RIMS-1789

Poisson's Careful Handling of Transcendental Function, Criticizing the Diversion by Euler in Origin, from Real to Imaginary in Definite Integral

By

Shigeru MASUDA

November 2013

京都大学　数理解析研究所

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES

KYOTO UNIVERSITY, Kyoto, Japan

POISSON'S CAREFUL HANDLING OF TRANSCENDENTAL FUNCTION, CRITICIZING THE DIVERSION BY EULER IN ORIGIN, FROM REAL TO IMAGINARY IN DEFINITE INTEGRAL

京都大学・数理解析研究所 長期研究員 増田 茂
SHIGERU MASUDA
RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES,
KYOTO UNIVERSITY

Abstract.

1. Why Poisson pays attention of careful handling to the transcendental function, criticizing the diversion from real to imaginary in definite integral ? This is our motivation. (§ 1)

2. Since 1811, Poisson issued many papers on the definite integral, containing transcendental, and remarked on the necessity of careful handling to the diversion from real to imaginary, especially, to Fourier explicitly.
   To Euler and Laplace, Poisson owes many knowledge, and builds up his principle of integral, consulting Lagrange, Lacroix, Legendre, etc.
   On the other hand, Poisson feels incompatibility with Laplace's 'passage', on which Laplace had issued a paper in 1809, entitled : On the 'reciprocal' passage of results between real and imaginary, after presenting the sequential papers on the occurring of 'one-way' passage in 1782-3.
   To these passages, Poisson proposes the direct, double integral in 1811,13,15 and 20.
   In the last pages of a paper of fluid dynamics in 1831, Poisson remembers to put again the restriction, saying that the provings of eternity of time in the exact differential become necessarily defective, for it includes the series of transcendental. (§ 1, 2, 3, 5, 6)

3. As a contemporary, Fourier is made a victim by Poisson. To Fourier's main work : *The analytical theory of heat* in 1822, and to the relating papers, Poisson points the diversion applying the what-Poisson-called-it 'algebraic' theorem of De Gua or the method of cascades by Roll, to transcendental equation. Moreover, about their disputes, Darboux, the editor of Œ*uvres de Fourier*, evaluates on the correctness of Poisson's reasonings in 1888. Drichlet also mentions about Fourier's method as a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. (§ 1, 3, 4, 7)

Contents

1. Introdiction 2
1.1. Poisson's objection on the resemblance of trigonometric series by Lagrange and Fourier 3
1.2. Poisson's paradigm of universal truth 3
2. Poisson's propositions on the passage from real to imaginary 4
2.1. The definite integral of an example by Euler [8], 1781 4
2.2. The Lacroix's introduction of definite integral by Euler [18], 1800 5
2.3. *Mémoire sur divers points d'analyse*, by Laplace [22], 1809 5
2.4. *Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson [24], 1811 6
2.5. *Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson [25], 1813 7

Date: 2013/06/26.

3. Argument between Fourier and Poisson on applying the theorem of De Gua to transcendental equations 7
4. Fourier's principle 8
4.1. *Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition)* [10], 1822 8
5. Poisson's heat theory in rivalry to Fourier 14
5.1. *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*, [29], 1823 14
5.2. *Second Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides* [32], 1823 15
5.3. Poisson's elastic mechanism : *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques* [37], 1829 16
6. Poisson's refutation to Fourier's defect 17
6.1. *Note sur les racines des équations transcendantes*, [40], 1830 17
6.2. *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides* [41], 1831 19
7. Fourier's defense and enhansement of his theory 19
7.1. *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendantes qui dépendent de la théorie de la chaleur* [13], 1827 19
7.2. *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur* [14], 1829 21
7.3. *Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendantes* [15], 1831 22
8. Conclusions 23
References 24
Acknowledgments 26

1. Introdiction

[1,2,3,4] Fourier's works are summerized by Dirichlet, a disciple of Fourier, as follows :

- a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite
- to offer a new example of the *prolificity* of the analytic process

The first is our topics which Fourier and Poisson point this problem in life and the other is, in other words, the sowing seeds to be solved from then on. Dirichlet says in the following contents, Fourier (1768-1830) couldn't solve in life the question in relation to the mathematical theory of heat, in *Solution d'une question relative a le théorie mathématiques de la chaleur* (The solution of a question relative to the mathematical theory of heat) [5] :

> La question qui va nous occuper et qui a pour objet de determiner l'états successifs d'une barre primitivement échauffée d'une manière quelconque et dont les deux extrémités sont entretenues à des températures données en fonction de temps, a dèjà été résolue par M. Fourier dans un Mémoire inséré dans le Vol. VIII de la collection de l'Académie Royale des Sciences de Paris. *La méthode dont cet illustre géomètre a fait usage dans cette recherche est une espèce singulière de passage du fini a l'infini, et offre un nouvel exemple de la fécondité de ce procédé analytique qui avait déjà conduit l'auteur à tant de résultats remarquables dans*

[1]Basically, we treat the exponential / trigonometric / logarithmic / π / et al. / functions as the transcendental functions.

[2]Translation from Latin/French/German into English mine.

[3]We use the underline to specify the meaning of 'root' in our problems, and the italic words to emphasize our assertion. and use the symbols § : chapter, ¶ : article of the original.

[4]To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Daniel Bernoulli(1700-82), Euler(1707-83), d'Alembert(1717-83), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Poisson(1781-1840), Cauchy(1789-1857), Dirichlet(1805-59), Riemann(1826-66).

son grand ouvrage sur la théorie de la chaleur. J'ai traité la même question par une analyse dont la marche differe beaucoup de celle de Fourier et qui donne lieu à l'emploi de quelques *artifices de calcul*, qui paraisent pouvoir être utiles dans d'autres recherches. [5, p.161] (Italics mine.)

This is the originality of the method due to the what we called *Dirichlet condition*, which gives the constant boundary condition by any method.

1.1. **Poisson's objection on the resemblance of trigonometric series by Lagrange and Fourier.** Riemann studies the history of research on Fourier series up to then (*Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkührlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe*, [44, pp.4-17].)

We cite one paragraph of his interesting description from the view of mathematical history as follows :

> Als Fourier in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegtet [5], (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, daß eine ganz willkührlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken laße, war diese Behauptung dem greisen Lagrange's unerwartet, daß er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es soll [6] sich hierüber noch ein Schriftstrück in Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist [7] Poisson überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkürlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in Lagrange's Arbeiten über die schwingenden Saiten, wo sich diese Darstellungensweise finden soll. Um diese Bahauptung, die sich nur aus der bekannten Rivalität zwischen Fourier und Poisson erklären laßt [8], zuwiderlegen, sehen wir uns genöthigt, noch einmal auf die Abhandlung Lagrange's zurüchzukommen ; denn über jeden über jenen Vorgang in der Akademie findet sich nichts veröffentlicht. [44, p.10]
>
> Man findet inder That an der von Poisson citirten Stelle die Formel:

$$y = 2\int Y \sin X\pi dX \ \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi dX \ \sin 2x\pi + \cdots + 2\int Y \sin nX\pi dX \ \sin nx\pi, \tag{1}$$

> de sort que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonné qui répond à l'abscisse X. Diese Formel sieht nun allerdinga ganz so aus wie die Fourier'sche Reihe ; so daßbei flüchtigerAnsicht eine Verwerwechselung leicht möglich ist ; aber dieser Schein rührt bloss daher, weil Lagrange das Zeichen $\int dX$ anwendte, wo er heute das Zeichen $\sum \Delta X$ angewandt haben würde. $\cdots$ Wenn man aber seine Abhandlung durchliest, so sieht man, daßer weit davon entfernt ist zu glauben, eine ganz willkührliche Function laße sich wirklich durch eine unendliche Sinusreihe darstellen. [44, pp.10-11]

Lagrange had stated (1) in his paper of the motion of sound in 1762-65. [19, p.553]

1.2. **Poisson's paradigm of universal truth.**

Poisson mentions the universality as follows :

> A défaut de méthodes générales, dont nous manquerons peut-être encore longtemps, il m'a semblé que ce qu'il y avait de mieux à faire, c'état de chercher à intégrer isolément les équations aux différences partiellles les plus importantes

[5]sic. Bulletin des sciences p. la soc. philomatique Tome I. p.112

[6]sic. Nach einer mündlichen Mittheilung des Herr Professor Dirichlet.

[7]sic. Unter Andern in den verbreiteten Traité de mécanique Nro. 323. p. 638.

[8]sic. Der Bericht in bulletin des sciences über die von Fourier der Akademie vorgelegte Abhandlung ist von Poisson.

par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent. C'est la l'objet que je me suis proposé dans ce nouveau mémoire. [27, p.123]

Poisson attacks the definite integral by Euler and Laplace, and Fourier's analytical theory of heat, and manages to construct universal truth in the paradigms.

One of the paradigms is made by Euler and Laplace. The formulae (3) deduced by Euler, are the target of criticism by Poisson. Laplace succeeds to Euler and states the passage from real to imaginary or reciprocal passage between two, which we mention in below.

The other is Fourier's application of De Gua. The diversion from (27) to (26) is Fourier's essential tool for the analytical theory of heat.

Dirichlet calls these passages a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinite. cf. Chapter 1. We think that Poisson's strategy is to destruct both paradigms and make his own paradigm to establish the univarsal truth between mathematics and physics. We would like to show it from this point of view in our paper.

2. Poisson's propositions on the passage from real to imaginary

2.1. The definite integral of an example by Euler [8], 1781.

Euler states the definite integral in *Supplement V to Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser.I, XI, Sectio Prima, Caput VIII*, [8] in 1781, as follows :

4) On the definite integral of the interval of variable limit from $x = 0$ to $x = \infty$.

§124. In the following forms, the interval from $x = 0$ to $x = \infty$, the most simple case is on the circle, $\int \frac{\partial x}{(1+x)^2}$, whose value is $\frac{\pi}{2}$, where, assuming the diameter $= 1$, then the length of circumference is π.

Next, by the method, which is known as only one absolutely,

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{(1+x)^n}\begin{bmatrix} x=0 \\ x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}, \qquad \text{namely,} \qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{(1+x)^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

Next, our integral of problem will be

$$\int x^\lambda \partial x \cdot e^{-x} = \lambda x^{\lambda-1}\partial x \cdot e^{-x},$$

with the help of the formula : $\int_0^\infty \partial x \cdot e^{-x} = 1$, the values of sequential integrals are deduced as follows :

$$\int x\partial x \cdot e^{-x} = 1, \quad \int x^2\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2, \quad \int x^3\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2\cdot 3, \quad \int x^4\partial x \cdot e^{-x} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,$$

(omitted)

§133. If we assume $p = f\cos\ \theta,\quad q = f\sin\ \theta,$

$$(p+q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos\ n\theta + \sqrt{-1}\sin\ n\theta), \quad (p-q\sqrt{-1})^n = f^n(\cos\ n\theta - \sqrt{-1}\sin\ n\theta) \qquad (2)$$

where, $\theta = \frac{q}{p},\quad f = \sqrt{p^2+q^2},\quad \Delta = \int x^{n-1}\partial x \cdot e^{-x}$. Here, our method turns into :

$$\frac{\Delta}{p+q\sqrt{-1}} = \frac{\Delta}{f^n(\cos\ n\theta + \sqrt{-1}\sin\ n\theta)}$$

§134. At first, adding both hand-sides of the expression (2), and next, subtracting and devideing with $2\sqrt{-1}$, then we get

$$\int y^{n-1}\partial y \cdot e^{-py}\cos\ qy = \frac{\Delta\cos\ n\theta}{f^n}, \quad \text{and} \quad \int y^{n-1}\partial y \cdot e^{-py}\sin\ qy = \frac{\Delta\sin\ n\theta}{f^n}$$

These integral formulae have been left during the longest period, as the completely arbitrary numbers with respect to p and q, although we have tried it in vain, we have restricted as plus value number with respect to p. Hence, it is worthy to challenge to understand the below paired integral formulae :

We assume $\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1),\ p,\ q \ \geq\ 0$: arbitrary, $\sqrt{(p^2+q^2)} = f$. The angle made by these values is θ or $\theta = \frac{q}{p}$. The values by remarkable integral are as follows :

$$\text{Formula 1 : } \int_0^\infty x^{n-1}\partial x \cdot e^{-px} \cos\ qx = \frac{\Delta \cos\ n\theta}{f^n},\ \text{Formula 2 : } \int_0^\infty x^{n-1}\partial x \cdot e^{-px} \sin\ qx = \frac{\Delta \sin\ n\theta}{f^n} \quad (3)$$

[8, p.337-343]

Poisson talks about Euler's integral method as follows :

> These formulas owe to Euler, which however, he have discovered by a sort of induction based on diversion from real to imaginary ; although the induction is allowed as the discovering method, however, we must verify the result with the direct and strict method. [25, ¶ 1, p.219]

Poisson points the unmached quality of value, i.e. Euler's supposing : $\int_0^\infty \partial x \cdot e^{-x} = 1$, of which the left hand-side is the transcendental, while the right hand-side is the real value. Poisson proclaims his direct, double integral instead of diversion to be a better method. cf. Chapter 2.5.

2.2. **The Lacroix's introduction of definite integral by Euler** [18]**, 1800.**

Lacroix [18] states Euler's integral method of this formula :

> (1083) Pour obtenir par des séries convergentes la valeur d l'intégrale $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-p}{n}}}$, Euler la partage en deux parties, l'une prise entre les limites $x = 0$ et $x^n = \frac{1}{2}$, et l'autre entre $x^n = \frac{1}{2}$ et $x = 1$; nommant M la premiè, P la seconde, et formant la série par la developpement de $\frac{1}{(1-x^n)^{\frac{n-p}{n}}}$, suivant les puissances ascendantes de x, il trouve

$$P = \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{1}{m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+m} + \frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+m} + \cdots\right\}, \quad (4)$$

> résultat dont chaque terme est moindre que la moitié de celui qui le précède. Faisant ensuit $1-x^n = y^n$, il change la formule proposée en $-\int p^{p-1}dy(1-y)^{\frac{m-n}{n}}$ (no.1079), qu'il faut prendre entre les limites $y = \frac{1}{2}$ et $y^n = 0$; et l'ordre de ces limites étant renversé, il vient $P = \int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$, ou

$$P = \frac{1}{2^{\frac{p}{n}}}\left\{\frac{1}{p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p} + \frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p} + \cdots\right\}, \quad (5)$$

> puis enfin $\varphi(m,p) = M + P$.

It is remarkable that (4) and (5) are made with the reciprocal replacement of $p \ \Leftrightarrow\ m$.

2.3. ***Mémoire sur divers points d'analyse*, by Laplace** [22]**, 1809.**

In 1809, Laplace publishes *Mémoire sur divers points d'analyse*, [22], in which he introduces the techniques of integral.

> *Sur les intégrales définies des Équations à différences partielles.*
>
> J'ai donné, dans les Mémoires déjà cités de l'Académie des sciences de l'année 1779, une méthode pour intégrer dans un grand nombre de cas, les équations linéares aux différences partielles finies ou infiniment petites, au moyen d'intégrales défines, lorsque l'intégration n'est pas possible en termes finies. Plusierurs géomètres se sont occupés depuis du même objet, mais sans s'assujettir à la condition que l'expression en intégrales définies, devienne l'intégrale en termes finis, lorsqu'elle est possible. [22, p.235]

For example, he introduce how to derive the simple function from the following expression.

$$y = \quad \Phi(x') + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d\Phi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{d^2\Phi(x')}{dx'^2} + \cdots + x \cdot \Psi(x') + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d\Psi(x')}{dx'} + \cdots \tag{6}$$

Laplace deduces the following devided two terms :

$$y = \Phi(x') + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d\Phi(x')}{dx'} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{d^2\Phi(x')}{dx'^2} + \cdots = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \tag{7}$$

$$y = x \cdot \Psi(x') + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{d\Psi(x')}{dx'} + \cdots = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Pi\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \tag{8}$$

En réunissant ces deux expressions de y, comme on le peut, l'équation proposée aux différences partielles étant linéaire, on aura

$$\begin{aligned} y = &\quad (6) = \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Gamma\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] + \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Pi\Big[x + 2z\sqrt{x'}\Big] \\ = &\quad \int dz \cdot c^{-z^2} \cdot \Phi[x + 2z\sqrt{x'}] \end{aligned}$$

[22, p.243]

Laplace uses also the divisional integral like Euler, here Poisson critisizes both methods.

Sur le passage réciproque des Résultats réels aux Résultats imaginaire.

Lorsque les résultats sont exprimés en quantités indéterminées, la généralité de la notation embrasse tous les cas, soit réeles, soit imaginaires. L'analyse a tiré un grand parti de cette extension, sur-tout dans le calcul des sinus et des cosinus, qui peuvent, comme l'on sait, être représentés par des exponnentielles imaginaires. J'ai fait voir, dans ma *Théorie des Approximations des formules qui sont fonctions de trés-grands nombres*, inséré dans les Mémoires de l'Académie des sciences pour l'année 1782, que ce *passage du réel à l'imaginaire*, pourait encore avoire lieu, même lorsque les résultats sont exprimés en quantités déterminées ; et j'en ai conclu les valeurs de quelques intégrales définies, qu'il serait difficile d'obtinir par d'autre moyens. Je vais donner ici quelques nouvelles applications de cet artifice remarquable. [22, p.244]

Poisson critisizes Laplace's diversion from real to imaginary from here.

2.4. ***Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson [24], 1811.**

Dans le 15^e cahier de Journal de l'Ecole polytechnique, M. Laplace donné des intégrales définies formules qui contiennement des sinus et cosinus. Il les a déduites des intégrales des exponentielies, par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réeles aux imaginaires. Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats, et d'y parvenir directement par considerátion des intégrales *multiples* dont M. Laplace s'est déjà servi dans un article de son mémoire sur les Fonctions de grands nombres (Académie des Sciences de Paris, année 1782, page 11);[9] et pour réunir sous un même point de vue ce qu'on a trouve de plus général jusqu'à présent sur les intégrales définies, nous commencerons par nous occuper de celles qui renferment des exponentielles. [24, p.243]

[9] Laplace [21]

2.5. ***Mémoire sur les intégrales définies*, by Poisson** [25]**, 1813.**

Poisson issued *Mémoire sur les intégrales définies* [25] in 1813, in which he called our attention to induce from real to imaginary number, using the following example.

¶ 1.

$$\int e^{-bx} \cos ax \ x^{n-1} dx = y, \quad \int e^{-bx} \sin ax \ x^{n-1} dx = z \tag{9}$$

$$\frac{dy}{da} = -\int e^{-bx} \sin ax \ x^n dx, \quad \frac{dz}{da} = \int e^{-bx} \cos ax \ x^n dx \tag{10}$$

$$\begin{cases} \int e^{-bx} \sin ax \ x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \sin ax \ x^n + \frac{a}{b} \int e^{-bx} \cos ax \ x^{n-1} dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \sin ax \ x^{n-1} dx, \\ \int e^{-bx} \cos ax \ x^n dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \cos ax \ x^n - \frac{a}{b} \int e^{-bx} \cos ax \ x^{n-1} dx + \frac{n}{b} \int e^{-bx} \cos ax \ x^{n-1} dx \end{cases}$$

where, we assume b and n positive. This value of A is independent of b, for if $bx = \theta$, then we get

$$A = b^n \int e^{-bx} x^{n-1} dx = \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta$$

Finally, we get as follows :

$$y = \frac{\cos nt}{\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta, \quad z = \frac{\sin nt}{\left(b^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta$$

where, t is the arc of $\tan \frac{a}{b}$, namely $t = \arctan \frac{a}{b}$.

Poisson concludes we should use the *direct and vigorous method* as the following :

> Ces formules sont dues à *Euler*,[10] qui les a trouvées par une sorte d'induction fondée sur le passage des quantités réelles aux imaginaires ; induction qu'on peu bien employer comme un moyen de découverte, mais dont les résultats ont besoin d'être confirmés par des *méthodes directes et rigoureuses.* Les formules que j'ai demontrées par la considération des intégrales doubles, dans le n^o 42 du nouveau *Bulletin* de la Société philomatique,[11] ne sont qu'un cas particulier des précédentes, dont elles se déduisent, en y faisant $b = 0$. [25, ¶ 1, p.219]

3. Argument between Fourier and Poisson on applying the theorem of De Gua to transcendental equations

There were the strifes between Poisson and Fourier to struggle for the truth on mathematics or mathematical physics for the 23 years since 1807. Poisson [37, p.367] asserts that :

- It is not able to apply the rules served the algebra to assure that an equation hasn't imaginary, to the transcendental equation.
- Algebraic theorems are unsuitable to apply to transcendental equations.
- Generally speaking, it is not allowed to divert the theorems or methods from real to transcendental, without careful and strict handling.

On the other hand, Fourier [14, p.617] refutes Poisson :

- Algebraic equations place no restriction on analytic theorems of determinant ; It is applicable to all transcendental, what we are considering, in above all, heat theory.
- It is sufficient to consider the convergence of the series, or the figure of curve, which the limits of these series represent them in order.
- Generally speaking, it is able to apply the algebraic theorems or methods to the transcendental or all the determined equations.

[10] Tome IV de son Calcul intégral, pages 337 et suivantes. (sic). [8], cf. (3) in the Chapter 2.1.

[11] Poisson [24]

(fig.1) *Paper spectrum interferring between Poisson and Fourier.* Rem. MS : manuscript

Fourier $\Rightarrow$ (MS:)[16] (ex:)[23] [9] (2nd.v:)[10] (prize.1)[11] (prize.2)[12] [13] [14] [15]

	$\uparrow$	[25]	[26]	[28]$\searrow$						$\nearrow$		$\downarrow$	$\nearrow$	$\downarrow$	
Poisson $\Rightarrow$	[29]	[30]	[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]	[41]	[42]	[43]

4. Fourier's principle

4.1. *Théorie analytique de la chaleur. (Deuxiéme Édition)* [10], 1822.
Chapter 3. *Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire infini*, pp.141-238.
§6 *Dévelopment d'une function arbitraire en sáries trigonométriques*
¶ 219. An arbitrary function can be developed under the following form :

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x \cdots$$

Fourier states his kernel in ¶ $219 - 235$. He redescribes these articles from the corresponding of his first version. He announces these correction in 'Discours Preliminaire', however, the proof is completely same with the expression of first version, except the expression (11).

$$(D) \quad \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \sin x \int \sin x\varphi(x)dx + \sin 2x \int \sin 2x\varphi(x)dx + \ \cdots \ + \sin ix \int \sin ix\varphi(x)dx + \cdots ;(11)$$

¶ 221. Fourier states only from the proving of orthonormal relation, so Poisson is disapointed with the lack of vigorousness and exactitude of the very mathematical importance in the future.

> Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de sembles expressions ; mais il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démonstrées d'une manière précise et rigoureuse ; [29, ¶28, p.46]

The following are Fourier's description about the proof of trigonometric series.

> On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 219), en déterminant immédiatement les quantités $a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, a_j, \ \cdots$ dans l'équation
>
> $$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_j \sin jx \cdots$$
>
> pour cela on multipliera chacun des membres de dernière équation par $\sin ixdx$, i étant un nombre entier, et on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura
>
> $$\int \varphi(x) \sin ixdx = a_1 \int \sin x \sin ixdx + a_2 \int \sin 2x \sin ixdx + \cdots a_j \int \sin jx \sin ixdx + \cdots$$
>
> Or on peut facilement prover :
> 1. Que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i \int \sin ix \sin ixdx$;
> 2. Que la valeur de $\int \sin ix \sin ixdx$ est $\frac{\pi}{2}$.
>
> Tout se réduit á considérer la valeur des intégrales qui entrent dans la second membre, et à démonstrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2\int \sin jx \sin ixdx$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est
>
> $$\frac{1}{i-j}\sin(i-j)x - \frac{1}{i+j}\sin(i+j)x + C, \quad i, \ j \ \in \mathbb{Z}$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x = 0$, la constante C est null, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra null lorsqu'on fera $x = \pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 \int \sin x \sin ixdx, \quad a_2 \int \sin 2x \sin ixdx, \quad a_3 \int \sin 3x \sin ixdx, \quad \cdots,$$

s'evanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seron différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux ; car le terme $\frac{1}{i-j}\sin(i-j)x$ auquel se réduit l'intégrale devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a, par conséquent, $2\int \sin ix \sin ixdx = \pi$; on obtient ainsi, de la manière la plus briéve, les valeurs de $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_j,\ \cdots$ qui sont $\cdots$. En les substituant, on a (D) (=(11)). [3, ¶220-221, pp.210-212]

¶ 235. (The development of function in the trigonometric series.)

Nous aurions à ajouter plusieurs remarques concernant l'usage et les propriété des séries trigonométriques ; nous nous bornerons à énoncer brièvement celles qui ont un rapport plus direct avec la théorie dont nous nous occupons.

1. Les séries ordonnées selon les cosinus ou les sinus des arcs multiples sont toujous convergentes, c'est-à-dire qu'en donnant à la variable une valeur quelque non imaginaire, la somme des termes converge de plus en plus vers une seul limite fixe, qui est la valeur de la fonction développée ;
2. Si l'on a l'expression de la fonction $f(x)$ qui répond à une série donnée
$$a + b\cos x + c\cos 2x + d\cos 3x + e\cos 4x + \cdots$$
et celle d'une autre fonction $\varphi(x)$, dont le développement donné est
$$\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x + \delta\cos 3x + \varepsilon\cos 4x + \cdots$$
il est facile de trouver en termes réels la somme de la série composée
$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \cdots$$
et, plus généralement, celle de la série
$$a\alpha + b\beta\cos x + c\gamma\cos 2x + d\delta\cos 3x + e\varepsilon\cos 4x + \cdots$$
que l'on forme en comparant terme à terme les duex série données. Cette remarque s'applique à un nombre quelconque de séries.
3. La série (p)(art.233) qui donne le développment d'une fonction $F(x)$ en un situe de sinus et de cosinus d'arcs multiples peut être mise sous cette forme
$$\begin{aligned}\pi F(x) = \frac{1}{2}\int F(\alpha)\ d\alpha \quad &+ \quad \cos x \int F(\alpha)\cos\alpha\ d\alpha + \cos 2x\int F(\alpha)\cos 2\alpha\ d\alpha + \cdots \\ &+ \quad \sin x\int F(\alpha)\sin\alpha\ d\alpha + \sin 2x\int F(\alpha)\sin 2\alpha\ d\alpha + \cdots\end{aligned}$$
α étant une nouvelle variable qui disparait après les intégrations. On a donc
$$\pi F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\ d\alpha\Big(\frac{1}{2} + \cos x\cos\alpha + \cos 2x\cos 2\alpha + \cdots + \sin x\sin\alpha + \sin 2x\sin 2\alpha + \cdots\Big)$$
ou
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\ d\alpha\Big(\frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \cos 3(x-\alpha) + \cdots\Big)$$
Donc, en désignant par $\sum \cos\ i(x-\alpha)$ aura
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int F(\alpha)\ d\alpha\Big[\frac{1}{2} + \sum\cos\ i(x-\alpha)\Big]$$
4. (citation omitted by the auther of this paper.)

[3, ¶ 235, p.232-3]

§ 2 *De la communication de la chaleur entre des masses disjointes*, pp.253-304.
Here is Fourier's premier object of the study of heat mentioned in the preliminary as follows :

> Nos premières recherches analytiques sur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes ; on les a conservées dans ls Section II du Captre IV. Les questions relatives aux corps continus, qui forment la théorie proprement dite, ont été resolues plusieurs années aprés ; cette théorie a été exposée, pour la première fois, dans un Ouvrage manuscrit remis à la fin de l'année 1807, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des Sciences* (Société philomatique, année 1808, p.112-116). [3, p.xxvi]

Chapter 5 *De la propagation de la chaleur dans une sphère solide*, pp 304-331.
§ 1 *Solution générale*, pp.304-316.
¶ 284. (Deduction of the determinated equation of the root)

> Soit $y = e^{mt}u$, u étant une fonction de x, on aura $u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ On voit d'abord que, la valeur de t devenant infinie, celle de v doit être nulle dans tous les points, puisque le corps est entièrement refroidi. On ne peut donc prendre pour m qu'une quantitè négative. Or k a une valeur numérique positive ; on en conclut que la valeur de u dépend des arcs de cercle, ce qui résulte de la nature connue de l'équation $mu = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Soit $u = A\cos\ nx + B\sin\ nx$, on aura cette condition $m = -kn^2$ Ainsi l'on peut exprimer une valeur particulière de v par l'équation
>
> $$v = \frac{e^{-kn^2 t}}{x}\Big(A\cos\ nx + B\sin\ nx\Big) \tag{12}$$
>
> n est un nombre positif quelconque, et A et B sont des constantes. On remarquera d'abord que la constante A doit être nulle ; car lorsqu'on fait $x = 0$, la valeur de v, qui exprime la température du centre, ne peut pas être infinie ; donc la terme $A\cos\ nx$ doit être omis.
>
> Du plus, le nombre n ne peut pas être pris arbitrairement. En effet, si, dans l'équation déterminée
>
> $$\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0 \tag{13}$$
>
> on substitute la valeur de v, on trouvera
>
> $$nx\ \cos\ nx + (hx - 1)\sin\ nx = 0 \tag{14}$$
>
> Comme l'équation doit avoir lieu à la surface, on y supposera $x = X$, rayon de la sphère, ce qui donnera $\frac{nX}{\tan\ nX} = 1 - hX$. Soit λ le nombre $1 - hX$ et posons $nX = \varepsilon$, on aura $\frac{\varepsilon}{\tan\ \varepsilon} = \lambda$ Il faut donc un arc ε qui, divisé par sa tangente, donne un quotient connu λ, et l'on prendra $n = \frac{\varepsilon}{X}$. Il est visible qu'il y a une infinité de tels arcs, qui ont avec leur tangente un rapport donné ; en sorte que l'équation de condition $\frac{nX}{\tan\ nX} = 1 - hX$ a une infinité de <u>racines réelles</u>. [3, ¶ 284, pp.305-6]

After supposing $A = 0$ of (12), Fourier substitutes $v = \frac{e^{-kn^2 t}}{x}\Big(\sin\ nx\Big)$ for (13), then gets the equation (14).
¶ 288. The equation of real root as 'procéde d'approximation'. Fourier proposes the method, which is nearly the what is called Newton approximation or the Newton method. We iterate the approaching by differentiation until we get the root of the crossing point made with the tangent and the curve : $x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$, $f'(x_\nu) \neq 0$.

> La régle que l'on vien d'exposer pouvant s'appliquer au calcul de chacune des racines de l'équation
>
> $$\frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} = 1 - hX, \tag{15}$$

qui ont d'ailleurs des limits données, on doit regarder toutes ces racines comme des nombres connus. Au reste, il était seulement nécessaire de se convaincre que l'équation a une infinité de racines réelles. On a rapporté ici ce procédé *d'approximation*, parce qu'il est fondé sur une construction remarquable qu'on peut employer utilement dans plusieurs cas, et qu'il fait connaitre sur-le-champ la nature et les limits des racines ; mais l'application qu'on ferait de ce procédé à l'équation dont il s'agit serait beaucoup trop lente ; il serait facile de recourir dans la pratique à une autre *méthode d'approximation.* [3, ¶ 288, p.311]

¶ 290. (Proof of non-existence of imaginary root.)

Désignons par $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ \cdots$ les quantités qui satisfont à l'équation $\frac{nX}{\tan nX} = 1 - hX$, et que l'on suppose rangées par ordre, en commençant par la plus petite ; on formera l'équation générale

$$vx = a_1 e^{-kn_1^2 t}\sin n_1 x + a_2 e^{-kn_2^2 t}\sin n_2 x + a_3 e^{-kn_3^2 t}\sin n_3 x + a_4 e^{-kn_4^2 t}\sin n_4 x + \cdots$$

Si l'on fait $t = 0$, on aura, pour exprimer l'état inital des températures,

$$vx = a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x + a_4 \sin n_4 x + \cdots$$

La question consiste à déterminer, quel que soit l'état initial, les coefficients $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$. Supposons donc que connaisse les valeur de v depuis $x = 0$ jusqu'à $x = X$, et représentons ce systéme de valeurs par $f(X)$, on aura

$$(e) \quad F(x) = \frac{1}{x}\Big\{a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x + a_4 \sin n_4 x + \cdots\Big\}$$

Here, G.Darboux comments $F(x)$ as follows :

Fourier va déterminer les coefficients $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$, mais en admettant le développment est possible, quelle que soit la fonction arbitraire $F(x)$ qui définit l'état initial ; or c'est là un point qui n'est nullement démontré. Poisson, qui a signalé ce défaut de la solution de Fourier, a proposé, dans sa *Theorie de la chaleur*, une méthode d'exposition differente, mais qui ne fait que reporter sur un autre point exactment la même difficulté. G.D. [3, ¶ 290, p.312-3]

¶ 291. (Heat diffusion equation in the sphere.)

La fonction arbitraire $F(x)$ entre dans chaque coefficient sous le signe de l'intégration et donne à la valeur de v toute la généralité que la question exige ; on parvient ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{xv}{2} = \frac{\sin\ n_1 x \int xF(x)\sin\ n_1 x\ dx}{X - \frac{1}{2n_1}\sin\ 2n_1 X} e^{-kn_1{}^2 t} + \frac{\sin\ n_2 x \int xF(x)\sin\ n_2 x\ dx}{X - \frac{1}{2n_2}\sin\ 2n_2 X} e^{-kn_2{}^2 t} + \cdots \qquad (16)$$

Telle est la forme que l'on doit donner à l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

pour qu'elle représente le mouvement de la chaleur dans la sphère solid. En effet, toutes les conditions de la question seront remplies :

1. L'équation aux différences partielles sera satisfaite.
2. La quantité de la chaleur qui s'écoule à la surface conviendra à la fois à l'action mutuelle des derniéres couches et à l'action de l'air sur la surface, c'est-à-dire que l'équation $\frac{\partial v}{\partial x} + hv = 0$, à laquelle chacune des parties de la valeur de v satisfait lorsque $x = X$, aura lieu aussi lorsqu'on prendra pour v la somme de toutes ces parties.

3. La solution donnée conviendra à l'état initial lorsqu'on supposera le temps nul. [3, ¶ 291, p.314-5]

§ 2 *Remarkes diverses sur cette solution*, pp.317-334.

¶ 305. (Proof of non-existence of imaginary root on (15).)

L'usage que l'on a fait précédement de l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\tan\varepsilon} = \lambda \tag{17}$$

est fondé sur une construction géométrique qui est très propre à expliquer la nature de ces équations, En effet, cette construction fait voir clairement que toutes les racines sont <u>réelle</u> ; en même temps elle en fait connaitre les limits et indique les moyens de déterminer la valeur numérique de chacune d'elle. L'examen analytique des équations de ce genre donnerait les mêmes résults. On pourra d'abord reconnaitre que l'équation précédente, dans laquelle λ est un nombre connu, moindre que l'unité, <u>n'a aucune recine imaginaire</u> de la forme $m+n\sqrt{-1}$. Il suffit de substituer au lieu de ε cette dernièr qantité, et l'on voit, après les tranformations, que le premier membre ne peut devenir nul lorsqu'on attribue à m et n de valeur réelles, à moins que n soit nulle. (Here, Darboux comments as we show bellow.) On démontre aussi qu'il ne peut y avoir dans cette même équation

$$\varepsilon - \lambda\tan\varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon\cos\varepsilon - \lambda\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = 0 \tag{18}$$

aucune racine imaginaire, de quelque forme que ce soit. En effet :

1. les racines imaginaires du facteur $\frac{1}{\cos\varepsilon} = 0$ n'appartiennent point à l'équation $\varepsilon - \lambda\tan\varepsilon = 0$, puisque ces racines sont toutes de la forme $m+n\sqrt{-1}$;
2. l'équation $\sin\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda}\cos\varepsilon = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles lorsque λ est moindre que l'unité.

Pour prouvercette dernière proposition, il faut considérer $\sin\varepsilon$ comme le produit d'une infinité de facteurs, qui sont

$$\varepsilon\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{3^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{4^2\pi^2}\Big)\cdots$$

est considérer $\cos\varepsilon$ comme dérivant de $\sin\varepsilon$ par la différentiation. On supposera qu'au lieu de former $\sin\varepsilon$ du produit d'un nombre infini de facteurs on emploie seulement les m premiers, et que l'on désigne le produit par $\varphi_m(\varepsilon)$. Cela posé, on aura l'équation $\varphi_m(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\varphi'_m(\varepsilon) = 0$.

Or, en donnant au nombre m ses valeurs successives $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ depuis 1 jusqu'à l'infini, on reconnaitra, par les principes ordinaires de l'Algèbre, la nature des fonctions de ε qui correspondent à ces différentes valeurs de m. On verra que, quel que soit le nombre m des facteurs, les équations en ε qui en proviennent ont les caractères distinctifs de celles qui ont toutes leurs racines <u>réelles</u>. De là on conclut rigoureusement que l'équation (17) dans laquelle λ est moindre que l'unité, <u>ne peut avoir aucune racine imaginaire</u>. Cette même proposition pourrait encore être déduite d'une analyse différente que nous emploierons dans un des Chapitres suivants. [3, ¶305, pp.329-330]

G. Darboux remarks that Fourier's description above following from (17) is not exact, and has many mistakes in the following articles. Showing the calculation, Darboux comments as follows :

<u>il ne peut donc être égale à cette expression multipliée par la fonction λ</u>. Il y a dans la suite de cet article un certain nombre de points inexacts ou contestables ; mais, comme on pourrait le supprimer en entier sans interrompre la suite des

idées, nous nous sommes contenté de reproduire sans changement le texte de Fourier.[3, ¶305, pp.329-330, footnote(2).]

§ 6 *De mouvement de la chaleur dans un cylindre solide*, pp.332-358

Fourier deduces solution of the heat equation from the general solution summed particular solutions by using integral. From here, we see that our problems discussing between Poisson and Fourier is not only the problem on the roots of the solution, but also the problem of integral of the equations.

¶ 308. (Application of the theorem of De Gua to transcendental equation.)

$$y = f(\theta) = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{(2!)^2} - \frac{\theta^3}{(3!)^2} + \frac{\theta^4}{(4!)^2} - \cdots = 0, \quad \Rightarrow \quad y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = y - y + \theta y = 0 \, (19)$$

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0,\ \frac{dy}{d\theta} + 2\frac{d^2y}{d\theta^2} + \theta\frac{d^3y}{d\theta^3} = 0,\ \frac{d^2y}{d\theta^2} + 3\frac{d^3y}{d\theta^3} + \theta\frac{d^4y}{d\theta^4} = 0, \quad \cdots \quad \frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0$$

Or,

- si l'on écrit dans l'ordre suivant l'équation algébrique $X = 0$ et toutes celles qui en dérivent par la différentiation

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \cdots$$

- et si l'on suppose que toute racine réelle d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultants de signe contraire, il est certain
- que la proposée $X = 0$ a toutes ses racines réelle,
- et que, par conséquent, il en est de même de toutes ses équations subordonées

$$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \cdots,$$

ces propositions sont fondées sur la théorie des équations algébriques et ont été démontrées depuis longtemps. [3, ¶ 308, pp.335-7]

To prove having root only real and positive, Fourier summarizes as follows :

> Il suffit donc de prouver que les équations $y = 0$, $\frac{dy}{d\theta} = 0$, $\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0$, $\cdots$, remplissant la condition précédente. Or cela suit de l'équation générale
>
> $$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0$$
>
> car, si l'on donne à θ une valeur positive qui rend nulle la fluxion[12] $\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}}$, les deux autre termes $\frac{d^iy}{d\theta^i}$ et $\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}}$ recevront des valeurs de signe opposé. A l'égard des valeurs négatives de θ, il est visible, d'après la nature de la fonction $f(\theta)$, qu'aucune quantité negative mise à la place de θ ne pourrait rendre nulle ni cette fonction, ni aucune de celles qui en dérivent par la différentiation ; car la substitution d'une quantité négative quelconque donne à tous les termes le même sign. Donc on est assuré que l'équation $y = 0$ a toutes ses racines réelles et positives. [3, ¶ 308, pp.335-7]

Darboux, the editor of "Œ*uvres de Fourier*", comments and aids Fourier as the progenitor of this sort of problems :

> Dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, page 382, Poisson présente à ce sujet quelques remarques critiques qui paraissent justifiées. Il ne faudrait pas conclure des remarques précédentes que la théoréme de Fourier

[12] Ratio of flux, which is the technical term used by Newton's differential and integral method.

ne peut être d'aucune utilité dans l'étude des équations transcendantes. Convenablement appliqué, il joue, au contraire, dans la résolution de ces équations, un rôle trés important que Fourier a été le primier à signaler. On s'en assurera aisement en relisant divers passages de l'Ouvrage que nous avons cité plus baut. G.D. [3, ¶ 308, p.336, footnote]. cf. Table 1.

5. Poisson's heat theory in rivalry to Fourier

5.1. ***Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides***, [29], **1823.**

Poisson [29] traces Fourier's work of heat theory, from the another point of view. Poisson emphasizes, in the head paragraph of his paper, that although he totally takes the different approaches to formulate the heat differential equations or to solove the various problems or to deduce the solutions from them, the results by Poisson are coincident with Fourier's.

> La question que je me propose de traiter a été le sujet d'un prix proposé par première class de l'Institut, et remporté par M. *Fourier* au commencement de 1812. La pièce couronnée est restée au secrétariat, où il m'a été permis d'en prendre connaissance : j'aurai soin, dans le courant de ce Mémoire, citer les principaux résultats que M. *Fourier* a obtenus avant moi ; et je dois dire d'avance que, dans tous les problèmes particuliers que nous avons pris l'un et l'autre pour exemples, et qui étaient naturellement indiqués dans cette matière, *les formules de mon Mémoire coïncident avec celles que cette pièce renferme. Mais c'est tout ce qu'il y a de commun entre nous deux ouvrages* ; car,
>
> - soit pour former les équations différentielles du mouvement de la chaleur,
> - soit pour les résoudre et en déduire la solution définitive de chaque probléme,
>
> j'ai employé de *méthodes entièrement différentes de celles que M. Fourier a suivies.* [29, pp.1-2] (Italic mine.)
>
> La solution de ce problème général se diverse naturallement en deux parties :
>
> - la première a pour objet la recherche des équations différentielles du mouvement de la chaleur dans l'intérieur et près de la surface du corps ;
> - le seconde, qui n'est plus qu'une question de pure analyse, comprend l'intégration de ces équations et la détermination des fonctions arbitraires contenues dans leurs intégrales, d'après l'état initial du corps et les conditions relatives à sa surface.
>
> Il semble, au premier coup d'œil, que la première partie de notre problème ne doit présenter aucune difficulté, et qu'il ne s'agit que d'appliquer immédiatement les principes de physique que nous venons de rappeler. [29, p.4]

Poisson points out the various difficulties of Fourier's applying to the physical problems :

> En adoptant celle qui réduit la sphère d'activité de ce rayonnement à une étendue insensible, j'ai formé l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps hétérogène, pour lequel la chaleur spécifique et la conductibilité varient d'une manière quelque d'un point à un autre. Dans le cas particulier de l'homogénéité, cette équation coïncide avec celle de M. Fourier a donnée la premier dans le mémoire cité, en la déduissant de l'action des élémens contigus du corps, ce qui n'a pas paru exempt de *difficulté*. Outre cette équation, comme à tous les points du corps, il en existe une autre qui n'appartient qu'aux points de la surface supposée rayonnante, et que M. Fourier a également donnée. [29, p.6] (Italics mine.)

Poisson [29] considers the proving on the convergence of series of periodic quantities by Lagrange and Fourier as the manner lacking the exactitude and vigorousness, and wants to make up to it.

Dans le mémoire cité dans ce n.^{o}, j'ai considéré directment les formules de cette espèce qui ont pour objet d'exprimer des portions de fonctions, *en séries de quantités périodiques*, dont tous les termes satisfont à des conditions données, relatives aux limites de ces fonctions. Lagrange, dans les anciens Mémoires de Turin, et M. Fourier, dans ses Recherches sur la théorie de la chaleur, avaient déjà fait usage de sembles expressions ; mais *il m'a semblé qu'elles n'avaient point encore été démonstrées d'une manière précise et rigoureuse ; et c'est à quoi j'ai tâché de suppléer dans ce Mémoire, par rapport à celles de ces formules qui se présentent le plus souvent dans les applications.* [29, §2, ¶28, p.46] (Italics mine.)

Poisson proposes the different and complex type of heat equation with Fourier's $(a)_P$. For example, we assume that interior ray extends to sensible distance, which forces of heat may affect the phenomina, the terms of series between before and after should be differente.
¶47

On aura enfin

$$(a)_P \quad \frac{du}{dt} = a^2\Big(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\Big) \tag{20}$$

pour l'équation différentielle du mouvement de la chaleur dans l'intérieur de la masse du corps que l'on considère. [29, §5, ¶47, p.82]

Poisson concludes on this question, priding himsellf on the originality of proof and defending himself on the lack of exactitude :

Par cette considération, qui se présente la première à l'esprit, et que j'avais autrefois employée, on retouve, comm on voit, l'équation (f) ; mais cette manière d'y parvenir, ne me semble pas entièrement satisfaisante, en ce qu'elle faisse dans l'obscurité ce qui se passe très-près de la surface, à la profondeur où les points du corps rayonnent au dehors, et *qu'il en peut résulter quelque doute sur l'exactitude de l'équation* ; c'est pourquoi j'ai employé, pour l'obtenir, la méthode exposée précédement avec tous les détails qu'exigeaient l'importance et la difficulté de la question. [29, §5, ¶61, p.112] (Italics mine.)

5.2. ***Second Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*** [32], **1823.**

Poisson deduces a transcendental equation naming (d) to which he refers ¶68 : To get the root of this equation, Poisson introduces two methods to distinguish the root of a transcendental equation :
¶68.

Euler a démontré que les équations $sin\ x = 0$, $\cos\ x = 0$, n'ont pas de racines imaginaires : d'ailleurs on s'assurer aisément, à l'égard de ces équations fort simples, que l'on n'y peut pas satisfaire en prenant $x = p+q\sqrt{-1}$, à moins qu'on n'ait $q = 0$; mais il n'en est pas de même ; dès qu'il s'agit d'une équation transcendante un peu compliquée ; et d'un autre côté, les rèegles que les géomètres ont trouvées pour s'assurer, *à priori*, de la réalité de toutes les racines d'une équation donnée, ne conviennent qu'aux équations algébriques, et ne sont point applicables en général aux équation transcendantes. En effet, ces régles se réduissent à deux :

- l'une est celle que *Lagrange* a donnée, d'après la consideration de l'équation *aux carrés des différences* ; équation que l'on peut regarder comme impossible à former, dans le cas des équations transcendantes :
- l'autre règle se déduit de l'ancienne méthode proposée pour la résolution des équations numériques, et connue sous le nom de *méthode des cascades* ; en voice l'énoncé le plus général. [32, pp.381-2]

Poisson explains the *méthode des cascades* as follows :

> Soit $X = 0$ un équation quelconque dont l'inconnue est x ; désignons, pour abréger, par $X', X'', \cdots$, les coefficients différentiels successifs de X, parrapport à x : si le produit $X \cdot X''$ est négatif en même temps que $X' = 0$, que le produit $X' \cdot X'''$ soit négatif en même temps que $X'' = 0$, que $X'' \cdot X^{(4)}$ soit négatif en même temps que $X''' = 0$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation $X^{(i)} = 0$, dont on soit assuré que toutes les racines sont réelles, et qui soit telle que la condition $X^{(i-1)} \cdot X^{(i+1)}$ négatif pour toutes ses racines soit aussi remplie, il sera certain que l'équation proposée $X = 0$ n'a de même que des racines réelles ; et réciproquement, si l'on parvenient à une équation $X^{(i)} = 0$, qui ait des racines imaginaires, ou pour laquelle le produit $X^{(i-1)} \cdot X^{(i+1)}$ soit positif, l'équation $X = 0$ aura aussi des racines imaginaires.
>
> Or, lorsque $X = 0$ est une équation algébrique du degré quelconque n, on est toujours certain de parvenir après $n-1$ différenciations à une équation $X^{(n-1)} = 0$ qui n'a que des racines réelles, puisqu'elle est du premier degré : c'est cette circonstance qui rend la règle précédente applicable aux équations algébriques. Mais $X = 0$ est une équation transcendante, les équations $X' = 0,\ X'' = 0, \cdots$, seron toutes des équations de cette nature ; et la règle ne pourra plus s'appliquer, à moins que, dans des cas très-particuliers, la série de ces équations n'en comprenne une, telle que $\sin\ x = 0$, ou $\cos\ x = 0$, dont on sache que toutes les racines sont réelles.
>
> Il est à remarquer que lors même qu'on aurait prouvé, d'après, la forme ou quelque propriété d'une équation transcendante $X = 0$, que l'on a $X \cdot X''$ négatif pour $X' = 0$, $X' \cdot X'''$ négatif pour $X'' = 0$, $X'' \cdot X^{(4)}$ négatif pour $X''' = 0$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, on n'en pourrait pas conclure que cette équation $X = 0$ n'ait pas de racines imaginaires. [32, pp.382-3] [13]

Here, Poisson puts a very simple example of transcendental equation and iterates the differential :

$$X = e^x + be^{ax} = 0 \tag{21}$$

where, we assume $a > 0$ and b : an arbitrary, given quantities. The equation of an arbitrary degree with respect to i is also

$$X^{(i)} = e^x + be^{ax} = 0, \quad X^{(i-1)} = ba^{i-1} \cdot e^{ax}(1-a) = 0, \quad X^{(i+1)} = ba^i \cdot e^{ax}(a-1) = 0,$$

then

$$X^{(i-1)} \cdot X^{(i+1)} = -b^2 a^{2i-1} \cdot e^{2ax}(1-a)^2 = 0 \tag{22}$$

[14] Finally, Poisson concludes : the transcendental equation of example (21) has numberless imaginaries : if $b < 0$, (21) has only real root, and if $b > 0$ no root. [32, p.383]. G.Darboux comments if $b \leq 0$, (21) has only real root, it is true, however, Poisson doesn't put the case of $b = 0$. cf. Chapter 6, Table 1.

5.3. **Poisson's elastic mechanism :** ***Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*** **[37], 1829.**

Poisson [37, pp.367-8]) remarks the same problem in the elastic solid.

> Lorsque j'ai intégré ces équations pour de déduire les lois des vibrationa sonores, j'ai exprimé les intégrales par des séries de solutions particulières de chaque question, ainsi qu'il a été dit plus haut. Les coefficients de ces séries ont été déterminés en suivant la méthode que j'ai déjà employée dans un autre Mémoire, et dont les applications diverses, que l'on trouvera dans celui-ci, montreront toute la

[13] Poisson conjuctures the defect of proof in the case of series consisted of exact differential. cf. Chapter 6.2.

[14] This equation (22) is the same as (24).

généralité et l'uniformité. Un avantage de cette méthode, est de fournir en même temps un moyen de démontrer la réalité de toutes les racines des équations transcendantes, d'où dépendent les coefficients du temps sous les *sinus* et *cosinus*, suivant lesquels les séries sont ordonnées ; ce qu'on pourrait d'ailleurs conclure de l'état d'équilibre stable dont les corps vibrant sont écartés. (Footnote) [37, pp.366-7])

Poisson's footnote of this paragraph is followed, which remarks about the transferrence of the algebraic equations to transcendeltal equations :

> J'ai déjà eu l'occasion de remarquer que les règles fournies par l'algèbre pour s'assurer qu'une équations n'a pas de racines imaginaires, ne s'appliquent pas généralement aux équations *transcendantes*, et j'ai cité un example d'un cas où elles sont en défaut (Journal de l'École Polytechnique, 19^e Cahier, page 382). Ces règles supposent qu'en différentiant un nombre de fois suffisant, l'équation dont on sait que toutes les racines sont réelles. Elles conviendront, par conséquent, à une équation comme celle-ci :[15]
>
> $$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \cdots = 0 \tag{23}$$
>
> que l'on rencontre dans plusieurs questions de physiques ; car en la différentiant indéfiniment, on parviendra à un resultat qui différera aussi peu qu'on voudra d'une equation du premier degré. Mais ces mêmes ne prouveraient absolument rien relativement aux équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$, et à toutes celles qui se prèsentent dans le problème de la distribution de la chaleur dans une sphère, soit que la température primitive ait été la même à égale distance du centre, soit qu'elle ait varié d'une manière quleconque avec des rayons. [37, pp.367-8]

6. Poisson's refutation to Fourier's defect

6.1. ***Note sur les racines des équations transcendantes***, [40], **1830.**

Poisson issued *Note sur les racines des équations transcendantes*, [40] in 1830, in which he points out Fourier's defect of description of the roots of transcendental equations in *Théorie analytique de la chaleur*, [3, p.335] issued in 1822. Fourier may be felt hurt by this problem with Poisson, and moreover, it seems that such collisions in opinion disturb to evaluate Poisson of today.

> Selon M. Fourier, les règles que les géométres ont trouvées pour reconnaître l'existence des racines réelles des équations algébriques, s'appliquent également aux équations transcendantes. Ainsi le théorème de De Gua, fondé sur l'ancienne méthode des *cascades*, et d'après lequel on peut s'assurer que toutes les racines d'une équation algébrique d'un degrè quelconque sont réelles, conserverait le même avantage, dans le cas d'une equation transcendante. Dans mon second Mémoire sur la distribution de la chaleur, j'ai émis une opinion contraire, que j'ai appuyée d'un exemple propre à mettre ce théorème en défaut.
>
> M. Fourier répond à cette difficulté, que je n'ai pas convenablement énoncé la proposition[16]; c'est pourquoi je vais tout à l'heure rappeler l'énoncé même de M. Fourier, et en faire litteralement l'application à l'exemple que j'avais choisi. Mais auparavant, qu'il me soit permis d'observer que je n'ai avancé nulle part et que je n'ai aucunne connaissance *qu'on ait soutenu pendant plusieurs années, ni cherché* à *prouver de différentes manières que les équations transcendantes relatives* à *la*

[15]This equation (23) equals to (25).

[16]Mémoire de l'Académie, tome VIII, p.616. [14], cf. Chapter 6.

distribution de la chaleur ont des racines imaginaires. [17] [40, pp.90-1] (Italic mine.)

Poisson's description is mismatches with Fourier. In 1830, Fourier remarked, taking 'another principles' and devoting himself entirely 'several years' to improve further the method of De Gua and Roll as follows :

> Quant aux principes que j'ai suivis pour résoudre les équations algébriques, ils sont très-differents de ceux qui servent de fondement aux recherches de de Gua ou à la méthode des cascades de Rolle. L'un et l'autre auteur ont cultivé l'analyse des équations ; mais *ils n'ont point résolu la difficulté principale*, qui consiste à distinguer les racines imaginaires. Lagrange et Waring ont donné les premiers une solution théorique de cette question singulière, et la solution ne laisserrait rien à désirer si elle était aussi practicable qu'elle est évidente. *J'ai traité la même question par d'autres principles, dont l'auteur de objection parait n'avoir point pris connaissance.* J'ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.) [15, p.127] (Italic mine.)

Poisson [40] states this contradiction in the case of transcendental equations as follows : we assume $a,\ b$ given constants, $x \in \mathbb{R}$. We remark that, in this paper, he omits to state the detail condition of a and b. It seems to that he reconsiders it from the other analysis. (cf. [32, pp.383] and Table 1.) Anyway, we get the following (24) , according to the same process as (22).

$$\frac{d^nX}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -b^2(1-a)^2a^{2n+1}e^{2ax} \tag{24}$$

This is negative for all real values of $x \in \mathbb{R}$. From $X = 0$, we get $\frac{d^nX}{dx^n} = e^x - ba^ne^{ax} = 0 \quad \Rightarrow$ $x = \frac{\log ba^n}{1-a}$. Finally he deduces an imaginary root of the real part : $x = \frac{\log ba^n}{1-a}$ and the infinite imaginary part : $x = \frac{2m\pi}{1-a}i,\ m \in \mathbb{Z}$ or 0, $i = \sqrt{-1}$.

> Donc *toute racine réelle* de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = 0$, étant substituée dans les deux équations adjacentes $\frac{d^nX}{dx^n} = 0$ et $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = 0$, donnera des results de signe contraire; donc d'aprè la règle de M. Fourier, l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, et toutes celles qui s'en déduisent par différentiation, devraient avoir toutes leures racines réelles; et, au contraire, chacune de ce équations a une seule racines réelle et une infinité de racines imaginaires, comprises sous la forme :
>
> $$x = \frac{\log ba^n + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}$$
>
> π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et i étant une nombre entier ou zéro. $\cdots$ J'avais pensé que les équations transcendantes semblables à celle-ci :[18]
>
> $$1 - x + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \frac{x^4}{(4!)^2} - \cdots = 0 \tag{25}$$
>
> pourraient être assimilées aux équations algébriques, à cause de l'accroissement des dénominateurs qui permettrait de négliger les termes d'un rang très-éloignés [19]. Mais en y réfléchissant de nouveau, j'ai reconnu que cette considération ne

[17] cf. Fourier [14, p.615, footnote(1)].

[18] This (25) equals to (23). This series are the similar to transcendental equations : e^x or e^{-x^2}, what we know, the following formulae, :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

[19] Mémoires de l'Académie, tome VIII, page 367. sic. Poisson [37]

serait pas satisfaisante.[20] En effet, l'équation différentielle de l'ordre n serait, dans cet exemple,

$$1 - \frac{x}{1 \cdot n+1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot n+1 \cdot n+2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} + \cdots = 0$$

or, quelque grand que soit n, on ne pourrait pas la réduire à ses premiers termes, parce que les valeurs de x qui s'en déduisent sont aussi très-grandes et comparables à n. [40, pp.92-5]

6.2. ***Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*** [41]**, 1831.**

After Poisson [39],[21] continuously, Poisson appends his opinion about proof of exact differential in the last pages of [41, pp.173-4]. His conjecture is based on the preceding analysis in [32, pp.382-3] (cf. Chapter 5.2) or [37, pp.367-8] (cf. Chapter 5.3), et al.

The proof of the conservation in time and space of an exact differential was discussed by Lagrange, Cauchy, Stokes, and others. The herein-called "Poisson conjecture" in 1831, cited in the Introduction as one of our main motivations for this study, It had its beginnings with the incomplete proof by Lagrange [20]. However, thereafter, Cauchy [2] had presented a proof as early as 1815, while Power and Stokes [45] had tried by other methods. To date Cauchy's proof is still considered to be the best. Poisson concludes the proof is defect, and even the equation made of tenscendentals satisfy with exact differential at the original time of movement, the equations satisfy no more with it during all the time:

> Les équations différentielles du mouvement des fluides deviennent plus simples, comme on sait, lorsque la formule $udx+vdy+wdz$ est la différentielle exacte d'une fonction des trois variables indépendantes $x,\ y,\ z$, qui peut, en outre, contenir le temps t. Or, on admet que cette condition sera remplie pendent toute la durée du mouvement, si elle se vérifie à un instant déterminé, par exemple, à l'origine du mouvement.
>
> Mais la démonstration qu' on donne de cette proposition suppose que les values de $u,\ v,\ w$, doivent satisfaire non seulement aux équations différentielles du mouvement, mais encore à toutes celles qui s'en déduisent en les différentiant par rapport à t; ce qui n'a pas toujours lieu à l'égard des expressions de $u,\ v,\ w$, en séries d'exponentielles et de sinus ou cosinus dont les exposans et les arcs sont proportionnelles au temps ; et la démonstration étant alors *en défaut*, il peut arriver que la formule $udx + vdy + wdz$ soit une différentielle exacte à l'origine du mouvement, et qu'elle ne soit plus à toutes autre époque. Nous en donnerons des exemples et nous développerons davantage cette remarque dans la applications que nous ferons par la suite, des fomules de ce mémoire à différentes questions. [41, ¶73. pp.173-4] (Italic mine.)

7. Fourier's defense and enhansement of his theory

7.1. ***Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendantes qui dépendent de la théorie de la chaleur*** [13]**, 1827.**

In 1824, Fourier [13] examined various roots of real or imagibnary root for practical heat problems. In his title, he seems to emphasize the *qui dépendent de la théorie de la chaleur.* Namely he considers it is roots 'depending on' or 'relating to' just the heat theory. And he assures, according to our demonstration, all the roots are reals.

[20] Fourier points out Poisson's withdrawal of this expression (25) in Fourier [15, p.126].

[21] This note's accepted date is signed as Lu : 2/mars/1829.

Table 1. Usage applying the De Gua's theorem to the transcendental equation and its results

no	name/bibliography	Applying to transcendental equation	result
1	Fourier [3, ¶ 308, p.335-7], 1822	cf. (19)	$y = 0$ has only real and positive roots.
2	Poisson [32, ¶68,pp.381-3],1823	$X = e^x + be^{ax} = 0$, $a > 0$, const. $\neq 1$, b : arbitrary $\Rightarrow X^{(i-1)}X^{(i+1)}$ $= -b^2(1-a)^2a^{2i-1}e^{2ax} < 0$	$\Rightarrow$ on aura donc par conséquence quantité qui sera toujours négative, quel que soit le nombre entier i ; et cependent l'équation proposée $X = e^x + be^{ax} = 0$ a infinité de racines imaginaires. $b > 0$: no root, $b \leq 0$: unique real root
3	Poisson [40, p.92-3],1830	$X = e^x - be^{ax} = 0$, $a > 0,\ b > 0$, const. $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dX^{n+2}} = -b^2(1-a)^2a^{2n+1}e^{2ax}$	Chacunne de ces équations a une seule racine réelle et une infinité de racines imaginaires, comprises sous la forme : $x = \frac{\log ba^n + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}, \quad i \in \mathbb{Z}$ or 0
4	Fourier [15, p.123],1831	$y = e^x - be^{ax} = 0$ (For example,) $a = 2,\ b = 1$ $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} = 2^ne^{2x}, \quad \frac{d^{n+1}X}{dX^{n+1}} = -2^{n+1}e^{2x}$ $\Rightarrow \frac{d^nX}{dX^n} \cdot \frac{d^{n+2}X}{dX^{n+2}} = -2^{2n+1}e^{4x} = 0 \quad (28)$	(example) $a = 2, b = 1 \Rightarrow -2^{2n+1}e^{4x} = 0$ $\Rightarrow$ unique real root : $\frac{d^{n+1}X}{dX^{n+1}} = e^x(1-2^{n+1}e^x) = 0, e^x \neq 0$ $\Rightarrow$ real root of $1 - 2^{n+1}e^x = 0$
5	Gaston Darboux [3, ¶ 308, p.336] footnote, 1888, (Maybe, refers Poisson[32]) (cf. no.2 in this table.)	$(\alpha)\quad y = e^x + be^{ax} = 0,\ a > 0$, const. $\neq 1$, La fonction y est une solution particulière de l'équation diffèrentielle : $(\beta)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - (a+1)\frac{dy}{dx} + ay = 0$ à laquelle on peut appliquer littèralement tous les raisonnements de Fourier. ((β) is applicable to all the reasonings by Fourier.)	$b > 0$: no root, $b \leq 0$: unique real root $\Rightarrow$ dans les deux cas, elle a une infinité de racines imaginaires. Cela suffit, semble-t-il, à décider la question. (Between these two cases, it has numberless imaginary numbers. This is sufficient to decide the question.)

Les coefficients $k,\ c,\ d$ représentent respectivement la conducibilité de chaleur, la densité; X est le rayon total de sphère, x est la rayon de la couche sphérique dont on vent déterminer la température v, et t mesure le temps écoulé depuis l'instant où le refroidissement commence, jusqu'à l'instant où la température prend la valeur désignée par v. [13, p.613-4]

Nous avons rapporté plus haut la solution que l'on trouve en intégrant les équations du mouvement de la chaleur dans la sphère ; mais nous avons réduit cette solution au cas où la surface est assujettie dans tous les points à une température constante zéro. On a vu comment la formule ainsi réduit saccorde avec le théorème général que l'on vient de démontrer. On peut aussi considérer les cas plus général où la chaleur du solide se dissipe à travers la surface dans un milieu dont la température est constante. On attribuera au coefficient qui mesure la conducibilité extérieure une value déterminée H, et l'on aura pour exprimer les températures variables du solide l'équation suivante :

$$(1) \quad v = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n_ix)}{x} \frac{e^{-\frac{k}{cd}n_i^2t}}{X - \frac{1}{2n_i}\sin(2\ n_i\ X)} \int_0^X d\alpha\ \alpha F\alpha\ \sin(n_i\ \alpha) \qquad (26)$$

$$(2) \quad \frac{n_i\, X}{\tan(n_i\, X)} = 1 - \frac{H}{k} X \tag{27}$$

> Les quantités x, v, t, k, c, d, ont la même signification que dans l'article précédent. Le coefficient H exprime la conducibilité de la surface relative au milieu dont la température constante est zéro. La fonction F_α représente, comme nous l'avons dit, le système des temperatures initiales. L'équation (2) donne pour la valeur de n_i, une infinité de racines, et nous avons démontré plusieurs fois, soit par le calcul, soit par des considérations propres à la théorie de la chaleur, que toutes ces racines sont réelles ; la température variable v est la double de la somme de tous les termes dont la valeur est indiquée. [13, p.622]

Here, (26) comes from (16), and (27) comes from (15) in the main work, respectively.

7.2. ***Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*** [14]**, 1829.**
In 1829, Fourier published '*Mémoire*' [14] using the same title with [3]. It may be he tries to enhanse his theory.
¶ 1. *Objet de la question, formule qui en donne la solution.* (The object of the problem, the formula which gives the solution.) Fourier says : I don't talk about here the fundamental problems of heat equations. There were several years since the equations did a service to the calculation. Or, we are doubted that the mathematic analysis allow to apply this genre of phenomina. Fourier mentions such the situation :

> Je ne rappellerai point ici les questions fondamentales de la théorie de la chaleur. Il y a peu d'années qu'elles n'avaient point encore été soumises au calcul; on pouvait même douter que l'analyse mathématique s'etendît à cet ordre de phénoménes, et fût propre à les exprimer d'une manière aussi claire et aussi complète par des intégrales d'équations à différences partielles. Les solutions que j'ai données de ces questions principales sont aujourd'hui généralement connues; elles ont été confirmées par les recherches de plusieurs géomètres. [14, pp.581-2]
>
> Je me propose maintenant d'ajouter à la même théorie la solution d'une question nouvelle, que je considère d'abord comme purement analytique, et dont je présenterai par la suit des applications variées. Il s'agit d'assujétir les deux extrémités d'un prisme à des températures entièrement arbitraires exprimées par deux fonctions différentes du temps, qu'elles soient ou non périodiques. L'état initial du prisme est donné ; il est représenté par une troisième fonction ; on se propose d'intégrer l'équation différentielle du mouvement de la chhaleur, en sorte que l'intégrale comprenne trois fonctions arbitraires : savoir celle qui représente l'état initial du solide, et deux autres dont chacune exprime l'état donné et variable d'une extrémité. [14, p.582]

In reply to Poisson, Fourier discusses this problem.

> Il était util de considérer aussi la proposition dont il s'agit, comme un théoréme abstrait fondé sur les seuls principles du calcul, et je l'ai présentée sous ce point de vue dans différentes recherches. Mais cette question n'ayant pas été examinée avec une attention suffiante, on a contesté la vérité de la proposition fondamentale. *On a soutenu, pandant plusieurs années, que ces équations transcendantes ont des raines imaginaires.* [22] Ces objections ayant été réfutées, on a enfin reconnu que la proposition est vraie, et l'on se borne maintenant à en proposer diverses démonstrations. En effet ce théorème a cela de commun avec la plupart des vérités mathématiques, qu'étant une fois connues, on en peut aisément multiplier les preuves. [14, p.615, footnote(1)] (Italic mine.)

[22] cf. Poisson [40, pp.90-1].

L'application que j'ai faite de cette analyse a donné lieu (19^e Cahier de l'École polytechnique, page 382, 383),[23] à des objections qu'il m'avait paru inutil de réfuter, parce qu'aucun des géomètres qui ont traité depuis des questions analogues ne s'arrêté à ces objections : mais comme je les trouve reproduites dans le nouveau volume de la collection de nos Mémoires (tom. VIII, nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, *Mémoires sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques* page 11),[24] cette réputation est devenue en quelque sorte nécessaire, je l'ai donc insérée dans un article du présent Mémoire. Elle a pour objet de prouver que l'exemple cité par M. Poisson (l'École polytechnique, 19^e Cahier, page 383), en alléguant que dans ce cas l'application du théorème serait fautive, donne au contraire une conclusion conforme à la proposition générale.

L'error de objection provient,

1. de ce que l'auteur ne considère point le nombre infini des facteurs égaux de la fonction e^x, ou $(1+\frac{x}{n})^n$, où le nombre n est infini;[25]
2. de ce qu'il omet dans l'énoncé du théorème le mot *réel*, qui en exprime le véritable sens. (Voir Théorie de la chaleur, page 373, et aussi page 380, art 312.) [14, pp.616-7]

7.3. ***Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendantes*** [15], **1831.**

In 1830, Fourier published the *Remarques* [15], which may be the last paper to Poisson in life, after only 7 days since Poisson's proposal [40], in which Fourier says : (Remark. We counter and show the paragraph number instead of the article number, for the article number is none in his paper.)

¶ 10. Fourier states his same theory in ¶308 of the main work. cf. ¶308 in Chapter 4.1.

Pour établir cette conséquence, nous allons rappeler le calcul même qui est emplyé par l'auteur : et afin de rendre les expressions plus simples, sans altérer en rien les conclusions que l'on en déduit, nous considérerons seulement l'équation $e^x - e^{ax}$. Le lecteur pourra s'assurer facilement qu'il n'y a ici aucune différence entre les conséquences qui conviennent à l'équation $e^x - be^{ax}$, a et b étant positifs, et celles que l'on déduirait de l'équation trè-simple $e^x - e^{2x} = 0$.

Écrivant donc

$$X = e^x - e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^nX}{dx^n} = e^x - 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1}e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = e^x - 2^{n+2}e^{2x},$$

et posant l'équation $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = 0$, ou $e^x - 2^{n+1} = 0$, $e^{2x} = 0$, on en tire la valeur de e^x pour la substituer dans les deux valeurs de $\frac{d^nX}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}}$. Par cette élimination, on trouve

$$\frac{d^nX}{dx^n} = 2^n e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -2^{n+1}e^{2x}, \quad \text{et} \quad \frac{d^nX}{dx^n}\cdot\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} = -2^{2n+1}e^{4x} \tag{28}$$

l'on détermine la valeur du produit $\frac{d^nX}{dx^n}\cdot\frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}}$, qui est $-2^{2n+1}e^{4x}$.[26] L'auteur en conclut que toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$, étant substituée dans l'équation qui précède et dans cette qui suit, donne deux resultats de signes

---

[23] Poisson [37, pp.367-8]. Fourier's citation of pages 382-3 are same with the pages 367-8 by Poisson. cf. We show the pages 367-8 in above [37, pp.367-8].

[24] Poisson [37], pp.357-355. The page 11 corresponds to 357+10=367. cf. Footnote of p.367.

[25] Remark.

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

[26] cf. Poisson's assertion : (24).

contraires : c'est cette conclusion que l'on ne peut pas admettre.

En effet, si, la valeur réelle de x qui rend nulle la fonction intermédiaire $e^x - 2^{n+2}e^{2x}$, réduit à zéro le facteur e^x commun aux deux termes, cette même valeur de x étant substituée dans la fonction qui précède, savoir $e^x - 2^n e^{2x}$, et dans celle qui suit, savoir $e^x - 2^{n+1}e^{2x}$, réduira *l'une et l'autre à zéro.* Les deux résultats ne sont donc point de signes différents, ils sont les mêmes. Pour que l'un des résultats fût positif et l'autre négatif, il faudrait ne considérer parmi les racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1}e^{2x} = 0$, que celles de ces racines qui ne rendent point nul le facteur e^x. [15, pp.122-4] (Italic mine.)

Here, Fourier's assertion is that if we assume the intermediate function $\frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}}$ zero, then the common term $e^x = 0$. We substitute this same value for the two equations before and after of this intermediate function, then have zeros which are the same sign each other as follows :

$$\text{If } \frac{d^{n+1}X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1}e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{1}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^n X}{dx^n} & \Rightarrow \quad e^x - 2^n e^{2x} = 0, \\ \frac{d^{n+2}X}{dx^{n+2}} & \Rightarrow \quad e^x - 2^{n+2}e^{2x} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Then both equations of (29) are zeros and have the same sign respectively.

¶ 40. The following equations are totally designated by the equation (e).

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad \cdots \quad \text{(omitted)} \quad \cdots \quad x\frac{d^iy}{dx^i} + (i-1-x)\frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}} + n\frac{d^{i-2}y}{dx^{i-2}} = 0, \quad \cdots$$

The following are Fourier's last iteration of assertion on these sort of discussions. We can render the second terms null by a certain real number of x. The sum of reminders is non zero. From here, the imaginary roots are deduced.

Donc en substituant pour x, dans une des équations (e), une valeur réelle de x, qui ferait évanouir le second term, il arrivera toujours que le premier et le dernier terme n'auront pas un même signe, car leur somme ne serait pas nulle. On ne peut pas supposer que la même valeur de x, qui fait évanoir le second terme, rend aussi nuls le premier et le troisième terme d'une des équations (e) ; car si cela avait lieu, on conclurait de ces équation que la même valeur de x fait évanoir les fonction dérivées de tous les ordres, sans aucune exception. Ces cas singulier serait celui où l'équation proposée $y = 0$ aurait toutes ses racines égales. [15, p. 139]

8. Conclusions

1. We must consider our problem as the totality among the definite integral, the trigonometric series, etc., for Poisson's objection to Fourier is relating the universal and fundamental problem of analytics, as we show Poisson's analytical/mathematical thought or sight in the Chapter 1.2, 5.2, etc. In fact, Poisson's work span covers them.
2. Fourier's theoretical works in life are : theorem on the discriminant of number and range of real root, heat and diffusion theory and equations, practical use of transcendental series, theoretical reasons to the wave and fluid equations and many seeds to be done in the future as like Dirichlet's expression : to offer a new example of the *prolificity* of the analytic process.
3. To Fourier's method : we think, a rough-and-ready method for prompt application by request from physic/mathematics.
4. Poisson's objections are very useful for Fourier to prove the series theory, however, in vain for Fourier's passing away. It is toword a sort of *singularity of passage* from the finite to the infinitem like Dirichlet's expression.
5. Poisson, for himself, fails in it, as nobody succeeds in it, where, it contains the describability of transcendental series for an arbitrary function.

References

[1] A.L.Cauchy, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiences constans*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 510-92. (Lu : 16/sep/1822.) (Remark : this paper is the same as in *Cauchy, Augustin Louis Oeuvres complètes*, **13**(1882-1974), serie (2), t. 1, pp.275-357. At first, in 1821, next, MAS (pp.510-92) in 1822, at last, JEP (pp.275-357) in 1823.) (JEP) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x (MAS) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[2] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des Ondes, 1815*, Savants étrangers, **1**(1827), 1 partie §§3,4 et 2 partie §§4,5. (Remark : this paper is the same as *Mémoire sur la Théorie des Ondes à la surface d'un fluid pesant d'un profondeur indéfinie*, Œuvres de Cauchy, 1882, serie (1), t. 1, pp.5-318.)

[3] G.Darboux, Œ*uvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Premier, Paris, 1888, Tome Second, Paris, 1890.

[4] G.Darboux, Œ*uvres de Fourier. Publiées par les soins de M.Gaston Darboux*, Tome Second, Paris, 1890. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[5] M.G.Lejeune Dirichlet, *Solution d'une question relative à le théorie mathématiques de la chaleur*, Crelle J. für die reine und angewandte Mathematik, **5**(1830), 287-295. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 161-172. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f132

[6] M.G.Lejeune Dirichlet, *Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinusreihen*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1837, 146-174. ⇒ Lejeune Dirichlet,G *Werke* Tome **1**, herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenscaften von Kronecker ; forgesetzt von L.Fuchs, Berlin, 1889-1897, 135-160 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99435r/f146

[7] L.Euler, *Sur la vibration des cordes*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **4**(1748), 69-85. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series II, vol.10, 63-77. → The Euler Archives, berlin-brandenburgische ACADEMIE DER WISSENSCAFTEN, Berlin

[8] L.Euler, *De valoribus integralium a termino variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum*, Mémoires de l'Académie des Science, Berlin, 1781, 337-345. (Lu: 30/apr/1781.)
Our remark. Poisson cites as Tome IV de son Calcul intégral, pages 337 et suivantes. (sic). This paper coincides with E660, that is none in the present *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, however there is in Euler's archive, titled "*Supplementum V. Ad Tom. I. Cap. VIII. De Valoribus integralium quos certis tantum casibus recipiunt*", pp.260-415. (cf. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series I, XI. pp.208-217.) The paper which Poisson cited is in this archive, 4) *De valoribus integralium a termino variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum.* M.S. Achademiae exhib. d. 30 Aprilis 1781. §124-§140. pp.337-345. We owe to the director of *The Euler Archive*, and Assist. Prof. Dr. Dominic Klyve of Central Washington Univ. → http://eulerarchive.maa.org/pages/E660.html

[9] J.-B.-J. Fourier, *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1820, 156-165 and 181-7. → [4], 291-309. (Followed by the comment of G.Darboux, 310-314.)

[10] J.-B.-J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur. Deuxiéme Édition*, Paris, 1822. (This is available by G.Darboux [3] [Tome Premier] with comments).

[11] J.-B.-J. Fourier, *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, I^{re} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **4**(1819-20), 1824, 185-555. (This is the prize paper no.1, this paper is not in [4], however appears only in its index. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3291v/f26)

[12] J.-B.-J. Fourier, *Suite de Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, II^{e} Partie, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **5**(1821-22), 1826, 153-246. → [4], 3-94. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3220m/f7 (This is the prize paper no.2.)

[13] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendentes qui dépendent de la théorie de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **7**(1827), 605-624. → [4], 127-144. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227

[14] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 581-622. → [4], 145-181. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[15] J.-B.-J. Fourier, *Remarques générales sur l'application des principes de l'anayse algébrique aux équations transcendantes*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **10**(1831), 119-146. (Lu : 9/mars/1829.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32255, → [4], 185-210.

[16] I.Grattan-Guinness, *Joseph Fourier 1768-1830*, MIT., 1972.

[17] E. E. Kummer, *Gedächtnissrede auf Gustav Peter Lejeune-Dirichlet*, Abh. Akad. Wiss. Berlin, (1860), 1-36. Dirichlet Works, 2, 309-344. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994363/f319

[18] S.F. Lacroix, *Traité des Différences et des séries*, Paris, 1800.

[19] J. L. Lagrange, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscellanea Taurinensia III, **1**(1762-65). *Oeuvres de Lagrange* **1**(1867-92), 471-668 → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f89

[20] J.L.Lagrange, *Mécanique analitique*, Paris, 1788. (Quatrième édition d'après la Troisième édition de 1833 publiée par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, (Vol.**11** : 1888, Vol.**12** : 1889), Georg Olms Verlag, Hildesheim·New York, 1973.) (J.Bertarnd remarks the differences between the editions.)

[21] P.S.Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grandes nombres (Suit)*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, 1783, 1786. Œuvres de Laplace, **10**(1894), 295-337. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f218

[22] P.S.Laplace, *Mémoire sur divers points d'analyse*, J. École Polytech., Cahier **15**, **8**(1809), 229-265. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb34378280v

[23] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, t.I, 112-116, no.6, mars 1808. Paris. (Lu : 21/déc/1807) (Remark. The author of paper is named as Fourier, for the report of Fourier's undefined version, however, the signature in the last page is 'P' meant Poisson.) → [3] vol.2, 215-221. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33707

[24] S.D.Poisson, *Sur les intégrales définies*, Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique, Paris. Avril. **42**(1811), 243-252. (referred : [25, p.219])

[25] S.D.Poisson, *Mémoire sur les intégrales définies*, (1813), J. École Polytech., Cahier **16**, **9**(1813), 215-246. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336720/f220

[26] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les intégrales définies, imprimé dans le volume précédent de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **17**, **10**(1815), 612-631. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433673r/f614 (followed from [25].)

[27] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **13**(1818), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.) (referred : [29, p.139])

[28] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies, Inséré dans les duex précédens volumes de ce Journal*, J. École Polytech., Cahier **18**, **11**(1820), 295-341. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336744/f300 (followed from [25] and [26].)

[29] S.D.Poisson, *Mémoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 1-144. (Lu : 31/déc/1821.) (Remark. In this top page, Poisson addes the following footnote : Ce Mémoire a été lu à l'institut, le 29 mai 1815 ; le mois suivant, j'en ai donné des extraits dans le Journal de Physique et dans le Bulletin de la Société philomatique ; mais depuis cette époque, j'ai eu l'occation de reprendre mon travail sur le même sujet, et d'y ajouter plusiers parties qui en ont presque doublé l'étendue : c'est pourquoi je ne donnerai à mon Mémoire d'autre date que celle de sa publication.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[30] S.D.Poisson, *Addition Au Mémoire sur précédent, et au Mémoire sur la manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de Quantités périodiques*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 145-162. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[31] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Intégration des équations linéaires aux différences partielles*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 215-248. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[32] S.D.Poisson, *Second Mémoire sur la Distribution de la chaleur dans les corps solides*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12**(1823), 249-403. (Lu : 31/déc/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[33] S.D.Poisson, *Suite du Mémoire sur les Intégrales définies et sur la Sommation des Séries*, J. École Royale Polytech., Cahier **19**, **12** (1823), 404-509. (followed from [25], [26] and [28].) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433675h

[34] S.D.Poisson, *Extrait d'un Mémoire sur la Propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, Annales de chimie et de physique, 2^e Ser., **22**(1823), 250-269. (Lu : 24/mar/1823.)

[35] S.D.Poisson, *Sur la chaleur rayonnante*, Annales de chimie et de physique, **26**(1824), 225-45, 442-44.

[36] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355. (Lu : 14/apr/1828. This is an extract from [37])

[37] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 357-570. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[38] S.D.Poisson, *Addition au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps, inséré dans ce volume*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **8**(1829), 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j

[39] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[40] S.D.Poisson, *Note sur les racines des équations transcendentes*, Mémoires de l'Académie royale des Siences, **9**(1830), 89-95. (Lu : 2/mars/1829.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v

[41] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Royale Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)

[42] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur (I)*, Annales de chimie et de physique, **59**(1835), 71-102.

[43] S.D.Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur*, Bachelier Pére et Fils, Paris, 1835.

[44] B.Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Göttingen State-Univ. 1867. 1-47.

[45] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966,

Acknowledgments. The author is very grateful to Professor Takase of Kyushu University for advices and many suggestions of the translation. We owe the bibliographies of R.Fujisawa to Professor Majima of Ochanomizu University, the Fourier's manuscript version [16] to Mr. Nishimura of The High School attached to Meiji University, and the Kummer's memorial address [17] of Dirichlet to Dr. S.Konno.