-bx}\sin ax\; x^{n-1}dx = \frac{\sin nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta,$$

where, t is the arc of $\tan\frac{a}{b}$, namely $t = \arctan\frac{a}{b}$.

Poisson concludes as the following :

> Ces formules sont dues à *Euler*,[18] qui les a trouvées par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réelles aux imaginaires ; induction qu'on peu bien employer comme un moyen de découverte, mais dont les résultats ont besoin d'être confirmés par *des méthodes directes et rigoureuses*. Les formules que j'ai demontrées par la considération des intégrales doubles, dans le n^o 42 du nouveau *Bulletin* de la Société philomatique,[19] ne sont qu'un cas particulier des précédentes, dont elles se déduisent, en y faisant $b = 0$. [77, ¶ 1, p.219]

[18]Tome IV de son Calcul intégral, pages 337 et suivantes. (sic). [28], cf. (12) in the Chapter 4.1.

[19]Poisson [76]

これらの公式は Euler に拠るものだが、彼はこれらの実数量の虚数量への流用に基ずくある種の推論により見出したもので、推論は発見手段としては取り敢えず用いる事が出来るとしても、結果を直接かつ厳密な方法で確認する必要がある。私が nouveau *Bulletin* の n^o 42 [76] で二重積分の考察によって証明した公式は、前例の特別な場合だけでなく、$b=0$ としても導出される。 [77, ¶ 1, p.219]

¶ 2.

When $n=1$ then, $\int e^{-\theta}\theta^{n-1}d\theta$ turns into $\int e^{-\theta}d\theta = 1$. $\tan t = \frac{a}{b}$ deduces $\cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ and $\sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$(4) \quad \int e^{-bx}\frac{\sin\ ax}{x}dx = \arctan\frac{a}{b}$$

$$\int e^{-bx}\frac{\cos\ ax}{x}dx = -\frac{1}{2}\log\ (b^2+a^2) + C$$

$$(5) \quad \int e^{-bx}\Big(\cos\ ax - \cos\ a'x\Big)dx = \frac{1}{2}\log\ \frac{b^2+a'^2}{b^2+a^2}$$

$$\int \frac{\sin\ ax}{x}dx = \int\frac{\sin z}{z}dz$$

¶ 11.

$$\int \frac{x^{2p}\ dx}{[(a^2+x^2)(1-x^4)]^p} = \frac{\cos[(2p+1)t - p\pi]}{(1+a^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos p\pi}\int\frac{x^{1-2p}\ dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

The left hand-side of this equation is a function of a, when the exponent p is given, then this depends on only the numerical transcendental : $\int \frac{x^{1-2p}\ dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. In the case of $a=1$, we get $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ and then :

$$\int \frac{x^{2p}\ dx}{(1-x^4)^p} = \frac{\cos\ \frac{(2p+1)\pi}{4}}{2^{p-\frac{1}{2}}\cos p\pi}\int\frac{x^{1-2p}\ dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Elle exprime alors une nouvelle relation entre les intégrales définies binomes, qui pourra servir à la réduction de ces transcendantes. On peut consulter sur ce sujet différens mémoires d'*Euler* et l'ouvrage de M. *Legendre*, qui a pour titre : *Exercice de calcul intégral.* [77, ¶ 11, p.246]

4.6. ***Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries*, by Poisson** [88]**, 1823.**

Poisson has observed the problems on the definite integral during 12 years of 1811-23 in the series : [76], [77], [79], [81], and finally, [88].

4.6.1. Expression des Fonctions par des Séries de Quantités périodiques.
¶58. (pp.435-8).

$$(b)_P \quad fx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} fx'\ dx' + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Big[\sum\cos\frac{n\pi(x-x')}{l}\Big]fx'\ dx'$$

$$(f)_P \quad fx = \frac{1}{l}\int_0^l fx'\ dx' + \frac{2}{l}\int_0^l\Big[\sum\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x'}{l}\Big]fx'\ dx'$$

$$(g)_P \quad fx = \frac{2}{l}\int_0^l\Big[\sum\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l}\Big]fx'\ dx'$$

$$fx = \frac{1}{4l}\int_{-l}^{l} fx'\ dx' + \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \Big[\sum \cos\frac{n\pi(x-x')}{2l}\Big] fx'\ dx' \tag{27}$$

We divide the second term of the right-hand side of (27) into even and odd part, then

$$fx = \frac{1}{4l}\int_{-l}^{l} fx'\ dx' + \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \Big[\sum \cos\frac{n\pi(x-x')}{l}\Big] fx'\ dx' + \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \Big[\sum \cos\frac{(2n-1)\pi(x-x')}{2l}\Big] fx'\ dx' \tag{28}$$

Multiplying (28) with 2 and subtract with $(b)_P$, then

$$fx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \Big[\sum \cos\frac{(2n-1)\pi(x-x')}{2l}\Big] fx'\ dx'$$

¶62. (pp.444-9). The integral known facts reduced to Lagrange's.
We suppose $n > 0 \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{m}{n+1}) = y_m, \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$. We state n equations :

$$(i)_P \quad y = Y_1 \sin \pi x + Y_2 \sin 2\pi x + Y_3 \sin 3\pi x + \cdots + Y_n \sin n\pi x \tag{29}$$

4.6.1. Transfer array by Poisson.

$$y_1 = Y_1 \sin\frac{\pi}{n+1} + Y_2 \sin\frac{2\pi}{n+1} + Y_3 \sin\frac{3\pi}{n+1} + \cdots + Y_n \sin\frac{\pi n}{n+1}$$
$$y_2 = Y_1 \sin\frac{2\pi}{n+1} + Y_2 \sin\frac{4\pi}{n+1} + Y_3 \sin\frac{6\pi}{n+1} + \cdots + Y_n \sin\frac{2\pi n}{n+1}$$
$$y_3 = Y_1 \sin\frac{3\pi}{n+1} + Y_2 \sin\frac{6\pi}{n+1} + Y_3 \sin\frac{9\pi}{n+1} + \cdots + Y_n \sin\frac{3\pi n}{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = Y_1 \sin\frac{\pi n}{n+1} + Y_2 \sin\frac{2\pi n}{n+1} + Y_3 \sin\frac{3\pi n}{n+1} + \cdots + Y_n \sin\frac{\pi n^2}{n+1}$$

Now, we can show with a today's style of $(n \times n)$ transform matrix :[20]

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n+1} & \sin\frac{2\pi}{n+1} & \sin\frac{3\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{\pi n}{n+1} \\ \sin\frac{2\pi}{n+1} & \sin\frac{4\pi}{n+1} & \sin\frac{6\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{2\pi n}{n+1} \\ \sin\frac{3\pi}{n+1} & \sin\frac{6\pi}{n+1} & \sin\frac{9\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{3\pi n}{n+1} \\ \cdots \\ \sin\frac{\pi n}{n+1} & \sin\frac{2\pi n}{n+1} & \sin\frac{3\pi n}{n+1} & \cdots & \sin\frac{\pi n^2}{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \tag{30}$$

Multiplying with $2\sin\frac{\pi m}{n+1}, \quad 2\sin\frac{2\pi m}{n+1}, \quad 2\sin\frac{3\pi m}{n+1}, \cdots, 2\sin\frac{n\pi m}{n+1}$, then the coefficient $Y_{m'}$, where $m' \neq m$, is as follows :

$$2\sin\frac{\pi m'}{n+1}\sin\frac{\pi m}{n+1} + 2\sin\frac{2\pi m'}{n+1}\sin\frac{2\pi m}{n+1} + 2\sin\frac{3\pi m'}{n+1}\sin\frac{3\pi m}{n+1} + \cdots + 2\sin\frac{n\pi m'}{n+1}\sin\frac{n\pi m}{n+1}, \tag{31}$$

This is the difference in term by term of two sums (32) and (33):

$$1 + \cos\frac{\pi(m'-m)}{n+1} + \cos\frac{2\pi(m'-m)}{n+1} + \cos\frac{3\pi(m'-m)}{n+1} \cdots + \cos\frac{n\pi(m'-m)}{n+1}, \tag{32}$$

$$1 + \cos\frac{\pi(m'+m)}{n+1} + \cos\frac{2\pi(m'+m)}{n+1} + \cos\frac{3\pi(m'+m)}{n+1} \cdots + \cos\frac{n\pi(m'+m)}{n+1}, \tag{33}$$

$$\begin{cases} (32) = \frac{1}{2}[1-\cos(m'-m)\pi] = 1, \quad (33) = \frac{1}{2}[1-\cos(m'+m)\pi] = 1, & m' \neq m, \quad m',\ m \in \mathbb{Z}, \\ (32) = n+1, \quad (33) = \frac{1}{2}[1-\cos\ 2m\pi] = 0, & m' = m, \quad m',\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

[20]Poisson doesn't use the transform-matrix symbol, but mine.

If $m' \neq m$, the difference is zero, if $m' = m$, $(32) - (33) = n+1$. [21] Then we must divide Y_m by $n+1$:

$$Y_m = \frac{2}{n+1}\Big(y_1 \sin\frac{\pi m}{n+1} + y_2 \sin\frac{2\pi m}{n+1} + y_3 \sin\frac{3\pi m}{n+1} + \cdots + y_n \sin\frac{n\pi m}{n+1}\Big) \tag{34}$$

Here, Poisson explains the exchange the sum of Y_m with the integral $\int_0^1$ by a special technique of interpolation.

> Les coefficiens $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \cdots,\ Y_n$, étant ainsi déterminés, la formule $(i)_P$ coïncidera avec la fonction fx,
>
> - pour toutes les valeurs de x contenues depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et qui sont des multiples exacts de la fraction $\frac{1}{n+1}$;
> - et pour les autres valeurs de x comprises dans le même intervalle,
>
> on devra la regarder comme une formule d'interpolation d'une espèce particulière, qui pourra servir à calculer les valeurs approchées de fx, quand la forme de cette fonction ne sera pas connus. Si l'on construit deux coubres qui aient x et y pour coordonées, dont
>
> - l'une ait $y = fx$ pour équation,
> - et l'autre l'équation $(i)_P$,
>
> ces deux coubres couperont l'axe des abscisses x aux deux points correspondans à $x = 0$ et $x = 1$; et dans l'intervalle compris entre ces deux points, elles auront un nombre n de points communs, dont les projections sur l'axe des x seront équidistantes. Ce resultat subsistera, quelque grand qu'on suppose le nombres n ; à mesure que ce nombre augmentera, les points communs aux deux coubres se rapprocheront ; et à la limite $n = \infty$, ces deux coubres coïncideront parfaitement dans toute la portion comprise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or, à cette limite, la somme qui exprime la valeur de Y_m se changera en une integrale définie ; [88, pp.446-7]

If we suppose $\frac{m'}{n+1} = x'$, $\quad \frac{1}{n+1} = dx'$, and $y_{m'} = fx'$, then [22]

$$Y_m = 2\int_0^1 \sin m\pi x' \cdot\ fx'\ dx', \quad m > 0,\ \in \mathbb{Z}$$

We extend $(i)_P$ to the infinite and replace y with fx, then

$$fx = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin m\pi x = 2\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\int_0^1 \sin m\pi x' \cdot\ fx'\ dx'\Big)\sin m\pi x, \quad m > 0,\ \in \mathbb{Z} \tag{35}$$

This statement corresponds with $(g)_P$, by assuming $l = 1$ and replacing the order of simbol of sum $\int$ and $\sum$. Therefore, this statement means the Lagrange's statement of trigonometric series, which we cite with the equation (10).

> La même méthod pourrait servir à démontrer directment toutes les autres formules de la même espèce ; il y a donc deux moyans de parvenir à ces formules ; celui que j'ai employé, et qui consiste à regarder la série périodique que chacune de ces expressions renferme, comme la limite d'une série convergente dont on peut avoir la somme ; et celui qui je viens d'exposer, d'après *Lagrange*, et dans lequel on coinsidère chacune de ces expressions comme la limite d'une formule d'interpolation. Les recherches de M.*Fourier* sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, et mon premier Mémoire sur le même sujet, contiennent différents formules de cette espèce. [88, pp.447-8]

[21] $n+1$ comes from $1 + n \times 1$ of (32).

[22] $fx,\ fx',\ \varphi x,\ \psi x$, etc. mean the then usage of $f(x),\ f(x'),\ \varphi(x),\ \psi(x)$, etc.

¶64. (pp.452-4). We assume $\frac{n\pi}{l} = a$, $\frac{\pi}{l} = da$, we get

$$(k)_P \quad fx = \frac{1}{\pi} \iint \cos a(x-x')\ fx'\ da\ dx' \equiv P$$

$$\int_0^\infty \cos a(x-x')\ da = \int_0^\infty e^{-ka^2} \cos a(x-x')\ da = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{\frac{(x-x')^2}{4k}}$$

$$P = \frac{1}{2\sqrt{k\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ka^2}\ fx'\ dx'$$

We assume $x' = x + z$, then

$$P = \frac{fx}{2\sqrt{k\pi}} \int e^{-ka^2}\ dz \quad \Rightarrow \quad P = \frac{fx}{2\sqrt{k\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ka^2}\ dz = fz$$

Another method :

$$\int \cos a(x-x')\ da = \frac{\sin a(x-x')}{x-x'} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin a(x-x')}{x-x'}\ fx'\ dx'$$

We assume $x' = x + \frac{z}{a}$, then

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin z}{z}\ f(x+\frac{z}{a})\ dz \quad \Rightarrow_{a\to\infty} \quad P = \frac{1}{\pi}\ fx \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin z}{z}\ dz = fx$$

¶65. (pp.454-6). We assume φx, ψx are two functions of x, such as $\varphi x = \varphi(-x)$, $\psi x = -\psi(-x)$, namely implicit and explicit functions.

$$fx = \frac{1}{\pi} \iint \cos ax \cos ax'\ fx'\ dx' + \iint \frac{1}{\pi} \sin ax \sin ax'\ fx'\ dx' \tag{36}$$

$$\varphi x = \frac{1}{\pi} \iint \cos ax\ \ \cos ax'\ \varphi x'\ dx', \quad \psi x = \frac{1}{\pi} \iint \sin ax\ \ \sin ax'\ \psi x'\ dx' \tag{37}$$

> On pourra, si l'on veut, n'étandre l'equation relatives à x', que depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, et doubler le facteur $\frac{1}{\pi}$; ces formules coincideront alors avec celle que M.*Fourier* a données dans son premier Mémoire sur la chaleur. [23] [88, p.455]

The equation $(k)_P$ is reciprocally deduced from (37), by conserving $x' = \pm\infty$, then

$$0 = \frac{1}{\pi} \iint \cos ax\ \ \cos ax'\ \psi x'\ dx', \quad 0 = \frac{1}{\pi} \iint \sin ax\ \ \sin ax'\ \varphi x'\ dx' \tag{38}$$

Adding (37) and (38), we get $(k)_P$.

$$\begin{aligned} \varphi x + \psi x \quad &= \quad \frac{1}{\pi} \iint \Big(\cos ax \cos ax'\ \varphi x'\ dx' + \sin ax \sin ax'\ \varphi x'\ dx'\Big) \\ &+ \quad \Big(\sin ax \sin ax'\ \psi x'\ dx' + \cos ax \cos ax'\ \psi x'\ dx'\Big) \\ &= \quad \frac{1}{\pi} \iint (\varphi x' + \psi x') \cos a(x-x')\ da\ dx' = fx \end{aligned}$$

$$fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos ax\ \ \cos ax'\ fx'\ dx', \quad fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin ax\ \ \sin ax'\ fx'\ dx'$$

[23] sic. *Annales de physique et de chimie*, tome III,p.361. cf. Table. 3.

5. Argument between Fourier and Poisson on applying the theorem of De Gua to transcendental equations

There were the strifes between Poisson and Fourier to struggle for the truth on mathematics or mathematical physics for the 23 years since 1807. Poisson [92, p.367] asserts that :

- It is not able to apply the rules served the algebra to assure that an equation hasn't imaginary, to the transcendental equation.
- Algebraic theorems are unsuitable to apply to transcendental equations.
- Generally speaking, it is not allowed to divert the theorems or methods from real to transcendental, without careful and strict handling.

On the other hand, Fourier [35, p.617] refutes Poisson :

- Algebraic equations place no restriction on analytic theorems of determinant ; It is applicable to all transcendental, what we are considering, in above all, heat theory.
- It is sufficient to consider the convergence of the series, or the figure of curve, which the limits of these series represent them in order.
- Generally speaking, it is able to apply the algebraic theorems or methods to the transcendental or all the determined equations.

(fig.1) *Paper spectrum interferring between Poisson and Fourier.* Rem. MS : manuscript

Fourier ⇒ (MS:)[43] (ex:)[75] [30] (2nd.v:)[31] (prize.1)[32] (prize.2)[33] [34] [35] [36]

↑ [77] [79] [81]↘ ↗ ↓ ↗ ↓

Poisson ⇒ [84] [85] [86] [87] [88] [89] [90] [91] [92] [93] [94] [95] [96] [98] [99]

6. Fourier's principles on the trigonometric series, the integral and the root

For the objection of our paper, we treat here only the problems in relation to the integral and root in the discussion with Poisson. We introduce *Nota* of [33, pp.245-6], from here, Darboux edits some parts in his Discours Préliminaire in [17, pp.XV-XXVIII].

(1) Les premières recherches analytiques de l'auteur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes : on les a conservées dans la première partie du Mémoire.

(2) Les questions relatives aux corps continus ont été resolues par l'auteur plusieurs années après. Il a exposé pour la première fois cette théorie dans une ouvrage manuscrit [24] remis à l'Institut de France à la fin de l'année 1807, et dont il a été publiè un extrait [25] dans le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1808, page 112.

(3) Il a joint ensuite à ce premier ouvrage des notes sur [26]
   - la convergence des séies,
   - la diffusion de la chaleur dans un prisme infini,
   - son émission dans un espace vide d'air,
   - les constructions qui servent à rendre sensibles les principaux théoremes de cette analyse ;
   - enfin la solution d'une question qui était alors entièrement nouvelle, [27] celle du mouvement périodique de la chaleur à la surface du globe terrestre.

[24]cf. Grattan-Guinness [43].
[25]cf. Poisson [75].
[26]cf. Fourier [17]
[27]Darboux omits this item in his edition of Discours préliminaire. [17, p.XXVI].

(4) Les seconde Mémoire sur la propagation de la chaleur a été déposé aux archves de l'Institut le 28 septembre 1811 ; il est formé du précédent et des notre déjà remises. L'auteur a seulement retranché des constructions géométriques et des détails d'analyse qui n'avaient pas un rapport nécessaire avec la question physique, et il a ajouté l'équation générale qui exprime l'état de la surface. C'est cet ouvrage qui, ayant été cournné au commencement de 1812, est textuellement inséré dans la collection des Mémoires. Il a été livré à l'impression en 1812 par M. Delambre, secrétaire perpétuel ; savoir ; la premier partie, dans le volume de 1819 ; la seconde, dans le volume suivant. [28]

(5) Les résultats de ces recherches, et de celles que l'auteur a faires depuis, sont aussi indiqués dans divers articles rendus publics. Voir
  - les *Annales de chimie et de physique*, tome III, page 250, [29] année 1816 ; tome IV, page 128, année 1817 ; tome VI, page 259, année 1817 ;
  - le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1818, page 1, et année 1820, page 60 ;
  - l'*Analyse des travaux de l'Académie des Sciences*, par M. Delambre, année 1820, &
  - et l'ouvrage publiqié par l'auteur sous ce titre : *Théorie analytique de la chaleur*, in-4.^{o} ; Paris, 1822. [30]

[33, pp.245-6].

cf. Table 3.

6.1. ***Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition)*** [31]**, 1822.**

We cite the articles in relation to Fourier's principle of integral or root. These follows are : ¶ 219, 221, 235, 238-9, 253, 283-4, 288, 290-1, 305-6, 308, 310, 374-5, 399, 401, 407-9. cf. Table 5, 6, 7, 8, 11 and 12.

Chapter 3. *Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire infini*, pp.141-238.

§6 *Dévelopment d'une function arbitraire en sáries trigonométriques*

¶ 219. An arbitrary function can be developed under the following form :

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x \cdots \tag{39}$$

Fourier states his kernel in ¶ $219 - 235$. He redescribes these articles from the corresponding of his first version. He announces these correction in 'Discours Preliminaire', however, the proof is completely same with the expression of first version, except the different expression between (40) and (42).

$$(D)_F \quad \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \int \sin x\varphi(x)dx + \sin 2x \int \sin 2x\varphi(x)dx + \ \cdots \ + \sin ix \int \sin ix\varphi(x)dx + \cdots ; \tag{40}$$

¶ 221. Fourier states only from the proving of orthonormal relation, so Poisson is disapointed with the lack of vigorousness and exactitude of the very mathematical importance in the future.

> Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de sembles expressions ; mais il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démonstrées d'une manière précise et rigoureuse ; [84, ¶28, p.46]

The following are Fourier's description about the proof of trigonometric series.

---

[28] cf. Fourier [32, 33].

[29] Not p.250 but p.350. Correctly, pp.350-376. cf [17, p.XXVI], Grattan-Guinness cites pp.350-375, cf. [43, p.492].

[30] cf. Fourier [31].

TABLE 3. The bibliographies relating to Fourier's main theories of heat. Remark. MAS: Mémoire de l'Académie royale des Sciences, ¶: article number

no	version	proposed year to Académie Sciences	author, primary bibliography, publisher, year	title with other data	secondary bibliography or remark
1	manuscript	End of 1807	Fourier [43]	*Sur la propagation de la Chaleur*	Grattan-Guinness [43, p.30,p.497], 1972
2	extract by Poisson	1807/12/21	Poisson [75] Bulletin sci. soc. Philomatique 1808	*Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*	Darboux ed,1890 vol.2 [18, pp. 215-221] cf. [43, pp.442-3]
3	extract and two notes by Fourier	1808?, 09? cf. remark	Fourier	• *Note sur la convergence de la série* $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$, 1808? • *Extrait du mémoire sur la chaleur*, 1809? • *Notes jointes à l'extrait du mémoire sur la chaleur*, 1809?	cf. Grattan-Guiness [43, p.26,p.497] (According to him, only the 10 pages of it are extant.)
4	2nd version	(private)	Fourier [31] 1822, Paris	*Théorie analytique de la chaleur*	Darboux ed,1888 vol.1 [17]
5	1811 prize paper no.1	1811/9/28	Fourier [32] MAS **4**(1819-20) pp.185-555 1824	*Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* (part 1). (Allowed to be issued in 1812 and appears in 1819-21 edition from AS)	not found. cf. Grattan -Guinness [43], 1972
6	1811 prize paper no.2	1811/9/28	Fourier [33] MAS **5**(1821-22) pp.153-246 1826	*Suite de Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* (part 2)	Darboux ed.1890 vol.2 [18, pp. 3-94] includes ¶1-¶149, Table, Nota
7	1811 prize paper no.2 (Archive)	same with no.6	same with no.6	same with no.6 http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/ bpt6k3220m/f7	Gallica archives include ¶1-¶150, Table, Nota
8	1st Mémoire	1816	Fourier [29] ACP **3**(1816) pp.350-375 1816	*Théorie de la chaleur*	not found in Darboux ed.1890 vol.2, but Poisson cites in [88, p. 455]
9	addition on prizm only		Fourier [35] MAS **8**(1829), 581-622. 1829	*Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*	Darboux ed,1890 vol.2 [18, pp. 145-181]

On peut aussi vérifier l'équation précédente $(D)_F$ (art. 219), en déterminant immédiatement les quantités $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_j,\ \cdots$ dans l'équation

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_j \sin jx \cdots$$

pour cela on multipliera chacun des membres de dernière équation par $\sin ixdx$, i étant un nombre entier, et on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$\int \varphi(x) \sin ixdx = a_1 \int \sin x \sin ixdx + a_2 \int \sin 2x \sin ixdx + \cdots a_j \int \sin jx \sin ixdx + \cdots$$

Or on peut facilement prover :

TABLE 4. The comparative article number of theories of heat, source : Grattan-Guiness [43].

§	1805 draft BN MFF22525	1807 manuscript	1811 part 1	1811 part 2	1822 Théorie analytique de la chaleur	Add, shift by Théorie analytique de la chaleur
2	109-109 bis	introduction	185-193		1-21	22-24
3	109 bis-122	1-13	342-389		247-276	
4	122bis-124	14-22	197-198,205-208, 211-212,216-222		25-37,65-80	38-64
5	125-127 bis	23-31	222-229,231-247		101-113,118-119,121-123, 126-127,142,155-156	81-100, 124-125 to § 18 128-141, 143-154
6	128-132 bis	32-37	250-261		163-170	157-162
7	133-144 bis	38-47	261-280		171-188	189
8	144 bis-149	48-49	280-281		190,192-195	191,196-206
9		50-74	281-316		207-229	
10		75	316-319		229-230	
11		76-94	320-342		238-246	231-237
						247-276 from § 3
12		95-96	394-400		277-278	
13		97-99	230,400-405		115, 283-288	279-282
14		100-114	406-426		289-304	
15		116-121	233, 429-435		120, 306-309	305
16		122-139	435-457		310-320	
17		115		171-179; Oeuvres 2,20-27		
18		140-151	237-238, 458-472		124-125, 321-332	
19		152-158	473-485		333-340	
20		159-167		213-233; Oeuvres 2,63-82		
						341-433

1. Que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i \int \sin ix \sin ixdx$;
2. Que la valeur de $\int \sin ix \sin ixdx$ est $\frac{\pi}{2}$.

Tout se réduit á considérer la valeur des intégrales qui entrent dans la second membre, et à démonstrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2\int \sin jx \sin ixdx$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j}\sin(i-j)x - \frac{1}{i+j}\sin(i+j)x + C$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x = 0$, la constante C est null, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra null lorsqu'on fera $x = \pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 \int \sin x \sin ixdx, \quad a_2 \int \sin 2x \sin ixdx, \quad a_3 \int \sin 3x \sin ixdx, \quad \cdots$$

s'evanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seron différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux ; car le terme $\frac{1}{i-j}\sin(i-j)x$ auquel se réduit l'intégrale devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a, par conséquent,

$$2\int \sin ix \sin ixdx = \pi;$$

TABLE 5. The problems of roots described in Fourier's *Théorie analytique de la chaleur*, [17], Remark ; article* : we cite this article in our paper, cf : in this paper, R : transcendental, H : heat

no	Title of chapter/section	cited article* pages	description of roots	cf	$\mathbb{R}$	H
1	(Chap. 3. Propagation de la chaleur dans in solide rectangulaire infini §5. Expression fini du rásultat de la solution)	¶ 205 p.184	binôme		R	H
2	(Chap. 3. Propagation de la chaleur dans in solide rectangulaire infini §6. Dévelopment d'une function arbitraire en sáries trigonométriques)	¶ 235∗ pp.231-5	non imaginaire real term	cf	R	H
3	(Chap. 3. Propagation de la chaleur dans in solide rectangulaire infini §7. Application à la question actuelle)	¶ 237 pp.237-8	real root		R	H
4	(Chap. 4. Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille §2. De la communication de la chaleur des masses disjointes)	¶ $252-3*$ pp.259-263	real root	cf	R	H
5	(Chap. 4. Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille §2. De la communication de la chaleur des masses disjointes)	¶ 282 pp.302-3	irrationelle et en nombre infini		R	H
6	(Chap. 5. De la propagation de la chaleur dans une sphère solide §2. Remarques diverses sur cette solution) Au reste, il était seulement nécessaire de se convaincre que l'équation a une infinité de <u>racines réelles</u>. On a rapporté ici ce procéde <u>d'approximation</u>, parce qu'il est fondé sur une construction remarquable qu'on peut employer utilement dans plusieurs cas, et qu'il fait connaitre sur-le-champ la nature et les limits des racines ;	¶ 288∗ pp.310-1	real root as 'the approximation process'	cf	R	H
7	(Chap. 5. De la propagation de la chaleur dans une sphère solide §2. Remarques diverses sur cette solution)	¶ 305∗ pp.329-331, fn. by G.D.	ne peut avoir aucune racine imaginaire	cf	R	H
8	(Chap. 6. Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide) Pour intégrer ces équations, on donnera en premier lieu à v une <u>value particulière</u> très simple, exprimée par l'équation $v = e^{-mt}u$, m est un nombre quelconque et u une fonction de x.	¶ $118-220$, ¶ 306*,7,8*, 9,10*-320 pp.335-358, fn. by G.D.	proof of real root	cf	R	H
9	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §1 Du mouvement libre de la chaleur dans une ligne infini)	¶ 364 pp.414 fn. by G.D.	Laplace's Mémoire sur divers points d'Analyse		R	H
10	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §2 Du mouvement libre de la chaleur dans un solide infini)	¶ 375∗ pp.433-4	$b = \mp u\sqrt{-1}$	cf	R	H
11	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §2 Du mouvement libre de la chaleur dans un solide infini)	¶ 424 pp.513-9	imaginary		R	H

on obtient ainsi, de la manière la plus briéve, les valeurs de $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_j,\ \cdots$ qui sont

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\varphi(x)\sin xdx, \quad a_2 = \frac{2}{\pi}\int\varphi(x)\sin 2xdx, \quad a_3 = \frac{2}{\pi}\int\varphi(x)\sin 3xdx, \cdots, a_i = \frac{2}{\pi}\int\varphi(x)\sin ixdx \tag{41}$$

En les substituant, on a $(D)_F$ (=(40)). [17, ¶220-221, pp.210-212]

[31]Here, in the Fourier's first version, or, the manuscript in 1807, $(D)_F$ (=(40)) corresponds with (42)

$$\frac{\pi}{2}\varphi x = \sin x\ S(\varphi x\sin .xdx) + \sin 2x\ S(\varphi x\sin .2xdx) + \cdots + \sin ix\ S(\varphi x\sin .ixdx)\cdots ; \tag{42}$$

where, S means a summation symbol for the trigonometric series in Fourier's n-body-model analysis.[32] [43, p.217]

[31]cf. Grattan-Guinness [43, ¶63, p.216-7].

[32]cf. § 3.3. Grattan-Guiness discusses the n-body-model analysis in [43, pp.241-9].

¶ 224−231. (Trigonometric series by cosine with multiple angles.)

$$(m)_F \quad \varphi(x) = a_0 \cos 0x + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_i \cos ix + \cdots \tag{43}$$

⇒

$$\begin{aligned}(\nu)_F \quad \frac{\pi}{2}\varphi(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)dx + \cos x \int_0^\pi \varphi(x)\cos x\ dx + \cos 2x \int_0^\pi \varphi(x)\cos 2x\ dx \\ &+ \cos 3x \int_0^\pi \varphi(x)\cos 3x\ dx + \cdots \end{aligned}\tag{44}$$

¶ 232. (Trigonometric series by sine with multiple angles.)

$$(\mu)_F \quad \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \int_0^\pi \varphi(x)\sin x\ dx + \sin 2x \int_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\ dx + \sin 3x \int_0^\pi \varphi(x)\sin 3x\ dx + \cdots \tag{45}$$

¶ 235. The development of function in the trigonometric series.

> Nous aurions à ajouter plusieurs remarques concernant l'usage et les propriété des séries trigonométriques ; nous nous bornerons à énoncer brièvement celles qui ont un rapport plus direct avec la théorie dont nous nous occupons.

1. Les séries ordonnées selon les cosinus ou les sinus des arcs multiples sont toujous convergentes, c'est-à-dire qu'en donnant à la variable une valeur quelque non imaginaire, la somme des termes converge de plus en plus vers une seul limite fixe, qui est la valeur de la fonction développée ;
2. Si l'on a l'expression de la fonction $f(x)$ qui répond à une série donnée

   $$a + b\cos x + c\cos 2x + d\cos 3x + e\cos 4x + \cdots$$

   et celle d'une autre fonction $\varphi(x)$, dont le développement donné est

   $$\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x + \delta\cos 3x + \varepsilon\cos 4x + \cdots$$

   il est facile de trouver en termes réels la somme de la série composée

   $$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \cdots$$

   et, plus généralement, celle de la série

   $$a\alpha + b\beta\cos x + c\gamma\cos 2x + d\delta\cos 3x + e\varepsilon\cos 4x + \cdots$$

   que l'on forme en comparant terme à terme les duex série données. Cette remarque s'applique à un nombre quelconque de séries.
3. La série (p)(art.233)[33] qui donne le développment d'une fonction $F(x)$ en un situe de sinus et de cosinus d'arcs multiples peut être mise sous cette forme

$$\begin{aligned}\pi F(x) = \frac{1}{2}\int F(\alpha)\ d\alpha \quad &+ \quad \cos x \int F(\alpha)\cos\alpha\ d\alpha + \cos 2x \int F(\alpha)\cos 2\alpha\ d\alpha + \cdots \\ &+ \quad \sin x \int F(\alpha)\sin\alpha\ d\alpha + \sin 2x \int F(\alpha)\sin 2\alpha\ d\alpha + \cdots \end{aligned}\tag{46}$$

α étant une nouvelle variable qui disparait après les intégrations. On a donc

$$\pi F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\ d\alpha\Big(\frac{1}{2} + \cos x\cos\alpha + \cos 2x\cos 2\alpha + \cdots + \sin x\sin\alpha + \sin 2x\sin 2\alpha + \cdots\Big)$$

ou

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\ d\alpha\Big(\frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \cos 3(x-\alpha) + \cdots\Big)$$

[33] cf. The series are the equation replaced α in the right-hand side of (46) with x.

Donc, en désignant par

$$\sum \cos\ i(x-\alpha)$$

aura

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int F(\alpha)\ d\alpha\Big[\frac{1}{2} + \sum \cos\ i(x-\alpha)\Big]$$

4. (citation omitted by the auther of this paper.)
   [17, ¶ 235, p.232-3]

Chapter 4 *Du mouvement de linéaire et varié de la chaleur dans une armille*, pp 239-303.

§ 1 *Solution générale de la question*, pp.239-253.

¶ 238.

L'équation qui exprime le mouvement de la chaleur dans une armille a été rapportée dans l'article 105 ; elle est

$$(b)_F \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{hl}{CDS}v$$

Il s'agit maintenant d'integrer cette équation ; on écrira seulement

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv;$$

la valeur de k représentera $\frac{K}{CD}$, celle de h sera $\frac{hl}{CDS}$; x désigne la longueur de l'arc compris entre un point m de anneau et l'origine o ; v est la température que l'on observerait en ce point m après un temps donné t. On supposera d'abord $v = e^{-ht}u$, u étant une nouvelle indéterminée ; on en tirera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

or cette dernière équation convient au cas où l'irradiation serait nulle à la surface, puisqu'on la déduirait de la précédente en y faisant $h = 0$; on conclut de là que les différents points de l'anneau se refroidissent successivement, car l'action du milieu, sans que cette circonstance trouble en aucune manière la loi de la distribution de la chaleur. [17, ¶ 238, p.239-40]

¶ 239. Constitution of a general solution by the special solutions.

La question étant réduite à intéger l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

on cherchera, en premier lieu, les *valeurs particulières* les plus simples que l'on puisse attribuer à la variable u ; on en composera en suite une *valeur générale*, et l'on démonstrera que cette valeur est aussi étendue que l'intégrale, qui contient une fonction arbitraire en x, ou plutôt qu'elle est cette intégrale elle-même, mise sous la forme qu'exige la question, en sorte qu'il ne peut y avoir aucune solution différente.

On remarquera d'abord que l'équation est satisfaite si l'on donne à u la *valeur particuliére* $ae^{mt}\sin\ nx$, m et n étant assujettis à la condition $m = -kn^2$. On prendra donc pour une *valeur particulière* de u la fonction

$$ae^{-kn^2t}\sin\ nx$$

$\cdots$ (omitted.) $\cdots$

On arrivera aux mêes conséquence en prenant, pour *valeur particulière* de u, la quantité $ae^{-kn^2t}\cos\ nx$; on a aussi $2n\pi r = 2i\pi$ et $n = \frac{i}{r}$; donc l'équation

$$u = ae^{-kn^2t}\cos\ nx = ae^{-\frac{ki^2t}{r^2}}\cos\ \frac{ix}{r}$$

exprimera le mouvement de la chaleur dans l'intérieur de l'anneau, si les températures initiales sont représentées par $a\cos\ \frac{ix}{r}$.

Dans tous ces cas, où les températures données sont propotionelle aux sines ou cosinus d'un multiple de l'arc $\frac{x}{r}$, les rapports établis entre ces températures subsistent contiellement pendant la dueée infinie du refroidissement. Il en serait de même si le températures initiales étaient représentées par la fonction

$$(a\sin\ nx + b\cos\ nx =)\quad a\sin\ \frac{ix}{r} + b\cos\ \frac{ix}{r},$$

i étant un nombre entier, a et b des coefficients quelconques. [17, ¶ 239, pp.240-2]

§ 2 *De la communication de la chaleur entre des masses disjointes*, pp.253-303.

Here is Fourier's premier object of the study of heat mentioned in the preliminary as follows :

> Nos premières recherches analytiques sur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes ; on les a conservées dans ls Section II du Captre IV. Les questions relatives aux corps continus, qui forment la théorie proprement dite, ont été resolues plusieurs années aprés ; cette théorie a été exposée, pour la première fois, dans un Ouvrage manuscrit remis à la fin de l'année 1807, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des Sciences* (Société philomatique, année 1808, p.112-116). [17, p.xxvi]

¶ 253.

La valeur génénale de a_m étant

$$\frac{a_1}{\sin u}[\sin mu - \sin(m-1)u]$$

on aura, pour satisfaire à la condition $a_{n+1} = a_n$, l'équation

$$\sin(n+1)u - \sin nu = \sin nu - \sin(n-1)u,$$

d'où l'on tire

$$\sin nu = 0, \quad u = i\frac{\pi}{n}$$

π étant la demi-circonférence et i un nombre entier quelconque, tel que $0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots, n-1$. On en peut déduire les n valeurs de q ou $\frac{hm}{K}$; ainsi, toutes les racines de l'équation en h, qui donnent les valeurs de $h,\ h',\ h'',\ \cdots$ sont réelles, negatives et fournies par équations

$$h = -2\frac{K}{m}\sin V\big(0\frac{\pi}{n}\big), \quad h' = -2\frac{K}{m}\sin V\big(1\frac{\pi}{n}\big), \quad \cdots, \quad h^{(n-1)} = -2\frac{K}{m}\sin V\big((n-1)\frac{\pi}{n}\big),$$

[17, ¶ 253, p.262]

¶ 267. (The n equations : (m) with transfer matrix of $(n \times 2n)$.)

6.1. Transfer array by Fourier.

$$\begin{aligned}
a_1 &= A_1 \sin 0.0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin 0.1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin 0.2\frac{2\pi}{n} + \cdots + A_n \sin 0.n\frac{2\pi}{n} \\
&+ B_1 \cos 0.0\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos 0.1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos 0.2\frac{2\pi}{n} + \cdots + B_n \cos 0.n\frac{2\pi}{n} \\
a_2 &= A_1 \sin 1.0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin 1.1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin 1.2\frac{2\pi}{n} + \cdots + A_n \sin 1.n\frac{2\pi}{n} \\
&+ B_1 \cos 1.0\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos 1.1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos 1.2\frac{2\pi}{n} + \cdots + B_n \cos 1.n\frac{2\pi}{n} \\
&\cdots \\
a_n &= A_1 \sin(n-1)0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin(n-1)1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin(n-1).2\frac{2\pi}{n} + \cdots \\
&+ B_1 \cos(n-1)0\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos(n-1)1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos(n-1)2\frac{2\pi}{n} \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\ a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n\ \right]^T \\
&= \left[\begin{array}{llllllllll}
\sin 0.0\frac{2\pi}{n} & \sin 0.1\frac{2\pi}{n} & \sin 0.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \sin 0.n\frac{2\pi}{n} & \cos 0.0\frac{2\pi}{n} & \cos 0.1\frac{2\pi}{n} & \cos 0.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos 0.n\frac{2\pi}{n} \\
\sin 1.0\frac{2\pi}{n} & \sin 1.1\frac{2\pi}{n} & \sin 1.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \sin 1.n\frac{2\pi}{n} & \cos 1.0\frac{2\pi}{n} & \cos 1.1\frac{2\pi}{n} & \cos 1.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos 1.n\frac{2\pi}{n} \\
\sin 2.0\frac{2\pi}{n} & \sin 2.1\frac{2\pi}{n} & \sin 2.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \sin 2.n\frac{2\pi}{n} & \cos 2.0\frac{2\pi}{n} & \cos 2.1\frac{2\pi}{n} & \cos 2.2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos 2.n\frac{2\pi}{n} \\
\cdots \\
\sin(n-1)0\frac{2\pi}{n} & \sin(n-1)1\frac{2\pi}{n} & \sin(n-1).2\frac{2\pi}{n} & \cdots & \cos(n-1)0\frac{2\pi}{n} & \cos(n-1)1\frac{2\pi}{n} & \cos(n-1)2\frac{2\pi}{n} & \cdots
\end{array}\right] \\
&\times \left[\ A_1\ A_2\ A_3\ \cdots\ A_n\ B_1\ B_2\ B_3\ \cdots\ B_n\ \right]^T \qquad (47)
\end{aligned}$$

¶ 271. (The coefficients A_j and B_j of the equation m.)

$$\frac{1}{2}nA_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \sin\ (i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{1}{2}nB_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \cos\ (i-1)(j-1)\frac{2\pi}{n}, \quad j = 1, \cdots, n \ (48)$$

Chapter 5 *De la propagation de la chaleur dans une sphère solide*, pp 304-331.

§ 1 *Solution générale*, pp.304-316.

¶ 283.

> La question de la propagation de la chaleur a été exposée dans la Chapitre II, Section II, article 117 ; elle consiste à intégrer l'équation
>
> $$\frac{\partial v}{\partial t} = k\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)$$
>
> en sorte que l'intégrale satisfasse, lorsque $x = X$, à la condition
>
> $$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0$$
>
> Si l'on fait $y = vx$, y étant une nouvelle indéterminée, on aura, après les substitutions,
>
> $$\frac{\partial y}{\partial t}k = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
>
> ainsi il faut intégrer cette dernière équation, et l'on prendra ensuite $v = \frac{y}{x}$. [17, ¶ 283, pp.304-5]

¶ 284. (Deduction of the determinated equation of the root)

Soit $y = e^{mt}u$, u étant une fonction de x, on aura

$$mu = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On voit d'abord que, la valeur de t devenant infinie, celle de v doit être nulle dans tous les points, puisque le corps est entièrement refroidi. On ne peut donc prendre pour m qu'une quantitè négative. Or k a une valeur numérique positive ; on en conclut que la valeur de u dépend des arcs de cercle, ce qui résulte de la nature connue de l'équation $mu = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Soit

$$u = A\cos\ nx + B\sin\ nx$$

on aura cette condition

$$m = -kn^2$$

Ainsi l'on peut exprimer une valeur particulière de v par l'équation

$$v = \frac{e^{-kn^2t}}{x}\Big(A\cos\ nx + B\sin\ nx\Big) \tag{49}$$

n est un nombre positif quelconque, et A et B sont des constantes. On remarquera d'abord que la constante A doit être nulle ; car lorsqu'on fait $x = 0$, la valeur de v, qui exprime la température du centre, ne peut pas être infinie ; donc la terme $A\cos\ nx$ doit être omis.

Du plus, le nombre n ne peut pas être pris arbitrairement. En effet, si, dans l'équation déterminée

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0 \tag{50}$$

on substitute la valeur de v, on trouvera

$$nx\ \cos\ nx + (hx - 1)\sin\ nx = 0 \tag{51}$$

Comme l'équation doit avoir lieu à la surface, on y supposera $x = X$, rayon de la sphère, ce qui donnera

$$\frac{nX}{\tan\ nX} = 1 - hX$$

Soit λ le nombre $1 - hX$ et posons $nX = \varepsilon$, on aura

$$\frac{\varepsilon}{\tan\ \varepsilon} = \lambda$$

Il faut donc un arc ε qui, divisé par sa tangente, donne un quotient connu λ, et l'on prendra

$$n = \frac{\varepsilon}{X}$$

Il est visible qu'il y a une infinité de tels arcs, qui ont avec leur tangente un rapport donné ; en sorte que l'équation de condition

$$\frac{nX}{\tan\ nX} = 1 - hX$$

a une infinité de racines réelles. [17, ¶ 284, pp.305-6]

After supposing $A = 0$ of (49), Fourier substitutes $v = \frac{e^{-kn^2t}}{x}\Big(\sin\ nx\Big)$ for (50), then gets the equation (51).

¶ 288. (The determinating equation for real root using 'procéde d'approximation'.) Fourier proposes the method, which is nearly the what is called Newton approximation or the Newton method. We iterate the approaching by differentiation until we get the root of the crossing point made with the tangent and the curve : $x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}, \quad f'(x_\nu) \neq 0.$

> La régle que l'on vien d'exposer pouvant s'appliquer au calcul de chacune des racines de l'équation
> $$\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} = 1 - hX, \tag{52}$$
> qui ont d'ailleurs des limits données, on doit regarder toutes ces racines comme des nombres connus. Au reste, il était seulement nécessaire de se convaincre que l'équation a une infinité de racines réelles. On a rapporté ici ce procédé d'approximation, parce qu'il est fondé sur une construction remarquable qu'on peut employer utilement dans plusieurs cas, et qu'il fait connaitre sur-le-champ la nature et les limits des racines ; mais l'application qu'on ferait de ce procédé à l'équation dont il s'agit serait beaucoup trop lente ; il serait facile de recourir dans la pratique à une autre méthode d'approximation. [17, ¶ 288, p.311]

¶ 290.

Désignons par $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \cdots$ les quantités qui satisfont à l'équation

$$\frac{nX}{\tan nX} = 1 - hX,$$

et que l'on suppose rangées par ordre, en commençant par la plus petite ; on formera l'équation générale

$$vx = a_1 e^{-kn_1^2 t} \sin n_1 x + a_2 e^{-kn_2^2 t} \sin n_2 x + a_3 e^{-kn_3^2 t} \sin n_3 x + a_4 e^{-kn_4^2 t} \sin n_4 x + \cdots$$

Si l'on fait $t = 0$, on aura, pour exprimer l'état inital des températures,

$$vx = a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x + a_4 \sin n_4 x + \cdots$$

La question consiste à déterminer, quel que soit l'état initial, les coefficients $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$. Supposons donc que connaisse les valeur de v depuis $x = 0$ jusqu'à $x = X$, et représentons ce systéme de valeurs par $f(X)$, on aura

$$(e)_F \quad F(x) = \frac{1}{x}\Big\{a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x + a_4 \sin n_4 x + \cdots\Big\}$$

Here, G.Darboux comments $F(x)$ as follows :

> Fourier va déterminer les coefficients $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$, mais en admettant le développment est possible, quelle que soit la fonction arbitraire $F(x)$ qui définit l'état initial ; or c'est là un point qui n'est nullement démontré. Poisson, qui a signalé ce défaut de la solution de Fourier, a proposé, dans sa *Theorie de la chaleur*, une méthode d'exposition differente, mais qui ne fait que reporter sur un autre point exactment la même difficulté. G.D. [17, ¶ 290, p.312-3]

¶ 291.

La fonction arbitraire $F(x)$ entre dans chaque coefficient sous le signe de l'intégration et donne à la valeur de v toute la généralité que la question exige ; on parvient ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{xv}{2} = \frac{\sin\ n_1 x \int xF(x) \sin\ n_1 x\ dx}{X - \frac{1}{2n_1} \sin\ 2n_1 X} e^{-kn_1{}^2 t} + \frac{\sin\ n_2 x \int xF(x) \sin\ n_2 x\ dx}{X - \frac{1}{2n_2} \sin\ 2n_2 X} e^{-kn_2{}^2 t} + \cdots \tag{53}$$

Telle est la forme que l'on doit donner à l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

pour qu'elle représente le mouvement de la chaleur dans la sphère solid. En effet, toutes les conditions de la question seront remplies :

1. L'équation aux différences partielles sera satisfaite.
2. La quantité de la chaleur qui s'écoule à la surface conviendra à la fois à l'action mutuelle des derniéres couches et à l'action de l'air sur la surface, c'est-à-dire que l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0,$$

à laquelle chacune des parties de la valeur de v satisfait lorsque $x = X$, aura lieu aussi lorsqu'on prendra pour v la somme de toutes ces parties.

3. La solution donnée conviendra à l'état initial lorsqu'on supposera le temps nul. [17, ¶ 291, p.314-5]

§ 2 *Remarkes diverses sur cette solution*, pp.317-331.

¶ 305. The very suitable in geometrical structure to explain the equation (52).

L'usage que l'on a fait précédement de l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\tan\varepsilon} = \lambda \tag{54}$$

est fondé sur une construction géometrique qui est très propre à expliquer la nature de ces équations, En effet, cette construction fait voir clairement que toutes les racines sont réelle ; en même temps elle en fait connaitre les limits et indique les moyens de déterminer la valeur numérique de chacune d'elle. L'examen analytique des équations de ce genre donnerait les mêmes résults. On pourra d'abord reconnaitre que l'équation précédente, dans laquelle λ est un nombre connu, moindre que l'unité, n'a aucune recine imaginaire de la forme $m+n\sqrt{-1}$. Il suffit de substituer au lieu de ε cette dernièr qantité, et l'on voit, après les tranformations, que le premier membre ne peut devenir nul lorsqu'on attribue à m et n de valeur réelles, à moins que n soit nulle. [34] On démontre aussi qu'il ne peut y avoir dans cette même équation

$$\varepsilon - \lambda\tan\varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon\cos\varepsilon - \lambda\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = 0$$

[34] Ecrivons en effet l'équation sous la forme $\frac{\lambda}{\varepsilon} = \cot\varepsilon$.
En remplaçant ε par $x + yi$ et égalant les parties imaginaries dans les deux membres, on trouve

$$\frac{\lambda y}{x^2+y^2} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{(e^y - e^{-y})^2 + 4\sin^2 x}$$

Il est aisé de voir que cette équation ne peut être vérifiée quand y est différent de zéro et que le second membre y est toujours plus grand en valeur absolue que le premier. En effet, de second membre peut s'écrire

$$\Big(\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}\Big)\Big/\Big(1 + \frac{4\sin^2 x}{(e^y - e^{-y})^2}\Big)$$

Or on a

$$\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} > \frac{1}{y}, \quad \frac{4\sin^2 x}{(e^y - e^{-y})^2} < \frac{4x^2}{4y^2}$$

Le second membre est donc plus grand que

$$\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big/\Big(1 + \frac{x^2}{y^2}\Big) = \frac{y}{x^2+y^2} \tag{55}$$

il ne peut donc être égale à cette expression multipliée par la fonction λ.

Il y a dans la suite de cet article un certain nombre de points inexacts ou contestables ; mais, comme on pourrait le supprimer en entier sans interrompre la suite dos idées, nous nous sommes contenté de reproduire sans changement le texte de Fourier. G.D.

aucune racine imaginaire, de quelque forme que ce soit.

En effet :

1. les racines imaginaires du facteur $\frac{1}{\cos\varepsilon} = 0$ n'appartiennent point à l'équation $\varepsilon - \lambda\tan\varepsilon = 0$, puisque ces racines sont toutes de la forme $m + n\sqrt{-1}$;
2. l'équation $\sin\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda}\cos\varepsilon = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles lorsque λ est moindre que l'unité.

Pour prouvercette dernière proposition, il faut considérer $\sin\varepsilon$ comme le produit d'une infinité de facteurs, qui sont

$$\varepsilon\Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{3^2\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{\varepsilon^2}{4^2\pi^2}\Big)\cdots$$

est considérer $\cos\varepsilon$ comme dérivant de $\sin\varepsilon$ par la différentiation. On supposera qu'au lieu de former $\sin\varepsilon$ du produit d'un nombre infini de facteurs on emploie seulement les m premiers, et que l'on désigne le produit par $\varphi_m(\varepsilon)$. Cela posé, on aura l'équation

$$\varphi_m(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\varphi'_m(\varepsilon) = 0.$$

Or, en donnant au nombre m ses valeurs successives $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ depuis 1 jusqu'à l'infini, on reconnaitra, par les principes ordinaires de l'Algèbre, la nature des fonctions de ε qui correspondent à ces différentes valeurs de m. On verra que, quel que soit le nombre m des facteurs, les équations en ε qui en proviennent ont les caractères distinctifs de celles qui ont toutes leurs racines réelles. De là on conclut rigoureusement que l'équation (54) dans laquelle λ est moindre que l'unité, ne peut avoir aucune racine imaginaire. Cette même proposition pourrait encore être déduite d'une analyse différente que nous emploierons dans un des Chapitres suivants. [17, ¶305, pp.329-330]

G. Darboux remarks (54) is not equal (55), namely

$$\frac{y}{x^2 + y^2} \neq \frac{\lambda y}{x^2 + y^2}$$

and Fourier's description has many mistakes in the following articles.

Il y a dans la suite de cet article un certain nombre de points inexacts ou contestables ; mais, comme on pourrait le supprimer en entier sans interrompre la suite dos idées, nous nous sommes contenté de reproduire sans changement le texte de Fourier.[17, ¶305, p.330]

35

§ 6 *De mouvement de la chaleur dans un cylindre solide*, pp.332-358

Fourier deduces solution of the heat equation from the general solution summed particular solutions by using integral. From here, we see that our problems discussing between Poisson and Fourier is not only the problem on the roots of the solution, but also the problem of integral of the equations.

¶ 306.

Le mouvement de la chaleur dans un cylindre solide d'un longueur infinie est représenté par les équations

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big), \quad \frac{h}{K}V + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

[35]Today we state the relation of Euler as not $\sin x = -\frac{1}{2}i(e^x - e^{-x})$ but $\sin x = -\frac{1}{2}i(e^{xi} - e^{-xi})$.

TABLE 6. The problems objected by G.Darboux in Fourier's *Théorie analytique de la chaleur* [17]. Remark ; article* : we cite this article in our paper.

no	Title of chapter/section	cited article* pages	description by G.Darboux
1	(Chap. 5. De la propagation de la chaleur dans une sphère solide §2 Remarques diverses sur cette solution dans un solid infini)	¶ 305∗ pp.329-31, fn. by G.D.	inexacte ou contestable de imaginaires
2	(Chap. 6. Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide)	¶ 308∗ pp.335-7, fn. by G.D.	(G.D.) Cette objection de Poisson avait été très sensible à Fourier.
3	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §2 Du mouvement libre de la chaleur dans un solid infini)	¶ 377 pp.437-8, fn. by G.D.	(G.D.) Cette partie des raisonnements nous échappe complètement, et nous croyons même que les résultants énoncés par Fourier sont inexactes.
4	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §2 Du mouvement libre de la chaleur dans un solid infini)	¶ 381 pp.442-3, fn. by G.D.	On voir par ce résultat que, plus les points dont on veut déterminer la température au moyen de l'équation réduit sont éloignés de l'origine, plus il est nécessaire que la valeur du temps écoulé soit grande. (sic.) (G.D.) Les explications données plus haut montrent que ces conclusions sont inexactes.
5	(Chap 9. De la diffusion de la chaleur §4 Comparison des intégrales)	¶ 420 pp.505, fn. by G.D.	binôme formé de réel et imaginaire, (G.D.) Les intégrales données ici par Fourier ne peuvent avoir aucun sens, puisque les élements de ces intégrales ne tendent pas vers zéro et dépassent même toute grandeur donnée lorsque p grandit indéfiniment.
6	(Chap. 9. De la diffusion de la chaleur §4 Comparison des intégrales)	¶ 422 pp.507-9, fn. by G.D.	inexacte de imaginaires

que l'on a rapporées (p.97 et suivantes) dans les articles 118, 119, 120. Pour intégrer ces équations, on donnera en premier lieu à v une value particulière très simple, exprimée par l'équation

$$v = e^{-mt}u \tag{56}$$

m est un nombre quelconque et u une fonction de x. On désigne par k le coefficient $\frac{K}{CD}$ qui entre dans la première équation, et par h le coefficient $\frac{h}{K}$ qui entre dans la seconde.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{57}$$

$$\frac{h}{K}V + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad hV + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{58}$$

En substituant la valeur attribuée à v, on trouve la condition suivante :[36]

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{m}{k}u = 0 \tag{59}$$

On choisira donc pour u une fonction de x qui satisfasse à cette équation différentielle. Il est facil de voir que cette peut être exprimée par la série suivante

$$u = 1 - \frac{gx^2}{2^2} + \frac{g^2x^4}{2^24^2} - \frac{g^3x^6}{2^24^26^2} + \frac{g^4x^8}{2^24^26^28^2} - \cdots$$

[36]From (56), if we get $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, then we get (59), where, we don't use (60).

Table 7. 'Defective' description objected by Poisson. Remark ; article* : we cite this article in our paper, R : transcendental, H : heat, I : integral, E : elastic solid, F : fluid, D : defect in Fourier

no	Papers objected by Poisson	cited article* pages	Objecting papers by Poisson	cited pages	ℝ	H	I	E	F	D
1	⇒Fourier [31],1822 Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition, edit. by G.D.[17], 1888)	¶ 290∗ pp.312-313, fn. by G.D.	Poisson pointed out developed coefficient of $F(x)$ by Fourier, but Poisson himself didn't solved it.		R	H				
2	⇒Fourier [31],1822 Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition, edit. by G.D.[17], 1888)	¶ 305∗ pp.329-331, fn. by G.D.			R	H				
3	⇒Fourier [31],1822 Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition, edit. by G.D. [17], 1888)	¶ 306*,7,8*, 9,10*-320 pp.335-358, fn. by G.D.			R	H				
4	⇒Fourier [34], MSA **7**(1827), 605-624 Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendendent de la théorie de la chaleur				ℝ	H				
5			⇐Poisson [92], MAS **8**(1829), 357-570. Lu : 14/apr/1828 Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques	To Fourier en défaut p.367-8	ℝ			E		D
6	⇒Fourier [35], MAS **8**(1829), 581-622. Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur	p.616			ℝ			H		D
7			⇐Poisson [95], MAS **9**(1830), 89-95. Lu : 2/mars/1829 Note sur les racines des équations transcendentes	To Fourier en défaut p.91	ℝ					D
8	⇒Fourier[36], MAS **10**(1831), 119-146. Lu:9/mars/1829 Remarques générales sur l'application des principes de l'anayse algébrique aux équations transcendantes	From Poisson en défaut pp.125-6			ℝ					D
9	Lagrange [56], Cauchy [9], Power [107], Stokes [111]		⇐Poisson [96], JEP **13**(1831), 1-174. Lu : 12/oct/1829 Mémoire sur les équations générales de l'équiblibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides	(différential exacte) demon -stration en défaut p.174	ℝ			E	F	D

g désignant la constante $\frac{m}{k}$. On examinera plus particulièrement par la suite l'équation différentielle dont cette série dèrive ; on regarde ici la fonction u comme étant connu, et l'on a

$$v = e^{-gkt}u$$

pour la valeur particulière de v.

L'état de la surface convexe du cylindre est assujetti à une condition exprimée par l'équation déterminée

$$hV + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

qui doit être satisfaite lorsque le rayon x a sa valeur totale X ; on en conclura l'équation déterminée

$$h\Big(1 - \frac{gx^2}{2^2} + \frac{g^2x^4}{2^24^2} - \frac{g^3x^6}{2^24^26^2} + \frac{g^4x^8}{2^24^26^28^2} - \cdots\Big) = \frac{2gX}{2^2} - \frac{4g^2X^3}{2^24^2} + \frac{6g^3X^5}{2^24^26^2} + \cdots$$

Ainsi le nombre g qui entre dans la valeur particulière $e^{-gkt}u$ n'est point arbitraire : il est nécessaire que ce nombre satisfasse à l'équation précédente, qui contient g et X.

Nous prouverons

- que cette équation en g, dans laquelle h et X sont des quantités données, a une infinité de racines,
- et que toutes ces racines sont réelles.

Il s'ensuit que l'on peut donner à la variable v une infinitè de valeurs particulières, de la forme $e^{-gkt}u$, qui différeront seulement par l'exposant g. On pourra donc composer une valeur plus générale en ajoutant toutes ces valeurs particulières, multipliées par des coefficients arbitraires. L'intégrale qui servira à résoudre dans toute son étandue la question proposée est donnée par l'équation suivante

$$v = a_1e^{-g_1kt}u_1 + a_2e^{-g_2kt}u_2 + a_3e^{-g_3kt}u_3 + \cdots$$

- $g_1,\ g_2,\ g_3,\ \cdots$ désignent toutes les valeurs de g qui satisfont l'équation déterminée ;
- $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots$ désignent les valeurs de u qui correspondent à ces différentes racines ;
- $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ sont des coefficients arbitraires, qui ne peuvent être déterminés que par l'état initial du solide.

¶ 308.

$$y = f(\theta) = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{(2!)^2} - \frac{\theta^3}{(3!)^2} + \frac{\theta^4}{(4!)^2} - \cdots = 0$$

$$\Rightarrow \quad y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = y - y + \theta y = 0$$

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0, \quad \frac{dy}{d\theta} + 2\frac{d^2y}{d\theta^2} + \theta\frac{d^3y}{d\theta^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} + 3\frac{d^3y}{d\theta^3} + \theta\frac{d^4y}{d\theta^4} = 0, \cdots$$

et, en générale,

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

Or,

- si l'on écrit dans l'ordre suivant l'équation algébrique

  $$X = 0$$

  et toutes celles qui en dérivent par la différentiation

  $$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \cdots$$

- et si l'on suppose que toute racine réelle d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultants de signe contraire, il est certain

- que la proposée $X = 0$ a toutes ses racines réelle,
- et que, par conséquent, il en est de même de toutes ses équations subordonées

$$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \cdots,$$

ces propositions sont fondées sur la théorie des équations algébriques et ont été démontrées depuis longtemps. [17, ¶ 308, pp.335-7]

Fourier's proof in other word is as follows :

Il suffit donc de prouver que les équations

$$y = 0, \quad \frac{dy}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = 0, \quad \cdots,$$

remplissant la condition précédente. Or cela suit de l'équation générale

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

car, si l'on donne à θ une valeur positive qui rend nulle la fluxion[a] $\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}}$, les deux autre termes $\frac{d^iy}{d\theta^i}$ et $\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}}$ recevront des valeurs de signe opposé. A l'égard des valeurs négatives de θ, il est visible, d'après la nature de la fonction $f(\theta)$, qu'aucune quantité negative mise à la place de θ ne pourrait rendre nulle ni cette fonction, ni aucune de celles qui en dérivent par la différentiation ; car la substitution d'une quantité négative quelconque donne à tous les termes le même sign. Donc on est assuré que l'équation

$$y = 0$$

a toutes ses racines réelles et positives. [17, ¶ 308, pp.335-7]

[a] Ratio of flux, which is the technical term used by Newton's differential and integral method.

¶ 310.

De l'équation

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0$$

en déduit l'équation générale

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

et si, l'on suppose $\theta = 0$, on aura l'équation

$$\frac{d^{1+1}y}{d\theta^{i+1}} = -\frac{1}{i+1}\frac{d^iy}{d\theta^i}$$

qui servira à déterminer les coefficients des différents termes du dévelopment de la fonction $f(\theta)$; car ces coefficients dépendent des valeurs que reçoivent les rapports differentiels lorsqu'on y fait la variable nulle. En supposant le premier connu et égal à 1, on aura la sérvie

$$y = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{(3!)^2} + \frac{\theta^4}{(4!)^2} - \cdots$$

TABLE 8. Usage applying the De Gua's theorem to the transcendental equation and its results. Remark ; article* : we cite this article in our paper

no	name bibliography article*	Applying to transcendental equation	result
1	Poisson [87, ¶ 68, pp. 381-3] 1823	$X = e^x + be^{ax} = 0$, $a > 0$, const. $\neq 1$, b : arbitrary $\Rightarrow X^{(i-1)} X^{(i+1)}$ $= -b^2(1-a)^2 a^{2i-1} e^{2ax} < 0$	$\Rightarrow$ on aura donc par conséquence quantité qui sera toujours négative, quel que soit le nombre entier i ; et cependent l'équation proposée $X = e^x + be^{ax} = 0$ a infinité de racines imaginaires $b > 0$: no root, $b \leq 0$: unique real root
2	Poisson [95, p.92-3],1830	$X = e^x - be^{ax} = 0$, $a > 0,\ b > 0$, const. $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dX^{n+2}} = -b^2(1-a)^2 a^{2n+1} e^{2ax}$	Chacunne de ces équations a une seule racine réelle et une infinité de racines imaginaires, comprises sous la forme : $x = \frac{\log ba^n + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}, \quad i \in \mathbb{Z}$ or 0
3	Fourier [36, p.123],1830	$y = e^x - be^{ax} = 0$ (For example,) $a = 2,\ b = 1$ $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} = 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+1}X}{dX^{n+1}} = -2^{n+1} e^{2x}$ $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dX^{n+2}} = -2^{2n+1} e^{4x} = 0$	(example) $a = 2, b = 1 \Rightarrow -2^{2n+1} e^{4x} = 0$ $\Rightarrow$ unique real root : $\frac{d^{n+1}X}{dX^{n+1}} = e^x(1 - 2^{n+1}e^x) = 0, e^x \neq 0$ $\Rightarrow$ real root of $1 - 2^{n+1}e^x = 0$
4	Gaston Darboux [17, ¶ 308*, p.336] footnote, 1888, (Maybe, refers Poisson[84]) cf. no.1	$(\alpha) \quad y = e^x + be^{ax} = 0,\ a > 0$, const. $\neq 1$, La fonction y est une solution particulière de l'équation diffèrentielle : $(\beta) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - (a+1)\frac{dy}{dx} + ay = 0$ à laquelle on peut appliquer littèralement tous les raisonnements de Fourier. ((β) is applicable to all the reasonings by Fourier.)	$b > 0$: no root, $b \leq 0$: unique real root $\Rightarrow$ dans les deux cas, elle a une infinité de racines imaginaires. Cela suffit, semble-t-il, à décider la question. (Between these two cases, it has numberless imaginary numbers. This is sufficient to decide the question.)

Si, maintenant, dans l'équation proposée

$$gu + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

on fait

$$g\frac{x^2}{2^2} = \theta,$$

et que l'on recherche la nouvelle équation en u et θ, en regardent u comme une fonction de θ, on trouvera

$$u + \frac{du}{d\theta} + \theta\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$u = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{(3!)^2} + \frac{\theta^4}{(4!)^2} - \cdots \quad ou \quad u = 1 - \frac{gx^2}{2^2} + \frac{g^2x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots$$

[17, ¶ 310, p.339]

¶ 374. (Integral of sum of particular solution.)

Pour donner un example de ce calcul, nous ferons usage de la valeur particulière qui nous a servi à former l'intégrale exponentielle.

Reprennant donc l'équation

$$(b)_F \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

nous donnerons à v la valeur très simple $e^{-n^2t}\cos nx$, qui satisfait évidement à l'équation différentielle $(b)_F$. En effet, on en tire

$$v = e^{-n^2t}\cos nx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -n^2 v, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -n^2 v$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx \; dn$$

convient aussi à l'équation $(b)_F$; car cette valeur de v est formée de la somme d'une infinité de valeurs particulières.

Or l'intégrale précédente est connu, et, l'on sait qu'elle équivaut à $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{x^2}{4t}}$ (*voir* l'article suivant). Cette dernière fonction de x et t convient aussi avec l'équation différentielle $(b)_F$. Il est d'ailleurs très facile de reconnaitre immédiatement que la valeur particulière $\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{x^2}{4t}}$ satisfait à l'équation dont il s'agit.

Ce même résultat aura lieu si l'on remplace la valeur x par $x - \alpha$, α étant une constante quelconque. On peut donc employer comme valeur particulière la fonction $\frac{Af(\alpha)}{\sqrt{t}}e^{\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}$, dans laquelle on attribute à α une valeur quelconque. Par conséquent, la somme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Af(\alpha)}{\sqrt{t}}e^{\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha$ satisfait aussi à l'équation différentielle $(b)_F$; car cette somme se compose d'une infinité de valeurs particulières de la même forme, multipliées par des constantes arbitraires. Donc on peut prendre pour valeur de v satisfaisant à l'équation $(b)_F$

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Af(\alpha)}{\sqrt{t}}e^{\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha,$$

A étant un coefficient constant. [17, ¶ 374, pp.431-2]

¶ 375.

La relation qu'on entre elles ces deux valeurs particulières se découvre lorsqu'on détermine l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx \; dn \tag{60}$$

Pour effectuer l'intégration, on pourrait développer le facteur $\cos nx$ et intégrer par rapport à n. On obtient ainsi une série qui représente un l'analyse suivante.

L'intégrale $\int e^{-n^2t}\cos nx\ dn$ se rapporte à celle-ci :

$$\int e^{-p^2}\cos 2pu\ dp$$

en supposant $n^2t=p^2$ et $nx=2pu$. On a ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx\ dn = \frac{1}{\sqrt{t}}\int e^{-p^2}\cos 2pu\ dp$$

On écrira maintenant

$$\begin{aligned}\int e^{-p^2}\cos 2pu\ dp &= \frac{1}{2}\int e^{-p^2+2pu\sqrt{-1}}\ dp + \frac{1}{2}\int e^{-p^2-2pu\sqrt{-1}}\ dp\\ &= \frac{1}{2}e^{-u^2}\int e^{-p^2+2pu\sqrt{-1}+u^2}\ dp + \frac{1}{2}e^{-u^2}\int e^{-p^2-2pu\sqrt{-1}+u^2}\ dp\\ &= \frac{1}{2}e^{-u^2}\int e^{-(p-u\sqrt{-1})^2}\ dp + \frac{1}{2}e^{-u^2}\int e^{-(p+u\sqrt{-1})^2}\ dp\end{aligned}$$

Or chacune des intégrales qui entrent dans ces deux termes équivaut à $\sqrt{\pi}$. En effet, on a, en général,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2}\ dq$$

et par consequent,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(q+b)^2}\ dq$$

quelle que soit la constante b. On trouve donc, en faisant $b=\mp u\sqrt{-1}$ et remplaçant q par p,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2}\cos 2pu\ dp = \sqrt{\pi}e^{-u^2}$$

donc [37]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx\ dn = \sqrt{\frac{\pi}{l}}e^{-u^2}$$

et, mettant pour u sa valeur $\frac{x}{2\sqrt{l}}$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2t}\cos nx\ dn = \sqrt{\frac{\pi}{l}}e^{-\frac{x^2}{4l}}$$

¶ 399. (Fourier's remark being due to Poisson[73].) Fourier remarks that he owes the integral method mentions here to Poisson.

En mettant pour v'' sa valeur $c''+\int v^{IV}\mathrm{dt}$, et continuant toujours des substitutions semblables, on trouve

$$v = c+\int v''dt = c+\int\left(c''+v^{IV}dt\right) = c+\int\left[c''+\int\left(c^{IV}+\int v^{VI}dt\right)dt\right]$$

ou

$$(T)_F \quad v = c+tc''+\frac{t^2}{2}c^{IV}+\frac{t^3}{3!}c^{VI}+\frac{t^4}{4!}c^{VIII}+\cdots$$

[37]From (60).

Dans cettet série, c désigne une fonction arbitraire en x.

Si l'on veut ordonner le développement de la valeur de v selon les puissances ascendantes de x, on écrira

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

et, désignant par $\varphi_,$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, $\cdots$ les fonctions

$$\frac{d\varphi}{dt}, \ \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ \frac{d^3\varphi}{dt^3}, \ \cdots,$$

on aura d'abord

$$v = a + bx + \int dx \int v_, dx;$$

a et b représentent ici deux fonctions quelconques de t. On mettra ensuite pour $v_,$ sa valeur

$$a_, + b_, x + \int dx \int v_{,,} dx;$$

et pour $v_{,,}$ sa valeur

$$a_{,,} + b_{,,} x + \int dx \int v_{,,,} dx;$$

et ainsi de suite. On trouvera, par ces substitutions continuées,

$$\begin{aligned} v = \;& a + bx + \int dx \int v_, dx \\ = \;& a + bx + \int dx \int \Big(a_, + b_, x + \int dx \int v_{,,} dx \Big) dx \\ = \;& a + bx + \int dx \int \Big[a_, + b_, x + \int dx \int \Big(a_{,,} + b_{,,} x + \int dx \int v_{,,,} dx \Big) dx \Big] dx \end{aligned}$$

ou

$$(X)_F \quad v = a + a_, \frac{x^2}{2} + a_{,,} \frac{x^4}{4!} + a_{,,,} \frac{x^6}{6!} + \cdots + b + b_, \frac{x^3}{3!} + b_{,,} \frac{x^5}{5!} + b_{,,,} \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (61)$$

Dans cette série, a et b designent deux fonctions arbitraires de t.

- Si, dans cette série donnée par l'équation $(X)_F$, on met, au lieu de a et b, deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$,
- et qu'on les développe selon les puissances ascendantes de t, en ordonnant le résultat total par rapport à ces mêmes puissances de t,

on ne trouve qu'un seule fonction arbitraire de x, au lieu des deux fonctions a et b. On doit cette remarque à M. Poisson, qui l'a donnée dans le Tome VI du *Journal de l'École Polytechnique*, page 110. (cf. Poisson [73])

Réciproquement, si dans la série exprimée par l'équation $(T)_F$, on développe la fonction c selon les puissances de x, en ordonnant le résultat par rapport à ces mêmes puissances de x, les coefficients de ces puissances se trouvent formés de deux fonctions entièrement arbitraires de t, ce que l'on peut aisement vérifier le calcul. [17, ¶ 399, pp.466-7]

Poisson [73] says in his article as follows :

¶40. Prenons pour exemple l'équation fort simple $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dy^2}$, qui reste la même quand on y met $x + a$ au lieu de x ; en sort que cette préparation est inutile dans ce cas particulier ; et en général elle est inutile toutes les fois que la proposée ne renferme pas la variable suivant laquelle on veut développer l'intégrale.

Son intégrale en série, ordonnée suivant les puissances de x, et obtenue, soit par le théorème de *Taylor*, soit par la méthode des coéfficiens indéterminés, est

$$z = Fy + x\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^4F}{dy^4} + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d^6F}{dy^6} + \cdots \tag{62}$$

Fy étant une fonction arbitraire et la seule que renfrme cette intégrale. L'intégrale de la même équation, ordonnée suivant le puissances de y, serait

$$z = \varphi x + y\pi x + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^3}{3!} \cdot \frac{d\pi x}{dx} + \frac{y^4}{4!} \cdot \frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^5}{5!} \cdot \frac{d^2\pi x}{dx^2} + \cdots$$

φx et πx étant des fonctions arbitraires. Ces deux intégrales devant être équivalentes, il faut que les deux fonctions φx et πx se réduisent à une seule, sans que la seconde valeur de z perde rien de sa généralité ; or c'est ce qui arrive en effet, et pour le prouver, il suffit de développer les fonctions φx et πx suivant le puissances de x, et d'ordonner la seconde valeur de z, aussi suivant les puissances de x. [73, pp.109-110]

Poisson continues as follows : assuming that

$$\varphi x = A + Bx + \frac{Cx^2}{2} + \frac{Dx^3}{3!} + \cdots, \quad \pi x = A' + B'x + \frac{C'x^2}{2} + \frac{D'x^3}{3!} + \cdots$$

then

$$z = Fy + x \cdot \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^4F}{dy^4} + \cdots$$

$$\begin{aligned} z = {} & A + A'y + \frac{By^2}{2} + \frac{B'y^3}{3!} + \frac{Cy^4}{4!} + \frac{C'y^5}{5!} + \cdots \\ + {} & x\Big(B + By' + \frac{Cy^2}{2} + \frac{C'y^3}{3!} + \cdots\Big) + \frac{x^2}{2}\Big(C + Cy' + \cdots\Big) + \cdots \end{aligned} \tag{63}$$

(63) can be regarded as the development of Fy in respect to y, then (63) is equal to (62). [73, pp.110]

Il est facile de multiplier les exemples, et en général on verra que les équations de l'ordre n, dont les intégrales comportent moins de n fonctions arbitraires, sont de l'espèce de celles qui ne peuvent être intégrées sous forme finie ; c'est même parce que ce intégrales sont sous la forme de séries, qui arrive que deux ou un plus grand nombre de fonctions arbitraires peuvent se réduire à une seul, comme on vient d'en voir un exemple. [73, pp.110-11]

¶ 401.

La série $(T)_F$ de article 399, qui dérive de l'équation

$$(a)_F \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

peut être mise sous cette forme

$$v = e^{tD^2}\varphi(x)$$

On dveloppera l'exponentielle selon les puissances de D, et l'on écrira $\frac{d^i}{dx^i}$ au lieu de D^i, en considérant i comme indece d edifférentiation. On aura ainsi

$$v = \varphi(x) + t\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{t^2}{2}\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} + \frac{t^3}{3!}\frac{d^6\varphi(x)}{dx^6} + \cdots$$

Suivant la même notation, la premièr partie de la série $(X)_F$ (art. 399), qui ne contient que des puissances paires de x, sera exprimée sousette forme :

$$\cos(x\sqrt{-D})\varphi(t).$$

On développera selon les puissances de x, et l'on écrira $\frac{d^2}{dx^2}$ au lieu de D', en considérant i comme indece de différentiation. La seconde partie de la série $(X)_F$ se déduit de la première, en intégrant par rapport à x et changeant la fonction $\varphi(t)$ en une autre fonction arbitraire $\phi(t)$. On a donc

$$v = \cos(x\sqrt{-D})\varphi(t) + W$$

et

$$W = \int_0^x \cos(x\sqrt{-D})\phi(t)dx = \frac{\sin(x\sqrt{-D})}{\sqrt{-D}}\phi(t)$$

[38] Ces notations abrégées et connues dérivent des analogies qui existent entre les intégrales et les puissances. Quant à l'usage que nous en faisons ici, il a pour objet d'exprimer les séries et de les vérifier sans aucun développment. Il suffit de différentier sous les signes que cette notation emploie. Par exemple, de l'équation $v = e^{tD^2}\varphi(x)$ on déduit, en différentiant par rapport à t seulement,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D^2 e^{tD^2}\varphi(x) = D^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

ce qui montre immediatement que la série satisfait à l'équation différentielle (a). Pareillment, si l'on considère la première partie[39] de la série $(X)_F$, en écrivant

$$v = \cos(x\sqrt{-D})\varphi(t),$$

on aura, en différentiant deux fois par rapport à x seulement,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = D\cos(x\sqrt{-D})\varphi(t) = Dv = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Donc cette valeur de v satisfait à l'équation différentielle (a).

On trouvera de la même manière que l'équation différentielle

$$(b)_F \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

donne, pourl'expression de v en série développée selon les puissances croissantes de y,

$$v = \cos(yD)\varphi(x).$$

Il faut développer par repport à y et écrire $\frac{d}{dx}$ au lieu de D. En effet, on déduit de cette valeur de v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -D^2\cos(yD)\varphi(x) = -D^2 v = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La valeur $\sin(yD)\psi(x)$ satisfait aussi à différentielle : donc la valeur générale de v est

$$v = \cos(yD)\varphi(x) + \sin(yD)\psi(x)$$

[17, ¶ 401,pp.468-9]

¶ 407.

On déduit immédiatement les valeurs de g et h du résultat connu

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

[38]The right hand-side is given by the footnote of G.D.

[39]The first terms of (61) equals $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \mathrm{ver}\sin x$, where, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\cdots$.

En effet, cette dernière équation est identique et, par conséquent, ne cessera point de l'être lorsqu'on mettra au lieu de x la quantité

$$y\Big(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Big);$$

cette substitution donne

$$\sqrt{\pi}=\Big(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2\sqrt{-1}}dy=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int\Big(\cos y^2-\sqrt{-1}\sin y^2\Big)dy$$

Ainsi la partie réelle du second membre de cettre dernière équation est $\sqrt{\pi}$, et la partie imaginaire est nulle. On en conclut

$$\sqrt{2\pi}=\int\cos y^2\ dy+\int\sin y^2\ dy,\qquad \text{et}\qquad 0=\int\cos y^2\ dy-\int\sin y^2\ dy$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos y^2\ dy=g=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin y^2\ dy=h=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Il ne rest plus qu'à déterminer, au moyen de équation $(a)_F$ et $(b)_F$, les valeurs des deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos y^2\ \cos 2by\ dy,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin y^2\ \sin 2by\ dy.$$

Elles seront ainsi exprimées :

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\cos y^2\ \cos 2by\ dy=h\sin b^2+g\cos b^2,\quad B=\int_{-\infty}^{\infty}\sin y^2\ \cos 2by\ dy=h\cos b^2-g\sin b^2.$$

On en conclut

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos y^2\ \cos pz\ dp=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\Big(\cos\frac{z^2}{4t}+\sin\frac{z^2}{4t}\Big),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin y^2\ \cos pz\ dp=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}\Big(\cos\frac{z^2}{4t}-\sin\frac{z^2}{4t}\Big)$$

écrivant $\sin\frac{\pi}{4}$ ou $\cos\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cos y^2\ \cos pz\ dp=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{z^2}{4t}\Big),\quad (2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin y^2\ \cos pz\ dp=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{z^2}{4t}\Big)$$

[17, ¶ 407,pp.481-2]

¶ 408.

On aura donc, pour exprimer une fonction quelconque des deux variables x et y, l'équation suivante :

$$(BB)\quad f(x,\ y)=\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\ \beta)d\beta\int_{-\infty}^{\infty}\cos\ p(x-\alpha)\ dp\ \int_{-\infty}^{\infty}\cos q(y-\beta)\ dq$$

On formera de la même manière l'équation qui convient aux fonctions de trois variables, savoir :

$$\begin{aligned}(BBB)\quad f(x,\ y,\ z)\ =\ &\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)d\gamma\\ &\times\ \int_{-\infty}^{\infty}\cos\ p(x-\alpha)\ dp\ \int_{-\infty}^{\infty}\cos q(y-\beta)\ dq\int_{-\infty}^{\infty}\cos r(z-\gamma)\ dr\end{aligned}$$

¶ 409. (To make $v = u + W$ by integral of $\varphi(x,\ y)$ and $\psi(x,\ y)$).

Par exemple, l'équation différentielle étant

$$(c)_F \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

on veut connaitre la valeur de v, fonction de $x,\ y,\ t$ et tell :

1. qu'en supposant $t = 0$, v ou $f(x,\ y,\ t)$ devinne une fonction arbitraire $\varphi(x,\ y)$ de $x,\ y$;
2. qu'en faissant $t = 0$ dans la valeur de $\frac{\partial v}{\partial t}$ ou $f'(x,\ y,\ t)$, on trouve une seconde fonction entièrement arbitraire $\psi(x,\ y)$.

Nous pouvons conclure de la forme de l'équation différentielle $(c)_F$ que la valeur de v qui satisfera à cette équation et aux deux conditions précédentes sera nécessairement l'intégrale générale. Pour découvrir cette intégrale, nous donnons d'abord à v la valeur particulière

$$v = \cos\ mt\ \cos\ px\ \cos qy.$$

La substitution de v fournit la condition

$$m = \sqrt{p^2 + q^2}$$

Il n'est pas moins évident que l'on peut écrire

$$v = \cos\ (x - \alpha)p\ \cos(y - \beta)q\ \cos\ t\sqrt{p^2 + q^2}$$

ou encore

$$v = \int d\alpha \int F(\alpha,\ \beta) d\beta \int \cos\ p(x - \alpha)\ dp\ \int \cos q(y - \beta)\ \cos\ t\sqrt{p^2 + q^2}\ dq$$

quelles que soient les quantités $p,\ q,\ \alpha,\ \beta$ et $F(\alpha,\ \beta)$, qui ne contiennt ni x, ni y, ni t. En effet, cette dernière valeur de v n'est autre chose qu'une somme de valeurs particulières.

Si l'on suppose $t = 0$, il est nécessaire que v devienne $\varphi(x,\ y)$. On aura donc

$$\varphi(x,\ y) = \int d\alpha \int F(\alpha,\ \beta) d\beta \int \cos\ p(x - \alpha)\ dp\ \int \cos q(y - \beta)\ dq$$

Ainsi la question est réduite à déterminer $F(\alpha,\ \beta)$ en sortevque le résultat des intégrations indiquées soit $\varphi(x,\ y)$. Or en comparant dernière équation à l'équation (BB), on trouve

$$\varphi(x,\ y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha,\ \beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cos\ p(x - \alpha)\ dp\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos q(y - \beta)\ dq$$

Donc l'intégrale sera ainsi exprimée :

$$v = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha,\ \beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cos\ p(x - \alpha)\ dp\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\ q(y - \beta) \cos\ t\sqrt{p^2 + q^2}\ dq$$

On obtient ainsi une premiére partie u de l'intégrale ; designant par W le seconde partie, qui doit contenir l'autre fonction arbitraire $\psi(x,\ y)$, on aura

$$v = u + W,$$

et l'on prendra pour W l'intégrale $\int u dt$, en changeant seulement φ en ψ.

En effet, u devient égale à $\varphi(x,\ y)$ lorsqu'on fait $t = 0$; et em même temps W devient null, puisque l'integration par rapport à t change le cosinus en sinus. De plus, si l'on prend la valeur de $\frac{\partial v}{\partial t}$ et que l'on fasse $t = 0$, la première partie, qui contient alors un sinus, devient nulle, et la seconde partie devient égale à $\psi(x,\ y)$.

Ainsi l'équation

$$v = u + W$$

est l'intégrale complète de la proposée. [17, ¶ 409, pp.483-5]

7. Poisson's heat theory in rivalry to Fourier

7.1. *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides* [84], 1823.

Poisson [84] traces Fourier's work of heat theory, from the another point of view. Poisson emphasizes, in the head paragraph of his paper, that although he totally takes the different approaches to formulate the heat differential equations or to solove the various problems or to deduce the solutions from them, the results by Poisson are coincident with Fourier's. cf. fig.1, Table 13.

> La question que je me propose de traiter a été le sujet d'un prix proposé par première class de l'Institut, et remporté par M. *Fourier* au commencement de 1812. La pièce couronnée est restée au secrétariat, où il m'a été permis d'en prendre connaissance : j'aurai soin, dans le courant de ce Mémoire, citer les principaux résultats que M. *Fourier* a obtenus avant moi ; et je dois dire d'avance que, dans tous les problèmes particuliers que nous avons pris l'un et l'autre pour exemples, et qui étaient naturellement indiqués dans cette matière, les formules de mon Mémoire coïncident avec celles que cette pièce renferme. Mais c'est tout ce qu'il y a de commun entre nous deux ouvrages ; car,
>
> - soit pour former les équations différentielles du mouvement de la chaleur,
> - soit pour les résoudre et en déduire la solution définitive de chaque probléme,
>
> j'ai employé de méthodes entièrement différentes de celles que M. *Fourier* a suivies. [84, pp.1-2]
>
> 私が展開しようとする問題は、最初は1812年にFourier氏に授けられた学士院の第一位の懸賞の懸った主題であった。懸賞論文は書記局に保管され私も閲覧出来る：私はこの論文を通して私より前に得た基本的な諸結果を指摘するのに細心の注意を払った；私は初めに次の事を言いたい。例として挙げた全ての特殊問題に関しては、私の本論文中の各式はFourier氏が出したものと全く一致する。しかし、二つの論文で共通なのはそれだけだ。何故なら、
>
> - 熱の微分方程式を定式化するため、
> - それらを解決したり個々の問題の解を得るため、
>
> Fourier氏とは全面的に異なる方法を取ったからだ。
>
> La solution de ce problème général se diverse naturellement en deux parties :
>
> - la première a pour objet la recherche des équations différentielles du mouvement de la chaleur dans l'intérieur et près de la surface du corps ;
> - le seconde, qui n'est plus qu'une question de pure analyse, comprend l'intégration de ces équations et la détermination des fonctions arbitraires contenues dans leurs intégrales, d'après l'état initial du corps et les conditions relatives à sa surface.
>
> Il semble, au premier coup d'œil, que la première partie de notre problème ne doit présenter aucune difficulté, et qu'il ne s'agit que d'appliquer immédiatement les principes de physique que nous venons de rappeler. [84, p.4]

Poisson points out the various difficulties of Fourier's applying to the physical problems :

> En adoptant celle qui réduit la sphère d'activité de ce rayonnement à une étendue insensible, j'ai formé l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps hétérogène, pour lequel la chaleur spécifique et la

Table 9. Papers by Fourier and Poisson of problems on the transcendental equation, R : transcendental, H : heat, I : integral, E : elastic solid, F : fluid,

no	Fourier	Poisson	ℝ	H	I	E	F
1		Poisson [75], NBSP **6**(1808) 112-116 (Report of Fourier's proposition) Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps solides		H			
2		Poisson [77], JEP **9**(1813), Cahier**16**, 215-246 Mémoire sur les intégrales définies			I		
3		Poisson [78], MSMP **9**(1814), 167-226 Mémoire sur les Surfaces élastiques				E	
4		Poisson [79], JEP **10**(1815), 612-631. Suite du Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le volume précédent de ce Journal			I		
5	⇒Fourier, Bull. Sci., Soc. Philo,1818 cf. [36, p.127]		ℝ				
6		Poisson [80], MAS **3**(1818), 121-176. Lu : 19/juillet/1819 Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques			I		
7		Poisson [81], JEP **11**(1820), 295-341. Suite du Mémoire sur les Intégrales définies, Inséré dans les duex précédens volumes de ce Journal			I		
8		Poisson [82], JEP **11**(1820), 417-489 Mémoire sur la Manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de quantités périodiques, et sur l'Usage de cette Transformation dans la Résolution de différens Problèmes					
9	⇒Fourier [30], Bull. Sci., Soc. Philo,1820 Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines cf. [36, p.127,130]		ℝ				
10		Poisson [83], ACP **19**(1821), 337-349. Extrait d'un Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides		H			
11	⇒Fourier [31],1822 Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition, [17], 1888)			H			
12		⇐Poisson [84], JEP **12**(1823), Cahier **19**, 1-144. Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides					
13		⇐Poisson [85], JEP **12**(1823), 145-162. Addition au Mémoire precedent, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de Quantités périodiques. cf. Poisson [82]					
14		⇐Poisson [88], JEP **12** (1823), Cahier **19**, 405-509. Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la Sommation des Séries			I		
15		Poisson [89], ACP **22**(1823), 250-269. Lu : 24/mar/1823. Extrait d'un Mémoire sur la Propagation du mouvement dans les fluides élastiques					F
16		Poisson [90], ACP **26**(1824), 225-45, 442-44 Sur la chaleur rayonnante		H			
17	⇒Fourier [32], MAS **4**(1824), 185-556 Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides. I^{re} partie			H			
18	⇒Fourier [33], MAS **5**(1826), 153-246 Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides. II^{e} partie			H			

TABLE 10. Papers by Fourier and Poisson of problems on the transcendental equation (continued), R : transcendental, H : heat, I : integral, E : elastic solid, F : fluid, D : defect in Fourier

no	Fourier	Poisson	ℝ	H	I	E	F	D
19	⇒Fourier [34], MSA **7**(1827), 605-624 Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendendent de la théorie de la chaleur		ℝ	H				
20		Poisson [91], ACP **37**(1828), 337-355. Lu : 14/apr/1828 Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques. (Extract of [92])				E		
21		⇐Poisson [92], MAS **8**(1829), 357-570. Lu : 14/apr/1828, Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques	ℝ			E		D
22		⇐Poisson [93], MAS **8**(1829), 623-27. Lu : 14/apr/1828 Addition au Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques	ℝ			E		
23	⇒Fourier [35], MAS **8**(1829), 581-622. Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur		ℝ	H				D
24		Poisson [94], MAS **9**(1830), 1-88. Lu : 24/nov/1828 Mémoire sur l'*É*quilibre fluides					F	
25		⇐Poisson [95], MAS **9**(1830), 89-95. Lu : 2/mars/1829 Note sur les racines des équations transcendentes	ℝ					D
26	⇒Fourier[36], MAS **10**(1830), 119-146. Lu:9/mars/1829 Remarques générales sur l'application des principes de l'anayse algébrique aux équations transcendantes		ℝ					D
27		⇐Poisson [96], JEP **13**(1831), 1-174. Lu : 12/oct/1829 Mémoire sur les équations générales de l'équiblibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides	ℝ			E	F	D
28		Poisson [97],1831 Nouvelle théorie de l'action capillaire					F	
29		Poisson [98],1835 Théorie mathématique de la chaleur (I)		H				
30		Poisson [99], ACP **59**(1835), 71-102 Théorie mathématique de la chaleur		H				
31		Poisson [100],1837 Note sur un passage de la Théorie des Fonctions analytiques						
32		Poisson [101],1837 Remarques sur l'intégrales des fractions rationnelles			I			
33		Poisson [102],1837 Note relative *à* un passage de la Mécanique céleste						
34		Poisson [103],1837 Remarques sur l'integration des équations différentielles de la Dynamique			I			
35		Poisson [104],1837 Solution d'un problèm probabilité						
36		Poisson [105],1838 Note sur les limites de la série de Taylor						
37		Poisson [106],1838 Note sur l'integration des *É*quations linéaires Différentielles partielles			I			

TABLE 11. The integral problems described in Fourier's *Théorie analytique de la chaleur* [17], Remark ; article* : we cite this article in our paper.

no	chapt .sect	problem	cited article* pages	description of problems	description of special solution/general solution
1	§4.1	anneau,armille	¶ 238*-9* pp.239-42	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{hl}{CDS}$ $= k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv,$ $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ u:une nouvelle indéterminée	$v = e^{-kn^2 t}\Big(a\sin\ nx + b\cos\ nx\Big)$ $= e^{-k\frac{i^2}{r^2}t}\Big(a\sin\ \frac{ix}{r} + b\cos\ \frac{ix}{r}\Big)$
2	§5.1	sphère solide	¶ 306* pp.304-6	$\frac{\partial v}{\partial t} = k\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big),$ $\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0, \quad (x = X)$	$v = \frac{e^{-kn^2 t}}{x}\Big(A\cos\ nx + B\sin\ nx\Big)$
3	§6	cylindre solide	¶ 306* pp.332-3	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big),$ $\frac{h}{K}V + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	
4	§7	prisme rectangulaire	¶ 321 p.359	$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$	$(ss) \quad ae^{-mx}\cos ny \cos pz$
5	§8	cube solide	¶ 333 p.375	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big)$	$(ss) \quad e^{-mt}\cos nx \cos ny \cos pz,$ $m = k(n^2 + p^2 + q^2),$ $(gs) \quad v = e^{-k(n^2+p^2+q^2)t}$ $\times \cos nx \cos ny \cos pz$
6	§9	solide infini	¶ 374* pp.431-3	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big)$	$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{t})dq$
7	§9		¶ 375* pp.433-4		special sol.
8	§9		¶ 376 pp.434-6	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$	3 dimensions
9	§9		¶ 377 pp.436-9	$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}} f(\alpha)\ d\alpha$	difusin of heat in the infinite line

> conductibilité varient d'une manière quelque d'un point à un autre. Dans le cas particulier de l'homogénéité, cette équation coïncide avec celle de M. Fourier a donnée la premier dans le mémoire cité, en la déduissant de l'action des élémens contigus du corps, ce qui n'a pas paru exempt de *difficulté*. Outre cette équation, comme à tous les points du corps, il en existe une autre qui n'appartient qu'aux points de la surface supposée rayonnante, et que M. Fourier a également donnée. [84, p.6] (Italics mine.)

7.1.1. *§2, Distribution de la Chaleur dans une Barre prismatique, d'une petite épaisseur.*

Poisson [84] considers the proving on the convergence of series of periodic quantities by Lagrange and Fourier as the manner lacking the exactitude and vigorousness, and wants to make up to it.

> Dans le mémoire cité dans ce n.^{o}, j'ai considéré directment les formules de cette espèce qui ont pour objet d'exprimer des portions de fonctions, *en séries de quantités périodiques*, dont tous les termes satisfont à des conditions données, relatives aux limites de ces fonctions. Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de sembles expressions ; mais *il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démonstrées d'une manière précise et rigoureuse ; et c'est à quoi j'ai*

TABLE 12. The integral problems described in Chap. 9, Sect. 2-4 of Fourier's *Théorie analytique de la chaleur* [17] (continued), Remark ; article* : we cite this article in our paper

no	§	cited article* pages	description of problems	description of special/general solution
10	§9	¶ 381 pp.442-3	exact sol.⇒ $v=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4kt}}f(\alpha)\ d\alpha$, approximate sol. ⇒ $v=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\int f(\alpha)\ d\alpha$ $\frac{k\equiv K}{CD}$, : conductiblility	difusin of heat in the infinite line
11		¶ 399∗ pp.465-7	Fourier's Remark due to Poisson's integral method	cf
12		¶ 401∗ pp.468-9	$(a)\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad (b)_F\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$	general sol.
13		¶ 402 pp.470-1	$(c)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\quad (d)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}=0$	
14		¶ 403 pp.470-1	$(e)_F\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}=0,$ $(f)\quad \frac{\partial v}{\partial t}=a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+c\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}+\cdots$	
15		¶ 404 pp.474-6	$(a)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ p(x-\alpha)\ dp,$ $(f)\quad \frac{\partial v}{\partial t}=a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+c\frac{\partial^6 v}{\partial x^6}+\cdots$ $(B)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ p(x-\alpha)\ dp,$ $\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\alpha)d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-t(ap^2-bp^4+\cdots)\}\cos\ p(x-\alpha)\ dp$	
16		¶ 405 pp.406-9	$(d)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}=0,$ $\varphi(x)=\int F(\alpha)\ d\alpha\int\cos q(x-\alpha)dq,\quad F(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\varphi(\alpha),$ $u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\ d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ q^2\cos\ q(x-\alpha)\ dq,$ $W=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)\ d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\ q^2\cos\ q(x-\alpha)\ \frac{dq}{q^2},$ $\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\ d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ q^2\cos\ q(x-\alpha)\ dq+W=u+W$	$v=u+W$
17		¶ 406 pp.479-80	$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ q^2\cos\ qz\ dq=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sin\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{z^2}{4t}\right),$ $(2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\ q^2\cos\ qz\ dq=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sin\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{z^2}{4t}\right),$ $(\delta)\quad u=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\ \left[\frac{\pi}{4}+\frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right]\varphi(\alpha)\ d\alpha,$ $\alpha=x+2\mu\sqrt{t},\quad \Rightarrow\quad d\alpha=2\sqrt{t}d\mu,$ $\Rightarrow\quad (\delta')\quad u=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin^2\mu+\cos^2\mu\right)\varphi(x+2\mu\sqrt{t})\ d\mu$	
18		¶ 407∗ pp.480-2		$v=u+w$
19		¶ 408∗ pp.482-3	• $f(x,\ y)=$ $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\ \beta)d\beta\int_{-\infty}^{\infty}\cos\ p(x-\alpha)\ dp\ \int_{-\infty}^{\infty}\cos q(y-\beta)\ dq$ • $f(x,\ y,\ z)=\cdots$	cf
20		¶ 409∗ pp.483-5	$(c)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$ $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$	sum of special sol.
21		¶ 410 pp.485-7	$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$	
22		¶ 411 pp.487-8	$(e)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}=0$	
23		¶ 412 pp.488-9		$v=u+w$
24		¶ 413 pp.489-493, fn. by G.D.		$v=u+w$
25		¶ 420 pp.505, fn. by G.D.	binôme, "Les intégrales données ici par Fourier ne peuvent avoir aucun sens, puisque les élements de ces intégrales ne tendent pas vers zéro et dépassent même toute grandeur donnée lorsque p grandit indéfiniment" (fn. by G.D.)	
26		¶ 421 pp.506-7		$v=u+w$

tâché de suppléer dans ce Mémoire, par rapport à celles de ces formules qui se présentent le plus souvent dans les applications. [84, ¶28, p.46] (Italics mine.)

7.1.2. §*3, Distribution de la Chaleur dans un Anneau homogène et d'un épaisseur constante.*
¶39 (what is called the Poisson's kernel)

$$u = \frac{e^{-bt}}{\pi}\sum\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty \cos(y-x)z\cdot\varphi(y+2nl)dy\Big]e^{-a^2tz^2}\ dz$$

We suppose $y + 2nl \equiv x'$

$$u = \frac{e^{-bt}}{\pi}\sum\int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty \cos(x'-x-2nl)z\cdot\varphi(x')dx'\Big]e^{-a^2tz^2}\ dz$$

$$u = \frac{e^{-bt}}{\pi}\sum\int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^\infty \cos(x'-x)z\cdot\varphi(x')dx'\Big)Ze^{-a^2tz^2}\ dz$$

where $1 + 2\sum\cos 2nlz \equiv Z$, Regarding that

$$1 + 2\sum(1-g)^n\ \cos 2nlz$$

converges on Z with respect to g, where g assumed positive and as small as possible.

$$1 + 2\sum(1-g)^n\ \cos 2nlz = \frac{2g-g^2}{1-2(1-g)\ \cos 2lz + (1-g)^2} \tag{64}$$

where, $1 - g \equiv r$, then

$$1 + 2\sum r^n\ \cos 2nlz = \frac{1-r^2}{1-2r\ \cos 2lz + r^2} \tag{65}$$

(64), namely (65) is what is called the Poisson's kernel. For the limit equals zero and infinite, it is necessary that $2lz = 2i\pi + z'$.

$$Z = \frac{2g}{g^2 + (z')^2}$$

$$u = \frac{e^{-bt}}{l\pi}\sum_{i=1}^\infty \Big[\int_{-l}^l \cos(x'-x)\cdot\frac{i\pi}{l}\cdot\varphi(x')dx'\Big]\exp\frac{-a^2t\pi^2i^2}{l^2}\int\frac{gdz'}{g^2+(z')^2}$$

Replacing $\varphi(x')$ with fx', where, fx' is determinated from the initial state of the annul.

$$u = \frac{e^{-bt}}{2l}\int fx'dx' + \frac{e^{-bt}}{l}\sum_{i=1}^\infty\Big(\int_{-l}^l \cos(x'-x)\cdot\frac{i\pi}{l}\cdot fx'dx'\Big)\exp\frac{-a^2t\pi^2i^2}{l^2}$$

7.1.3. §*5, Équations différentielles du Mouvement de la Chaleur dans un corps solide de forme quelconque.*

Poisson proposes the different and complex type of heat equation with Fourier's $(a)_P$. For example, we assume that interior ray extends to sensible distance, which forces of heat may affect the phenomina, the terms of series between before and after should be differente.
¶47 (Heat equations by Poisson)

On aura enfin

$$(a)_P \quad \frac{du}{dt} = a^2\Big(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\Big) \tag{66}$$

pour l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur de la masse du corps que l'on considère. [84, ¶47, p.82]
¶48

Cette équation a déjà été donnée par M. *Fourier*, qui l'a déduite de considérations différentes de celles que nous venons d'employer. On doit remarquer que sa forme est subordonnée au mode de communication de la chaleur que nous avons supposé : si l'on admettait, par exemple, que le rayonnement intérieur s'étendı̂t à des distances sensible, dont la grandeur pût influer sur les phénomènes, il faudrait prolonger le développement de $u' - u$, suivant les puissances et les produits de x', y', z', au-delà des termes auxquels nous nous sommes arrêtés ; d'où il résulterait, pour le seconde membre de l'équation $(a)_P$, une autre forme qui serait plus compliquée que la précédente. [84, ¶48, p.82]

$$(f)_P \quad k\Big(\frac{du}{dz}\Big) + \gamma(u - \zeta) = 0 \tag{67}$$

¶58

En substituant actuellement cette value de $\frac{du}{dz}$ dans l'équation $(f)_P$ (67), devient

$$(f)_P \quad k\Big(\lambda\frac{du}{dx} + \lambda'\frac{du}{dy} + \lambda''\frac{du}{dz}\Big) - \gamma(u - \zeta) = 0 \tag{68}$$

Cette équation, importante dans la théorie de la chaleur, est due à M. *Fourier, qui l'a donnée en en omittant la démonstration*, du moins, dans le cas général d'un corps de forme quelconque. Elle aura lieu pour toutes les parties rayonnantes de la surface :

- si le corps est homogène, et que sa surface ait par-tout [40] le même degré de poli, les deux coefficients k et γ seront constans ;
- si, au contraire, le corps est hétérogène, et que sa surface n'ait pas dans tous les points la même faculté de rayonner, ils varieront d'un point à un autre, et devront être données en fonctions de x, y, z.

[84, ¶58, p.102] (Italics mine.)

Poisson concludes on this question, priding himsellf on the originality of proof and defending himself on the lack of exactitude :

Par cette considération, qui se présente la première à l'esprit, et que j'avais autrefois employée, on retouve, comm on voit, l'équation (f) ; mais cette manière d'y parvenir, ne me semble pas entièrement satisfaisante, en ce qu'elle faisse dans l'obscurité ce qui se passe très-près de la surface, à la profondeur où les points du corps rayonnent au dehors, et *qu'il en peut résulter quelque doute sur l'exactitude de l'équation* ; c'est pourquoi j'ai employé, pour l'obtenir, la méthode exposée précédement avec tous les détails qu'exigeaient l'importance et la difficulté de la question. [84, ¶61, p.112] (Italics mine.)

この考えは最初に浮かんだもので、昔、取り組んだものだが、これによって見ての通り、これで式 $(f)_P$ を再び得ている。しかし、ここに至るやり方は難解さをそのままにしている点において私には全体的に満足していない。それは

- この考えが表面の極近くを、物体の各点が外部に向って放射する深層部に向かって移る事からこのように難解になった事
- また、「それがため、式の正確さに関して若干の疑問を抱かせる事になったかもしれない」というためである。

その理由は、私がそれを得るために、問題の重要さと難しさを必要とする、考えられるあらゆる事を細部に亘って前述の方法を用いたからである。

[40] sic., partout.

TABLE 13. The problems of Poisson's *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides* [84]

no	title of chapter/section	theme	material containing heat	Fourier's descrip-tions in [17]	comments by Poisson [84] to Fourier or Laplace
1	*Équations différentielles de Mouvement de la Chaleur dans une Barre d'une petite épaisseur*	equation	thine bar		Fourier's physical value gained by his experience is unacknowledged value up to then. ([7], p.17)
2	*Distribution de la Chaleur dans une Barre prismatique, d'une petite épaisseur*	distribution	thin bar in prism shape		Laplace and Fourier's proofs are inexact and non-vigorous. ([28], p.46)
3	*Distribution de la Chaleur dans une Anneau homogène et d'une épaisseur constante*	distribution	homogeneous annulus	§4	Poisson's kernel
4	*Distribution de la Chaleur dans une Barre homogène qui rayonne par ses extrémités dans un mileu dont la température varie avec le temps*	distribution	homogeneous bar		
5	*Équations différentielles du Mouvement de la Chaleur dans un corps solide de forme quelconque*	equation	arbitrary shaped solid corps		Fourier omits to prove the convergence. ([58], p.102)
6	*Distribution de la Chaleur dans une Sphère homogène, dont tous les points également éloignés du centre ont des températures égales*	distribution	sphere	§5	
7	*Distribution de la Chaleur dans une Sphère* composé *de deux parties de matières différenties*	distribution	sphere	§5	
8	*Distribution de la Chaleur dans un Parallélépipéde rectangle homogène*	distribution	parallel-epiped	§3	

7.2. *Second Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides* [87], 1823.

Poisson deduces the following equation $(d)_P$ to which he refers in ¶68 :

$$bl-1\equiv A,\quad \beta(l+l')-1\equiv B,\quad \frac{ml}{a}\equiv L,\quad \frac{ml'}{a'}\equiv L',$$

$$\begin{aligned}(d)_P\quad & \Big(\frac{m^2l(l+l')}{a'^2}-(b'l+1)B\Big)L\cos\ L\sin L'-\Big(\frac{ml}{a'}B+\frac{m(l+l')}{a}(b'l+1)\Big)L\cos\ L\cos L'\\ +\quad & \Big(\frac{m^2l(l+l')}{a'^2}A+(b'l-A)B\Big)\sin\ L\sin L'-\Big(\frac{ml}{a'}AB+\frac{m(l+l')}{a'}(b'l-A)\Big)\sin\ L\cos L'=0\end{aligned}$$

Poisson introduces two methods to distinguish the root of a transcendental equation : ¶68.

> L'analyse précédente nous conduit, comme on voit, à un résultat semblable à celui que nous avons énoncé [*n.*^{o} 63], et auquel on serait parvenu en suivant la même méthode que dans le §$VII.^e$ du premier Mémoire. [41] Il y a, cependent, une différence entre les résultats de ce deux méthodes : par la nature de la seconde, il ne faut prendre pour m que les racines réelles de l'équation $(d)_P$, sans s'inquéter si elle admit des racines imaginaires, tandis que, par la méthode précédente, on doit prendre pour m tout les valeurs réelles ou imaginaires qui satisfont à cette

[41] Poisson [84].

équation. Les deux méthodes étant exactes, et leurs résultats devant coïncider, on est porté à conclure de leur rapprochment que l'équation $(d)_P$ n'a pas de racines imaginaires ; mais on n'a aucun moyen de s'en assurer d'une équation transcendante sont toutes réelles. *Euler* a démontré que les équations $sin\ x = 0$, cos $x = 0$, n'ont pas de racines imaginaires : d'ailleurs on s'assurer aisément, à l'égard de ces équations fort simples, que l'on n'y peut pas satisfaire en prenant $x = p + q\sqrt{-1}$, à moins qu'on n'ait $q = 0$; mais il n'en est pas de même ; dès qu'il s'agit d'une équation transcendante un peu compliquée ; et d'un autre côté, les rèegles que les géomètres ont trouvées pour s'assurer, *à priori*, de la réalité de toutes les racines d'une équation donnée, ne conviennent qu'aux équations algébriques, et ne sont point applicables en général aux équation transcendantes. En effet, ces régles se réduissent à deux :

- l'une est celle que *Lagrange* a donnée, d'après la consideration de l'équation *aux carrés des différences* ; équation que l'on peut regarder comme impossible à former, dans le cas des équations transcendantes :
- l'autre règle se déduit de l'ancienne méthode proposée pour la résolution des équations numériques, et connue sous le nom de *méthode des cascades* ; en voice l'énoncé le plus général.

[87, pp.381-2]

Poisson explains the *méthode des cascades* as follows :

Soit $X = 0$ un équation quelconque dont l'inconnue est x ; désignons, pour abréger, par X', X'', $\cdots$, les coefficients différentiels successifs de X, parrapport à x : si le produit XX'' est négatif en même temps que $X' = 0$, que le produit $X'X'''$ soit négatif en même temps que $X'' = 0$, que $X''X^{(4)}$ soit négatif en même temps que $X''' = 0$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation $X^{(i)} = 0$, dont on soit assuré que toutes les racines sont réelles, et qui soit telle que la condition $X^{(i-1)}X^{(i+1)}$ négatif pour toutes ses racines soit aussi remplie, il sera certain que l'équation proposée $X = 0$ n'a de même que des racines réelles ; et réciproquement, si l'on parvenient à une équation $X^{(i)} = 0$, qui ait des racines imaginaires, ou pour laquelle le produit $X^{(i-1)}X^{(i+1)}$ soit positif, l'équation $X = 0$ aura aussi des racines imaginaires. [87, pp.382]

Or, lorsque $X = 0$ est une équation algébrique du degré quelconque n, on est toujours certain de parvenir après $n - 1$ différenciations à une équation $X^{(n-1)} = 0$ qui n'a que des racines réelles, puisqu'elle est du premier degré : c'est cette circonstance qui rend la règle précédente applicable aux équations algébriques. Mais $X = 0$ est une équation transcendante, les équations $X' = 0$, $X'' = 0, \cdots$, seron toutes des équations de cette nature ; et la règle ne pourra plus s'appliquer, à moins que, dans des cas très-particuliers, la série de ces équations n'en comprenne une, telle que sin $x = 0$, ou cos $x = 0$, dont on sache que toutes les racines sont réelles. [87, pp.382]

即ち、$X = 0$ がある n 次の代数方程式である時、$n-1$ 回の微分で常に実根しか持たない $X^{(n-1)} = 0$ となるのは、それが一次であるからだ : その前述の規則が代数方程式に適用可能なのはこの状況である。しかし、$X = 0$ は任意の超越方程式であり、$X' = 0$, $X'' = 0, \cdots$ などの方程式等はこの手の性質を持った全ての方程式である ; それでその規則はもはや適用出来なくなろう。少なくとも、極めて特殊な場合、この方程式の級数が一通りでなく、全ての根が実数であると分かっているような、sin $x = 0$ とか cos $x = 0$ とかで構成されている場合である。 [87, pp.382]

Il est à remarquer que lors même qu'on aurait prouvé, d'après, la forme ou quelque propriété d'une équation transcendante $X = 0$, que l'on a XX'' négatif pour $X' = 0$, $X'X'''$ négatif pour $X'' = 0$, $X''X^{(4)}$ négatif pour $X''' = 0$, et ainsi

> de suite jusqu'à l'infini, on n'en pourrait pas conclure que cette équation $X = 0$ n'ait pas de racines imaginaires. [87, pp.382-3] [42]

Here, Poisson puts a very simple example :

$$X = e^x + be^{ax} = 0 \tag{69}$$

where, we assume $a > 0$ and b : an arbitrary, given quantities. The equation of an arbitrary degree with respect to i is also

$$X^{(i)} = e^x + be^{ax} = 0$$

$$X^{(i-1)} = ba^{i-1} \cdot e^{ax}(1-a) = 0, \quad X^{(i+1)} = ba^i \cdot e^{ax}(a-1) = 0,$$

then

$$X^{(i-1)} \cdot X^{(i+1)} = -ba^{2i-1} \cdot e^{2ax}(1-a)^2 = 0$$

Finally, Poisson concludes : the transcendental equation of example (69) has numberless imaginaries : if $b < 0$, (69) has only real root, and if $b > 0$ no root. [87, pp.383].

G.Darboux comments if $b \leq 0$, (69) has only real root, it is true, however, Poisson doesn't put the case of $b = 0$. cf. Chapter 10, Table 8.

8. The physical structure and mathematical descriptions in the contrarieties of the microscopically descriptive functions on the Navier-Stokes equation from the viewpoint of mathematical history

8.1. Introduction.

We begin with the discussion about Poisson's integral methods of partial differencial fluid equations before and after he issues the microscopically-descriptive [MD] equations of fluid dynamics [91, 92, 94, 96, 97]. In 1819, Poisson introduced the so-called '*Poisson equations*' in [80], which was the only paper relating to fluid before MD fluid equations. And in which, he proposes the transforming methods from sum into integral to solve the partial differential equations, saying :

> A défaut de méthodes générales, dont nous manquerons avait être encore longtemps, il m'a semblé que ce qu'il y avait de mieux à faire, c'état de chercher à intégrer isolément les équations aux différences partiellles les plus importantes par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent. C'est la l'objet que je me suis proposé dans ce nouveau mémoire. [80, p.123]
>
> 「普遍的諸方式が恐らくなおしばらく出来ないなら、取るべき最良のものがあった、即ち、それは個別に積分するのに、偏微分方程式を導出した力学や物理の性質によって最も重要なものを探す事であったように思える。これがこの新しい論文で私の言う積もりだった目的である。」[80, p.123]

He considers that it is the best to integrate separately each term of partial differential equations. By using this principle, Poisson [80] explains various methods of integral corresponding to the equations such as : (1) general kinetic equations of fluid / (2) distribute equations of the heat in the solid corps. (heat equations) / (3) equations of vibrating surface. (wave equation) / (4) second-order linear equations with two variable (Laplace equations) (5) general remarks on the linear equations with constant coefficients. (including Poisson equations). About ten years later, he changes his principle to describe the general MD equations of elastic solid and elastic fluid, owing to continuum theory.

[42] Poisson conjuctures the defect of proof in the case of series consisted of exact differential. cf. Chapter 10.2.

8.2. **Separate integration of the elastic fluid equations before MD.** Poisson remarks in the section "*Remarques géenéerales sur éequations linéeaires* à *coëfficients constants*", about the followin two equations with $\sum$ and $\int$. [43] He expresses φ transforming the sum of particular solutions satisfying the partial equations respectively : $p,\ p',\ p'',\ \cdots$ into the integral separately.

> L'equation qui déterminara p sera d'un degré égal à l'indice de la plus haute difference partielle, relative à t, qui soit contenue dans l'équation proposée; en désignant ses par $p,\ p',\ p'',\ \cdots$, on pourra les emplyer succivement dans la valeur de φ; on pourra aussi changer arbitrarement les quantitée $A,\ g,\ h,\ \cdots$, et prendre pour φ la somme des valeurs particulières qui résulteront de ces changements; ce qui donnera

$$\varphi = \sum Ae^{(tp+gx+hy+\cdots)} + \sum Ae^{(tp'+gx+hy+\cdots)} + \cdots \quad (70)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \int e^{(tp+gx+hy+\cdots)} f(g,h,\cdots)dg\ dh\cdots + \int e^{(tp'+gx+hy+\cdots)} f'(g,h,\cdots)dg\ dh\cdots + \cdots (71)$$

> Les limits de ces intégrales resteron indéterminées; en sorte qu'elles ne son pas des intégrales définies. La substitution de la charactéristique $\sum$, n'a pas changé de nature, la valeur de φ : cette dérnière expression est toujours une série d'exponentiellés multipliées par des coëfficients arbitrairea, dont chaque terme satisfait isolément à l'equation aux différences partielles proposées; et les fonctions $f,\ f',\ \cdots$, étant arbitraires, et pourvant ètre discontinues, ces deux expressions (70) et (71) sont équivaléntes l'une à l'autre. [80, pp.171-2]
>
> 「記号 $\sum$ の置き換えは本来的に、φ の値を変えていない：つまり、最後の式 (2) が常に任意の係数の掛かるある指数の級数で、各項は出された偏微分方程式を個別に満たしている ; 関数 $f, f' \cdots$ が任意で、しかも不連続になり得るのに、これらの二つの式 (70) と (71) は互いに等価である。」 [80, p.172]

He explains the separating integration of the following example equations of wave as the same with (71). ([80, pp.173-6])

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\Big(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\Big) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sum Ae^{(atp+gx+hy+kz)} + \sum A'e^{(-atp+gx+hy+kz)}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2\pi}\sum Bpe^{(g(x+x')}e^{(h(y+y')}e^{(k(z+z')} \equiv f(x+x',y+y',z+z'), \\ \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\sum B'e^{(g(x+x')}e^{(h(y+y')}e^{(k(z+z')} \equiv F(x+x',y+y',z+z') \end{cases}$$

$$x' = at\cos u, \quad y' = at\sin u \sin v, \quad z' = at \sin u\cos v$$

$$\begin{aligned} \cdots \quad \Rightarrow \quad \varphi = & \iint f(x+x',y+y',z+z')\ t\ \sin u\ du\ dv + \frac{d}{dt}\iint F(x+x',y+y',z+z')\ t\ \sin u\ du\ dv \\ = & \iint f(x+at\cos u, y+at\sin u\ \sin v, z+at\sin u\cos v)\ t\ \sin u\ du\ dv \\ + & \frac{d}{dt}\iint F(x+at\cos u, y+at\sin u\ \sin v, z+at\sin u\cos v)\ t\ \sin u\ du\ dv \end{aligned}$$

In 1829, moreover, Poisson improved this superficial method of integral of wave equations in [93].

Today, we can use the method of MAC, SMAC, or etc., as the solvers of Poisson-equation for the computer, however, Poisson's integral was one of the best superficial computations we could want without the computer.

[43] Here, we should write integral symbol as $\iint\cdots\iint$, however, Poisson uses a single sign $\int$.

8.3. **The symbol S instead of the integral $\int$.**

Lagrange uses S instead of the integration, which we mention above in § 3.1. Navier [68, p.397] introduces **S** as follows :

> En second lieu, à l'egard des points, appartenant à la surface, si l'on désigne par $l,\ m,\ n$ les angles que forme un plan tangent à la surface mené au point dont les coordonnées sont $x,\ y,\ z$ avec les plans des yz, des xz et xy, et par ds^2 l'élément différentiel de la surface, on pourra remplacer $dydz$ par $ds^2 \cdot \cos\ n$ (Voyez la *Mécanique analytique*, I^{re} partie, section VII, art.29 et 30). [44] La partie de l'équation qui est relative à ces points devient donc

$$0 = \mathbf{S}ds^2[(p' \cos\ l'\delta\ x' - p''\ \cos\ l''\ \delta\ x'') + (p' \cos\ m'\delta\ y' - p''\ \cos\ m''\ \delta\ y'') + (p' \cos\ n'\delta\ z' - p''\ \cos\ n''\ \delta\ z'')]$$

> On en conclut que dans la partie de la surface qui est libre, où les variations des coordonnées, de chaque point sont entièrement indéterminées, on doit avoir $p = 0$, Ainsi, la figure que doit affecter cette partie de la surface est donnée en termes finis par l'équation
>
> $$0 = \int (Pdx + Qdy + Rdz) + const.$$
>
> l'équation différentielle est
>
> $$0 = Pdx + Qdy + Rdz$$
>
> en sort que la résultante des force $P,\ Q,\ R$ agissant sur chaque molécule du fluide placée à la surface libre, doit être dirigée suivant la normale à cette surface. [68, p.397]

After this introduction, Navier uses **S** as follows :

> Le signe **S** désigne une intégration effectuée dans toute l'étendue de la surface du fluide, en faisant varier la quantité E suivant la nature des corps avec lesquels cette surface est en contact. Il est inutile de tenir compte des termes relatifs à l'équilibre des points de cette surface, puisque, pourve que l'on ait $p = 0$ dans les points appartenant à la partie où la surface est libre, ces termes disparaissent. [68, p.412]

We have discussed the Navier's usage in our dissertation [65, p.64, p.67], which is different with the Fourier's usage. In Fourier's case, in ¶221 in the chapter 6.1 of this paper. cf. Grattan-Guiness [43, p.241].

8.4. **MD equations of elastic solid and fluid by sum instead of integral.** Poisson [91, 92] uses two functions fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force. Here, fr means $f(r)$, and r is the radius of sphere of a molecular activity.

$$r^2 = \phi^2 + \psi^2 + \theta^2, \quad (r')^2 = (\phi + \phi')^2 + (\psi + \psi')^2 + (\theta + \theta')^2, \quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \zeta_1)^2,$$

Poisson says : 'at the same degree of approximation', we get the differential form :

$$r' = r + \frac{1}{r}(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r'}fr' = \frac{1}{r}fr + (\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{d.\frac{1}{r}fr}{rdr}$$

He gets the three elements of force $P,\ Q,\ R$ by $\sum$ instead of $\int$ respectively : if we put $F \equiv \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$, then

$$(1)_{P^e} \quad \begin{cases} P = \sum \frac{(\phi+\phi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\phi\zeta}{\alpha^3 r}F, \\ Q = \sum \frac{(\psi+\psi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\psi\zeta}{\alpha^3 r}F, \\ R = \sum \frac{(\theta+\theta')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \sum(\phi\phi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\theta\zeta}{\alpha^3 r}F, \end{cases} \tag{72}$$

[44] Lagrange [57], Vol. 11/12, pp.221-2.

Poisson [96] uses two same functions with (85) : fr and $\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ to calculate three elements of force : P, Q, R by $\sum$.

8.5. **Capillary action with ordinary description.** Poisson described previously this theme in the article no.31 of text. We cite this paragraphs itemizing and comparing two items as follows : Poisson doesn't use at all of sum except for $\sum R, \frac{1}{h}\sum rR$ [97, pp.30-31] and $\sum R'$ [97, p.68], in which he explains the mathematical exceptions, as well as in *The Note*, however, in the parent part to *The Note* [97], he isn't necessary for using of sum instead of integral, and uses the ordinary deduction from the hydrostatic equations.

8.6. **The circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle.** Poisson [91, 92, 94, 96] expresses two elastic constants of molecular forces defined in the sphere of an arbitary molecular activity of M with sum as follows :

$$\frac{2\pi}{3}\sum\frac{r^3}{\alpha^5}fr \equiv K, \quad \frac{2\pi}{15}\sum\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr} \equiv k. \tag{73}$$

These endless contrarieties started with Navier's reply [70] to Poisson's critical descriptions [91, 92] about Navier's calculus by integral, which we can summarize as *'The circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle'* in (*Fig.*1). J.M.C.D., a book reviwer, [45] speaks for Poisson, summarising the issues of our problem :

> Poisson が Navier の理論を拒否するには二つの理由がある。総和法 (sum) は積分による十分な近似式でも置き換える事に同意出来ないこと、　こうした納得の行く数式変換を想定しても物体の自然状態の中で、任意の二つの分子間活動がゼロになるという仮説を受け入れられないこと、である。(J27)[46]

Duhamel points out the theory of continuum from the viewpoint of scientific history :

> - ある物体が堅いものであれ固体であれ、それを構成する部分の分離に抗する力はゼロか我々が論じているその状態では存在しない。我々がこの分離を実行する事を求める時にしか、また、分子間距離を少しでも変更しようとする事しか生じ始めない。即ち、もし、この力を積分で表すならば、物体が自然状態の中で値がゼロとなって、分子間距離で何らかの変位が生じた後でもなお、言わば、物体がその部分が分離していても何らの抵抗にも抗しない事が生じるようになる。これはちょっとへんな事になる。(J4-2)
> - Navier が 1821 年に分子の活動に論及し連続体として物体を見なす事を報告していたのと同じ方程式を Poisson もつかんでいた事は後程説明しよう。　この分子のアクションを考察する手法は Laplace が元々毛細管現象の理論を導出するのに使っていたものだ。Navier はその後で弾性体の理論にこの手法を導入するのに好都合な考え方を得たのだ。　しかし、全ての学者は連続体の分子を想定していた。そして、Poisson が計算において物体の実際上の構造と一致した最初だ。(J5-1)
> - 付言すれば、連続体の仮説は現実的には全く不正確であるが、科学の中では大きな足跡を果たし、Laplace の理論は学者達からその果たした役割から賞賛の目で迎えられた。分子活動についてのこの考察は、大量の特殊問題において、就中、弾性体理論において果たさねばならなかった全ての特別の仮説を取り除くのに計り知れない利点があった。(J5-2)

Another book reviewer, Cournot [15] introduces Navier [68]'s physical theory and mathematical principle as the 'consumption'[47] in his conclusion :

> Ces applications montrent sans doute un grand talent pour manier l'analyse; mais peut-on prononcer avec certitude sur la valeur d'une théorie physique et la vérité d'un principe après tant d'approximations accumlées ? En un mot,

[45]Duhamel, J.M.C. (Laurent-Duhamel Marie Jeanne (1797-1872).) The authors use usually their anonym in *BSM*. As the same example, Cournot [15] issues the book review on Navier [68] over the signature of A.C. in the same *BSM*(**10**).

[46]We put the paragraph number of each disputers. This "J27" is the 27-th paragraph by J.M.C.D.[26]. By the same way, we mean A:Arago [1], N:Navier [72], Note: Poisson[97]. In bellow, we call this note *The Note*.

[47]We mean the 'consumption' of time or all sort of resouces including intellectual activities, etc.

la nouvelle théorie de M.Navier rendra-t-elle moins empirique la science de la conduite et de la dépense des fluides? Nous ne présumerons pas assez de nous pour résoudre une semblable question, et nous ne pouvons que recommander la lecture de mémoire à tous ceux que ce genre d'applications intéresse. A.C. [15, pp.13-14]

(Navier の) この応用は間違いなく、分析するだけの彼の相当な素質を示しているが、ある物理的理論の価値や、ある原理の真理に関しては沢山の蓄積された近似の後で分かるのではないか? 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、(これまでの) 経験主義から流体の振舞いと (時間と頭の) 浪費についての科学にしてくれたのか? 我々はある似たような問題を解決するために過大評価してはならない。せめて興味のある応用分野の全ての方々にこの論文の一読をお薦めするしかない。 A.C. [15, pp.13-14]

Fig.1. The circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle

Poisson (including by Duhamel)	Navier
この力を積分で表すならば係数 a^2 がゼロになる。cf. (76) この力を積分で表せない事は証明している。	物体の自然状態で常に相殺されている。即ち、力：P が通常ゼロであるか、または、力はゼロでないが、 それらの差し引きではゼロである。(N9)
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
アクションを分離した分子についてのある級数 の総和で表す $\sum$ は定積分で表すことは出来ない。 それは全ての分子のアクションを表す距離の関数の性質を 保持するものであり、ゼロでは矛盾する。	これらの力 (attraction と repulsion) の合力を積分で 表す事が出来る。
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
Poisson は反対に２つの分子が積み重ねて自然状態の中 でも何らかのアクションを呈すると想定する。 そして、この状態を可能とするために、 彼は条件： $\sum r^3 f(r) = 0$ を導いた。 しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r} f(r)] = 0$ とはならずに済み、 各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26) 条件 ： $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に 出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)	Poisson が分子のアクションの成分を表す総和 (sum) が 積分で取り替えられないという事を言い張ることの根拠 は「もし、部分積分によると、$f(r)$ は両極値でゼロであ る事に注意すれば、$k = -K$ となる」事だ。 まず、「もし $r^4 f(r)$ が両極値でゼロとすれば」とある点。 次に $r^4 f(r) = 0$ に対応する極値としてゼロになる事を 受け入れなければならない義務はない点である。 関数 $f(r)$ として採用出来る無数の形式が存在する事、 このため、この状況が成立しなくなる事である。(N23)
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
Navier も私と同じ方程式を出した。これを積分でやった のが Navier の係数 ε だ。Navier は否定しているが、 私の係数 a^2 と Navier の ε は同じだ。(cf. Table 14, no.1,4)	私の係数 ε と Poisson の係数 a^2 とは同じものではない。
....	....
• こうなれば、Navier にどうしたら自然界で物質の全ての 個所で積み重ねたアクション無しで、物体の構成を 理解させる事が出来るか考えるしかないのだ。(A3)	• 私の式はその特別な場合 (Navier の式で弾性が色々な 方向で同じ時) 当て嵌る。(Cauchy[14])
• 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、経験主義から 流体の振舞いと浪費についての科学にしたのか? (Cournot[15])	• 同じ方程式は非圧縮流体の場合で Navier が得ているが 私のものは Poisson がやったものに近い。(Stokes[111])

We start with citing Poisson's explanation of result using sum instead of integral from (73) as follows :

- § 14. Cette équation donne lieu de faire une remarque importante ; c'est que les sommes $\sum$ du no.6, que représentent *les lettres K et k, ne peuvent être changées en des intégrales,* quoique la variable r croisse dans chacune d'elles par de très-petites différences égales à α ; car si cette transformation était possible, k serait zéro en même temps que K ; d'où il résulterait qu'après le changement de forme du corps, les forces $P,\ Q,\ R$, seraient nulles comme auparavant, et que des forces données qui agiraient sur le corps ne pourraient se faire équilibre, ce qui est inadmissible. Pour faire voir que k s'évanouirait au même temps que K, observons qu'on aurait

$$K = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} frdr, \quad k = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d.\frac{1}{r} fr, \tag{74}$$

en multipliant sous les signes $\sum$ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que fr est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} frdr = -K \tag{75}$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k = 0$. [91, pp.398-399, §14]

- § 16. Je substitute, en outre, dans les équations $(3)_{P^e}$ à la place de P, Q, etc., leurs valeurs, et je suppose le corps homogène; en observant que $K = 0$, il vient

$$(6)_{P^e} \quad \begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\Big(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\Big) = 0, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\Big(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\Big) = 0, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\Big(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\Big) = 0, \end{cases} \tag{76}$$

a^2 étant un coefficient, égal à $\frac{3k}{\rho}$. Ces équations ont la même forme que celles qui ont été données par M.Navier[48], et qu'il a obtenues en partant de l'hypothèse que les molécules du corps, après son changement de forme, s'attirent proportionnellement aux accroissements de leurs distances mutuelles; et en admettant, de plus, que les résultantes de ces forces peuvent s'exprimer *par des intégrales, ce qui rendrait nul le coefficient* a^2, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Les équations relatives à la surface, formées de la même manière, se trouvent aussi dans le Mémoire de M.Navier. [91, pp.403-4, §16]

Our issue is about (74) of the elastic body, which paper is previous to the fluid. (cf. In Table 14, the entry no. 1,3 and 4 discuss elastic body.) Poisson says his consistency between physics and mathematics on the expression (74) and (76) :

こうして、それらの attraction と熱による分子の相互のアクションしか作用されない自然状態と見られる物体の状態の中で、分子を分離している区間ではこの方程式が物体の全ての個所で成り立っている事等が存在せねばならない。もし、熱の新たな量をそこに取り入れれば、同じ距離を保って repulsive force が attractive force で出来る量を変えずに増大する。分子の区間がこの方程式が存在し続けるように増大する必要がある。 そして、関数 $f(r)$ がそこでは同じでない事から、それからの熱の膨張、物質的な違いの中で差異が生じる。この式は重要な事を喚起する原因となる。それは No.6 での総和 Σ は K と k がそれで表わされているが、これを積分へ変更出来ない事だ。ここに、変数 r は α と同様に極めて微小な差異で表す個々のそれの中で増大する。しかるにもしこの変換が可能ならば、k は K と同時にゼロとなる。ここから物体の変形による力の要素 P, Q, R は変形しても以前と同じゼロとなり、物体に作用する加えられた力は平衡状態とは成り得ないという結果が生じる。これは受け入れられない事だ。

According to Duhamle, Poisson's physical conception are as follows :

[48]By Poisson's footnote : Tome VII de ces Mémoires, which is Navier[67].

•Poisson は反対に２つの分子が積み重ねて自然状態の中で何らかのアクションを呈すると想定する。 そして、この状態を可能とするために、彼は条件： Σ r3 f(r) = 0 を導いた。しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r}f(r)] = 0$ とはならずに済み、各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26)

• 条件 ： $\int r^3 f(r)dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)

Navier explains null of molecular activity in his last paper [72] as follows :

• 弾性固体は極めて微小な距離に置かれた分子の集合体として認識されている。これらの分子は積み重ねて、２つの相反するアクション、即ち attraction からなる固有力と熱の原理で齎される repulsion に影響を及ぼす。ある分子 M と近くにある任意の分子 M' の間には、この２つの力 (attraction と repulsion) の差である P が存在し、物体の自然状態ではトータルなアクションである P は分子 M が平衡状態であるからゼロ即ち相互に相殺される。 物体の形状が変更されればアクション P は異なる差の値Πとなり、全ての力：Π と物体に働く力の間で平衡状態となり、それによって形状の変位が生じる。(N7-1)

• どれも２つの部分 π と π' に分かれる Π があると常に理解してよい。　最初の π はもし、単独で存在すると想定すれば、全ての力：π の中で平衡状態となり、　同様の方法から、物体の自然状態では全ての力：P の中で平衡状態になる。　力：π はこうして相互に相殺されるので、平衡状態は残った π' と物体に作用する力との間で存在することが必要となろう。(N7-2)

• こう仮定すれば、ここで原理として、もう一つの力 π' が任意の MM' にある２つの物質の分子の間で物体の形状の変化によって生成されるという事を得る。　そしてこれがこの１つだけを物体に作用する力と平衡状態にするものであり、それぞれに（微小と想定する）形状の変化が２つの分子間の距離 MM' を変えた量に比例している。(N7-3)

• この力 Π' は距離 MM' が増大すれば attraction になり、減小すれば repulsion になる。それに、　分子の力を非常に接近した分子間にしか存在しないもの、そして急減少する値を持ち、両者がますます遠ざかる分子に対して未知の法則に従うものと看做す。(N7-4)

Arago が強調し、コメントしている語句を見てみよう。物体の自然状態ではトータルなアクション P はゼロか相互に相殺される。この語句は排他的ではない。トータルなアクション P は物体の各点で消滅するか、あるいは差し引きの結果がゼロ。この言い回しでは明らかに読者に次の二者択一を任せられている。即ち、全ての力：P がゼロ。あるいは 力はゼロでないがそれらの差し引きではゼロ。私はこの問題を曖昧のままにしていた。計算の設定には全く依存しないこの点について説明するのは必要でなかったからである。(N9)
• この点について説明することは決して不必要ではないと思う。事実、アクション：P が混同される事を避けた事に注意願いたい。アクション：P は

- 物体の自然界で存在し、
- 個々の分子に対して物体の変位状態の中で成立する新たなアクションΠの部分である π と平衡状態になる。
- 個々の分子に対してこの状態で同様に平衡状態となろうとする。(N10-1)

このように区別をすることによって読者は力：P を随意に、有限の値やゼロに想定する事ができる。(読者には）力：π を想定する自由があるので、力：π は私の説明によって、個々の分子が相殺するのに都合の良い値を持った、力：P とは別のものであり、私が提唱する原理は常に存続する。(N10-2)

私の Arago への手紙（ACP,1829 年１月号 103 頁）で

- 数学的問題をまだ設定しないのに、物質の構成に関して抱いている考えを説明する事、
- Poisson のそれとの違いを明確にする事、
- 私は２者択一をして、物体の自然状態では任意の２つの分子間の attraction と repulsion が相互に消滅する事、即ち、これらの分子間で存在するアクション（これを P とする）がゼロである事

を受け入れたと述べた。Arago は「２つの同じ分子が違った方法で積み重ねて作用していて、物体が外力からのアクションを受ける受けないに拘らず、この作用を受けるという事からこういう結果になった」と判断している。以上が実際に私の考えている所だ。(N11)

Arago は「物理学者は恐らく（Navier の）この仮説に難を呈するだろう。それがため大きな困難がもたらされ、どうしたら私が物質の全ての点が、積み重ねてアクションがない自然界の中で、物体の構成を理解出来るか示すしかない」と付け加えている。　私はこの話には私の意見に対抗できるどんな根拠も見つけられない。もし何方かがこの問題に関し

てもっと説明して欲しいと望むならば私はこう言うであろう:「自然界で２つの分子 M, M' の attraction は距離の MM' がどうであれ熱の存在による repulsion によって正確に相殺されることが認識できる」と。(N12)

At last, Navier may mend and correct his ideas of null which is attacked from all the physical disputer.

8.7. **"*Notes and Additions*" to [97], 1831.**

8.7.1. *Purposes of his new theory.* Poisson criticises both Laplace and Gauss on the paper of capillary action.

- On a vu que je m'ecarte aussi de la *Méchanique céleste*, en ce qui concerne l'explication des phénomènes qui ont lieu quand le liquide atteint l'extrémité supérieure du tube. La démonstration que Laplace avait donnée de l'invariabilité de l'angles compris entre les nomales à la surface du liquide et à celle du tube, menées par chaque point situé à une distance insensible de leur commune intersection, n'a pas paru satisfaisante ;
- et M. Gauss en a donné une autre très élégante, et qui ne laisse rien à désirer, lorsqu'on fait abstraction de la variation de densité du liquide prés de sa surface et prés de celle du tube.

Poisson tells his selling point :

> En eyant égard à cette variation, dont la loi est inconnu, j'ai démonstré la même proposition, dans le chapitre III,[49] d'une maniére qui, je crois, ne peut laisser aucun doute.

Poisson insists his new theory :

- La considération de cet angle i est également indispensable, lorsqu'on veut déterminer le poids nécessaire pour détacher un disque solide de la surface d'un liquide, l'une des questions *les plus intéressantes des cette théorie*, que l'on n'avait pas, ce me semble, considérée sous son véritable point de vue.
- En effet, le disque et le liquide étant soulevés graduellement par un poids qui croit par pétites parties, ce poides et la hanteur correspondantes du liquides sont, à chaque instant, des fonctions de l'angle i qui représente l'inclination de la normale à la surface de l'arète du disque sur un plan horizontal ;
- c'est lorsque ces fonctions atteiguent leur *maximum* par rapport à i, que le disque se détache du liquide ;
- et il en résulte la condition d'aprés laquelle on détermine la grandeur du poids propre à opérer la séparation du disque et du liquide.

8.7.2. *Essential constitution of corps, and particularly of fluid ; nature of the molecular forces.* Poisson explains two sorts of mutual action consisted of atrraction and molecular force, and moreover the latter includes attraction and repulsion :

> Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions mutuelles.
> - L'une de ces forces est attractive, indépendante de la nature des corps ou de leurs molécules, proportionnelle au produit des masses, et en raison inverse du carré des distances ; elle s'etend indéfiniment dans l'espace, et produit la pesanteur universelle et tous les phénoménes qui sont du ressort de la mécanique céleste.
> - L'autre est en partie attractive et en partie répulsive ; elle dépend de la nature des molécules et des leur quantité de calorique. On attribue la partie attractive à la matiére pondérable, et la partie répulsive au calorique ; et, en effet, celle-ci change d'intensité, quoique le poids des molécules n'ait pas changé.

[49] Équation relative au contour de la surface capillaire. [97, pp.77-97]

- L'excés de l'une sur l'autre est ce qu'on appele proprement la *force moléculaire*.
- Elle tend à rapprocher ou à écarte les molécules, selon que l'action de la matiére pondérable est plus grande ou moindre que l'action calorifique.
- Son intensité décroit très rapidement quand la distance des molécules augmente, et devient tout-à-fait insensible, des que cette distance a acquis une grandeur sensible.

Poisson explains attraction and repulsion :

> Ainsi, tous les mouvenens que nous obserbons, nous devons les attribuer à des forces d'attraction ou de répulsion, pour lequelles l'action est égale à la réaction, et qui varient avec les distances, suivant une des deux lois précédentes. Les vibrations des corps élastiques et la communication du mouvement, soit par le choc, soit par la pression, résultent de la force qui n'est sensible qu'à des distances insensibles, c'est-à-dir de la moléculaire.

- Soient m et m' les masses de deux molécules voisines, c et c' leurs quantités de calorique, M et M' leurs centres de gravité, et r la distance MM';
- et considérons l'action mutuelle de ces deux molécules.
- Supposons d'abord leurs dimmensions très petites par rapport à l'intervalle qui les sépare.
- L'action dont il s'agit se réduira alors à une force unique, dirigée suivant la droit MM', et dont l'intensité sera une fonction de r, que nous représenterons par R ;
- en même temps, leur répulsion mutuelle sera proportionelle au produit de c et c', et leur attraction au produit de m et m'.
- En considérant la *force R comme positive ou comme négative*, selon qu'elle tendra à augmenter ou à diminer la distance r, sa valeur sera l'excès de la répulsion sur l'attraction ;
- et si l'on suppose que l'attraction réciproque de la matière pondérable et du calorique, qui retient celui-ci dans chaque molécule, s'étend au-dehors, il faudra retrancher de cet excès l'attraction du calorique attaché à m' sur la matière de m, et celle de la matiére de m' sur le calorique attaché à m, lesquelles forces seront proportionelles, la première au produit mc'.
- De cette matière, la valeur complète de R sera
  $$R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\beta - m'c\beta' \tag{77}$$
  les coefficiens $\gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \beta'$, étant des quantités *positives*.
- Le premier sera indépéndent de la nature de m et de celle de m', le seconde dépendra de l'une et de l'autre, le triosiéme ne dépendra que de la nature de m, et le quatriéme de celle de m'.

Poisson reduces the last three terms of (85) to one term :

- En réunissante ces trois derniers termes en un seul, on pourra écrire la valeur de R sous la forme :
  $$R = Fr - fr$$
- Chacune des deux fonctions Fr et fr n'aura que des *positives* ;
- et si l'on fait abstraction de l'attraction en raison inverse du carré des distances, qui n'aucune influence sensible sur les phénomènes dépendans de la force moleculaire proprement dite, ces valeurs décroitront très rapidement et sans alternative, à mesure que la variable r augmentera, et elles deviendront insensibles pour toute valeur sensible de r.
- Pour une certaine valeur de cette distance, on pourra avoir $Fr = fr$ et $R = 0$;

- le signe de R sera différent en-deçà et audelà, soit que la répulsion Fr l'emporte d'abord sur l'attraction fr, soit que le contraire ait lieu à l'égard de ces deux forces.

[97, pp.269-271]

8.7.3. *Reducibility from sum into integral on a function made with attraction and/or repulsion.* We discuss whether the sum is reducible into integral or not. Poisson points out this problem. We use the expressions : $\varphi 0 \equiv \varphi(0)$, $\varphi\varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon)$, $\varphi 2\varepsilon \equiv \varphi(2\varepsilon)$, $\cdots$ below according to the then generally descriptive style. Poisson expresses the sum of the function φx as follows :

> Soit φx une fonction donnée de la variable x. Faisons croitre x par des différences constantes dont la grateur sera représentée par ε; supposons que p les valeurs de x s'etendent depuis $x = \varepsilon$ jusqu'a $x = \infty$; et par p la somme des valeurs correspondantes de φx.

$$p = \sum_{x=i\varepsilon,\ i\in\mathbb{N}}^{\infty} \varphi x = \varphi\varepsilon + \varphi 2\varepsilon + \varphi 3\varepsilon + \varphi 4\varepsilon + \cdots .$$

Here, using the integral of the function φx, Poisson says,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0$$

will become an approximate value of sum of the function φx, which is expressed in (80).

$$\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx$$

We think here is the point of Poisson's *Note*, then we cite from his original :

> L'intégrale $\int_0^\infty \varphi x dx$, divisée par ε et diminuée de $\frac{1}{2}\varphi 0$, sera une valeur approachée de la somme p; et l'on a vu, dans mon Mémoire sur *Calcul numérique des Intégrales défines*[50], que la différence de ces deux quantités peut s'exprimer par une autre intégrale définie, de sorte que l'on aura exactement (78). [97, p.278]
>
> ε で割った積分値 $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ から $\frac{1}{2}\varphi(0)$ を引いた値は総和 p の近似値となる。これについては私の論文"*Calcul*$\cdots$"(footnote 50) に書いたが、これらの二つの値の差が別の定積分で表される、そのため正確に (78) 式となる。 [97, p.278]

We show the difference of integral from sum as following :

$$p = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0 + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx. \tag{78}$$

Here, $\frac{2}{\varepsilon}$ is necessary for adjustment of the series (80). We use a known result :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a \equiv \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{1}{12}, \quad a' \equiv \frac{1}{8\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4} = \frac{1}{720}, \quad a'' \equiv \frac{1}{32\pi^6}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^6} = \frac{1}{30240}, \quad \cdots . \quad i \in \mathbb{N}$$

Here, we consider the following description :

$$p = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi - a\varepsilon\varphi' + a'\varepsilon^3\varphi''' - a''\varepsilon^5\varphi''''' + \cdots . \tag{79}$$

where by applying integration by parts to the second integral in (78), we get the series of terms having both even power of ε and odd differential of φx. This means that according to Poisson :

[50]Tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1827, pp.571-604.

Par le procédé de l'intégration par partie, on réduira la second intégrale contenue cette formule, en une série ordonnée suivant les puissances paires de ε, dont les coefficiens renfermeront les différentielles impaires de φx, relatives aux deux values extrémes de x.

Namely, if $\mod(i,2)=1,\ (i\in\mathbb{N})$, for $\cos\frac{1}{2}i\pi=0$, then the second integral in (78) is developed as follows :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty\Big[\sum_{i=1}^\infty\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]\varphi x dx &= \frac{2}{\varepsilon}\Big[\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\sum\sin\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi x\Big]_0^\infty-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty\frac{\varepsilon}{2i\pi x}\sum\sin\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi' x dx\\
&= \frac{2}{\varepsilon}\Big[(\frac{\varepsilon}{2i\pi x})^2\sum\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi' x\Big]_0^\infty-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^\infty(\frac{\varepsilon}{2i\pi x})^2\sum\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\varphi'' x dx\\
&= \cdots\\
&= \frac{2}{\varepsilon}\Big(-\frac{\varepsilon^2\varphi'}{(2\pi)^2}\sum\frac{1}{i^2}+\frac{\varepsilon^4\varphi''}{(2\pi)^4}\sum\frac{1}{i^4}-\frac{\varepsilon^6\varphi'''''}{(2\pi)^6}\sum\frac{1}{i^6}+\cdots\Big)\\
&= -a\varepsilon\varphi'+a'\varepsilon^3\varphi'''-a''\varepsilon^5\varphi'''''+\cdots. \qquad (80)
\end{aligned}$$

where $a,\ a',\ a''$ are the same coefficients as (79). In the two limit value $x=\infty$ and $x=0$, it reserves only the term at lower limit $x=0$ of the third terms in (79). Because

- this function φx and all the differential coefficients evaporate at $x=\infty$
- $\varphi,\ \varphi',\ \varphi'',\cdots$ are the values of $\varphi x,\ \frac{d\varphi x}{dx},\ \frac{d^2\varphi x}{dx^2},\cdots$ which correspond to that at $x=0$.

In this paper, Poisson asserted that in a singular case using integral, all the terms in (79) evaporate except for top two terms, then we must use sum (78) as follows :

> De plus, à quelque terme que l'on arrête la série (79), le reste qu'il y faudra ajouter pour avoir la valeur exacte de p, sera exprimé par une intégrale définie, dont la valeur changera généralement d'un terme à l'autre, et dont on pourra assigner des limites qui feront connaître si la série est convergente. Dans le Mémoire cité, j'ai examiné en détail le cas singulier où le rest est constant, et où les termes de la série (79) s'evanouissent tous, excepté les deux premiers; ce qui oblige de recourir à l'équation (78) pour calculer la valeuer de p.

Poisson asserted also that :

- En général, si l'on prend pour φx une fonction du genre de celles qui varient très rapidment et sont insensibles dés que la variable a aquis une grandeur sensible, les quantités :
  $\varphi x,\ x\frac{d\varphi x}{dx},\ x^2\frac{d^2\varphi x}{dx^2},\ x^3\frac{d^3\varphi x}{dx^3},\cdots$ seront toutes du même ordre de grandeur;
- pour que la série des produits :
  $\varphi,\ \varepsilon\varphi',\ \varepsilon^2\varphi'',\ \varepsilon^3\varphi''',\cdots$, et, à plus forte raison, la série (79), soient très rapidment décroissantes, il suffira donc que ε soit très petite, eu égard à l'etendue des valeurs sensibles de φx;
- et, dans cette hypothèese, la seconde integrale que contient la formule (78) sera toujours une quantité extrêmement petite,
  - soit qu'elle se développe en série suivant les puissances de ε,
  - soit que ce développement n'ait pas lieu, à cause que toutes les quantitée $\varphi',\ \varphi'',\ \varphi''',\cdots$, sont égales à zero.

8.7.4. *Reducible examples of sum transformable into integral.* We suppose $c, c', \alpha, \alpha', \cdots$ are *positive* constants.

$$\bullet\quad \varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} \quad\Rightarrow$$

by putting $\varepsilon\equiv\beta\alpha$, then (79) becomes

$$p=c\Big(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}+a\beta-a'\beta^3+a''\beta^5-\cdots.\Big) \qquad (81)$$

and supposing that β were an infinitesimal fraction, then

$$p = \frac{c}{\beta} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty} \varphi x dx \tag{82}$$

$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty} \varphi x dx$ is the <u>first term</u> of (81), then sum equals to integral.

- $$\varphi x = ce^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \Rightarrow (\varphi x)' = c\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \Rightarrow \varphi' = 0,$$

$$(\varphi x)'' = c\Big[-\frac{2}{\alpha^2} + \Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^2\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad \Rightarrow \varphi'' = -c\Big(\frac{2}{\alpha^2}\Big),$$

$$(\varphi x)''' = c\Big[\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big) + \Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^3\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \Rightarrow \varphi''' = 0,$$

$$(\varphi x)^{(4)} = c\Big[\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^2 + 3\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)\Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^2 + \Big(-\frac{2x}{\alpha^2}\Big)^4\Big]e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \Rightarrow \varphi^{(4)} = c\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^2$$

Then, in general :

$$\begin{cases} \bmod (n,2) = 0, \ (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = c\Big(-\frac{2}{\alpha^2}\Big)^{(n-2)} \\ \bmod (n,2) = 1, \ (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Thus, all the derivatives of odd times become $(\varphi x)' = (\varphi x)''' = (\varphi x)^{(5)} = 0$, we can't get the developing series of sum by second integral in (78), into the series of the power of ε, however, (Poisson descrived simply) if we put

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}dx \equiv \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

Correctly, according to (78),

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon}\Big]dx \equiv \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

then, by putting $\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \equiv \gamma$, (78) becomes as following :

$$\begin{aligned} p =& \ c\Big(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})e^{-\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})e^{-4(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})e^{-9(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon})^3} - \cdots\Big) \\ =& \ \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\pi} + \gamma e^{-\gamma} - \gamma^{-4\gamma^2} + \gamma e^{-9\gamma^3} - \cdots\Big) \end{aligned} \tag{83}$$

As γ is a big number in the hypothesis of ε very small in comparison with α, this series will converge extremely, all after the third terms are completely insensible. By the comparison of the first term with the second : $\frac{c}{2}(\frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\varepsilon} - 1) >> 0$, we can neglect the second term, then

$$p = \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\frac{2\pi\alpha}{2\varepsilon} = \frac{c\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty}\varphi x dx$$

$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty} \varphi x dx$ is the <u>first term</u> of (83), then sum equals to integral.

Here, Poisson summerizes these two examples :

> Ces deux examples suffisent pour montre que quand on supposose l'intervalle ε des valeurs succussives de x extrèment petit par rapport à l'étendue des valeurs sensibles des φx, la somme p se transformera en une intégrale divisée par ε, touts les fois que φx ne sera composé que une d'un seul terme, ou de plusieurs terms de même sign; mais cela n'aura par toujours lieu, lorsque cette fonction sera composée de deux parties, des contraires.

8.7.5. *Irreducible examples of sum intransformable into integral.* Poisson puts the cases of the irreducible functions as followings :

- the φx is not composed of only one term
- the φx is composed of the plural terms having inverse signes

At first, we consider the first pair of φx with term having inverse signes.

- $$\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'}{\varepsilon}, \quad \varphi = c - c'$$

Because the value of φx were comparable and more than $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx$, (79) does not reduce into the <u>first term</u>.

Next, if φx <u>evaporates</u> with x, then

- $$\varphi x = \left(ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}}\right)x \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha^2}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'^2}{\varepsilon}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = c - c'$$

Poisson says : this sample function may be the third term of (79), viz., $-ae\varphi'$, which will become comparable or superior to the first term, while the coefficients c and c' are almost in the ratio of the inverse squared of $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ and $\frac{\alpha'}{\varepsilon}$.

At last, we consider more complicated pair of φx with term having inverse signes. We suppose b is a cofficient capable of becoming greater than we expect.

- $$\varphi x = b\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'}e^{-\frac{x}{\alpha'}}\right) \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = b(1-1) = 0$$

The series (79) reduces to the <u>second term</u>, $\frac{1}{2}\varphi$.

- $$\varphi x = bx\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'}e^{-\frac{x}{\alpha'}}\right) \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = b(1-1) = 0$$

The series (79) does not reduce, because all the terms are not comparable with the <u>first term</u>, then sum does not equal to integral. These examples are also irreducible types from sum into integral. How would Navier think this reason, if he had read this note ?

8.8. **Conclusions by Poisson.** Poisson concludes the difference of reducibility to integral between φx and $x\varphi x$ as follows :

> Je conclus de là, conformément à ce qui a été dit dans le no.13,[51] que
> - quand la somme des valeurs d'une fonction de la nature de φx n'est pas réductible à une intégrale définie,
> - il n'est point à craindre que la somme des valeurs de $x\varphi x$ tombe en même temps dans ce cas d'exception. [97, p.282]

Poisson described previously this theme in the article no.31 of text. We cite this paragraphs itemizing and comparing two items as follows :

> Mais cette nouvelle difficulté n'a plus lieu, si, comme on l'a dit tout à l'heure, l'action moléculaire provient de deux forces contraires, dont chacune est extrémement grand, eu égard à leur différence; circonstance qui peut rendre la guantité $\frac{1}{h}\sum rR$ comparable et même supérieure à $\sum R$.
>
> Toutefois,
> - la somme $\sum R$ étant irréductible, d'après cette circonstance même, à une intégrale,
> - il n'en faut pas conclure que la même chose aura également lieu pour la somme $\sum rR$.
>
> On se convaincra sans peine du contraire par des exemples auxquels on appliquera la formule d'Euler, relative à ce genre de réductions, et qui montreront que
> - si la premiere somme est irréductible par nature de la fonction R,

[51] [97, pp.30-31]

- et malgré la petitesse des différences de r, la second ne le sera pas en générel.

...

Quant à la somme d'où dépend la pression sur la plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réductible à une intégrale, il nous suffira d'-avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petite dans les intervalles mo-léculaires, provenant du degré de condensation du liquide. [97, pp.30-31]

Here, Poisson's conclusions are two points as followings : $\sum R$ is irreducible into integral, however, $\sum rR$ is reducible into integral, although the differential of r is small, because the nature of function R, which express the microscopically descriptive actions of molecules, such as attraction and/or repulsion.

8.9. **Conclusions of fluid dynamics.** Navier describes about what he really means of null of molecular action in nature in N9−12. Poisson summarizes his idea from the mathematical viewpoint as follows :

- 級数 (79) を打ち切るいずれかの項で p の正確な値を得るために加える剰余項は定積分で表せる。この定積分の値は一般的に項によって変化するし、その級数が収束しているかどうかを知る極限を割り当てることが出来るものである。 この論文では、p の計算で • 剰余が定数になる場合や、• 級数 (79) が最初の２項を除いてゼロになる場合等の特異な場合を詳細に調べた。これには、p の値を得るために式 (79) に訴えねばならない。(*The Note*)
- これらの２つの例は $\varphi(x)$ の大きな値の範囲に比べて極めて微小な x の連続した値の区間 ε を想定する時、• $\varphi(x)$ が単項だけで出来ている、• $\varphi(x)$ が同じ符号を持つ多項からなっている等の時はいつでも総和 p が ε で割ったある積分に変換される事を示すのに十分である。しかし、これはこの関数が逆の符号を持つ２つの部分で出来ている場合は常には成り立たない。(*The Note*)

Poisson doesn't use at all of sum except for $\sum R$, $\frac{1}{h}\sum rR$ [97, pp.30-31] and $\sum R'$ [97, p.68], in which he explains the mathematical exceptions, as well as in *The Note*, however, in the parent part to *The Note* [97], he isn't necessary for using of sum instead of integral, and uses the ordinary deduction of the hydrostatic equations as follows :

Quant à la somme d'où dépend la pression sur un plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réducible à une intégrale, il nous suffira d'avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petites dans les intervalles moléculaires, provenant du degré de condensation du liquide. Nous n'aurons pas besoin d'en calculer *à propri* la valuer; elle dépendra de la pression extérieure, de la pesanteur et des autres forces données qui agissent sur le liquide; et son expression en fonction des coordinées d'un point quelconque, se déduira, comme de coutourne, des équations de l'Hydrostatique.[97, p.31,¶13.]

In a word, we can conclude that Poisson choices sum or integral as the case may be of the material, after enough alternative. Navier passesd away in 1836, and we don't know whether he had checked Poisson's *Note*, which was issued in 1831. Poisson passed away in 1840. The Navier-Stokes equations was fixed until 1934, which is cited by a textbook by Prandtl. (cf. Table 14, entry no. 7. For further particulars, cf. [65].) There are the contrarieties of sorts such as with Navier [70, 71, 72], with Fresnel, or about the application of algebraic root to transcendental equations with Fourier [95, 31, 34, 35], however, at any rate, we should evaluate his uniqueness and rigorousness of integral method.

TABLE 14. The kinetic equations of the hydrodynamics until the "Navier-Stokes equations" were fixed. (Rem. HD : hydrodynamics, N under entry-no : non-linear, gr.dv : grad.div, E : $\frac{\Delta}{gr.dv}$ in elastic, F : $\frac{\Delta}{gr.dv}$ in fluid. The group of entry 5,6 and 7 show $F = 3$ in fluid. Δ : tensor function with the main axis (the normal stress) of the Laplacian.)

no	name/prob	the kinetic equations	Δ	gr .dv	E	F
1	Navier (1827)[67] elastic solid	$(6\text{-}1)_{N^e} \quad \begin{cases} \frac{\Pi}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon\left(3\frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2\frac{d^2y}{dbda} + 2\frac{d^2z}{dcda}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2y}{da^2} + 3\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadb} + 2\frac{d^2z}{dcdb}\right), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\left(\frac{d^2z}{da^2} + \frac{d^2z}{db^2} + 3\frac{d^2z}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadc} + 2\frac{d^2y}{dbdc}\right) \end{cases}$ where Π is density of the solid, g is acceleration of gravity.	ε	2ε	$\frac{1}{2}$	
2 N	Navier (1827)[68] fluid	$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \varepsilon\left(3\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{d^2v}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dxdz}\right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx}\cdot u - \frac{du}{dy}\cdot v - \frac{du}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dydz}\right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx}\cdot u - \frac{dv}{dy}\cdot v - \frac{dv}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + 2\frac{d^2v}{dydz}\right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx}\cdot u - \frac{dw}{dy}\cdot v - \frac{dw}{dz}\cdot w\ ; \end{cases}$	ε	2ε		$\frac{1}{2}$
3	Cauchy (1828)[14] system of particles in elastic solid and fluid	$\begin{cases} (L+G)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + (R+H)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + (Q+I)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + 2R\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + 2Q\frac{\partial^2\zeta}{\partial z\partial x} + X = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \\ (R+G)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (M+H)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + (P+I)\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + 2P\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z} + 2R\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + Y = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + (P+H)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + (N+I)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + 2Q\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial x} + 2P\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z} + Z = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}, \end{cases}$ $G = H = I, \quad L = M = N, \quad P = Q = R, \quad L = 3R$	$R+$ G	$2R$	if $G = 0$ $\frac{1}{2}$	if $G = 0$ $\frac{1}{2}$
4	Poisson (1831)[96] elastic solid defined in general equations	$\begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2v}{dy^2}, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right) = \frac{\Pi}{\rho}\frac{d^2w}{dz^2}, \end{cases}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{2a^2}{3}$	$\frac{1}{2}$	
5	Poisson (1831)[96] fluid defined in general equations	$\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} + \alpha(K+k)\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) + \frac{\alpha}{3}(K+k)\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \rho(X - \frac{d^2x}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}), \\ \rho(Y - \frac{d^2y}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}), \\ \rho(Z - \frac{d^2z}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}) \end{cases}$ where $\varpi \equiv p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta+\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt}, \quad \beta \equiv \alpha(K+k)$	β	$\frac{\beta}{3}$		3
6	Stokes (1849)[111] fluid	$(12)_S \quad \begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \end{cases}$	μ	$\frac{\mu}{3}$		3
7 N	Prandtl (1934) HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$ for incompressible, it is simplified as follows : div $\mathbf{w} = 0$, $\quad \frac{D\mathbf{w}}{dt} = g - \frac{1}{\rho}\text{grad } p + \nu\Delta\mathbf{w}$	ν	$\frac{\nu}{3}$		3

9. POISSON'S ELASTIC MECHANISM : *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques* [92], 1829

Poisson [92, pp.367-8]) remarks the same problem in the elastic solid.

> Lorsque j'ai intégré ces équations pour de déduire les lois des vibrationa sonores, j'ai exprimé les intégrales par des séries de solutions particulières de chaque question, ainsi qu'il a été dit plus haut. Les coefficients de ces séries ont été déterminés

> en suivant la méthode que j'ai déjà employée dans un autre Mémoire, et dont les applications diverses, que l'on trouvera dans celui-ci, montreront toute la généralité et l'uniformité. Un avantage de cette méthode, est de fournir en même temps un moyen de démontrer la réalité de toutes les racines des équations transcendantes, d'où dépendent les coefficients du temps sous les *sinus* et *cosinus*, suivant lesquels les séries sont ordonnées ; ce qu'on pourrait d'ailleurs conclure de l'état d'équilibre stable dont les corps vibrant sont écartés.(Footnote) [92, pp.366-7]

Poisson's footnote of this paragraph is followed, which remarks about the transferrence of the algebraic equations to transcendeltal equations :

> Dans les problèmes qui concernent la distribution de la chaleur dans les corps solides, cette même méthode sert à la fois à les coefficients des séries, et à prouver que les coefficients du temps dans les exponentielles suivant lesquelles elles sont ordonnées, sont des quantitéa réelles et négatives ; ce qui est nécessaire à la solution complète de chaque question, et à la connaisance des lois de variation des températures dans les corps primitivement échauffés d'une manière quelconque.
>
> J'ai déjà eu l'occasion de remarquer que les règles fournies par l'algèbre pour s'assurer qu'une équations n'a pas de racines imaginaires, ne s'appliquent pas généralement aux équations *transcendantes*, et j'ai cité un example d'un cas où elles sont en défaut (Journal de l'École Polytechnique, 19^e Cahier, page 382). Ces règles supposent qu'en différentiant un nombre de fois suffisant, l'équation dont on sait que toutes les racines sont réelles. Elles conviendront, par conséquent, à une équation comme celle-ci :

$$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \cdots = 0 \tag{84}$$

> que l'on rencontre dans plusieurs questions de physiques ; car en la différentiant indéfiniment, on parviendra à un resultat qui différera aussi peu qu'on voudra d'une equation du premier degré. Mais ces mêmes ne prouveraient absolument rien relativement aux équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$, et à toutes celles qui se prèsentent dans le problème de la distribution de la chaleur dans une sphère, soit que la température primitive ait été la même à égale distance du centre, soit qu'elle ait varié d'une manière quleconque avec des rayons. [92, pp.367-8]

固体中の熱分布に関する問題で同様の方法が同時に級数の係数に使われ、そして指数の中で時間の係数が続くことの証明に使われるが、それらは実数でかつ負の量である。あらゆる問題の完全解である事が要求され、何らかの方法で初期に熱せられた固体中の温度の変化の法則がわかる事が要求される。

私は嘗て、代数から求められた規則を虚数根を持たない超越方程式に適用することは一般的に出来ない事について注意を促す機会があった。また、破綻する場合についてのある例を挙げた。(Journal de l'École Polytechnique, 19^e Cahier, page 382)。[52] これらの規則は、全ての根が実数であることがわかっている方程式をある充分な回数の微分を想定している。それらは結局、以下のようなある方程式で、多くの物理学の問題に出てくる方程式 (84) とすべきである ; だから、際限なく微分する事によって、我々がある一次方程式から要求しようとするものと少も違わない結果に達することになる。同じ事が $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ と関係する方程式に関してや、初期温度が中心からの等距離で同じであろうと、半径とかの何らかの方法で変化を受けようが、球の中の熱分布問題で生じるどんな問題に関しても絶対に何一つ証明していないだろう。

[52] Poisson [89], JEP **12** (1823), 405-509. There is a gap of citation of pages.

10. Poisson's refutation to Fourier's defect

There are many papers relating to the publishing in the rivalry between Poisson and Fourier. cf. fig.1, Table 9, 10.

10.1. ***Note sur les racines des équations transcendantes*** [95]**, 1830.**

Poisson issued "*Note sur les racines des équations transcendantes*", [95] in 1830, in which he points out Fourier's defect of description of the roots of transcendental equations in "*Théorie analytique de la chaleur*", [17, p.335] issued in 1822. Fourier may be felt hurt by this problem with Poisson, and moreover, it seems that such collisions in opinion disturb to evaluate Poisson of today.

> Selon M. Fourier, les règles que les géométres ont trouvées pour reconnaître l'existence des racines réelles des équations algébriques, s'appliquent également aux équations transcendantes. Ainsi le théorème de De Gua, fondé sur l'ancienne méthode des *cascades*, et d'après lequel on peut s'assurer que toutes les racines d'une équation algébrique d'un degrè quelconque sont réelles, conserverait le même avantage, dans le cas d'une equation transcendante. Dans mon second Mémoire sur la distribution de la chaleur, j'ai émis une opinion contraire, que j'ai appuyée d'un exemple propre à mettre ce théorème <u>en défaut</u>. [95, pp.90-1]
>
> Fourier 氏の場合は、数学者達が代数方程式で実根の存在を知るために見つけた規則を超越方程式にも適用している。元々、De Gua の定理は古い cascades の方法を基礎とする。ある任意の次数の代数方程の根が全て実根である事を確認出来る事に倣って、 超越方程式の場合でも同じ効用があるものと考えている。私の熱分布に関する第 2 論文でその定理は破綻する好例に根拠を置いた反論を書いた。 [95, pp.90-1]

> M. Fourier répond à cette difficulté, que je n'ai pas convenablement énoncé la proposition[a]; c'est pourquoi je vais tout à l'heure rappeler l'énoncé même de M. Fourier, et en faire litteralement l'application à l'exemple que j'avais choisi. Mais auparavant, qu'il me soit permis d'observer que je n'ai avancé nulle part et que je n'ai aucunne connaissance*qu'on ait soutenu pendant plusieurs années, ni cherché* à *prouver de différentes manières que les équations transcendantes relatives* à *la distribution de la chaleur ont des racines imaginaires.* [b] [95, p.91] (Italic mine.)
>
> [a]Mémoire de l'Académie, tome VIII, p.616. [35], cf. Chapter 10.
> [b]cf. Fourier [35, p.615, footnote(1)].

> Fourier 氏はこの不具合に答えて「私が適切な意見を述べていない」と言うが、それだからそれは Fourier 氏とて同じだ、そして私が挙げた例に従ってそのまま応用する様にとっくに言っているのだ。しかし、その後、何んと、彼は、私には全く進展が無く、数年を傾注しているとも聞かないままだし、熱分布に関する超越方程式が虚根を持つ事を別の方式で証明しようと追求してもいない風に私には見れる態度を敢てとったままなのだ。[53] [95, p.91]

Poisson's description is mismatches with Fourier. In 1830, Fourier remarked, taking 'another principles' and devoting himself entirely 'several years' to improve further the method of De Gua and Roll. cf. Chapter 11.3 ¶19. Poisson [95] states this contradiction in the case of

[53]cf. Fourier [36, p. 127]

transcendental equations as follows : we assume $a,\ b$ given constants, $x \in \mathbb{R}$,

$$X = \quad e^x - be^{ax} = 0 \tag{85}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^nX}{dx^n} = e^x - ba^ne^{ax}, \quad \frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = e^x - ba^{n+1}e^{ax}, \quad \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = e^x - ba^{n+2}e^{ax}, \ \cdots (86)$$

Here it satisfies by Fourier's proposition :

$$\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = 0, \quad \text{or} \quad e^x - ba^{n+1}e^{ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = ba^{n+1}e^{ax} \tag{87}$$

Then from (85) and (87), two expressions reduces into :
(85) $\Rightarrow$

$$\frac{d^nX}{dx^n} = -ba^ne^{ax} + e^{ax} = -ba^ne^{ax} + \underbrace{ba^{n+1}e^{ax}}_{(87)} = -b(1-a)a^ne^{ax},$$

$$\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = \underbrace{ba^{n+1}e^{ax}}_{(87)} - ba^{n+2}e^{ax} = b(1-a)a^{n+1}e^{ax}$$

From here, we get [54]

$$\boxed{\frac{d^nX}{dx^n}\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -b^2(1-a)^2a^{2n+1}e^{2ax} \tag{88}}$$

This is negative for all real values of $x \in \mathbb{R}$. From (85), we get

$$\frac{d^nX}{dx^n} = e^x - ba^ne^{ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log ba^n}{1-a}$$

Finally, he deduces an imaginary root of the real part : $x = \frac{\log ba^n}{1-a}$ and the infinite imaginary part : $x = \frac{2m\pi}{1-a}i,\ m \in \mathbb{Z}$ or 0, $i = \sqrt{-1}$.

> Donc *toute racine réelle* de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = 0$, étant substituée dans les deux équations adjacentes $\frac{d^nX}{dx^n} = 0$ et $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = 0$, donnera des results de signe contraire; donc d'aprè la règle de M. Fourier, l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, et toutes celles qui s'en déduisent par différentiation, devraient avoir toutes leures racines réelles; et, au contraire, chacune de ce équations a une seule racines réelle et une infinité de racines imaginaires, comprises sous la forme :
>
> $$x = \frac{\log ba^n + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}$$
>
> π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et i étant une nombre entier ou zéro.
>
> ...
>
> J'avais pensé que les équations transcendantes semblables à celle-ci :[55]
>
> $$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \cdots = 0 \tag{89}$$
>
> pourraient être assimilées aux équations algébriques, à cause de l'accroissement des dénominateurs qui permettrait de négliger les termes d'un rang très-éloignés

[54] cf. Fourier's citation : (97).

[55] This series are similar to the transcendental equations : e^x or e^{-x^2}, what we know, the following formulae, :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} + \cdots, \quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \frac{x^8}{(4!)^2} - \cdots$$

56. Mais en y réfléchissant de nouveau, j'ai reconnu que cette considération ne serait pas satisfaisante.[57] En effet, l'équation différentielle de l'ordre n serait, dans cet exemple,

$$1 - \frac{x}{1 \cdot n+1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot n+1 \cdot n+2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} + \cdots = 0$$

or, quelque grand que soit n, on ne pourrait pas la réduire à ses premiers termes, parce que les valeurs de x qui s'en déduisent sont aussi très-grandes et comparables à n. [95, pp.92-5]

10.2. ***Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*** [96]**, 1831.**

After Poisson [94],[58] continuously, Poisson appends his opinion about proof of exact differential in the last pages of [96, pp.173-4]. His conjucture is based on the preceding analysis in [87, pp.382-3]. cf. Chapter 7.2.

The proof of the conservation in time and space of an exact differential was discussed by Lagrange, Cauchy, Stokes, and others. The herein-called "Poisson conjecture" in 1831, cited in the Introduction as one of our main motivations for this study, It had its beginnings with the incomplete proof by Lagrange [57]. However, thereafter, Cauchy [9] had presented a proof as early as 1815, while Power [107] and Stokes [111] had tried by other methods.

To date Cauchy's proof is still considered to be the best. Poisson concludes the proof is defect, and even the equation made of tenscendentals satisfy with exact differential at the original time of movement, the equations satisfy no more with it during all the time:

> Je terminerai ce mémoire par une remarque propre à rectifier, sur un point important, une proposition admise, jusqu'ici, sans restriction.
>
> Les équations différentielles du mouvement des fluides deviennent plus simples, comme on sait, lorsque la formule $udx+vdy+wdz$ est la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes $x,\ y,\ z$, qui peut, en outre, contenir le temps t. Or, on admet que cette condition sera remplie pendent toute la durée du mouvement, si elle se vérifie à un instant déterminé, par exemple, à l'origine du mouvement.
>
> Mais la démonstration qu' on donne de cette proposition suppose que les values de $u,\ v,\ w$, doivent satisfaire non seulement aux équations différentielles du mouvement, mais encore à toutes celles qui s'en déduisent en les différentiant par rapport à t; ce qui n'a pas toujours lieu à l'égard des expressions de $u,\ v,\ w$, en séries d'exponentielles et de sinus ou cosinus dont les exposans et les arcs sont proportionnelles au temps ; et la démonstration étant alors *en défaut*, il peut arriver que la formule $udx + vdy + wdz$ soit une différentielle exacte à l'origine du mouvement, et qu'elle ne soit plus à toutes autre époque. Nous en donnerons des exemples et nous développerons davantage cette remarque dans la applications que nous ferons par la suite, des fomules de ce mémoire à différentes questions. Les expressions de $u,\ v,\ w$, dont il s'agit, satisfont aux équations différentielles relatives à l'intérieur et la surface du fluide en mouvement; et y déterminant convenablement les coefficiens des exponentielles et des sinus ou consinus, elles représentent l'état initial et donné de toutes ses molécules; et les séries qui en résultent étant d'ailleurs convergentes, cela suffit pour qu'elles renferment la solution du problème, quoiqu'un de leurs caractères particuliers soit de ne pas toujours satisfaire aux équations qui se déduisent de celles du problème par de nouvelles différentiations. [96, ¶73. pp.173-4] (Italic mine.)

---

[56] Mémoires de l'Académie, tome VIII, page 367. sic. Poisson [92]

[57] Fourier points out Poisson's withdrawal of this expression (89) in Fourier [36, p.126].

[58] This note's accepted date is signed as Lu : 2/mars/1829.

11. Fourier's defense and enhansement of his theory

11.1. *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendantes qui dépendendent de la théorie de la chaleur* [34], **1827.**

In 1824, Fourier [34] examined various roots of real or imagibnary root for practical heat problems. In his title, he seems to emphasize the *qui dépendendent de la théorie de la chaleur.* Namely he considers it is the roots *depending on* or *relating to* just the heat theory. And he assures, according to our demonstration, all the roots are reals.

> Les coefficients k, c, d représentent respectivement la conducibilité de chaleur, la densité; X est le rayon total de sphère, x est la rayon de la couche sphérique dont on vent déterminer la température v, et t mesure le temps écoulé depuis l'instant où le refroidissement commence, jusqu'à l'instant où la température prend la valeur désignée par v. [34, p.613-4]
>
> Nous avons rapporté plus haut la solution que l'on trouve en intégrant les équations du mouvement de la chaleur dans la sphère ; mais nous avons réduit cette solution au cas où la surface est assujettie dans tous les points à une température constante zéro. On a vu comment la formule ainsi réduit saccorde avec le théorème général que l'on vient de démontrer. On peut aussi considérer les cas plus général où la chaleur du solide se dissipe à travers la surface dans un milieu dont la température est constante. On attribuera au coefficient qui mesure la conducibilité extérieure une value déterminée H, et l'on aura pour exprimer les températures variables du solide l'équation suivante :

$$(1)_F \quad v = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n_i x)}{x} \; \frac{e^{-\frac{k}{cd}n_i^2 t}}{X - \frac{1}{2n_i}\sin(2\ n_i\ X)} \int_0^X d\alpha\ \alpha F\alpha\ \sin(n_i\ \alpha) \tag{90}$$

$$(2)_F \quad \frac{n_i\ X}{\tan(n_i\ X)} = 1 - \frac{H}{k}X \tag{91}$$

> Les quantités x, v, t, k, c, d, ont la même signification que dans l'article précédent. Le coefficient H exprime la conducibilité de la surface relative au milieu dont la température constante est zéro. La fonction F_α représente, comme nous l'avons dit, le système des temperatures initiales. L'équation $(2)_F$ donne pour la valeur de n_i, une infinité de racines, et nous avons démontré plusieurs fois, soit par le calcul, soit par des considérations propres à la théorie de la chaleur, que toutes ces racines sont réelles ; la température variable v est la double de la somme de tous les termes dont la valeur est indiquée. [34, p.622]

Here, (90) comes from (53). And (91) comes from (52).

11.2. *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur* [35], **1829.**

In 1829, Fourier published '*Mémoire*' [35] using the same title with [17] .

¶ 1. *Objet de la question, formule qui en donne la solution.* (The object of the problem, the formula which gives the solution.) Fourier says : I don't talk about here the fundamental problems of heat equations. There were several years since the equations did a service to the calculation. We are doubt that the mathematic analysis apply this genre of phenomina. :

> Ce *Mémoire* a pour objet la solution d'une question d'analyse qui appartient à la théorie de la chaleur. Cette nouvelle recherche servira à perfectionner les applications, en introduisant dans le calcul les variations que l'on observe dans les coefficients spécifiques. On peut à la vérité regarder ces coefficients comme constants dans la question des températures terrestres, qui est l'application la

plus importante ; mais il y a d'autres questions pour lesquelles il serait nécessaire d'avoir égard aux variations que les expériences ont indiquées. Les propositions qui sont demontrées dans le *Mémoire*, ont un rapport direct avec l'analyse de ces approximations successives. [35, p.581]

この論文は目的として熱理論に現れた解析のある問題の解を与えることにある。この新研究は応用を改良することに役立つと思われる。何故なら、そこから変分計算の中で特殊係数について観られる事を紹介しているからである。地上の温度の問題について厳密にこの係数を定数と看做す事が出来、この点は最も重要な応用である。しかし、別の問題もある。このためには変分に関しては実験で与えることが必要となる事だ。この論文で示した諸提案は連続近似の解析と直接的に関連がある。 [35, p.581]

Je ne rappellerai point ici les questions fondamentales de la théorie de la chaleur. Il y a peu d'années qu'elles n'avaient point encore été soumises au calcul; on pouvait même douter que l'analyse mathématique s'etendît à cet ordre de phénoménes, et fût propre à les exprimer d'une manière aussi claire et aussi complète par des intégrales d'équations à différences partielles. Les solutions que j'ai données de ces questions principales sont aujourd'hui généralement connues; elles ont été confirmées par les recherches de plusieurs géomètres. [35, pp.581-2]

私はここで熱理論の本質的諸問題に立ち戻るつもりは決してない。これら (理論) が未だに計算に供せられていないまま、まもなく数年が経とうとしている。多くの人は数学的解析がこの現象段階にまで及んでよいのかとか、偏微分方程式の積分ではどんなに明確であれまたどんなに完全であれ、ある手法から説明することが適切なのかとまで疑問を呈しかねないでいる。基本的な問題から出した解は今日では広く知られており、これら (理論) は多くの専門家・学者から確認されている。 [35, pp.581-2]

Je me propose maintenant d'ajouter à la même théorie la solution d'une question nouvelle, que je considère d'abord comme purement analytique, et dont je présenterai par la suit des applications variées. Il s'agit d'assujétir les deux extrémités d'un prisme à des températures entièrement arbitraires exprimées par deux fonctions différentes du temps, qu'elles soient ou non périodiques. L'état initial du prisme est donné ; il est représenté par une troisième fonction ; on se propose d'intégrer l'équation différentielle du mouvement de la chaleur, en sorte que l'intégrale comprenne trois fonctions arbitraires : savoir celle qui représente l'état initial du solide, et deux autres dont chacune exprime l'état donné et variable d'une extrémité. [35, p.582]

私は同理論に新たな問題の解を与えることを提案する。その解は最初に純粋に解析的と考えるものであり、続いて変更を加えた応用を与える。ある柱状の両端が時間の異なる二つの関数で、周期的なものあるいはそうでないものとで与える任意の熱に全面的に支配されるもので成りたっている。 柱状の初期状態は与えられるものとし、それは第 3 の関数で表わす。熱の運動に関する微分方程式の積分が与えられ、そのため、積分は任意の三つの関数を含むものとなる：即ち、固体の初期を表すものとあと二つがいづれもがいづれかの片端で与えられ、変化する状態を表す関数である。 [35, p.582]

$$\begin{aligned}(1)_F \quad V_t &= \frac{x}{\varpi}ft + \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2t}\frac{1}{i}\sin(ix)\ \cos(i\varpi)\Big(f0 + \int_0^t dr\ f'r\ e^{i^2r}\Big) \\ &+ \ (\frac{\varpi - x}{\varpi}) - \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2t}\frac{1}{i}\sin(ix)\Big(\varphi o + \int_0^t dr\ \varphi'r\ e^{i^2r}\Big) \\ &+ \ \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2t}\sin(ix)\int_0^{\varpi} dr\ \psi r\sin(ir) \end{aligned} \tag{92}$$

x désigne la distance d'un point quelconque m du solid à sa première extrémité o, t est le temps écoulé à partir de l'état initial, V_t exprime la température du point m après le temps t ; la distance de la seconde extrémité ϖ à l'origine o est présentée par le nombre ϖ ; les fonctions du temps ft, φt arbitraires, elles expriment respectivement les températures variables des deux extrémités o et ϖ du prisme. La troisième fonction arbitraire ψx qui affecte la distance variable x d'un point intérieur à l'extrémite o, représente le système des températures initiales. [35, pp.584]

In reply to Poisson, Fourier discusses this problem in [34, 35]. We cite [35].

Il était util de considérer aussi la proposition dont il s'agit, comme un théoréme abstrait fondé sur les seuls principles du calcul, et je l'ai présentée sous ce point de vue dans différentes recherches. Mais cette question n'ayant pas été examinée avec une attention suffiante, on a contesté la vérité de la proposition fondamentale. *On a soutenu, pandant plusieurs années, que ces équations transcendantes ont des raines imaginaires.* [59] Ces objections ayant été réfutées, on a enfin reconnu que la proposition est vraie, et l'on se borne maintenant à en proposer diverses démonstrations. En effet ce théorème a cela de commun avec la plupart des vérités mathématiques, qu'étant une fois connues, on en peut aisément multiplier les preuves. [35, p.615, footnote(1)] (Italic mine.)

唯単に計算原理だけに基ずいた抽象的定理だと謂う彼 (Poisson) の意見にも考慮する事は有益だろう。それでこの観点から別の研究[60]の中でそれを提案した。しかし、この問題は慎重な配慮がなされていないまま、根本的な提案に疑義を挟んで、この超越方程式が虚根を持つ事に数年間かかりきりだった。指摘を受けてやっと正しいと分かったのだ。今は色々な証明を提案することだけにとどめよう。実を言えば、この定理は大部分の数学的真理と共に良く知られた事だし、昔[61]、勉強したもので、そのためそれらを証明する事を加える位は簡単に出来る。

L'application que j'ai faite de cette analyse a donné lieu (19^e Cahier de l'École polytechnique, page 382, 383),[62] à des objections qu'il m'avait paru inutil de réfuter, parce qu'aucun des géomètres qui ont traité depuis des questions analogues ne s'arrêté à ces objections : mais comme je les trouve reproduites dans le nouveau volume de la collection de nos Mémoires (tom. VIII, nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, *Mémoires sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques* page 11),[63] cette réputation est devenue en quelque sorte nécessaire, je l'ai donc insérée dans un article du présent Mémoire. Elle a pour objet de prouver que l'exemple cité par M. Poisson (l'École polytechnique, 19^e Cahier, page 383), en alléguant que dans ce cas l'application du théorème serait fautive, donne au contraire une conclusion conforme à la proposition générale.

L'error de objection provient, 1. de ce que l'auteur ne considère point le nombre infini des facteurs égaux de la fonction e^x, ou $(1+\frac{x}{n})^n$, où le nombre n est infini; 2. de ce qu'il omet dans l'énoncé du théorème le mot *réel*, qui en exprime le véritable sens. (Voir Théorie de la chaleur, page 373, et aussi page 380, art 312.) [35, pp.616-7]

59cf. Poisson [95, pp.90-1].

60It may be Fourier [34], which proposed in 1824, the time appeared in the bottom of [34, p.617].

61cf [36, p.127]. In this paper Fourier cites his papers :

J'ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.) [36, p.127].

62Poisson [92, pp.367-8]. Fourier's citation of pages 382-3 are same with the pages 367-8 by Poisson. cf. We show the pages 367-8 in above [92, pp.367-8].

63Poisson [92], pp.357-355. The page 11 corresponds to 357+10=367. cf. Footnote of p.367.

非難の誤りは 2 点から生じる。1 点目は著者 (Poisson) が関数 e^x あるいは $(1+\frac{x}{n})^n$(ここに n は無限) についての無数の等しい因子を全然考慮していない事、2 点目は定理の文脈で、'*real*' という語が「現実の」という意味を表すという事を忘れている事だ。[64]

here, we have now the defined, well-known formula :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Art. 312 is as follows:

Pour connaitre entièrement la nature de la fonction $f(\theta)$, et celle de l'équation qui donne la valeur de g, il faudrait considérer la figure de la ligne qui a pour équation

$$y = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{2^2 3^2}$$

et qui forme avec l'axe des abscisses des aires, alternativement positives ou négatives, qui se détruisent réciproquement ; on pourrait aussi rendre plus générales les remarques précedentes sur l'expression des valeurs des suites en intégrales définies. Lorsqu'un fonction d'une variable x est dévelopée selon les puissances de x, on en déduit facilement la fonction que représenterait la même série si l'on remplaçait les puissances

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \cdots, \quad \text{par} \quad \cos, \quad \cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \cdots$$

En faisant usage de cette réduction et du procédé indique à l'art. 235, on obtient les intégrales définies équivalent à des séries données : mais nous ne pourrions entrer dans cet examen sans nous écarter beaucoup de notre objet principal. Il suffit d'avoir indiqué les moyens qui nous ont servi à exprimer les valeurs des suites en intégrales définies. Nous ajouterons seulement le développment de la quantité $\theta\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ en une fraction continue. [17, pp.344-5]

¶ 2. *La solution a trois parties distincts.* (The solution has three distinct parts.)

Fourier proposes three parts of the solution. in which ft, φt and ψx are three functions to solve the problem, and the first two depend on the elapsed time : t from initial time, and the last on the distance from origin : x.

¶ 3. *Premièr démonstration. La forme satisfait à l'équation différentielle, aux conditions des extrémités, et à l'état initial.* (The first proof. The form which satisfies with the differential equation, on the boundary and initial condition.)

$$(2)_F \quad \frac{d^2V_t}{dx^2} = -\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\; i\; \sin(ix)\; \cos(ix)\Big(f0 + \int_0^t dr\; f'r\; e^{i^2r}\Big)$$
$$+ \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\; i\; \sin(ix)\Big(\varphi o + \int_0^t dr\; \varphi' r\; e^{i^2r}\Big) - \frac{2}{\varpi}\sum i^2 e^{-i^2t}\sin(ix)\int_0^t dr\; \psi r \sin(ir)$$

$$(3)_F \quad \frac{dV_t}{dt} = \frac{x}{\varpi}f't - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\; i\; \sin(ix)\; \cos(ix)\Big(f0 + \int_0^t dr\; f'r\; e^{i^2r}\Big)$$
$$+ \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin(ix)}{i}\; \cos(i\varpi)\frac{d}{dt}P$$
$$+ \Big(\frac{\varpi - x}{\varpi}\Big)\varphi' t + \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\; i\; \sin(ix)\Big(\varphi o + \int_0^t dr\; \varphi' r\; e^{i^2r}\Big) - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin(ix)}{i}\frac{d}{dt}Q,$$

[64] In 1824, Fourier [34], published in 1827, examined various roots of real or imagibnary root for practical heat problems.

where, we express

$$P \equiv f0 + \int_0^t dr\ f'r\ e^{i^2 r}, \quad Q \equiv \varphi o + \int_0^t dr\ \varphi' r\ e^{i^2 r}$$

$$(4)_F \quad V_{t=0} = \frac{x}{\varpi} f0 - \frac{2}{\varpi} f0 \sum \frac{\sin(ix)}{i}\ \cos(i\varpi) + (\frac{\varpi - x}{\varpi})\varphi 0 - \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin(ix)}{i} + \frac{2}{\varpi} \int_0^{\varpi} dr\ \psi r\ \sin(ir)$$

$$(5)_F \quad \psi x = \frac{2}{\varpi} \int_0^{\varpi} dr\ \psi r\ \sin(ir)$$

¶ 4. *Énoncé des trois questions partielles dont on réunit les solutions.* (Expression of three partial problems which we reunion the solutions.)

$$(6)_F \quad v = \frac{2}{\varpi} \sum e^{-i^2 t} \sin(ix) \int_0^{\varpi} dr\ \psi r\ \sin(ir)$$

¶ 5. *Température variable à l'extrémité du solide. On résout la question en déterminant sous le signe $\sum$ une fonction inconnue.* (Variable temperature on the boundary of solid. We solve the problem determinating an unknown function under the symbol $\sum$.)
We use at first, the expression :

$$v = \sum e^{-i^2 t} \sin(ix) \alpha_i,$$

where, α_i : unknown function of t, which continues with index i.

$$(7)_F \quad v = \frac{x}{\varpi} ft + \sum \alpha_i\ e^{-i^2 t} \sin(ix)$$

$$(8)_F \quad \sum i^2\ \alpha_i\ e^{-i^2 t} \sin(ix) = \frac{x}{\varpi} f't - \sum \alpha_i\ i^2\ e^{-i^2 t} \sin(ix) + \sum \frac{d\alpha_i}{dt}\ e^{-i^2 t} \sin(ix)$$

If we assume :

$$\frac{x}{\varpi} f't + \sum \frac{d\alpha_i}{dt}\ e^{-i^2 t} \sin(ix) = 0,$$

the differential equation $(8)_F$ will satisfy. If we take the known fact :

$$x = -2\frac{\sin(ix)}{i}\ \cos(i\varpi)$$

$$-\frac{2}{\varpi} f't \sum + \sum \frac{d\alpha_i}{dt}\ e^{-i^2 t} \sin(ix) = 0,$$

We get here,

$$e^{-i^2 t} \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{2}{\varpi} f't\ \cos(i\varpi)$$

$$(9)_F \quad \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\ \cos(i\varpi) \int dt\ e^{i^2 t} f't\ \cos(i\varpi), \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\ \cos(i\varpi)\Big(c + \int dt\ e^{i^2 t} f' r\Big),$$

where, c is an arbitrary constant.

$$(10)_F \quad v = \frac{x}{\varpi} ft + \frac{2}{\varpi} \sum_i\ \cos(i\varpi) \frac{\sin(ix)}{i} e^{-i^2 t} \Big(c + \int dt\ e^{i^2 t} f' r\Big)$$

This value at $t = 0$ is null, then we get

$$\frac{x}{\varpi} f0 + \frac{2c}{\varpi} \sum_i\ \cos(i\varpi) \frac{\sin(ix)}{i} = 0, \tag{93}$$

We substitute $x = -2\cos(i\varpi)\frac{\sin(ix)}{i}$ for x of (93), then

$$-\frac{2}{\varpi}\frac{\sin(ix)}{i} \cos(i\varpi)\ f0 + \frac{2c}{\varpi} \sum \frac{\sin(ix)}{i} \cos(i\varpi)\ = 0,$$

where, $c = f0$, then

$$(11)_F \quad v = \frac{x}{\varpi} ft + \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin(ix)}{i} \cos(i\varpi)\ e^{-i^2t}\Big(f0 + \int dt\ e^{i^2t} f'r\Big)$$

$$(12)_F \quad v = \frac{\varpi - x}{\varpi} \varphi\ t - \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin(ix)}{i}\ e^{-i^2t}\Big(\varpi 0 + \int dt\ e^{i^2t} \varphi' r\Big)$$

¶ 6. *Pricipe dont on a déduit la solution générale.* (Principle from which we have deduced the general solution.)
¶ 7. *Application de ce pricipe, calcul.* (Application of this principle. Calculation.)

$$(13)_F \quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi}\frac{2}{\varpi} \sum\ e^{-i^2t}\ \sin(ix) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(i_\alpha)\Big(\frac{b\alpha}{\varpi} - F_\alpha\Big)$$

Here we can omit F_α, then

$$(14)_F \quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2}{\varpi} \sum\ e^{-i^2t}\ \sin(ix) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(i_\alpha)\Big(\frac{b\alpha}{\varpi}\Big) \tag{94}$$

We substitute the developped expression with $\sum$ for $\int_0^\varpi d\alpha\ \sin(i_\alpha)\big(\frac{b\alpha}{\varpi}\big)$

$$(15)_F \quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2b}{\varpi}\Big(e^{-\theta}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2\theta}\ \sin 2x + \frac{1}{3}e^{-3^2\theta} \sin 3x - \cdots\Big)$$

$$(16)_F \quad V_{t_1} = \frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-t_1}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2\ t_1}\ \sin 2x + \frac{1}{3}e^{-3^2\ t_1} \sin 3x - \cdots\Big)$$

$$(17)_F \quad V_{t_1+t_2} = \frac{b_1 x}{\varpi} + \frac{b_2 x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2\ t}\ \sin(ix) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(ix)\Big(\frac{b_1 x}{\varpi} + \frac{b_2 x}{\varpi} - W\Big)$$

We have to put W this value

$$\frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-t_1}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2\ t_1}\ \sin 2x + \frac{1}{3}e^{-3^2\ t_1} \sin 3x - \cdots\Big)$$

We get the following term as the first part of $V_{t_1+t_2}$

$$\frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2\ t}\ \sin(ix) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(ix)\ \frac{b_1 x}{\varpi} \tag{95}$$

(95) is due to (94).

$$\begin{aligned}(18)_F\ & \frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2\ t}\ \sin(i\alpha) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(i\alpha) \\ \times\ & \frac{b_1 x}{\varpi}\Big(e^{-t_1}\ \sin\alpha - \frac{1}{2}e^{-2^2\ t_1}\ \sin 2\alpha + \frac{1}{3}e^{-3^2\ t_1} \sin 3\alpha - \cdots\Big)\end{aligned}$$

Another part of $V_{t_1+t_2}$

$$\frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)} sin 2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\ \sin 3x - \cdots\Big)$$

$$\begin{aligned} V_{t_1+t_2} &= b_2 - \frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-t_2}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2t_2} sin 2x - \frac{1}{3}e^{-3^2t_2}\ \sin 3x - \cdots\Big) \\ &+ \frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)} sin 2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(19)_F \quad V_{t_1+t_2+t_3} &= b_1\frac{x}{\varpi} + b_2\frac{x}{\varpi} + b_3\frac{x}{\varpi} \\ &- \frac{2}{\varpi}\sum_i e^{-i^2\ t}\ \sin(ix) \int_0^\varpi d\alpha\ \sin(i\alpha)\ \Big(b_1\frac{x}{\varpi} + b_2\frac{x}{\varpi} + b_3\frac{x}{\varpi} - W_\alpha\Big)\end{aligned}$$

$$(20)_F \quad - \quad \frac{2}{\varpi}\sum_i e^{-i^2\ t}\ \sin(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha\ \sin(i\alpha)$$
$$- \quad \frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-t_2}\ \sin\alpha - \frac{1}{2}e^{-2^2t_2} sin2\alpha - \frac{1}{3}e^{-3^2t_2}\ \sin 3\alpha - \cdots\Big)$$
$$- \quad \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\ \sin\alpha - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)} sin2\alpha - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\ \sin 3\alpha - \cdots\Big)$$

$$(21)_F \quad - \quad \frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-t_2}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2t_2} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2t_2}\ \sin 3x - \cdots\Big)$$
$$- \quad \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\ \sin 3x - \cdots\Big)$$

$$\begin{aligned}(22)_F \quad V_{t_1+t_2+t_3} \quad = \quad & b_3\frac{x}{\varpi} - \frac{2b_3}{\varpi}\Big(e^{-t_3}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2t_3} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2t_3}\ \sin 3x - \cdots\Big)\\ + \quad & b_2\frac{x}{\varpi} - \frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-(t_2+t_3)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_2+t_3)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\\ + \quad & b_1\frac{x}{\varpi}\\ - \quad & \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2+t_3)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2+t_3)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\end{aligned}$$

¶ 8. *Consequence remarquable.* (Remarkable consequence.)

$$\begin{aligned}&(23)_F \quad V_{t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots}\\ = \quad & b_1\frac{x}{\varpi}\\ - \quad & \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2+t_3+t_4+\cdots)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\\ + \quad & b_2\frac{x}{\varpi} - \frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-(t_2+t_3+t_4+\cdots)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3+t_4+\cdots)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_2+t_3+t_4+\cdots)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\\ + \quad & b_3\frac{x}{\varpi} - \frac{2b_3}{\varpi}\Big(e^{-(t_3+t_4+\cdots)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_3+t_4+\cdots)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_3+t_4+\cdots)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\\ + \quad & b_4\frac{x}{\varpi} - \frac{2b_4}{\varpi}\Big(e^{-(t_4+\cdots)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(t_4+\cdots)} sin2x - \frac{1}{3}e^{-3^2(t_4+\cdots)}\ \sin 3x - \cdots\Big)\end{aligned}$$

¶ 9. *Accroissement de la température par degrés infiniment petits, forme de l'intégrale.* (Increment of temprature by the infinitesimal perturbation. Form of integral.)
We assume $f0 = 0$.

$$(24)_F \quad V_t = \frac{x}{\varpi}ft - \frac{1}{\varpi}\int_0^T dtf't\Big(e^{-(T-t)}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2(T-t)}\ \sin 2x + \frac{1}{3}e^{-3^2(T-t)}\sin 3x - \cdots\Big)(96)$$

$$\frac{x}{\varpi}f0 - \frac{2}{\varpi}\Big(f0\ e^{-T}\ \sin x - \frac{1}{2}e^{-2^2T}\ \sin 2x + \frac{1}{3}e^{-3^2T}\sin 3x - \cdots\Big)$$

$$\begin{aligned}V_t \quad = \quad & \frac{x}{\varpi}\Big(f0 + \int_0^T dt\ f't\Big) - \frac{2}{\varpi}\sin x\Big(f0 + \int_0^T dt\ f't\Big)\\ - \quad & \frac{1}{2}e^{-2^2T}\ \sin 2x\Big(f0 + \int_0^T dt\ f't\ e^{2^2t}\Big) + \frac{1}{3}e^{-3^2T}\sin 3x\Big(f0 + \int_0^T dt\ f't\ e^{3^2t}\Big)\cdots\end{aligned}$$

$f0 + \int_0^T dt\ f't = ft$, and when $T = 0$ of V_t in $(24)_F$ [=(96)], we get the initial temperature of system by $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots = \frac{x}{2}$,

$$\frac{x}{\varpi}f0 - \frac{2}{\varpi}f0\Big(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots\Big) = f0\Big(\frac{x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\frac{x}{2}\Big) = 0$$

¶ 10. *Solution générale.* (General solution.)

$$(25)_F \quad V_t \;=\; \frac{\varpi - x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Big[e^{-T}\sin x\Big(\varphi 0 + \int_0^T dt\ \varphi' t\Big)$$
$$-\ \frac{1}{2}e^{-2^2T}\ \sin 2x\Big(\varphi 0 + \int_0^T dt\ \varphi' t\ e^{2^2t}\Big) + \frac{1}{3}e^{-3^2T}\sin 3x\Big(\varphi 0 + \int_0^T dt\ \varphi' t\ e^{3^2t}\Big)\cdots\Big]$$

$$(26)_F \quad V_t = \frac{\varpi - x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\sum_i e^{-i^2T}\sin(ix)\ \Big(\varphi 0 + \int_0^T dt\ \varphi' t\ e^{i^2t}\Big)$$

$$(27)_F \quad U_t = \frac{x}{\varpi}ft + \frac{2}{\varpi}\sum_i\ e^{-i^2T}\ \cos(i\varpi)\ \sin(i\varpi)\ \Big(f0 + \int_0^T dt\ \varphi' t\ e^{i^2t}\Big)$$

$$(28)_F \quad W_T = \frac{2}{\varpi}\sum_i\ e^{-i^2T}\ \sin(ix)\ \int_0^{\varpi} dr\ \psi r\ \sin(ir)$$

Finally, we get the total of $(26)_F$, $(27)_F$ and (28),

$$(29)_F \quad U_t + V_t + W_T$$

Namely, the diffusing temperature of the heat on a prism : $(29)_F$ is given by the sum of three terms, $(29)_F = (27)_F + (26)_F + (28)_F = (1)_F$. [65] [35, pp.581-610].

11.3. ***Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendantes*** [36]**, 1831.**

In 1830, Fourier published the *Remarques* [36], which may be the last paper to Poisson in life, after only 7 days since Poisson's proposal [95], in which Fourier says : (Remark. We counter and show the paragraph number instead of the article number, for the article number is none in his paper.)

¶ 1

> Avant de traiter la question qui est l'objet principal de cette note, je discuterai, dans un primier article, une objetion proposée plusieurs fois par M. Poisson,[66] et que ce savant géomètre a reproduite récemment dans un écrit présenté à l'Académie.[67]

¶ 2

> Pour resoudre la question du mouvement de la chaleur dans le cylindre solide, j'ai appliqué un théorème d'analyse algébrique à l'équation transcendante propre à cette question. M. Poisson n'admet point cette conséquence. Il ne se borne pas à dire que l'on n'a point encore publié la démontration de ce théorème, en faisant connaître qu'il s'applique aux équations transcendantes ; il soutient que l'on

[65] Here Fourier's statement of $\sin(i\varpi)$ in $(27)_F$ is unmatched with in $(1)_F$ as follows :

$$\begin{aligned}(1)_F \quad V_t \;&=\; \frac{x}{\varpi}ft + \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-i^2t}\frac{1}{i}\sin(ix)\ \cos(i\varpi)\Big(f0 + \int_0^t dr\ f'r\ e^{i^2r}\Big)\\ &+\ (\frac{\varpi - x}{\varpi}) - \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-i^2t}\frac{1}{i}\sin(ix)\Big(\varphi o + \int_0^t dr\ \varphi' r\ e^{i^2r}\Big)\\ &+\ \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-i^2t}\sin(ix)\int_0^{\varpi} dr\ \psi r\sin(ir)\end{aligned}$$

then we should correct it in $(27)_F$ as not $\sin(i\varpi)$ but $\sin(ix)$, for x represents the distance from the origin o.

[66] Poisson proposed his paper relating to transcendental equations : MAS **8** [92], etc.

[67] Poisson proposed another paper : MAS **9** [95], before Fourier published [36].

arriverait à une conclusion fausse si l'on étendait cette proposition à l'équation exponentielle

$$e^x - be^{ax} = 0$$

[36, p. 119]

¶ 5

M. Poisson a présenté, pour la première fois, cette objection dans le 19^{me} Cahier des Mémoires de l'École Polytechnique (page 382). Il ne citait point le théorème dont j'ai fait usage, mais une proposition très-differente, puisqu'il y omet une condition qui en est une partie nécessaire, et qu'il ne regardait point comme sous-entendue. La réfutation aurait donc été pour ainsi dire auperflue : mais le même auteur a reproduit son objection plusieurs années après, et c'est alors seulement qu'il a cité la proposition dont il s'agit telle qu'on la trouve dans la Théorie de la chaleur (pages 372 et 373).[68] [36, p. 120]

Fourier's respondents [36] to Poisson [95] after only 7 days, are as follows :[69]

¶ 10

Pour établir cette conséquence, nous allons rappeler le calcul même qui est emplyé par l'auteur : et afin de rendre les expressions plus simples, sans altérer en rien les conclusions que l'on en déduit, nous considérerons seulement l'équation $e^x - e^{ax}$. Le lecteur pourra s'assurer facilement qu'il n'y a ici aucune différence entre les conséquences qui conviennent à l'équation $e^x - be^{ax}$, a et b étant positifs, et celles que l'on déduirait de l'équation trè-simple $e^x - e^{2x} = 0$.
Écrivant donc

$$X = e^x - e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^nX}{dx^n} = e^x - 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1}e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = e^x - 2^{n+2}e^{2x},$$

et posant l'équation $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = 0$, ou $e^x - 2^{n+1} = 0$, $e^{2x} = 0$, on en tire la valeur de e^x pour la substituer dans les deux valeurs de $\frac{d^nX}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}}$. Par cette élimination, on trouve

$$\frac{d^nX}{dx^n} = 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -2^{n+1}e^{2x},$$

et

$$\boxed{\frac{d^nX}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -2^{2n+1}e^{4x} \qquad (97)}$$

l'on détermine la valeur du produit $\frac{d^nX}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}}$, qui est $-2^{2n+1}e^{4x}$.[70] L'auteur en conclut que toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$, étant substituée dans l'équation qui précède et dans cette qui suit, donne deux resultats de signes contraires : c'est cette conclusion que l'on ne peut pas admettre.

En effet, si, la valeur réelle de x qui rend nulle la fonction intermédiaire $e^x - 2^{n+2}e^{2x}$, réduit à zéro le facteur e^x commun aux deux termes, cette même valeur de x étant substituée dans la fonction qui précède, savoir $e^x - 2^n e^{2x}$, et dans celle qui suit, savoir $e^x - 2^{n+1}e^{2x}$, réduira *l'une et l'autre à zéro.* Les deux

[68] [17, pp.335-6, ¶ 308]

[69] The following are devided into three parts of citation and underlying it by us, to be easy to see the one long paragraph and underlying it.

[70] cf. Poisson's assertion : (88).

résultats ne sont donc point de signes différents, ils sont les mêmes. Pour que l'un des résultats fût positif et l'autre négatif, il faudrait ne considérer parmi les racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1}e^{2x} = 0$, que celles de ces racines qui ne rendent point nul le facteur e^x. [36, pp.122-4] (Italic mine.)

Here, Fourier's assertion is that if we assume the intermediate function $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$ zero, then the common term $e^x = 0$. We substitute this same value for the two equations before and after of this intermediate function, then have zeros which are the same sign each other as follows :

$$\text{If } \frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1}e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{1}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^nX}{dx^n} & \Rightarrow \quad e^x - 2^n e^{2x} = 0, \\ \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} & \Rightarrow \quad e^x - 2^{n+2}e^{2x} = 0 \end{cases} \tag{98}$$

Then both equations of (98) are zeros and have the same sign respectively. Fourier continues :
¶ 11

Or il n'y en a qu'une seule, savoir la racine réelle du facteur $1 - 2^{n+1}e^x = 0$. Cette racine, qui rend e^x égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$,[71] donne certainement deux résultats de signes opposés : mais l'application du théorème ne consiste pas à substituer dans les deux fonctions intermédiaires une seul des rasines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1}e^{2x} = 0$; elle exige que l'on emploie toutes ces racines, et il est nécessaire qu'il n'y ait aucunne de ces racines réelles qui étant substituée dans les deux fonctions intermédiaires, donne deux résultats de signes opposés. C'est ce qui n'arrive point ici ; car il y a, au contraire, une infinité de valeurs réelle de x, dont chacune, étant mise pour x dans les deux fonctions intermédiaires, donne le même résultat, savoir zero. [36, pp. 123-4]

Fourier's conclusions are for Poissin to have to admit the condition in Poisson's example, which indicates all the root are real, does not satisfy with Fourier's condition as follows :

Toutes ces conséquences sont contraires aux principes du calcul. Au liew de conclure que dans cet exemple cité le théoréme est en défaut, *ce sont les expressions de l'auteur,* tome VIII des *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences,*[a] il faut reconnaitre que dans cet exemple les conditions qui indiqueraient que toutes les racines sont réeles ne sont point satisfaites. [36, p. 125]

[a]Poisson [92].

Fourier points out Poisson's contradiction of two descriptions that Poisson asserts at first, an equation (99) of heat in cylindrical corps, which satisfies with the problem, however, afterward, he denies it in another paper : Poisson [95, p.95].
¶ 17

M. Poisson a pensé que la proposition énoncée plus haut, concernant les conditions des racines réelle, ne s'applique point aux fonctions transcendantes, si ce n'est dans des cas très-particuliers ($19^{éme}$ Cahier de l'École Polytechnique, page 383) ; mais par rapport à l'équation déterminée qui convient au cylindre, il a adopté successivement deux opinions différentes.

- Dans le tome VIII des Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences (page 367),[72] après avoir affirmé de noveau que le théorème dité serait en

[71]From $e^0 - 2^{n+1}e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{1}{2^{n+1}}$.
[72]Poisson [92, pp.367-8]

défault si on l'appliquait à l'équation exponentielle $e^x - be^{ax} = 0$, il ajoute que la règle convient cependant à l'équation

$$(2)_{FR} \quad 0 = 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \cdots \tag{99}$$

[73]qui appartient à la question de cylindre.

- Le même auteur a énoncé une autre conclusion dans un second écrit présenté à l'Académie ;[74] il y rappelle qu'il avait d'abord pensé qu'à cause de l'accroissement des dénominateurs, le théorème s'appliquait à l'équation $(2)_{FR}$, mais qu'en y réfléchissant de nouveau il a reconnu que cette conséquence n'est pas fondée.

[36, p. 126]

Fourier asserts his fundamental status about the theorem of De Gua or method of cascade by Roll.

¶ 19

> Quant aux principes que j'ai suivis pour résoudre les équations algébriques, ils sont très-différents de ceux qui servient de fondement aux recherches de Gua ou à la méthode des cascades de Rolle. L'un et l'autre auteur ont cultivé l'analyse des équations ; mais ils n'ont point résolu la difficulté principale, qui consiste à distinguer les racines imaginaires. Lagrange et Waring ont donné les premiers une solution théoretique de cette question singulière, et la solution ne laisserait rien à désirer si elle était aussi practicable qu'elle est évidente. J'ai traité la même question par d'autres principes, dont *l'auteur de l'objection paraît n'avoir point pris connaissance*.[75] Je les ai publiés, il y a plusiéurs années, dans un Mémoire spéciel (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.) (Italic mine)

¶ 20

> J'ai eu principalment en vue, dans cet écrit, la résolution des équations algébriques ; je pense que personne ne peut contester l'exactitude de cette solution, dont l'application est facile et générale. En terminant ce mémoire trés-succinct, j'ai ajouté que les propositions qu'il renferme ne conviennent pas seulement aux équations algébriques, mais qu'elles s'appliquent aussi aux équations transcendantes. Si j'avais omis cette remarque, j'ai donné lieu de croire que je regardais la méthode de résolution *comme bornée aux fonctions algébriques, proposition entièrment fausse* : car j'avais reconnu depuis long-temps que les mêmes principes résolvent aussi les équations non algébriques. Je pensais alors qu'il suffisait d'énoncer cette remarque. Il me semblait qu'en lisant avec attention la démonstration des théorèmes, on distinguerait assez facilement ce qui convient à toutes les fonctions, et ce qui peut dépendre des propriétes spéciales des fonctions algébriques entières. Il est évident que ces dernières fonctions ont un caractère particulier, qui provient surtout de ce que les différentiations répétées rédusent une tell fonction à un nombre constant ; mais les conséquences principes, dont le mémoire contient la démonstration, ne sont point fondées sur cette propriété de fonctions entières. [36, pp. 127-8] (Italic mine.)

¶ 22

> En générale il faut distinguer

[73]Fourier cites that the denominators are not Poisson [92, p.367]'s expression : $(2!)^2, (3!)^2, (4!)^2 \;\cdots$, but $(2!)^2, (3!)^3, (4!)^4 \;\cdots$. cf. (89).

[74]Poisson [95, p.95]

[75]cf. Poisson [95, p.91].

- *les cas ou une fonction est égale au produit à un nombre fini ou infini facteurs formés de toutes les racines,*
- *et les cas où cette propriété n'a pas lieu ;*

mais nous ne pourrions point ici entrprendre cette discussion sans nous écarter trop long-temps du but spécial de cet article, qui est

- d'exprimer clairement comment j'ai été conduit à prouver, par l'application d'un théorème algébrique, que l'équation transcendante $(2)_{FR}$, qui se rapporte à la question du cylindre, a en effet toutes ses racines réelles,
- et de montre quelles sont ces racines.

[36, p. 130]

Fourier proposes two sort of roots :

¶ 23

> Les variations de signes que peut perdre la suite des résultats, lorsque le nombre substitué passe par une valeur déterminée, sont de deux sortes.
>
> 1. Il peut arriver, lorsque quelques-unes de ces variations disparaissent, que la dernière fonction X devienne nulle.
> 2. Il peut arriver que des variations de signes diaparaissent, sans que la dernière fonction X devienne nulle.
>
> Le premier cas répond aux racines réelles, et le second aux racines imaginaires. [36, p. 131]

Fourier summarizes the criterion between the real root and imaginary root, judging from the number of substitution of the sign :

¶ 26

> Ainsi
>
> 1. Les valeurs accidentelles de x, qui font évanouir une des fonctions, peuvent n'apporter aucun changement dans le nombre total de variations ; ces valeurs substituées sont indifférentes.
> 2. La substitution qui fait évanouir une des fonctions peut diminuer d'une seule unité lenombre de variations ; alors la valeur substitué est une racine réelle.
> 3. La substitution qui rend nulle une fonction intermédiaire fait disparaître deux variations de signes, sans rendre null la fonction X ; alors on est assuré que deux de racines de l'équations sont imaginaires.
>
> [36, p. 133]

¶ 40 The following equations are totally designated by the equation (e).

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0,\quad x\frac{d^3y}{dx^3}+(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+n\frac{dy}{dx}=0,\quad x\frac{d^4y}{dx^4}+(2-x)\frac{d^3y}{dx^3}+n\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$\cdots,\quad x\frac{d^iy}{dx^i}+(i-1-x)\frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}+n\frac{d^{i-2}y}{dx^{i-2}}=0,\quad \cdots$$

Here, the followings are Fourier's last iteration of assertion on these sort of discussions. We can render the second terms null by a certain real number of x. The sum of reminders is non zero. From here, the imaginary roots are deduced.

> Donc en substituant pour x, dans une des équations (e), une valeur réelle de x, qui ferait évanouir le second term, il arrivera toujours que le premier et le dernier terme n'auront pas un même signe, car leur somme ne serait pas nulle. On ne peut pas supposer que la même valeur de x, qui fait évanoir le second terme, rend aussi nuls le premier et le troisième terme d'une des équations (e) ; car si cela avait lieu, on conclurait de ces équation que la même valeur de x fait évanoir les fonction dérivées de tous les ordres, sans aucune exception. Ces cas singulier

serait celui où l'équation proposée $y = 0$ aurait toutes ses racines égales. [36, p. 139]

12. G. Darboux's comments in [17, 18], 1888, 1890

12.1. **The critical remarks by Poisson seem to be in reason.**

The following are the comment on the defeat of Fourier by G.Darboux [17].

> Fourier expresses here, one of the results of the nice theorem which constructs the capital discovery in the theory of algebraic and transcendental equations, which never stop to devote it, and for this problem, he spends his time on a special paper : *The Analysis of determined equation.*
>
> Fourier applies for transcendental equation : y = 0, a proposition which is proved only in the algebraic equation
>
> Poisson proposes a critical remarks, in the JEP Cahier 19, p.382, [76] he seems to be in reason. He (Poisson) observes the equation
>
> $$(\alpha) \quad y = e^x + be^{ax} = 0,$$
>
> where, a : a constant of $a > 0,\ a \neq 1$.
>
> The function y is a particular solution of the differential equation
>
> $$(\beta) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - (a+1)\frac{dy}{dx} + ay = 0,$$
>
> where all the Fourier's principles are literally applicable to y. If, the original (of Poisson) is acknowledged as correct, he concludes that the equation (α) have the roots of real only. Or, if $b < 0$, then the equation have roots of real only ; if $b > 0$, then no root. And in both case, it has the numberless imaginaries. This fact is, we think, sufficient to decide the problem.
>
> This objection by Poisson have been very sensible for Fourier ; there is the repetition of Fourier's refutations such as, in particular, in MAS, vol. 8, p. 616 [77] published in the selection of MAS, vol.10, p.119, [78] etc. If Fourier would have suitably applied it, in reverse, he have played a very important role for the elucidation of these equations to which Fourier have been the progenitor to call attention.
>
> From above remarks, it is no necessary to conclude that Fourier's theory can't be served for the study of transcendental. The reader will be easily see that if they read repeatedly the various passages of the papers in above mentioned. [17, ¶308, p.336, footnote], cf. Table 8. (Translation mine.)
>
> 前掲の注意から、Fourier の理論は超越方程式の研究に何の役にも立てられないと結論付ける必要はあるまい。(この定理[79]が) 適切に適用されていれば、反対に Fourier がこの方程式の解明に関して最初に提案した事は非常に重要な役割を果たした事になる。読者は上記の著作[80]の様々な節を繰り返し読めば容易にその事に納得するだろう。[81] G.D.

12.2. **Numerical calculus by Budan de-Bois Laurent.**

Darboux comments about the preceding work by Budan de-Bois Laurent on the numerical calculation. We cite the paragraph commented by Darboux in [18].

---

[76] Poisson, [87]. cf. Chapter 7.2, and Table 8.
[77] Fourier, [35], cf. Chapter 11.2.
[78] Fourier, [36]. cf. Chapter 11.3.
[79] Le théorème de De Gua. cf. §1. Introduction.
[80] cf. Fourier [36]
[81] cf. For example, Fourier [36, p. 127]

La proposition fondementale demonstrée par Fourier dans le Mémoire précédent [82] est souvent attribuée à Budan de-Bois Laurent. Un passage de l'éloge de Fourier par Arago, où la question est trop nettement tranchée en faveur de Budan, a beaucoup contribué à répandre cette opinion, qu'un examen détaillé et attentif ne parait pas confirmer. L'éclat et l'importance des déconverts de Fourier dans la théorie de la chaleur ont soutout attriré l'attention des géometres ; on n'a pas rendu assez de justice aux découvertes de l'illustre savant relatives à la résolution des équation numériques. Comme Fourier n'a pas eu le temps d'y mettre la dernière main et de les publier dans leur ensenble, on ne les a peur-être pas étudiées avec toutes l'attention qu'elles méritaient. La méthode de séparation des racines qui est esposée dans le Mémoire précédent, si elle le céde en précision et en élegance à celle que l'on déduit immédiatement du théorème du Sturm, est bien supérieure dans la pratique à celle de Lagrange, qui repose sur la considération de la plus petite racine de l'équation aux différences. La Préface que Navier a placée au comencement de *l'Analyse des équations déterminées* établit, d'ailleurs, de la maniére la plus incontestable, non seulment que Fourier a connu son théorème dès 1787, mais encore qu'il l'a exposé publiquement à l'Ecole Polytechnique dans les années 1796, 1797 et 1803. D'après cela, voici l'ordre dans lequel se présentent les publications respectives de Fourier et de Budan :

1. Exposition su théorème dans l'enseignement de Fourier à l'Ecole Polytechnique on 1796, 1797 et 1803. Nous négligeons ici plusieurs Communications aux Instituts de France et d'Égypte donc on connait les dates, mais dont il ne rest aucune trace écrite.
2. Publication faite en 1806 par Budan d'un Ouvrage intitulé *Nouvelle méthode pour la résolution des équations de degré quelconque.* Ce Traité contient une méthode absolument insignifiante pour la séparation et le calcul des racines. Voici toute ce qu'on y trouve sur le théorème de Fourier (p.26, no.39) : On peut déduire de la règle de Descartes les deux propositions suivantes : (omitted)

   (3., 4., 5. are omitted) [18, pp.310-12]

Judging from the comment by Darboux above that after Fourier establishes his theory, Budan de-Bois Laurent publishes his ouvrage, Arago's assertion seems to be wide of the mark.

[82] Fourier [30].

Table 15. Papers of describability of the trigonometric series up to the 19th C.

no	name/papers	lifetime	Proof	Residue	Trigonometric Series
1	d'Alembert [16]:1761	1717-83			*
2	D.Bernoulli [3]:1747	1700-82			*
3	Euler [27]:1748	1707-83			*
4	Lagrange [**?**]:1759, [53]:1760, [54]:1760	1736-1813			*
5	Fourier [41]:1807, [75]:1809, [17]:1822	1768-1830			*
6	Gauss [40]:1818	1777-1855			*
7	Bessel [4]:1820	1784-1846			*
8	Poisson [84]:1823	1781-40	*	*	*
8	Cauchy [8]:1823	1789-1857	*	*	*
10	Dirichlet [21]:1829, [22]:1830, [23]:1837	1805-59	*		
11	Kummer[48]:1835	1810-93	*		*
12	Sturm[109, 112]:1836	1803-55		*	
13	Liouville[109, 61, 62, 63]:1836	1809-82	*	*	*
14	Riemann [108]:1867	1826-66	*		
15	Heine [45]:1871, [46]:1880	1821-81	*	*	*
16	Paul du Bois-Reymond [24]:1872, [25]:1876	1831-89	*		
17	Harnack[44]:1887	1851-88	*		
18	R.Fujisawa [38]:1886, [39]:1888	1861-1933	*	*	

13. Introduction to Afterwords - Describablity of trigonometric series of arbitrary function

Fourier [31] published his heat theory in 1822 as the second edition, however, he gave up the proof on the convergence of his trigonometric series. As the contemporary, Cauchy [8] and Poisson [84] acknowdlege their own provings as defect after trials, immediately applying to the wave equation. Before and after Fourier's death, Dirichlet [21, 22, 23] and Riemann [108] try to prove the describability of the arbitrary function with trigonometric series by Fourier. In 1888-90, G.Darboux [17] edits Œ*uvres de Fourier, 2nd Ed.*. In 1888, R.Fujisawa [39] also issues *Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichungen fortschreiten*. Of the arbitrary function using the series developped by trigonometrics, on the one hand, Dirichlet discusses 'die Darstellung' ('the description'), on the other, both Riemann and Fujisawa entitle 'die Darstellbarkeit' ('the describability'). Before Darboux [17], Fujisawa's target of proving is the same as Dirichlet [23] in proving the heat-difusion theory. While Dirichlet [23] refers to the then original of Fourier, Fujisawa referring to Fourier [34], in which Fourier proposes the distinctive method between real and imaginary, improving the same previou paper of usage [30] after Descartes [19]. In addition to it, he is due to the proof of Cauchy's residue theorem after Strum [109, 112] in 1836, and Liouville [109, 61, 62, 63] in 1836. We will introduce the early situation of the describablity of an arbitrary function by the trigonometric series in below. cf. Table 15.

14. Gauss and Bessel

About the describability of the trigonometric series of an arbitrary function, Gauss applies it in a case study of a planet in 1818. Gauss and Bessel devotes in the planetary movement as well as Lagrange and Legendre.

Bessel, in [4] introduces Gauss' paper [40] in Latin entitled with lengthy title : *Determination of attraction in the point on an arbitrarily given position of the moving planet, of which their masses are described in the total orbit to be uniformly distributed by the time rule for each part*,[83] and hopes to his study in 1814, which is called by the announcement of the paper, is earlier than

[83]Translation mine.

Lagrange and Legendre. It tells a extension of a scope of study in this series. Gauss' application is to calculate the pertubation of a planet in accordance with the Kepler second law. Bessel's paper is *Ueber die Entwicklung der Functionen zwier Winkel u und u' in Reihen, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vierfachen von u und u' fortgehen*, 1820. Gauss' introduction says as follows :
¶1.

> The elements in the planetary orbit receive the strict variation, by the perturbation of the another planet, especially, we suppose that
> - after this position in the orbit is independent,
> - or the perturbing planet obeys the Kepler's second law in elliptic orbit,
> - or its mass per orbit considered in this range is equally distributed, and in the partial orbit, in other words, if,
> - the uniform interval of time are assumed, and
> - the same masses above mentioned are divided into parts, then, the time of the revolving planet perturbing and perturbed is not commensurable.
>
> For this elegant theorem, if anything of this sort of the proposition, is proved almost perfectly from the astronomical physical principle. The problem is offered by himself, or by the plural, this solution needs to be the attraction : the orbital attraction of planets is, moreover, preferably, elliptic annulus, of which the thickness is infinitesimal, in the arbitrary point of given position exactly determined. [40, p.332]

We omit the middle articles and show the trigonometric series in th last article.
¶18.

> By the method explained here, in addition, infinite integral (start from the variable value = 0) allows to assign the maxima. Namely, if T'' is supposed to be determine in the same way by m', n', T', T' is also by $m,\ n$, T in the same way, and T''' by m'', n'', T'', and so on, $\cdots$, namely, for any value is determined by T itself, each term value of the series $T,\ T',\ T'',\ T'''\cdots$, rapidly converge to the limit θ, it will become as follows :
>
> $$\int_0^\infty \frac{dT}{\sqrt{m^2\cos^2\ T + n^2\sin^2\ T}} = \frac{\theta}{\mu}$$
>
> $$\int_0^\infty \frac{(\cos^2\ T - \sin^2\ T)dT}{\sqrt{m^2\cos^2\ T + n^2\sin^2\ T}} = -\frac{\nu\theta}{\mu} + \frac{1}{\lambda^2}\Big(\lambda'\cos\ T\ \sin\ T' + 2\lambda''\cos\ T'\ \sin\ T'' + 4\lambda'''\cos\ T''\ \sin\ T''' + \cdots\Big)$$
>
> [40, p.354]

15. A.Cauchy, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiences constans* [8], 1823

Cauchy says the following object of this paper in the top page :

> L'objet que je me propose dans ce Mémoire est de résoudre la question suivante :
>
> Étant donnée entre la variable principale φ et les variables indépendentes $x,\ y,\ z,\ \cdots,\ t$ une équation linéaire aux différences partielles et à coefficiens constans avec un dernier terme fonction des variables indépendentes, intégrer cette équation de manière que les quantités
>
> $$\varphi,\ \frac{d\varphi}{dt},\ \frac{d^2\varphi}{dt^2},\ \cdots$$

se r$\acute{e}$duisent $\grave{a}$ des fonctions connues de $x,\ y,\ z,\cdots$, pour $t=0$. [8, p.511]

私のこの論文の目的とするところは次の問題を解くことである。:
主変数 φ と独立変数 $x,\ y,\ z,\ \cdots,\ t$ の間に与えられたある偏微分方程式で最後の項に定数を持ったものがあるとして、この方程式を量 $\varphi,\ \frac{d\varphi}{dt},\ \frac{d^2\varphi}{dt^2},\ \cdots$ が $t=0$ とする $x,\ y,\ z,\cdots$ から成る既知関数に帰着するように積分せよ。

In the second chapter, in which Cauchy intends to solve the problem, he says my logic is unavoidable to fall into a 'circular argument' of $(73)_C \Rightarrow (76)_C \Rightarrow (77)_C \Rightarrow (78)_C \Rightarrow (73)_C$.

§6.

$$(69)_C \quad \frac{d^m\varphi}{dt^m} = a\frac{d^l\varphi}{dx^l}$$

$$(70)_C \quad P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{\theta_0 t\}+\exp\{\theta_1 t\}+\cdots+\exp\{\theta_{m-1}t\}}{m}\exp\{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}\}\ d\alpha$$

$$(71)_C \quad \varphi = \int Pf_0(\mu) + \int dt\int Pf_1(\mu) +\ \cdots\ + \int^{m-1} dt^{m-1}\int Pf_{m-1}(\mu)\ d\mu,$$

where $\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\theta_{m-1}$ are the roots of the equation, and $\int^{m-1}\ dt^{m-1}$ means the $m-1$ times integrals with respect to t :

$$(72)_C \quad \theta^m = a\Big(\alpha\sqrt{-1}\Big)^l$$

In the $(69)_C$, we suppose $l=m=2,\ a=-1$ then $(69)_C$ turns into

$$(73)_C \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0.$$

$$\Updownarrow$$

La value précédente de φ est indéterminée. Mais l'indétermination cessera pour l'ordinaire, si, dans chaque intégrale relative à la variable α, on multiplie la fonction sous le signe $\int$ par $e^{-k\alpha^2}$, k désignant un nombre infiniment petit. Alors, en effectuant les intégrations relatives à cette variable, et posant $\mu = x+2k^{\frac{1}{2}}u$, on obtiendra la fomule

$$\begin{aligned}(76)_C \quad \varphi = &\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{r^2}{4k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\cos\Big(\frac{ut}{\sqrt{k}}\Big)f_0(x+2k^{\frac{1}{2}}u)\ du\\ &+\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{r^2}{4k}}\ dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\cos\Big(\frac{ut}{\sqrt{k}}\Big)f_1(x+2k^{\frac{1}{2}}u)\ du\end{aligned}$$

$$(77)_C \quad \varphi = \frac{1}{2}\Big[f_0\big(x+t\sqrt{-1}\big)+f_0\big(x-t\sqrt{-1}\big)\Big]+\frac{1}{2}\int f_1\big(x+t\sqrt{-1}\big)+f_1\big(x-t\sqrt{-1}\big)\ dt$$

Mais, quoique cette derniér value de φ, substituée dans l'équation $(73)_C$, paraisse la verifier dans tous les cas, néanmoins on ne saurait la considére comme générale, tant que l'on n'aura pas donné de l'expression imaginaire $f(x+t\sqrt{-1})$ un definition indépendente de la forme de la fonction $f(x)$ supposée réelle. A la vérite, cette expression imaginaire se trouverait suffisamment définie, si l'on convenait de représenter par la notation $f(x+t\sqrt{-1})$ une fonction φ de x et de

t, qui étant continue par rapport à ces deux variables, fût propre à remplir la double condition de se réduire à $f(x)$ pour $t=0$, et de vérifier l'équation

$$(78)_C \quad \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx}\sqrt{-1} = 0$$

Mais il est facil de voir que, dans ce cas, la fonction φ serait celle qui vérifie l'équation $(73)_C$ pour tous les valeurs possibles de t, et les équations de condition $\varphi = f(x)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, pour la valeur particulière $t=0$.

Ainsi, la recherche de la fonction $f(x+t\sqrt{-1})$ se trouverait ramenée à l'intégration de la formule $(73)_C$, et l'on ne pourrait plus donner pour intégrale de cette formule l'équation $(77)_C$, sans tomber dans un cercle vicieux. [8, p.568]

こうして、関数 $f(x+t\sqrt{-1})$ を求めようとすれば (73) 式で積分することに帰着し、この式の積分のためには式 (77) を与えるしかないという循環論法に陥らざるを得ない。

Dirichlet doesn't miss Cauchy's description and that becoms Dirichlet's motivation for his following papers.

16. G. Dirichlet's works

16.1. ***Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limits données*** [21], **1829.**

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles peut representer une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables de celle d'être convergences. Cette propriété n'avait pas échappéau géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premiéres recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne conais sur cet objet qu'un travail dù à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de Académie des sciences de Paris pour l'année 1823.[84] L'auteur de ce travail avoue lui-même que sa démonstration se trouve *en defaut* [85] pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est poutant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porte à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxqueles l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'enter en matière, énoncer en peu de mot les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me parait sujette.

La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche, exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangére à la question et l'on ne voir d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effe dans plusieurs de ses ouvrages sur la nécessite de définir d'une manière

[84] This paper corresponds to [10] in 1827 in Gallica, however, this date propesed on the paper : 16/fév/1826.
[85] We can't catch this word *en defaut* in Cauchy [10] on today's Gallica.

précise le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inséré dans 19^{ieme} Cahier du Journal de l'École Polytechnique pag. 567 et suiv.,[86] des remarques sur les difficultés que font naitre les quantités imaginaires placées sous des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en sort de cette prémier observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui parait ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suit convergente. Le résultat dont il s'agit peut ètre énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle considéré s'etend depuis zéro jusqu'à 2π. [21, pp.119-120]

Dirichlet's motivation in [21] to prove the unknown problem is due to Cauchy's confession about own defect of proving as follows :

Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne conais sur cet objet qu'un travail dù à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui-même que sa démonstration se trouve *en defaut* pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est poutant incontestable. [21, p.119]

しかし、私の知る限り今日まで、誰も一般的証明に成功していない。この目的では MAS に 1823 年に提出した Cauchy に拠る論文しか知らない。この論文の著者は自ら、自分の証明は、ある関数に対しては収束は議論の余地のないにも拘わらず破綻すると漏らしている。

16.2. ***Solution d'une question relative à le théorie mathématiques de la chaleur*** [22], **1830.** Dirichlet applies Fourier's theory to the then open problem of heat in bar, to which Fourier struggled to solve in [35]. Dirichlet's method is one of the first application of Fourier's theory. This set up of situation is what is called the Dirichlet condition. [87]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \Rightarrow k = 1, \quad (1)_{DS} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

The function to be solved has the following four conditions :

- 1. It must be satisfied to the equation $(1)_{DS}$, whatever x and t.
- 2. For $x = 0$, it must reduce to the function $F(x)$.
- 3. For $x = \pi$, it must reduce to the function $f(x)$.
- 4. When $t = 0$, it must coincident with every points of the bar, namely, $x \leq \pi$, it coincides with the initial temperature $\varphi(x)$.

$$(3)_{DS} \quad r\cos\alpha t + s\sin\alpha t,$$

$$\frac{\partial^2 r}{dt^2}\cos\alpha t + \frac{\partial^2 s}{dt^2}\sin\alpha t = \alpha s\cos\alpha - \alpha r\sin\alpha t,$$

$$\frac{\partial^2 r}{dt^2} = \alpha s, \quad \frac{\partial^2 s}{dt^2} = -\alpha r,$$

We suppose that $R,\ S$ are values of $r,\ s$, respectively, and particularly.

$$(4)_{DS} \quad R\cos\alpha t + S\sin\alpha t,$$

[86] cf. Cauchy [8], pp.510-592.

[87] To avoid the confusion, the original statement number is expressed in the top of each line with $_{DS}$: Solution([22]), and with $_{DU}$: $\ddot{U}$ber([23]) in the following section.

$(4)_{DS}$ satisfies with $(1)_{DS}$. In addition to, R and S have two properties : to evaporate at $x = 0$, and to reduce to $\cos \alpha t$ at $x = \pi$. Here, we suppose $\psi(u)$, assined an arbitrary function to α, and multiplying $(4)_{DS}$ by $\psi(u)$, and integrate it from 0 to ∞, then we get the following :

$$\int_0^\infty \Big(R\cos\alpha t + S\sin\alpha t \Big) \psi(u)\ du,$$

which also satisfies with $(1)_{DS}$, and evaporates at $x = 0$ and turns into

$$\int_0^\infty \psi(u) \cos\alpha t\ du,$$

Owing to Fourier's formula (¶.346, p.431.)[88], we get

$$\psi(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos\alpha\mu\ f(\mu)\ d\mu,$$

$$(6)_{DS} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(R\cos\alpha t + S\sin\alpha t \Big)\ f(\mu) \cos\alpha\mu\ d\alpha\ d\mu,$$

which satisfies the following three conditions :

- to obey $(1)_{DS}$,
- to evaporate at $x = 0$,
- to turn into $f(t)$ at $x = \pi$.

We must gain the three parts of solution u. We suppose $u = v + w = v' + v'' + w$. v is reduced to $\chi(x)$ when $t = 0$, and w to $\varphi(x) - \chi(x)$, $\varphi(x)$ is known at initial state, and $\chi(x)$ assigned a function to x. The first solution is gained for v' by solving $(6)_{DS}$. When we exchange x with $\pi - x$, and $f(\mu)$ in $(6)_{DS}$ with $F(\mu)$, we get another expression for v''. The third solution is espressed by w from (100).

$$(7)_{DS} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(R\cos\alpha(t-\mu) + S\sin\alpha(t-\mu) \Big)\ f(\mu)\ d\alpha\ d\mu,$$

which also satisfies with $(1)_{DS}$, and evaporates at $x = 0$ and when $x = \pi$, $(7)_{DS}$ turns into

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos\alpha(t-\mu)\ f(\mu)\ d\alpha\ d\mu,$$

(cf. Fourier [17, p.408, (E)]).

$$\frac{2}{\pi} \sum e^{-i^2 t} \sin ix \int_0^\pi g(\mu) \sin i\mu d\mu \tag{100}$$

(cf. Fourier [17, ¶252, p.436]) [89]

$$(8)_{DS} \quad R = \sum b_i \sin ix, \quad S = \sum c_i \sin ix$$

$$(9)_{DS} \quad b_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi R \sin ix\ dx, \quad c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S \sin ix\ dx$$

$$b_i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i^2}{\alpha} \int_0^\pi S \sin ix\ dx, \quad c_i = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{i \cos i\pi}{\alpha} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i^2}{\alpha} \int_0^\pi R \sin ix\ dx$$

$$b_i = \frac{i^2}{\alpha} c_i, \quad c_i = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{i \cos i\pi}{\alpha} - \frac{i^2}{\alpha} b_i,$$

[88] sic. It corresponds with p.392.

[89] It corresponds to [17, ¶. 426, p.522].

$$b_i = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{i^3 \cos i\pi}{a^2 + i^4}, \quad c_i = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{i\alpha \cos i\pi}{a^2 + i^4} \tag{101}$$

$$(10)_{DS} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(R \cos \alpha(t-\mu) + S \sin \alpha(t-\mu) \Big) \ f(\mu) \ d\alpha \ d\mu$$
$$= \ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\mu) \ d\mu \sum \frac{2i \cos i\pi \sin \ ix}{\pi} \Big(\int_0^\infty \frac{i^2 \cos \alpha(t-\mu)}{a^2 + i^4} d\mu + \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha(t-\mu)}{a^2 + i^4} d\mu \Big)$$

$$(11)_{DS} \quad 2 \sum i e^{-i^2(t-\mu)} \cos i\pi \sin \ ix$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\mu) \ d\mu \sum i e^{-i^2(t-\mu)} \cos i\pi \sin \ ix \tag{102}$$

Exchanging the order of (102) between integral and summation,

$$-\frac{2}{\pi} \sum i e^{-i^2 t} \cos i\pi \sin \ ix \int_0^\infty e^{i^2 \mu} f(\mu) \ d\mu \tag{103}$$

Jointing three terms :

- v' : (103),
- v'' : by replacing x with $\pi - x$, next by replacing $f(\mu)$ of (103) with $F(\mu)$,
- w : (100),

we get u :

$$u = \ v' + v'' + w = -\frac{2}{\pi} \sum i e^{-i^2 t} \ \cos \ i\pi \sin \ ix \int_0^\infty e^{i^2 \mu} f(\mu) \ d\mu$$
$$- \ \frac{2}{\pi} \sum i e^{-i^2 t} \sin ix \int_0^\infty e^{i^2 \mu} F(\mu) \ d\mu + \frac{2}{\pi} \sum i e^{-i^2 t} \sin ix \int_0^\infty g(\mu) \sin i\mu \ d\mu \tag{104}$$

The expression (104) corresponds to Fourier's (92) (=$(1)_F$) in [35].

16.3. ***Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinus-reihen (On the describablity of a completely arbitrary function by a series with sine and cosine***) [23]**, 1837.** ¶ 2.

$$(10)_{DU} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \ 2mx dx = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$$

Here, we remark $2m$ corresponds with $\frac{\pi}{2}$. We assume 'Fläschenraum' (area space) of $2m$ intervals.

$$\Big[0, \frac{\pi}{4m}\Big], \Big[\frac{\pi}{4m}, \frac{2\pi}{4m}\Big], \Big[\frac{2\pi}{4m}, \frac{3\pi}{4m}\Big], \cdots, \Big[\frac{(2m-1)\pi}{4m}, \frac{2m\pi}{4m}\Big]$$

For example,

$$m = 1 \rightarrow \Big[0, \frac{\pi}{4}\Big], \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

$$m = 2 \rightarrow \Big[0, \frac{\pi}{8}\Big], \Big[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\Big], \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\Big], \Big[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

$$m = 3 \rightarrow \Big[0, \frac{\pi}{12}\Big], \Big[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\Big], \Big[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\Big], \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\Big], \Big[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\Big], \Big[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

$$m = 4 \rightarrow \Big[0, \frac{\pi}{16}\Big], \Big[\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}\Big], \Big[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}\Big], \Big[\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\Big], \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}\Big], \Big[\frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}\Big], \Big[\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}\Big], \Big[\frac{7\pi}{16}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

$$z = \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos \ n\theta$$

From the formula : $2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)$,

$$\begin{aligned} 2z\cos\theta \quad &= \quad 1+\ \cos\theta +\ \cos 2\theta + \cdots + \cos\ (n-1)\theta \\ &+ \quad \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos\ (n+1)\theta \end{aligned}$$

$$z+1-\cos\ n\theta, \qquad z-\cos\theta+\cos(n+1)\theta$$

Adding both hand-sides, then we get :

$$2z\cos\theta = 2z+1-\cos\ \theta+\cos\theta+\cos(n+1)\theta-\cos\ n\theta$$

$$z = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$(11)_{DU} \quad \cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos\ n\theta = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{105}$$

¶ 3. (Deduction of trigonometric series.)

16.3. Transfer array by Dirichlet.

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{n}) &= a_1\sin\frac{\pi}{n}+a_2\sin\frac{2\pi}{n}+a_3\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+a_n\sin\frac{\pi n}{n} \\ f(\frac{2\pi}{n}) &= a_1\sin\frac{2\pi}{n}+a_2\sin\frac{4\pi}{n}+a_3\sin\frac{6\pi}{n}+\cdots+a_n\sin\frac{2\pi n}{n} \\ f(\frac{3\pi}{n}) &= a_1\sin\frac{3\pi}{n}+a_2\sin\frac{6\pi}{n}+a_3\sin\frac{9\pi}{n}+\cdots+a_n\sin\frac{3\pi n}{n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$f(\frac{(n-1)\pi}{n}) = a_1\sin(n-1)\frac{\pi}{n}+a_2\sin(n-1)\frac{2\pi}{n}+a_3\sin(n-1)\frac{\pi n}{n}+\cdots+a_n\sin(n-1)^2\frac{\pi}{n}$$

Here, these equations are shown with a today's style of $(n-1)\times(n-1)$ transform matrix :[90]

$$\begin{bmatrix} f(\frac{\pi}{n}) \\ f(\frac{2\pi}{n}) \\ f(\frac{2\pi}{n}) \\ \vdots \\ f(\frac{(n-1)\pi}{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{3\pi}{n} & \cdots & \sin\ (n-1)\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{4\pi}{n} & \sin\frac{6\pi}{n} & \cdots & \sin\ 2(n-1)\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{3\pi}{n} & \sin\frac{6\pi}{n} & \sin\frac{9\pi}{n} & \cdots & \sin\ 3(n-1)\frac{\pi}{n} \\ \cdots & & & & \\ \sin(n-1)\frac{\pi}{n} & \sin(n-1)\frac{2\pi}{n} & \sin(n-1)\frac{3\pi}{n} & \cdots & \sin\ (n-1)^2\ \frac{\pi}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{106}$$

Multiplying with $2\sin\frac{\pi m}{n}$, $\quad 2\sin\frac{2\pi m}{n}$, $\quad 2\sin\frac{3\pi m}{n},\cdots,2\sin\,(n-1)\frac{\pi m}{n}$, where $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$, $h=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$, then the coefficient a_h is as follows :

$$a_h\Big[2\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{h\pi}{n}+2\sin\frac{2m\pi}{n}\sin\frac{2h\pi}{n}+2\sin\frac{3m\pi}{n}\sin\frac{3h\pi}{n}+\cdots+2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n}\sin(n-1)\frac{h\pi}{n}\Big] \tag{107}$$

[90] Dirichlet didn't use the transform-matrix symbol, but mine. cf. Lagrange's expression (5) and Poisson's expression (30)

[91] If $m \neq h$, the value between the square brackets is null, we can express by the following difference replacing the products of sin with cos, then

$$(12)_{DU} \qquad \cos(m-h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m-h)\frac{\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n} \tag{108}$$

$$- \quad \Big(\cos(m+h)\frac{\pi}{n} + \ \cos 2(m+h)\frac{\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\Big) \tag{109}$$

From $(11)_{DU}$, assuming $\theta = (m-h)\frac{\pi}{n}$ and replacing n with $n-1$, and by $\sin(l\pi - \gamma) = \mp \sin\gamma, \quad l \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n} = \sin\Big((m-h)\pi - (m-h)\frac{\pi}{2n}\Big) = \mp \sin(m-h)\frac{\pi}{2n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n}}{2\sin(m-h)\frac{\pi}{2n}} = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}$$

Each of $(12)_{DU}$ has

$$\begin{cases} -1 \quad \bmod\ (m-h,2) = 0, \quad 0, \quad \bmod\ (m-h,2) = 1 \\ 1 \quad \bmod\ (m+h,2) = 0, \quad 0, \quad \bmod\ (m+h,2) = 1 \end{cases}$$

Here, we have the sum $2m$.

$$na_m = 2\sin\frac{m\pi}{n} f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + 2\sin\frac{2m\pi}{n} f\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) + \cdots + 2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n} f\Big(\frac{(n-1)\pi}{n}\Big)$$

$$a_m = \frac{2}{n}\Big[\sin\frac{m\pi}{n} f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \sin\frac{2m\pi}{n} f\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) + \cdots + \sin\frac{(n-1)m\pi}{n} f\Big(\frac{(n-1)\pi}{n}\Big)\Big] \tag{110}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\pi}{n}\sin\Big(\frac{0m\pi}{n}\Big) f\Big(\frac{0\pi}{n}\Big) + \frac{\pi}{n}\sin\Big(\frac{m\pi}{n}\Big) f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \frac{\pi}{n}\sin\Big(\frac{2m\pi}{n}\Big) f\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) + \cdots + \frac{\pi}{n}\sin\Big(\frac{(n-1)m\pi}{n}\Big) f\Big(\frac{(n-1)\pi}{n}\Big)\Big]$$

$$(13)_{DU} \ f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots, \text{ where, } a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\ mx\ f(x)dx \tag{111}$$

[92] Replacing the left hand-side of $(13)_{DU}$ by $2\sin\ x\ f(x)$,

$$2\sin\ x\ f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots, \quad \text{where,}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\sin\ mx\ \Big(\sin\ x\ f(x)\Big)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(m-1)\ x\ f(x)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(m+1)\ x\ f(x)dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\ h\ x\ f(x)dx \equiv b_h, \quad \Rightarrow \quad a_m = b_{m-1} - b_{m+1}, \quad m = 1,2,3,\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\ x\ f(x) = (b_0 - b_1)\sin x + (b_1 - b_2)\sin 2x + (b_2 - b_3)\sin 3x + \cdots$$

$$\begin{aligned} 2\sin\ x\ f(x) &= b_0 \sin\ x + b_1 \sin 2x + b_2(\sin\ 3x - \sin\ x) + b_3(\sin\ 4x - \sin\ 2x) + \cdots \\ &= b_0 \sin\ x + b_1(2\sin x \cos\ x) + b_2(2\sin\ x\cos\ 2x) + b_3(2\sin\ x \sin\ 3x) + \cdots \end{aligned} \tag{112}$$

Dividing both hand-sides of (112) by $2\sin x$,

$$(14)_{DU} \quad f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2 \cos 2x + b_3\cos 3x + \cdots, \text{ where, } b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\ mx\ f(x)dx \tag{113}$$

$$(15)_{DU} \quad \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots \tag{114}$$

[91] Here, Dirichlet's (107) comes from Lagrange's style : (7). cf. [51, p.81]
[92] cf. The eqxpression (111) corresponds with Poisson's expression (35).

where, $b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\ mx\big[(\varphi(x)) + (\varphi(-x))\big]\ dx, \quad a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\ mx\big[(\varphi(x)) - (\varphi(-x))\big]\ dx$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\ mx\varphi(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\ mx\varphi(-x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\ mx\ \varphi(x)\ dx \tag{115}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\ mx(\varphi(x)) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\ mx\big(\varphi(-x)\big)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\ mx\ \varphi(x)\ dx. \tag{116}$$

¶ 4.

Die Betrachtung, die dem Verfahren, welches uns die Reihe $(13)_{DU}$ geliefert hat, die gehörige Strenge geben würden, sind so zusammengesetzter Art, daß wir lieber einen anderen Weg der Bewiseführung einschlagen. Wir werden die Reihe $(15)_{DU}$, welch die beiden andern $(13)_{DU}$ und $(14)_{DU}$ als besondere Fälle in sieh begreift, an und für sich untersuchen und, ohne etwas von dem Früheren vorauszusetzen, direct nachweisen, daß diese Reihe :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_0 + \quad & b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots \\ + \quad & a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots \end{aligned} \tag{117}$$

wenn man ihre Coefficienten durch die Gleichungen :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxg(x)dx, \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mxg(x)dx$$

[23, ¶ 4, p.146]

Dirichlet's proving target is the following summation of the first $n+1$ terms of (117)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha g(\alpha) \ + \quad & \frac{1}{\pi}\cos x\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cos \alpha g(\alpha) + \cdots + \frac{1}{\pi}\cos nx\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \cos n\alpha g(\alpha) \\ + \quad & \frac{1}{\pi}\sin x\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \sin \alpha g(\alpha) + \cdots + \frac{1}{\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \sin n\alpha g(\alpha) \end{aligned}$$

or,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha g(\alpha)\Big[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \cdots + \cos\ n(\alpha - x)\Big]$$

or,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha g(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}}$$

¶ 5.

From $(11)_{DU}$(=(105)), we get :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\ d\beta \tag{118}$$

,where, (105) is equivalent with

$$1 + 2\cos 2\beta + 2\cos 4\beta + \cdots + 2\cos\ 2n\theta$$

93

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\ d\beta = \frac{\pi}{2}$$

[93](118) is what is called the Dirichlet kernel.

Here, we assume $k \equiv 2n+1$.

$$\rho_r = \mp \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} d\beta$$

$$\int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \sin\ k\beta d\beta = \frac{2}{k}$$

We assume $\Delta \equiv \int_0^\pi \sin\beta d\beta$

$$\frac{\Delta}{k}\frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{k}} < \rho_i < \frac{\Delta}{k}\frac{1}{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{k}}$$

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \cdots > \rho_{2m+1}$$

$$\frac{\pi}{2} = \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \cdots - \rho_{2m} \pm \rho_{2m+1}$$

$$(16)_{DU} \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} > \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \cdots - \rho_{2m}, \\ \frac{\pi}{2} < \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \cdots - \rho_{2m} + \rho_{2m+1} \end{cases}$$

Aim : What is S ?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^h \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta = S, \tag{119}$$

where $h < \frac{\pi}{2}$ is a constant, $k = 2n+1$ and $f(\beta)$ is a continuous function with respect to β.

$$R_r = \mp \int_{\frac{(\nu-1)}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta,$$

$$R_r = R_1 - R_2 + R_3 - \cdots \pm R_{r+1}$$

$$R_r = \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta,$$

$$f\Big(\frac{r\pi}{k}\Big) \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta < R_i < f\Big(\frac{(r-1)\pi}{k}\Big) \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \mp \frac{\sin\ k\beta}{\sin\beta} f(\beta) d\beta,$$

$$\rho_r f\Big(\frac{r\pi}{k}\Big) < R_r < \rho_r f\Big(\frac{(r-1)\pi}{k}\Big),$$

$$\begin{cases} S > R_1 - R_2 + R_3 - \cdots - R_{2m}, \\ S < R_1 - R_2 + R_3 - \cdots - R_{2m} + R_{2m+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > (\rho_1 - \rho_2) f\Big(\frac{\pi}{k}\Big) + (\rho_3 - \rho_4) f\Big(\frac{3\pi}{k}\Big) \cdots (\rho_{2m-1} - \rho_{2m}) f\Big(\frac{(2m-1)\pi}{k}\Big), \\ S < \rho_1 f\Big(\frac{0\pi}{k}\Big) - (\rho_2 - \rho_3) f\Big(\frac{2\pi}{k}\Big) + (\rho_4 - \rho_5) f\Big(\frac{4\pi}{k}\Big) - \cdots - (\rho_{2m} - \rho_{2m-1}) f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 \cdots + \rho_{2m-1} - \rho_{2m}) f\Big(\frac{(2m-1)\pi}{k}\Big), \\ S < \rho_1 f\Big(\frac{0\pi}{k}\Big) - (\rho_2 - \rho_3 + \rho_4 - \rho_5 - \cdots - \rho_{2m} - \rho_{2m-1}) f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2 + \rho_3 - \cdots - \rho_{2m} > \rho_1 - \frac{\pi}{2}, \\ \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \cdots - \rho_{2m} > \frac{\pi}{2} - \rho_{2m+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{\pi}{2} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) - \rho_{2m+1} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big), \\ S < \frac{\pi}{2} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) + \rho_{2m+1} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) + \rho_1 \Big| f\Big(0\Big) - f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big)\Big|, \end{cases}$$

$$0 < S < \rho_1 \Big| f\Big(0\Big) - f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big)\Big|,$$

Here, we can get easily our aim proving (119). We consider at first :

$$\frac{\pi}{2} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big) - \rho_{2m+1} f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big)$$

ρ_{2m+1} locates as follows

$$\frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin \frac{2m\pi}{k}} < \rho_{2m+1} < \frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin \frac{(2m+1)\pi}{k}}$$

then we can state it as follow

$$\frac{\Delta}{2m\pi} \cdot \frac{2m\frac{\pi}{k}}{\sin\ 2m\frac{\pi}{k}} < \rho_{2m+1} < \frac{\Delta}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{(2m+1)\frac{\pi}{k}}{\sin\ (2m+1)\frac{\pi}{k}} \tag{120}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Delta}{2m\pi} = 0, \quad \lim_{2m\frac{\pi}{k}\to\infty} \frac{2m\frac{\pi}{k}}{\sin\ 2m\frac{\pi}{k}} = 1$$

And two products of the inequality (120) become zero respectively.

Finally, in (119), S is $\frac{\pi}{2} f(0)$.

The term $f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big)$ in $\rho_1 \Big| f\Big(0\Big) - f\Big(\frac{2m\pi}{k}\Big)\Big|$ become null.

$$\rho_1 < \frac{\pi}{2} + \rho_2, \quad \rho_2 < \frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} \quad \text{then} \quad \rho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}},$$

$$\frac{\Delta}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} = \frac{\Delta}{\pi} \frac{\frac{\pi}{k}}{\sin \frac{\pi}{k}} \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta}{\pi} \frac{\frac{\pi}{k}}{\sin \frac{\pi}{k}} = \frac{\Delta}{\pi}$$

We get the followings for $0 < h < \frac{\pi}{2},\ k = 2n+1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^h f([\beta) + c] \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \Big[f(0) + c \Big],$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^h -f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = -\frac{\pi}{2} f(0),$$

namely

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} f(0)$$

Finally, Dirichlet deduces the result :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = \frac{\pi}{2} f(0), \quad 0 < h < \frac{\pi}{2},$$
$$(\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = f(0), \quad 0 < h < \frac{\pi}{2}),$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = 0, \quad 0 < g < h < \frac{\pi}{2}$$

The original by Dirichlet are explained as the following two statements $(17)_{DU}$ and $(18)_{DU}$:

$(17)_{DU}$:
Ist $f(\beta)$ eine stetige Function von β, die, während β von 0 bis h wächst (wo die Constante $h > 0$ und $< \frac{\pi}{2}$),[a] nie von Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht, so wird das Integral :

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta$$

wenn man darin der ganzen Zahl n immer größ ere positive Werthe heilegt, zu letzt immerfort weniger c als jede angebbare Größe von $\frac{\pi}{2}f(0)$ verschieden sein. [23, p.154]

[a] Riemenn[108, p.14] corrects this inequality as follows : $\frac{\pi}{2} \geq h > 0$

$$\int_0^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = \int_0^g \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta + \int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = \frac{\pi}{2} f(0),$$

and

$$\int_0^g \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = \frac{\pi}{2} f(0),$$

then

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta = 0$$

$(18)_{DU}$:
Sind g und h Constanten, welche den Bedingungen genügen $g > 0$, $\frac{\pi}{2} > h > g$,[a] und geht die Function $f(\beta)$, wenn β von g bis h wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt über, so wird das Integral :

$$\int_g^h \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} f(\beta)d\beta$$

für ein unendlich großes n der Null gleich. [23, p.155]

[a] Riemenn[108, p.14] corrects this inequality as follows : $\frac{\pi}{2} \geq h > g > 0$

¶ 6.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\beta\varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x} d\beta\ \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}},\quad \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi} d\beta\ \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-(\pi+x)}^{0} d\beta\ \varphi(x+\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}},\quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(\pi-x)} d\beta\ \varphi(x+\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}$$

$$(19)_{DU}\quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\ \varphi(x-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta},\quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\ \varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} d\beta\ \varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta}$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+x}{2}} d\beta\ \varphi(x+2\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)(\pi-\beta)}{\sin\ (\pi-\beta)}$$

$$\int_{\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\beta\ \varphi(x+2\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta}$$

$$\int_{0}^{x} d\beta\ \varphi(x+2\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta} = \int_{0}^{x} d\beta\ \varphi(\pi-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\ \beta}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}b_0 + \quad & b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots \\ + \quad & a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_m\sin mx + \cdots\end{aligned}$$

wenn man ihre Coefficienten durch die Gleichungen :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\beta g(\beta)\ d\beta,\qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\beta g(\beta)\ d\beta$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\cos m\beta g(\beta)\ d\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos m\beta g(\beta)\ d\beta$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\sin m\beta g(\beta)\ d\beta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin m\beta g(\beta)\ d\beta$$

$$\varphi(-\beta) = \varphi(\beta),\quad \cos(-m\beta) = \cos(m\beta),\quad \sin(-m\beta) = -\sin(m\beta)$$

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos m\beta g(\beta)\ d\beta,\quad a_m = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + b_m\cos mx + \cdots$$

17. J. Liouville, *Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus* [61], 1836

Liouville [61] introduces Poisson's works of proving the trigonometric series for an arbitrary function as follows :

> In regard to the equality of the form,
>
> $$f(x) = \sum A_i \ \sin \frac{i\pi x}{l},$$
>
> however, serving as the result of the partial differential equation to solve a physico-mathematics, we have proposed to consider it by itself, abstraction made with the particular question where it presents ; And this idea have brought up the excellent theory of periodic series which Mr. Poisson have exposed at first in the 19th cahier of JEP, [94] and after it, recently, in his works on the heat theory.[95] [61, p.16]

18. B.Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (*On the describablity of a function by a trigonometric series*) [108], 1867

18.1. ***Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkührlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe (History of problem on the describablity of an arbitrarily given function by a trigonometric series).***

Riemann introduces at first Dirichlet's result :

$$\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(\alpha)\ \sin\ \alpha\ d\alpha \sin x + f(\alpha)\ \sin 2\alpha\ d\alpha\ \sin 2x + \cdots + f(\alpha)\ \sin n\alpha\ d\alpha\ \sin nx\Big)\Big]$$

$$\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}f(\alpha)\ d\alpha + f(\alpha)\cos\ \alpha\ d\alpha \cos x + f(\alpha)\ \cos 2\alpha\ d\alpha\ \cos 2x + \cdots + f(\alpha)\ \cos n\alpha\ d\alpha\ \cos nx\Big)\Big]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\ d\alpha = f(x)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(\beta)d\beta = \frac{\pi}{2}, & 0 < c \le \frac{\pi}{2},\\ \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_b^c \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\varphi(\beta)d\beta = 0, & 0 < b < c \le \frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{121}$$

Riemann explains about the Dirichlet's assumtions as follows :

[94] Poisson [84, 85, 87]
[95] Poisson [98, 99]

Mit Hülfe dieser beiden Sätze (121) läßt sich, wenn die Function f nicht unendlich oft von Zumehmen zum Abnehmen order vom Abnehmen zum Zunehmen übergeht, das integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

offenbar in eine endliche Anzahl von Gliedern zerlegen, von denen eins gegen $\frac{1}{2}f(x+0)$, ein anders gegen $\frac{1}{2}f(x-0)$, die übrigen aber gegen 0 convergiren, wenn n ins Unendliche wächst.
Hieraus folgt, daß durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch widerholende Function darstellbar ist, welche

(1) durchgehends eine Integration zuläßt,
(2) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und
(3) wo ihr Werth sich sprungwise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt.

[108, p.15]

18.2. ***Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit (On the meaning of definite integral and the range of suitability).***

> Andere Festsetzungen von Cauchy über den Begriff des bestimmten Integrales in den Fällen, wo es dem Grundbegriff nach ein solches nicht giebt, mögen für einzelne Klassen von Untersuchengen zweckmäßig sein ; sie sind indeß [96] nicht allgemein eingeführt und dazu, schon wegen ihrer großen Wirkührlichkeit, wohl kaum geeignet. [108, p.19]

$$f(x)x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\;dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},\quad f(x)x\underbrace{\log\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}}_{2} = \frac{f(x)\;dx}{-d\underbrace{\log\log\log\frac{1}{x}}_{3}},\cdots$$

$$f(x)x\underbrace{\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^{n}\frac{1}{x}}_{n} = \frac{f(x)\;dx}{-d\log^{n+1}\frac{1}{x}},$$

When $f(x)$ haven't the numberless maxima and minima, it needs to become infinitesimally small with respect to x ; that is, for this integral, $\int f(x)dx$ converges by <u>infinite decrease of the under range,</u> ('bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze', which means 'infinite decrease of the under range/frame/limit,') as soon as

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\Big(\log^{n}\frac{1}{x}\Big)^{\alpha} = \frac{f(x)\;dx(1-\alpha)}{-d\Big(\log^{n}\frac{1}{x}\Big)^{1-\alpha}}$$

becomes infinitesimally small for $\alpha > 1$ with respect to x. When $f(x)$ have the numberless maxima and minima, it doesn't determine the order of infinite. In fact, we assume the function absolute value given by which depends only on the order of infinite, so we can always get it by the suitable determination of symbol, that $\int f(x)dx$ converges by <u>infinite decrease of the under range.</u>

[96]sic. indessen.

As a example of such function :

$$\frac{d}{dx}\Big(x\ \cos\ e^{\frac{1}{x}}\Big) = \cos\ e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\ \sin\ e^{\frac{1}{x}}$$

[97] Here, in this function, the order is uniquely $\frac{1}{x}$.

18.3. ***Untersuchung der Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function (Study of describablity of a function by a trigonometric series without special preconditions on the nature of function).***

¶
7.

$$\begin{aligned} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_m \sin mx + \cdots \\ \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_m \cos mx + \cdots \end{aligned} \tag{122}$$

$$\frac{1}{2}b_0 \equiv A_0, \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x \equiv A_1, \quad a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x \equiv A_2, \cdots ,$$

then the series :

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

We assume these series by Ω, and this function with respect to x by $f(x)$. The series Ω converges with the endless increasing of n.

¶ 8.

$$C + C'x + A_0\frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots = F(x) \tag{123}$$

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{A_{n+2}}{(n+2)^2} - \cdots$$

$$< \varepsilon\Big(- \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \cdots\Big) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Proposition 1. If the series Ω converges,

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converges when α and β become infinitesimally small, this ratio reserves finite with the series.

Proof.

$$\begin{aligned} & \frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta} \\ = \quad & A_0 + A_1\frac{\sin\ \alpha}{\alpha}\frac{\sin\ \beta}{\beta} + A_2\frac{\sin\ 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin\ 2\beta}{2\beta} + A_3\frac{\sin\ 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin\ 3\beta}{3\beta} + \cdots \end{aligned}$$

[97]Reimann's original :

$$\frac{d}{dx}\Big(x\ \cos\ e^{\frac{1}{x}}\Big) = \cos\ e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\ \sin\ e^{\frac{1}{x}}.$$

[108, p.23]

If $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned} & \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} \\ = \; & A_0 + A_1\Big(\frac{\sin\ \alpha}{\alpha}\Big)^2 + A_2\Big(\frac{\sin\ 2\alpha}{2\alpha}\Big)^2 + A_3\Big(\frac{\sin\ 3\alpha}{3\alpha}\Big)^2 + \cdots \end{aligned}$$

In the infinite series :

$$A_0 + A_1 + A_2 \cdots = f(x)$$

In the finite series :

$$A_0 + A_1 + A_2 \cdots + A_{n-1} = f(x) + \varepsilon_n, \tag{124}$$

$$A_0 + A_1 + A_2 \cdots + A_{n-1} + A_n = f(x) + \varepsilon_{n+1} \tag{125}$$

When $n > m$, $\varepsilon_n < \delta$, by the subtraction (124) from (125), we get $A_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\Big)^2 A_n \tag{126}$$

in the form :

$$f(x) + \varepsilon_n \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ n\alpha}{n\alpha}\Big)^2 \Big]$$

We divide (126) into three parts :

- the term indexed $[1, m]$ (contains m)
- $[m+1, [\frac{\pi}{\alpha}]]$, (Gauss' symbol, $\in \mathbb{Z}$), in which we assume the greatest integer under $\frac{\pi}{\alpha}$ as $s \in \mathbb{Z}$
- $[s+1, \infty)$

The second part is

$$< \delta\Big[\Big(\frac{\sin\ m\alpha}{m\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ s\alpha}{s\alpha}\Big)^2 \Big]$$

The third term

$$\varepsilon_n\Big[\Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{n\alpha}\Big)^2 \Big]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n\Big[\Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{n\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ n\alpha}{n\alpha}\Big)^2 \Big] &= -\varepsilon_n \frac{\sin\ (2n-1)\alpha \sin\ \alpha}{n\alpha^2} \\ &< \delta\Big[\frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} - \frac{1}{n^2\alpha^2}\Big] + \delta\frac{1}{n^2\alpha} \\ &< \delta\Big[\frac{1}{(s\alpha)^2\alpha^2} + \frac{1}{s\alpha}\Big] \\ &= \delta\Big(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\Big) \end{aligned}$$

$$\sum \varepsilon_n\Big[\Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ n\alpha}{n\alpha}\Big)^2 \Big] \leq \delta\Big(1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\Big)$$

then this term needs to be null.

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x) + \sum \varepsilon_n\Big[\Big(\frac{\sin\ (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin\ n\alpha}{n\alpha}\Big)^2 \Big]$$

then for $\alpha = \beta$, it turns into

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha^2} = f(x)$$

To prove generally, we get the proof by the following step :

$$F(x+\alpha+\beta)-2F(x)+F(x-\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2(f(x)+\delta_1, \tag{127}$$

$$F(x+\alpha-\beta)-2F(x)+F(x-\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^2(f(x)+\delta_2 \tag{128}$$

Subtracting both hand-sides of (128) from both hand-sides of (127), we get

$$\begin{aligned}&F(x+\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)\\ =\ &4\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)^2\delta_1-(\alpha-\beta)^2\delta_2\end{aligned}$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_2$$

turns into infinitesimally small for $\delta_1,\delta_2\to 0$, then

$$\lim_{\delta_1,\delta_2\to 0}\frac{1}{4\alpha\beta}\Big(F(x+\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)\Big)=f(x)\quad\square$$

Proposition 2.

$$\frac{1}{2\alpha}\Big(F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)\Big)$$

is constantly infinitesimal with α.

We use (126) and divide into three parts.

- up to the index m, A_n always smaller than ε
- $n\alpha<c$, c is a fixed constant
- the rest of above parts

The first $<Q$, the second $<\varepsilon\frac{c}{\alpha}$. and the third $<\varepsilon\sum_{c<n\alpha}\frac{1}{n^2\alpha^2}<\frac{\varepsilon}{\alpha c}$

$$F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)=2\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\Big)^2A_n<2\Big(Q\alpha+\varepsilon(c+\frac{1}{c})\Big)$$

Proposition 3. We show $c,\ b,c>b$ two arbitrary constants. $\lambda(x)$ a continuous like $F(x)$ in the interval $[b,c]$, and in this interval becomes null, and the second differential quotient $\lambda(x)$ hasn't the numberless maxima and minima, so the integral

$$\mu^2\int_b^c F(x)\cos\ \mu(x-\alpha)\ \lambda(x)dx, \tag{129}$$

becomes finally smaller than any given value, when $\mu\to\infty$.

Proof.
For (129), we assume the series $F(x)$ from (123) :

$$\mu^2\int_b^c(C+C'x+A_0\frac{x^2}{2})\cos\ \mu(x-\alpha)\ \lambda(x)dx-\sum_1^{\infty}\int_b^c A_n\cos\ \mu(x-\alpha)\ \lambda(x)dx$$

It is clear that $A_n\cos\ \mu(x-\alpha)$ is explained by the sum of $\cos(\mu+n)(x-a),\ \sin(\mu+n)(x-a),\ \cos(\mu-n)(x-a),\ \sin(\mu-n)(x-a)$. We assume the former sum as $B_{\mu+n}$ and the latter as $B_{\mu-n}$, so we have

$$\cos\ \mu(x-\alpha)\ A_n=B_{\mu+n}+B_{\mu-n}$$

$$\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}=-\Big(\mu+n\Big)^2B_{\mu+n},\quad\frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}=-\Big(\mu-n\Big)^2B_{\mu-n}$$

and $B_{\mu+n}$ and $B_{\mu-n}$ become finally infinitesimally small with $n \to \infty$, whatever x is.

$$-\frac{\mu^2}{n^2}\int_b^c A_n \cos\ \mu(x-\alpha)\ \lambda(x)dx = \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c \frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\ \lambda(x)\ dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\ \lambda(x)\ dx$$

By twice integral by parts,

$$= \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\ \lambda''(x)\ dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\ \lambda''(x)\ dx$$

where $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$ constant.

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_b^c B_{\mu\pm n}\ \lambda''(x)\ dx = 0,$$

where this is independent of n. The followins are same as this.

$$\int_b^c \cos\ (\mu\pm n)(x-\alpha)\ \lambda''(x)dx, \quad \int_b^c A_n \sin\ (\mu\pm n)(x-\alpha)\ \lambda''(x)dx$$

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2\ n^2}$$

For over all value, we extend with n, then this satisfy with the following condition, where the positive value c, when μ infinitely increases :

$$n < -c', \quad c'' < n < \mu - c''', \quad \mu + c^{(4)} < n$$

$$-c' < n < c'', \quad \mu - c''' < n < \mu + c^{(4)}$$

When $c > 1$, the sum in above range turns into as follows :

$$\sum \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\frac{n}{\mu})^2(\frac{n}{\mu})^2},$$

which is smaller than $\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{(1-x)^2x^2}$.

$$\Big(-\infty,\ -\frac{c'-1}{\mu}\Big], \quad \Big[\frac{c''-1}{\mu},\ 1-\frac{c'''-1}{\mu}\Big], \quad \Big[1+\frac{c^{(4)}-1}{\mu},\ \infty\Big),$$

which is extended by $(-\infty,\ \infty)$, begining with zero in the intervel of $\frac{1}{\mu}$. These integral interval don't contain any maximum, and generally in all term of series, therefore

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\log x - 2\log(1-x)\Big) + \text{const.}$$

Hence, between the above frame, the integral value of (129) becomes finally a value with respect to the finitely increasing μ. □

¶ 9.

With the three propositions on the describablity of a function by the trigonometric series, which each term becomes finally infinitesimally small, the followins are observed.

I. When a function F(x) repeating with the interval 2π shoud be describe by the trigonometric series, of which each term becomes infinitesimally small with respect to x, so it needs to be given a continuous function $F(x)$, on which $f(x)$ so depends, that

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

when α and β become infinitesimally small, this ratio reserves finite with the series, converges on $f(x)$.

II. Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es trigonometrische Reihe, in welche die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welch überall, wo sie convergiert, die Function darstellt. [108, p.33]

When these both conditions are inversely satisfied with, so it exists the trigonometric series, in which the coefficients become finally infinitesimally small, and everywhere, it converges, the function is describable.

III. If $b < x < c$, and $\rho(t)$ is such a function that $\rho(t) = 0$ and $\rho'(t) = 0$ for $t = b$ and $t = c$, and between these value vary continuously, $\rho''(t)$ haven't the numberless maxima and minima, and moreover, for $t = x$, $\rho(t) = 1$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, $\rho'''(t)$ and $\rho^{(4)}(t)$ are, however, finite and continuous, so the difference between $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ and the integral becomes 0 with increasing n, namely :

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} A_i - \frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}\ \rho(t)\ dt\Big) = 0$$

The series $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$ converge or don't converge depending on whether the term :

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}\ \rho(t)\ dt$$

become finally a fixed term with $n \to \infty$ or don't become it.

Proof.
In fact,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\Big)\sum_1^n -n^2\ \cos\ n(x-t)\ dt \tag{130}$$

or

$$\sum_1^n -n^2\ \cos\ n(x-t)\ dt = \sum_1^n \frac{d^2}{dt^2}\cos\ n(x-t)\ dt = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}$$

then, from the proposition 3 in the above article ¶ 8, (130) turns into

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\Big)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}\ dt$$

When $\lambda(t)$ is continuou like $F(t)$, $\rho''(t)$ haven't the numberless maxima and minima, and moreover, for $t = x$, $\rho(t) = 1$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, $\rho'(t)$ and $\rho''(t)$ are, however, finite and continuous, then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\Big)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}\ \lambda(t)\ dt = 0$$

We assume that

$$\begin{cases}\lambda(t) = 1 & t \notin [b,c],\\ \lambda(t) = 1 - \rho(t) & t \in [b,c]\end{cases}$$

then the difference between $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ and the integral

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_b^c \left(F(t) - C't - A_0 \frac{t^2}{2}\right) \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{(x-t)}{2}} \rho(t)\ dt = 0$$

By the integral by part,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_b^c \left(C't + A_0 \frac{t^2}{2}\right) \frac{d^2}{dt^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{(x-t)}{2}} \rho(t)\ dt = A_0 \quad \square$$

¶ 10.
In fact this integral have the form :

$$\int_{\alpha+\frac{s}{n}2\pi}^{\alpha+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x)\ \sin\ n(x-\alpha)\ dx$$

In the preconditioned case, it follows that the coefficients of the series finally infinitesimally small.
¶ 11.
We consider (123) in the article ¶ 8.

$$C + C'x + A_0\frac{x^2}{2} + A_0\frac{t^2}{2} - A_1\frac{\cos\ t}{1} - A_2\frac{\cos\ 2t}{4} - A_3\frac{\cos\ 3t}{9}\cdots = G(x)$$

so that for $\frac{1}{2}(F(x+t)+F(x-t))$ in everywhwre, because this series convergesuch as $F(x+t)\to G(t)$ and $F(x-t)\to G(t)$, it holds the followings :

I. When the terms of series Ω for the value of argument x, becomes finally infinitesimally small, so it needs to be

$$\lim_{n\to\infty} \mu^2 \int_b^c G(t)\ \cos\ \mu(t-\alpha)\ \lambda(t)\ dt = 0, \tag{131}$$

when λ assumed a function like the above ¶ 9.

This integral value is to be summed

$$\begin{aligned}\mu^2 \int_b^c \frac{1}{2}(F(x+t)\ \cos\ \mu(t-\alpha)\ \lambda(t)\ dt + \mu^2 \int_b^c \frac{1}{2}(F(x-t)\ \cos\ \mu(t-\alpha)\ \lambda(t)\ dt \\ = \mu^2 \int_b^c \frac{1}{2}\Big(F(x+t) + F(x-t)\Big)\ \cos\ \mu(t-\alpha)\ \lambda(t)\ dt\end{aligned}$$

Inversely,

$$A_n = -n^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(G(t) - A_0\frac{t^2}{2}\right)\ \cos\ nt\ dt$$

And also,

$$\lim_{n\to\infty} -n^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(G(t) - A_0\frac{t^2}{2}\right)\ \cos\ nt\ dt = 0,$$

when it is satisfied with (131).

II. When the term of the series Ω for the value of argument x, becomes finally infinitesimally small, so it is depend on an interval of $G(t)$ for a infinitesimally small t, whether the series converges or not, and namely, the difference between $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ and the integral, namely

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} A_i - \frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\ \rho(t)\ dt\Big) = 0,$$

when $0 < b < \pi$, and moreover, small constant, and $\rho(t)$ is such a function that $\rho(t) = 0$ and $\rho'(t) = 0$ for $t = b$ and $t = c$, and between these value vary continuously, $\rho''(t)$ haven't the numberless maxima and minima, and moreover, for $t = 0$, $\rho(t) = 0$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, $\rho'''(t)$ and $\rho''''(t)$ are, however, finite and continuous,

¶ 12. (Describablity of a function by a trigonometric series without special preconditions on the nature of function)
Here, we need to study of describablity of a function by a trigonometric series without special preconditions on the nature of function. When we observe the integral :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}\ \rho(t)\ dt$$

where, $G(t)$ is replaced with $G(t) - G(0)$. We can't get nothing from here. Here, we observe the special case, we will consider at first, a function, which haven't the numberless maxima and minima, to seek something complete, which it is yet available, from the works of Dirichlet.

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\big(F(x+t) + F(x-t)\big)\ dt = \frac{1}{\alpha}\big(F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)\big)$$

We assume $f(x)(x-a) = \varphi(x)$, then

$$\int_b^c f(x)\ \sin\ n(x-a)\ dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a}\ \sin n(x-a)\ dx = \frac{1}{2}\big(\varphi(a+0) + \varphi(a-0)\big),$$

as Dirichlet shows in [23, p.144]. In this article, Riemann concludes to his sub-thema of this paper:

> Durch eine trigonometrische Reihe, deren Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden, kann eine Function $f(x)$, welche nicht unendlich viel Maxima und Minima hat, da $\mu^2\int_b^c F(x)\ \cos\ \mu(x-a)\ \lambda(x)\ dx$ nur für eine endliche Anzahl von Stellen für ein unendliches μ nicht unendlich klein wird, auch nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen dargestellt werden, wobei es unnöthig ist länger zu verweilen. [108, p.42]
>
> By a trigonometric series, which coefficients don't become finally infinitesimally small, it is able to describe by a function $f(x)$, which haven't the numberless maxima and minima, $\mu^2\int_b^c F(x)\ \cos\ \mu(x-a)\ \lambda(x)\ dx$, become only for a finite value of the location for a infinite μ, even if not infinitesimally small, for a finite value of argument in trigonometric function alone. Hence, it would be wiser not to remain here longer.

This last phrase means Riemann's uneasy to touch too far into about this subject.
¶ 13.

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{\nu}\ \cos\ \frac{1}{x}\Big)$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\ n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

$$\int f(x)\ dx \equiv \varphi(x)\ \cos\ \psi(x), \quad f(x)=\varphi'(x)\cos\ \psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)\sin\psi(x)$$

$$\begin{aligned}&\int f(x)\ \cos\ n(x-a)\ dx\\ =\ &\frac{1}{2}\int\varphi'(x)\cos\ \Big(\psi(x)\pm n(x-a)\Big)dx-\frac{1}{2}\int\varphi(x)\psi'(x)\sin\ \Big(\psi(x)\pm n(x-a)\Big)dx\end{aligned}$$

$$\psi(x)+n(x-a)\equiv y, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \Rightarrow \quad \psi'(x)+n=0$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\ \psi'(x)\ \sin\ y\ dx$$

$$\psi(\alpha)+n(\alpha-a)\equiv\beta, \quad \Rightarrow \quad y=\beta+\psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}+\cdots$$

$$\frac{dy}{dx}=\psi''(\alpha)(x-\alpha)=\pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)}, \quad \text{where, } x-\alpha\neq 0$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\ \psi'(x)\ \sin\ y\ dx\ &=\ \frac{1}{2}\int_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\beta}-\int_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\Big(\sin\ y\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}}\Big)\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\\ &=\ -\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\sin\ (y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\sin\ (y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}=\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$$

If $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\neq 0$, then

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\ \psi'(x)\ \sin\ \Big(\psi(x)+n(x-a)\Big)dx=-\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\cdot\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

$$\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

19. Paul du Bois-Raymond [25], 1876

About the describability of the trigonometric series of an arbitrary function, Paul du Bois-Reymond plays a role. Wever [113] gives a memorial paper of Paul du Bois-Reymond's passing away, in which Paul succeeds in proving it using a function with numberless maxima and minima. [98]

[98] We owe what we know Paul du Bois-Reymond to Prof. Yano [114].

19.1. **The new aspect by Paul du Bois-Raymond.**

Paul du Bois-Raymond talks about the convergency or describability of Fourier's series :

> I was relating to a completely unrelated object with the study on the describability by Fourier series of a function :
>
> $$F(x) = x_1\varphi_1(x)\sin\ h_1x + x_2\varphi_2(x)\sin\ h_2x + \cdots$$
>
> of which we just observed $f(x)$ is a special case.

Es handelte sich für mich um die Frage : *Wenn es zweifellos durchweg endliche, stetige Functionen giebt, die in einzehlnen Punkten oder sogar in Punkten, die in jedem keisten Intervall vorkommen, nicht darstellbar sind : giebt es wohl auch durchweg endliche und stetige Functionen, die in keinem Punkte darstellbar sind ?*

> It is about a problem : *If there is a undoubtedly, completely finite, continuous function, which is in a simple point or moreover, the points, which exist in each infinitesimal interval, are not describable : is there a sufficiently finite and continuous function, which is describable in no point ?*
>
> I have showed that by the function, which have non numberless maxima in the exterior of an arbitrary small neighborhood, can regain at first the describability for this point of the point $x = 0$, if the function give itself the form $\rho(x)\varphi(x)$, where, $\rho(x)$ and $\varphi(x)$ don't evaporate for $x = 0$.
>
> [25, pp.440-4]

We owe the study by Paul du Bois-Raymond to S. Yano [114] who introduces him as follows :

> さて、Fourier 級数の収束性の問題は、その論理的な純粋性、単純性の故に古くから多くの数学者の興味を惹きつけて来た。Du Bois-Raymond は 1 点で発散する Fourier 級数を持つ連続函数の例を初めて与え (1876)、連続函数の Fourier 級数の収束如何という問題を提出した。 [114, p.49]

19.2. **Wever's memorial paper to Paul du Bois-Raymond** [113]**, 1889.**

Wever [113, pp.456-69] [99] gives a memorial paper of Paul du Bois-Reymond's passing away, in which he, Paul, succeeds in proving it using a function with numberless maxima and minima.

> The theory of Fourier series is completed by the famous Dirichlet's work (in (Bd 4 of Crelle's Journal,) moreover, for a function with wide class, it needs, however, to manipulate by a further operation and the generalization from two sides ;
>
> It handles the problem, such that another generalized function, as the trigonometric to analogize, is available to utilize the description, on the other hand, such that the range of functions are adjacent each other, in which such a expansion go well.
>
> Dirichlet have in his research, excluded such functions that contain the numberless maxima and minima, however, it seems that, there were the questions that the Fourier expansion will be adaptable to the functions and in particular, to all the continuous functions.
>
> Lipschitz and Riemann have developed the works by Dirichlet and produced many new results ; however, the proof for the expansibility of all the continuous functions still remains until du Bois-Reymond started in the theme.
>
> After all trials, he have failed to find a strong proof, he turned to have at first

[99] H. Wever was a colleague with Prof. Dr. Cristoffel, who was the suparadvisor for R.Fujisawa (cf. [38, 39], Chapter 20.) in Strassburg Univ. in 1886.

doubts about the truth, and finally, the untruth, in which he built and discussed the continuous function, but appended with numberless maxima and minima, for which he can prove the divergence of Fourier's expansion. [113, p.460]

20. R.Fujisawa, *Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichungen fortschreiten*
(*On the describablity of arbitrary function by the series, progressing with the power of a transcendental equation*) [39], 1888

[100] It is well known that the following heat-difusion equation converges on $f(r)$ with $t > 0$, however, when $t = 0$, it becomes (I) or (133), whether this equation (132) converges also on $f(r)$ under this condition or not, it is then unknown problem. R.Fujisawa questioned the then, open problem. This is the introduction of his second dissertation in 1888.

> The same as the trigonometric series, in the mathematical physics, related to it, with the roots of given transcendental equation progressing series applied widely ; it will be therefore wishful, in all the case of nature, namely, under the restriction for the physical application of enough general presupposition on the nature of function, to prove that the series converge arbitrarily to the value of the given function. I have already discussed in an early work that it begun with Sturm and Liouville, the sophisticated proof become complete by Heine. It treats the convergence in each of the series now talking about, how by the famous work of Dirichlet for the trigonometric series has come.

R. Fujisawa says his objection, which we cite in his German.

> Die Reihe in ihrer allgemeinsten Form ist wie folgt beschaffen ; sie schreitet nach den gegebenen Functionen $\theta(x,\ \lambda)$, welche einen Parameter λ enthält, für den man alle Wurzeln einer gegebenen transcendenten Gleichung $\phi(\lambda) = 0$ zu setzen hat. In dieser Form wird aber der in Rede stehende Beweis wohl schwelich durchzuführen sein, ohne daß man sehr beschräkende Voraussetungen über θ und ϕ zu machen genöthigt ist ; es empfielt sich daher, von vornherein den Beweis an einem bestimmten Beispiele durchzuführen und dadurch den Weg zu zeigen, wie man auch in andern Fällen zu verfahren hat. [39, pp.73-74]

> The series in the most genaral form have nature as follows ; the given fonction $\theta(x,\ \lambda)$, which have a parameter λ, for this, we suppose that all the roots had set in a given transcendental equation $\phi(\lambda) = 0$. By these form we are now talking about, however, to seek the proof is very difficult, without providing of very restricted condition to θ und ϕ ; It is suitable to seek from the origin, the proof using an example, and we show the way by it, as we perform even in another cases.

Fujisawa using an example of describablity for performance of proving, makes his reason, as other researchers had done it.

$$u = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-(\lambda_n \frac{a}{l})^2 t} \sin(\lambda_n \frac{r}{l})\ \frac{\int_0^l\ \rho f(\rho)\ \sin(\lambda_n \frac{\rho}{l})\ d\rho}{\int_0^l \sin^2(\lambda_n \frac{\rho}{l}) d\rho}, \tag{132}$$

When $t = 0$ of (132),

$$(I) \quad v \equiv \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty} \sin(\lambda_n \frac{r}{l})\ \frac{\int_0^l\ \rho f(\rho)\ \sin(\lambda_n \frac{\rho}{l})\ d\rho}{\int_0^l \sin^2(\lambda_n \frac{\rho}{l}) d\rho} \tag{133}$$

where $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots$ are the values of orderded positive solution of the following equation :

$$(II) \quad \phi(\lambda) = \cos\lambda + (\alpha - 1)\sin\lambda = 0, \quad (\alpha > 0) \tag{134}$$

[100] We owe showing us these bibliographies to Prof. Dr. Majima of Ochanomizu Univ.

§1.
Integrating the denominator of the right hand-side of (133), then

$$(III) \quad v = \frac{2}{rl}\sum_{i=1}^{\infty}\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\ \frac{\int_0^l\ \rho f(\rho)\ \sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})\ d\rho}{1-\frac{\sin\ \lambda_n\cdot\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}} \tag{135}$$

$\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi \pm \delta_n, \quad 1 < \delta_n < \frac{\pi}{2}, \quad (\alpha \neq 1)$. If $\alpha = 1$, then $\lambda_n = \frac{2n-1}{2}\pi$. We get the special solution for $\alpha = 1$ as follows :

$$v' = \frac{2}{rl}\sum_{i=1}^{\infty}\sin(\frac{2n-1}{2}\frac{r}{l}\pi)\ \int_0^l\ \rho f(\rho)\ \sin\Big(\frac{2n-1}{2}\lambda_n\frac{\rho}{l}\pi\Big)\ d\rho \tag{136}$$

§2. We observe a transcendental equation : (II) that is, (134)

$$.\frac{\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})}{1-\frac{\sin\ \lambda_n\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}} = -\frac{\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})}{\sin\ \lambda_n\cdot\phi'(\lambda_n)} \tag{137}$$

From (134), we get

$$-\frac{1}{\sin\lambda_n} = \frac{(\alpha-1)}{\cos\lambda_n}$$

then (137) becomes

$$\frac{\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})}{1-\frac{\sin\ \lambda_n\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}} = \frac{(\alpha-1)\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})}{\cos\ \lambda_n\cdot\phi'(\lambda_n)}$$

$$w(z) = \frac{(\alpha-1)\sin(z\frac{r}{l})\cdot\sin(z\frac{\rho}{l})}{\cos\ z\cdot\phi(z)} \tag{138}$$

$$z = \pm\lambda_1, \quad \pm\lambda_2, \cdots, \quad \text{and} \quad z = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$$

In both points of $z = \pm\lambda_n$, we have the residue,[101]

$$\mathrm{Res}(\pm\lambda_n) = \frac{\sin\Big(\lambda_n\frac{r}{l}\Big)\cdot\sin\Big(\lambda_n\frac{\rho}{l}\Big)}{1-\frac{\sin\ \lambda_n\cdot\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}}$$

for $z = \pm\frac{2n-1}{2}\pi$, we have the following

$$\mathrm{Res}\Big(\pm\frac{2n-1}{2}\pi\Big) = -\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi r}{l}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\rho}{l}\Big)$$

We suppose two perpendicular AA' and BB' to the x-axis, and the symmetric points C and C' on the y-axis, then four points are :

$$A = m\pi + i\sqrt{m\pi}, \quad A' = m\pi - i\sqrt{m\pi}, \quad B = -m\pi + i\sqrt{m\pi}, \quad B' = -m\pi - i\sqrt{m\pi},$$

where $m \in \mathbb{Z} > 0$ and the radii of two arcs ACB and $B'C'A'$ are $\sqrt{(m\pi)^2 + m\pi}$, of which the center is the crosspoint of AB', BA' and CC'. Fujisawa cites Heine's *Fläche E*, saying : this *Fläche E* comes from the same study by Heine [46]. By Cauchy's theorem of residue, we can describe our case by using the integral under the symbol of $\int_{(E}$ as follows :

$$2\Big[\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}\Big(\pm\frac{2n-1}{2}\pi\Big) + \sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}(\lambda_n)\Big] = \frac{1}{2\pi i}\int_{(E} w(z)dz,$$

where, we consider a function w described by $z = x + iy$ such that :

$$\int_{A'\to A} wdz = \int_{B\to B'} wdz = Q, \quad \int_{A\to C\to B} wdz = \int_{B'\to C'\to A'} wdz = P \tag{139}$$

[101]In the original, Fujisawa uses R as the symbol of residue. The author of this paper rewrite it to Res.

$$\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}\Big(\pm\frac{2n-1}{2}\pi\Big)+\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Res}(\lambda_n)=\frac{1}{2\pi i}\Big[Q+P\Big]$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})}{1-\frac{\sin\ \lambda_n\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}}-\sum_{n=1}^{m}\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi r}{l}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\rho}{l}\Big)=\frac{1}{2\pi i}\Big[Q+P\Big] \tag{140}$$

Multiplying both hand-sides of (140) by $\frac{2}{rl}\rho\cdot f(\rho)\cdot d\rho$ and integrate them from 0 to l with tespect to ρ, then

$$\begin{aligned}&\frac{2}{rl}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(\lambda_n\frac{r}{l})\cdot\int_0^l\rho\cdot f(\rho)\cdot\sin(\lambda_n\frac{\rho}{l})\ d\rho}{1-\frac{2}{rl}\frac{\sin\ \lambda_n\cos\ \lambda_n}{\lambda_n}}\\ -&\sum_{n=1}^{m}\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi r}{l}\Big)\cdot\int_0^l\rho\cdot f(\rho)\cdot\sin\Big(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi\rho}{l}\Big)\ d\rho\\ =&\frac{1}{rl\pi i}\int_0^l\rho\cdot f(\rho)\cdot\Big[Q+P\Big]\ d\rho\equiv\Delta\end{aligned}$$

It is our target to investigate the convergence :

$$\boxed{v-v'=\lim_{m\to\infty}\Delta} \tag{141}$$

§3.

$$\mathrm{mod}\ \Delta\le\frac{1}{r\cdot l\cdot\pi}\int_0^l\rho\cdot\quad\mathrm{mod}\ f(\rho)\cdot\Big[\quad\mathrm{mod}\ Q+\quad\mathrm{mod}\ P\Big]\ d\rho \tag{142}$$

We pay attention to Q and P.

Step 1.
At first, we start with observing Q.

$$Q=\int_{A\to A'}wdz=i\int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}}w(m\pi+iy)dy, \tag{143}$$

where, $w(z)$ is (138), and $\phi(z)$ is (134) applying $\lambda_n\equiv z$. Here we put

$$Cy\equiv\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})=1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots=\cosh y,\quad Sy\equiv\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})=y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots=\sinh y$$

Then, we get

$$\sin(x+iy)=\sin xCy+i\cos xSy,\qquad \cos(x+iy)=\cos xCy-i\sin xSy.$$

That is :

$$\sqrt{Sy^2+\sin^2x}=\quad\mathrm{mod}\ \sin(x+iy)=\sqrt{Cy^2-\cos^2x},\quad \sin^2x\ge0,\ \cos^2x\ge0,$$

then we get

$$Sy\le\quad\mathrm{mod}\ \sin(x+iy)\le Cy,$$

[102]Fujisawa writes (139) as

$$\int\Big|_{A'}^{A}\Big|wdz=\int\Big|_{B'}^{B}\Big|wdz=Q,$$

so we correct.

and in particular

$$\text{mod } \sin\frac{r}{l}(x+iy) \le C(\frac{r}{l}y), \qquad \text{mod } \sin\frac{\rho}{l}(x+iy) \le C(\frac{\rho}{l}y),$$

and

$$\text{mod } \Big(\sin\frac{r}{l}(x+iy)\cdot\sin\frac{\rho}{l}(x+iy)\Big) \le C(\frac{r}{l}y)\cdot C(\frac{\rho}{l}y), \tag{144}$$

Extending $\varphi(x+iy)$,[103] then

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy) &= (x+iy)\cos(x+iy)+(\alpha-1)\sin(x+iy)\\ &= (x+iy)(\cos\ xCy - i\sin\ xSy)+(\alpha-1)(\sin\ xCy+i\cos\ xSy)\\ &= x\cos xCy + y\sin xSy+(\alpha-1)\sin xCy + i\Big(y\cos xCy - x\sin xSy + (\alpha-1)\cos xSy\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mod } \varphi(x+iy) &= \Big[\Big(\big(x\cos x+(\alpha-1)\sin x\big)Cy + y\sin x\ Sy\Big)^2\\ &+ \Big(\big(yCy+(\alpha-1)Sy\big)\cos x - x\sin\ x\ Sy\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{145}$$

Here, we set $x=m\pi$, then $\sin m\pi = 0,\ \cos m\pi = \pm1$, where $m\in\mathbb{Z}>0$, then we get

$$\text{mod } \phi(m\pi+iy) = \sqrt{m^2\pi^2Cy^2+\big[yCy+(\alpha-1)Sy\big]^2} \tag{146}$$

Moreover

$$\text{mod } \phi(m\pi+iy) \ge m\pi Cy$$

Here, from (144), it follows

$$\text{mod } w(m\pi+iy) \le \quad \text{mod } (\alpha-1)\cdot\frac{1}{m\pi}\cdot\frac{C(\frac{r}{l}y)\cdot C(\frac{\rho}{l}y)}{Cy^2}$$

$$0<r<l, \quad 0\le\rho\le l$$

For these relations, we get

$$C(\frac{r}{l}y)\le Cy, \quad C(\frac{\rho}{l}y)\le Cy, \quad \frac{C(\frac{r}{l}y)}{Cy}\cdot\frac{C(\frac{\rho}{l}y)}{Cy}\le 1$$

$$\text{mod } w(m\pi+iy) \le \quad \text{mod } (\alpha-1)\cdot\frac{1}{m\pi}$$

From (143), we get

$$\begin{aligned}\text{mod } Q &= \int_{A\to A'} \text{mod } wdz = \int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \text{mod } w(m\pi+iy)dy\\ &\le \quad \text{mod } (\alpha-1)\cdot\frac{1}{m\pi}\int_{-\sqrt{m\pi}}^{\sqrt{m\pi}} dy \quad\le\quad \text{mod } (\alpha-1)\cdot\frac{2}{\sqrt{m\pi}}\end{aligned} \tag{147}$$

Step 2.
Next, we talk about P. Considering (139),

$$P = \int_{A\to C\to B} wdz = \int_{A\to C\to B}(z,w)\frac{dz}{z}$$

We show the azimuth[104] θ of v, then we get the arc ACB as follows :

$$z = \sqrt{m^2\pi^2+m\pi}\cdot e^{i\theta}, \quad \frac{dz}{z} = id\theta$$

[103]Here, Fujisawa uses $\varphi(x+iy)$ not $\phi(x+iy)$.
[104]The directional angle. The *argument* or *amplitude* : arg θ.

$$P = i \int_{A \to C \to B} (z, w) d\theta$$

$$\bmod P = i \int_{A \to C \to B} \bmod (z, w) d\theta \tag{148}$$

$$y \geq \sqrt{m\pi}$$

$$\bmod \phi(x + iy) \geq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot Sy \cdot \frac{1}{\Omega}$$

Here, Fujisawa defines $\Omega \neq 0$ as follows :

> wo Ω eine stets von Null verschiedene für erhebliche Werthe von y nahezu gleich der Einheit und mit wachsendem y schließlich gegen die Einheit convergirende Zahl bedeutet. Unter Festhaltung dieser Bedeutung von Ω findet man weiter für die Werthe von y, die von Null verschieden sind, [39, pp.81-2]
>
> where $\Omega \neq 0$ means a big value for y almost near 1 and with increasing y converges finally on 1. Under the assurance of this meaning of Ω, we find further the value of $y \neq 0$.

$$\bmod (z, w) \leq \bmod (\alpha - 1) \cdot \Omega \cdot \frac{C(\frac{r}{l}y) \cdot C(\frac{\rho}{l}y)}{Sy^2}$$

We consider this factor :

$$\Omega \cdot \frac{C(\frac{r}{l}y) \cdot C(\frac{\rho}{l}y)}{Sy^2}$$

$$\Omega \cdot \frac{(1 + \exp\{-2\frac{r}{l}y\})(1 + \exp\{-2\frac{\rho}{l}y\})}{(1 - \exp\{-2y\})^2} \cdot \exp\{-2\Big(2 - \frac{r + \rho}{l}\Big)y\} \tag{149}$$

where the middle factor of (149) is little different with 1 and converges very rapidly on it with the increasing value y. We put ω as the product of leading two factors,

$$\omega \equiv \Omega \cdot \frac{(1 + \exp\{-2\frac{r}{l}y\})(1 + \exp\{-2\frac{\rho}{l}y\})}{(1 - \exp\{-2y\})^2}$$

The last factor of (149) becomes

$$\exp\{-2\Big(2 - \frac{r + \rho}{l}\Big)y\} = \exp\{-2\Big(1 - \frac{r}{l}\Big)y\},$$

as long as $y > 0$, $0 < r < l$ and $0 \leq \rho \leq l$.

$$\bmod (z, w) \leq \bmod (\alpha - 1) \cdot \omega \cdot \exp\{-2\Big(1 - \frac{r}{l}\Big)y\}$$

On the arc ACB, we can show the value of y :

$$y = \sqrt{m^2\pi^2 + m\pi} \cdot \sin\theta \tag{150}$$

$$\bmod P \leq \bmod (\alpha - 1) \cdot \omega \cdot \exp\{-2(1 - \frac{r}{l})y\} \tag{151}$$

From (148), (150) and (151), we get the following inequality :

$$\bmod P \leq \bmod (\alpha - 1) \int_{A \to C \to B} \omega \cdot \exp\{-2(1 - \frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi} \cdot \sin\theta\} d\theta$$

$$\int_0^\pi e^{-Const.\sin\theta} d\theta < \frac{\pi}{Const.}, \quad \int_{A \to C \to B} e^{-Const.\sin\theta} d\theta < \int_0^\pi e^{-Const.\sin\theta} d\theta$$

$$\bmod P \leq \bmod (\alpha - 1) \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2(1 - \frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}}, \tag{152}$$

where, ω_0 is a given average value of ω on the arc ACB. Fujisawa's definition of ω_0 is as follows :

> wo ω_0 einen gewißen Mittelwerth von ω auf dem Kreisbogen ACB bedeutet, welcher für erhebliche Werthe von m nahezu gleich Eins wird, und mit wachsendem m gegen die Einheit convergirt. [39, p.83]
>
> where ω_0 means a given middle value of ω on the arc ACB, which equals almost to 1 for the big value of m, and converges on 1 with the increasing m.

Step 3.
We combine (147) and (152), then we get finally

$$\bmod Q + \quad \bmod P \leq \quad \bmod (\alpha - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{m\pi}} + \quad \bmod (\alpha - 1) \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2(1 - \frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}}$$

§4.
From (142),

$$\bmod \Delta \leq \frac{1}{r \cdot l \cdot \pi} \quad \bmod (\alpha - 1) \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{m\pi}} + \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2(1 - \frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}}\right] \int_0^l \rho \cdot \quad \bmod f(\rho) d\rho$$

$$\int_0^l \rho \cdot \quad \bmod f(\rho) d\rho \leq \int_0^l \rho A \; d\rho \leq \frac{Al^2}{2},$$

where $A \equiv \max(\bmod f(\rho))$, and the equality holds when $f(\rho)$ is a constant and equals to A.

$$\bmod \Delta \leq \frac{1}{r} \quad \bmod (\alpha - 1) \frac{Al}{2} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{m\pi}} + \omega_0 \cdot \frac{1}{2(1 - \frac{r}{l})\sqrt{m^2\pi^2 + m\pi}}\right]$$

Now, we show that (141) becomes null when $m \to \infty$, namely, we get finally (I) or (133). Q.E.D.

20.1. **Heine's trick of Fl*ä*che E** [46]**, 1880.**
As above menthioned, R. Fujisawa [39] applies *Fläche E* of Heine [46] in his dissertations to Strussburg Univ.(1886) and Tokyo Imperial Univ. (1888). Heine had states his idea in ten years before Fujisawa have cited it in Strussburg as follows :

> It is suitable for reduction of proof, not to integrate infinite circle with radius r, but to change the small given part of periphery for a chord. We assume ρ a real positive infinite number ; in the points, we stand the real perpendiculars AA' and BB' at ρ and $-\rho$ on the x-axis.
>
> $$A = \rho + i\sqrt{\rho}, \quad A' = \rho - i\sqrt{\rho}, \quad B = -\rho + i\sqrt{\rho}, \quad B' = -\rho - i\sqrt{\rho},$$
>
> Of the origin 0, we remove, when C and C' are the point $\pm i\infty$, with the radius : $\sqrt{\rho^2 + \rho}$ of the arcs : ACB and $A'C'B'$. [46, pp.32-33]

We remark that Heine makes the circle cutted both standing arc shapes with the real perpendiculars AA' and BB' at ρ and $-\rho$ on the x-axis, so that we can eliminate the singularity of origin, when we move C and C' along the imaginary axis to $\pm\infty$.

21. Conclusion

At first, we would like to conclude that the following four stories are the most important in our paper. That are, § 3.2 (¶ 23−26) and § 3.3 (¶ 38−41) on Lagrange, § 6.1 (¶ 219 − 271) on Fourier, § 4.6.1 (¶ 62) on Poisson and § 16.3 (¶ 3) on Dirichlet. These are the ways in which they struggle to go beyond Lagrange to deduce the trigonometric series respectively. cf. Table 2.

Next, we emphasize Poisson's play throwing light on the mathematical problems to Fourier, Laplace and even to Euler, mentioned in the forwords that : We summarize forwords that :

1. We think our problem is to be treated including the trigonometric series, for Poisson's objection to Fourier is relating the fundamental problem of analytics, as we show Poisson's analytical/mathematical thought or sight in the Chapter 7.2, etc.
2. Fourier's theoretical works in life are :
   - Theorem on the discriminant of number and range of real root
   - Heat and diffusion theory and equations
   - Practical use of transcendental series
   - Theoretical reasons to the wave and fluid equations
   - Many seeds to be done in the future
3. To Lagrange's works, we need to pay more attention.
4. To Fourier's method : we think, a rough-and-ready method for prompt application by request from physic/mathematics.
5. Poisson's objections are very useful for Fourier to prove the series theory, however, in vain for Fourier's passing away.
6. Poisson, for himself, fails in it, as nobody succeeds in it, where, it contains the describability of transcendental series for an arbitrary function.
7. Poisson's conjecture of exact differential is failed by Dirichlet and Riemann, who also have slight doubt in themself.
8. Fourier's popularity depends on the practical problem in modern society or pragmatism.
9. Proof has changed with the complexity of problem and been needed to answer for the request of the time.

We summarize afterwords that :

1. The study of trigonometric series starts at the works by d'Alembert, Euler and Lagrange.
2. Poisson has consistency for universal truth on every science and therefore, collides with many theoreticians and pragmatist such as Fourier.
3. Fourier and Poisson discuss the nature of root of transcendental equation, and how to apply algebraic result to transcendental.
4. Proofs of describability starts at works by Dirichlet and Riemann, and its scope expands at Sturm and Liouville, Harnack, etc., however, it takes time for its completion until the latter half of the 20th C. , which is a collaboration by human wisdom.
5. R. Fujisawa's works of the proof of describability play a role as the unique existence among the europian researchers, and especially, as the great effect to transport the europian knowledge into Japanes mathematical society and to develop it.

References

[1] D.F.J.Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[69], 99-107).

[2] D.H.Arnold, *The mécanique physique of Siméon Denis Poisson : The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840) I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX,X*, Arch. Hist. Exact Sci. **28-3**(1983) I:243-266, II:267-287, III:289-297, IV:299-320, V:321-342, VI:343-367, **29-1**(1983) VII:37-51, VIII:53-72, IX: 73-94, **29-4**(1984) X:287-307.

[3] D. Bernoulli, *Réflexions et Eclaircissements sur les nouvelle Vibrations des Cordes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **4**(1748) → The Euler Archives, berlin-brandenburgische ACADEMIE DER WISSENSCAFTEN, Berlin, 1747-48. 147-195

[4] F.W.Bessel, *Ueber die Entwicklung der Functionen zwier Winkel u und u' in Reihen, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vierfachen von u und u' fortgehen*, Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1820, 21. Math. Class p.55. → *Abhandlungen von F. W. Bessel*. Tome **1-3**. Band **2**, No.117. pp.362-364., (V. Mathematik : Band **2**, pp. 326-404.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77588q/f334

[5] Budan De Boislaurent, *Nouvelle Méthode pour la Résolution des Équations Numériques d'un Degré quelconque, Revue, Augmentée d'un Appendice, et suivie d'un Apperçu concernent les suite Syntagmatiques*, Paris, 1822. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1108332

[6] L.Carleson, *On the convergence and grouth of partial sums of Fourier series*, acta Math., **116** (1966), 135-157.

[7] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Détermination du nombre des Racines réelles dans les Équations algébriques ; Extrait de plusieurs Mémoires lus à l'Instisu, dans le courant de l'année 1813*, . École Royale Polytech., Cahier **17**, **10**(1815), 457-548. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433673r

[8] A.L.Cauchy, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiences constans*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 510-92. (Lu : 16/sep/1822.) (Remark : this paper is the same as in *Cauchy, Augustin Louis Oeuvres complètes*, **13**(1882-1974), serie (2), t. 1, pp.275-357. At first, in 1821, next, MAS (pp.510-92) in 1822, at last, JEP (pp.275-357) in 1823.) (JEP) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x (MAS) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[9] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des Ondes, 1815*, Savants étrangers, **1**(1827), 1 partie §§3,4 et 2 partie §§4,5. (Remark : this paper is the same as *Mémoire sur la Théorie des Ondes à la surface d'un fluid pesant d'un profondeur indéfinie*, Œuvres de Cauchy, 1882, serie (1), t. 1, pp.5-318.)

[10] A.L.Cauchy, *Sur les développements des fonctions en séries périodiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **6**(1823), 603-612. (Lu: 16/fév/1826.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x/f800

[11] A.L.Cauchy, *Sur quelques propositions fondamentales calcul des résidus, Exercices de Mathématiques (anciens Exercices), 1827, Œuvres complétes d'Augustin Cauchy*, (Serie 2, tome 7), **19**(1882-1974), 291-323.

[12] A.L.Cauchy, *Sur les développements des fonctions d'une seul variable en fractions rationelles, Exercices de Mathématiques (anciens Exercices), 1827, Œuvres complétes d'Augustin Cauchy*, (Serie 2, tome 7), **19**(1882-1974), 324-344.

[13] A.L.Cauchy, *Sur les residus des fonctions exprimées par des intégrales défines, Exercices de Mathématiques (anciens Exercices), 1827, Œuvres complétes d'Augustin Cauchy*, (Serie 2, tome 7), **19**(1882-1974), 393-430.

[14] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.

[15] A.Cournot, (Book review) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides ; par M.Navier. (Mém. de l'Acad. des Science ; Tom. VI, p. 389)*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **10**(1828), 11-14. (The title number : No.10.)

[16] d'Alembert, *Opuscules Mathematiques, Mémoires sur differens sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie &*, Tome Premier, Paris, 1761. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62394p

[17] G.Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Premier, Paris, 1888, Tome Second, Paris, 1890.

[18] G.Darboux, *Œuvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Second, Paris, 1890. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[19] René Descartes, *La Geometrie. Livre Premier*, (*Discours de la Methode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la dioptrique. Meteores. et La geometrie. qui sont des essais de cete Methode*), Leyde, 1637. → http://www.bibnum.education.fr/mathématiques/géométrie/le-livre-premier-de-la-géométrie-de-descartes

[20] René Descartes, *La Géométrie*, (Neuvell Édition) A.Hermann, Librairie Scientifique, Paris, 1886, 2008 → http://www.gutenberg.org/ebooks/26400

[21] M.G.Lejeune Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limits données*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, **4**(1829), 157-169. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 119-132. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132

[22] M.G.Lejeune Dirichlet, *Solution d'une question relative à le théorie mathématiques de la chaleur*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, **5**(1830), 287-295. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 161-172. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132

[23] M.G.Lejeune Dirichlet, *Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinusreihen*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1837, 146-174. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 135-160 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f146

[24] Paul du Bois-Reymond, *Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positive Gliedern*, J.Reine Angew. Math., **76**(1872), 61-91. → http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN243919689

[25] Paul du Bois-Reymond, *Zusätze zur Abbandlung : Untersuhungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln*, Abh. der K. Bayer. Akademie der W.II.CI.XII.Bd.11.Abth., 1876.

[26] Duhamel, J.M.C, (Book review) *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques ; par M.Poisson*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 98-111. (The title number : No.35.)

[27] L.Euler, *Sur la vibration des cordes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **4**(1748), 69-85. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series II, vol.10, 63-77. → The Euler Archives, berlin-brandenburgische ACADEMIE DER WISSENSCAFTEN, Berlin

[28] L.Euler, *De valoribus integralium a termino variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum*, Mémoires de l'Académie des Science, Berlin, 1781, 337-345. (Lu: 30/apr/1781.)
Our remark. Poisson cites as Tome IV de son Calcul intégral, pages 337 et suivantes. (sic). This paper coincides with E660, that is none in the present *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, however there is in Euler's archive, titled "*Supplementum V. Ad Tom. I. Cap. VIII. De Valoribus integralium quos certis tantum casibus recipiunt*", pp.260-415. (cf. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series I, XI. pp.208-217.) The paper which Poisson cited is in this archive, 4) *De valoribus integralium a termino variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum.* M.S. Achademiae exhib. d. 30 Aprilis 1781. §124-§140. pp.337-345. We owe these bibliographies to the director of *The Euler Archive*, and Assist. Prof. Dr. Dominic Klyve of Central Washington Univ. → http://eulerarchive.maa.org/pages/E660.html

[29] J.-B.-J. Fourier, *Théorie de la chaleur*, Annales de chimie et de physique, **3**(1816), 350-375. (Not found, however, Poisson [88] cites this one.)

[30] J.-B.-J. Fourier, *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1820, 156-165 and 181-7. → [18], 291-309. (Followed by the comment of G.Darboux, 310-314.)

[31] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur. Deuxiéme Édition*, Paris, 1822. (This is available by G.Darboux [17] [Tome Premier] with comments).

[32] J.-B.-J. Fourier, *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, I^{re} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **4**(1819-20), 1824, 185-555. (This is the prize paper no.1, this paper is not in [18], however appears only in its index. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3291v/f26)

[33] J.-B.-J. Fourier, *Suite de Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, II^{e} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **5**(1821-22), 1826, 153-246. → [18], 3-94. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3220m/f7 (This is the prize paper no.2.)

[34] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendendent de la théorie de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **7**(1827), 605-624. → [18], 127-144. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227

[35] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 581-622. → [18], 145-181. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[36] J.-B.-J. Fourier, *Remarques générales sur l'application des principes de l'anayse algébrique aux équations transcendantes*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **10**(1831), 119-146. (Lu : 9/mars/1829.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32255, → [18], 185-210.

[37] A.Freeman, *The analytical theory of heat by Joseph Fourier*, (Translated in English, with Notes), Cambridge Univ. Press, 1878.

[38] R.Fujisawa, *Über eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe*, Inauguraldissertation, der mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt von Rigakushi Rikitaro Fudzisawa aus Niigata (Japan). 1886. 藤澤利喜太郎博士遺稿集 下巻, 29-52.

[39] R.Fujisawa, *Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen, die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichungen fortschreiten*, J. of the College of Science, Imperial Univ. of Tokyo, **2**(1888), 藤澤利喜太郎博士遺稿集 下巻, 73-85.

[40] C.F.Gauss, *Determinatio Attractionis quam in punctum quodvis positionis dates exerceret planneta si eius mass per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita*, Gauss Werke, **2**(1818, 1863-1873), (IAN : **17**), 331-360. (referred : [4, p.364]) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994034

[41] J.V.Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, MIT., 1981.

[42] I.Grattan-Guinness, *The development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT., 1970.

[43] I.Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT., 1972.

[44] A. Harnack, *Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen*, A. d. Berichten der k. sächs Ges. d. W. v. 1887.

[45] E. Heine, *Ueber trigonometrische Reihe*, J. Reine Angew. Math. **71**(1870), 353-365. → http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN243919689

[46] E. Heine, *Einige Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy*, J. Reine Angew. Math. **89**(1880), 19-39. → http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN243919689

[47] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogues*, (Proc. Conf. Edwardsville 1967, Southern Illinois Univ. Press, 1968, 235-255.)

[48] E. E. Kummer, *Über die Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reichen*, J. Reine Angew. Math. **13** (1835), 171-184. → http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN243919689

[49] E. E. Kummer, *Gedächtnissrede auf Gustav Peter Lejeune-Dirichlet*, Abh. Akad. Wiss. Berlin, (1860), 1-36. Dirichlet Works, 2, 309-344. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994363/f319

[50] S.F. Lacroix, *Traité des Différences et des séries*, Paris, 1800.

[51] J. L. Lagrange, *Recherches sur la Nature et la Propagation du Son*, Miscellanea Taurinensia, **1**(1759), 39-148. *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 39-150 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[52] J. L. Lagrange, *Lagrange a Euler*, Miscellanea Taurinensia, **1**(1759), *Oeuvres de Lagrange* **14**(1867-92), 159-60 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[53] J. L. Lagrange, *Nouvelles Recherches sur la Nature et la Propagation du Son*, Miscellanea Taurinensia, **2**(1760-61), 151-318. *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 151-318 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f201

[54] J. L. Lagrange, *Addition aux Premières Recherches sur la Nature et la Propagation du Son*, Miscellanea Taurinensia, **2**(1760-61), 319-334. *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 319-334 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f369

[55] J. L. Lagrange, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscellanea Taurinensia III, **1**(1762-65). *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 471-668 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[56] J.L.Lagrange, *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, Œuvres de Lagrange publiées par les soins de M.J.-A. Serret, Vol. 4 1869, 695–748. (Lu : 22/nov/1781.)

[57] J.L.Lagrange, *Mécanique analitique*, Paris, 1788. (Quatrième édition d'après la Troisième édition de 1833 publièe par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publièes par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, (Vol.**11** : 1888, Vol.**12** : 1889), Georg Olms Verlag, Hildesheim·New York, 1973.) (J.Bertarnd remarks the differences between the editions.)

[58] P.S.Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de trèes grandes nombres*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1782, 1785. Œuvres de Laplace, **10**(1894), 209-291. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f218

[59] P.S.Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grandes nombres (Suit)*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1783, 1786. Œuvres de Laplace, **10**(1894), 295-337. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f218

[60] P.S. Laplace, *Mémoire sur divers points d'analyse*, J. École Polytech., Cahier **15**, **8**(1809), 229-265. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v

[61] J. Liouville, *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus*, J. Math. Pures Appl. **1**(1836). 14-32.

[62] J. Liouville, *Mémoire sur une question d'Analyse aux différences partielles*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 33-74. (Lu : 17/mars/1834.)

[63] J. Liouville, *Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **1**(1836). 253-277. (Lu : 30/nov/1835.)

[64] J. Liouville, *Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837). 220-223.

[65] S.Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Dissertation for a degree of Doctor of Science, Tokyo Metropolitan Univ., 2011. → http://hdl.handle.net/10748/4129

[66] S.Masuda, **数学史から見た** *Navier-Stokes* **方程式の微視的記述関数の論争に見る物理的構成と数学的記述**, (研究集会「非線形波動現象の研究の新たな進展」), 数理解析研究所講究録 1800, 49-61, 2012.

[67] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu: 14/mai/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227, 375-393.

[68] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu: 18/mar/1822.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x, 389-440.

[69] C.L.M.H.Navier, *Note relative à l'article intitulè : Mémoire sur les équilibre et le mouvement des Corps élastiques, page 337 du tome précédent*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 304-314.

[70] C.L.M.H.Navier, *Remarques sur l'Article de M.Poisson, insére dans le Cahier d'août, page 435*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 145-151.

[71] C.L.M.H.Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 99-107. (This is followed by) *Note du Rédacteur*, 107-110.

[72] C.L.M.H.Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)

[73] S.D.Poisson, *Mémoire sur les solutions particuliéres des équations différentielles et des équations aux différences*, (Lu à l'Institut le 23 Floréal, an **13**), J. École Polytech., Cahier **13**, **6**(1806), 60-125. (referred : [80, p.143], Fourier[17, p.466]) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt433669p/f61

[74] S.D.Poisson, *Mémoire sur les Équations aux Différences mêlées*, (Lu à l'Institut le 21 Prairéal, an **13**), J. École Polytech., Cahier **13**, **6**(1806), 126-147. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433669p/f127

[75] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, t.I, 112-116, no.6, mars 1808. Paris. (Lu : 21/déc/1807) (Remark. The author of paper is named as Fourier, for the report of Fourier's undefined version, however, the signature in the last page is 'P' meant Poisson.) → [17] vol.2, 215-221. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[76] S.D.Poisson, *Sur les intégrales définies*, Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique, Paris. Avril. **42**(1811), 243-252. (referred : [77, p.219])

[77] S.D.Poisson, *Mémoire sur les intégrales définies*, (1813), J. École Polytech., Cahier **16**, **9**(1813), 215-246. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336720/f220

[78] S.D.Poisson, *Mémoire sur les Surfaces élastiques*, Institut National des Sciences et des Arts, Mémoires des siences mathematiques et physiques, **9**(1814), 167-226.

[79] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le volume précédent de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **17**, **10**(1815), 612-631. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433673r/f614 (followed from [77].)

[80] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **13**(1818), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.) (referred : [84, p.139])

[81] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies, Inséré dans les duex précédens volumes de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **18**, **11**(1820), 295-341. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt4336744/f300 (followed from [77] and [79].)

[82] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de quantités périodiques, et sur l'Usage de cette Transformation dans la Résolution de différens Problèmes*, J. École Polytech., Cahier **18**, **11**(1820), 417-489. (referred : [84, p.42]) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336744/f422

[83] S.D.Poisson, *Extrait d'un Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides*, Annales de chimie et de physique, **19**(1821), 337-349. (Lu : 31/déc/1821.)

[84] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 1-144. (Lu : 31/déc/1821.) (Remark. In this top page, Poisson addes the following footnote : Ce Mémoire a été lu à l'institut, le 29 mai 1815 ; le mois suivant, j'en ai donné des extraits dans le Journal de Physique et dans le Bulletin de la Société philomatique ; mais depuis cette époque, j'ai eu l'occation de reprendre mon travail sur le même sujet, et d'y ajouter plusiers parties qui en ont presque doublé l'étendue : c'est pourquoi je ne donnerai à mon Mémoire d'autre date que celle de sa publication.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[85] S.D.Poisson, *Addition Au Mémoire sur précédent, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de Quantités périodiques*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 145-162. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[86] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Intégration des équations linéaires aux différences partielles*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 215-248. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[87] S.D.Poisson, *Second Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 249-403. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[88] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la Sommation des Séries*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12** (1823), 404-509. (followed from [77], [79] and [81].) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[89] S.D.Poisson, *Extrait d'un Mémoire sur la Propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, Annales de chimie et de physique, 2^e Ser., **22**(1823), 250-269. (Lu : 24/mar/1823.)

[90] S.D.Poisson, *Sur la chaleur rayonnante*, Annales de chimie et de physique, **26**(1824), 225-45, 442-44.

[91] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355. (Lu : 14/apr/1828. This is an extract from [92])

[92] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 357-570. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[93] S.D.Poisson, *Addition au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps, inséré dans ce volume*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[94] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[95] S.D.Poisson, *Note sur les racines des équations transcendentes*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **9**(1830), 89-95. (Lu : 2/mars/1829.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[96] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Royale Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
[97] S.D.Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1831. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1103201
[98] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur (I)*, Annales de chimie et de physique, **59**(1835), 71-102.
[99] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1835.
[100] S.D.Poisson, *Note sur un passage de la Théorie des Fonctions analytiques*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837), 140-147. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f148
[101] S.D.Poisson, *Remarques sur l'intégrales des fractions rationnelles*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837), 224-228. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f232
[102] S.D.Poisson, *Note relative à un passage de la Mécanique céleste*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837), 312-316. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f320
[103] S.D.Poisson, *Remarques sur l'integration des équations différentielles de la Dynamique*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837), 317-336. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f325
[104] S.D.Poisson, *Solution d'un problèm probabilité*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837), 373-388. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k163818/f381
[105] S.D.Poisson, *Note sur les limites de la série de Taylor*, J. Math. Pures Appl., **3**(1838), 4-9. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16382m
[106] S.D.Poisson, *Note sur l'integration des Équations linéaires Différentielles partielles*, J. Math. Pures Appl., **3**(1838), 615-623. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16382m
[107] J.Power, *On the truth of the hydrodynamical theorem, that if $udx + vdy + wdz$ be a complete differential with respect to x, y, z, at any one instant, it is always so*, Cambridge Philosophical Transactions, **7**(1842), (Part 3), 455–464.
[108] B.Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Göttingen State-Univ. 1867. 1-47.
[109] C.Sturm, J.Liouville, *Démonstration D'un Théorème de* M. Cauchy*, relatif aux recines imaginaires des équations*, J. de Mathematiques pures et appliquées, 1837, 278-289. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f6
[110] C.Sturm, J. Liouville, *Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second order contenant un paramétre variable*, J. Math. Pures Appl., **2**(1837). 16-35.
[111] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966,
[112] C.Sturm, *Autres démonstration du même Théorème*, J. de Mathematiques pures et appliquées, 1837, 290-308. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k16380x/f6 (This follows after [109].)
[113] H.Wever, *Paul du Bois-Reymond*, Math. Ann., **35**(1890), Leipzig. 457-469.
[114] Shigeki Yano (矢野茂樹), *Fourier* **解析の思想史**, 日本物理学会誌 第 25 巻 第 1 号, 1970, 47-50.

Acknowledgments. The author is very grateful to Professor M.Takase of Kyushu University for advices and many suggestions of the translation. We owe the bibliographies of R.Fujisawa to Professor Majima of Ochanomizu University, the Fourier's manuscript version [43] to Mr. Nishimura of The High School attached to Meiji University, and the Kummer's memorial address [49] of Dirichlet to Dr. S. Konno. Finally, we owe affording the facilities for study of classical fluid dynamics to RIMS of Kyoto University.