アフィンW代数をめぐって

表現論とヒッグス枝予想

荒川　知幸　(京大数理研)

2017年9月12日

日本数学会秋季総合分科会

アフィン W 代数とは

- (アフィン)W 代数はアフィン Kac-Moody 代数や Virasoro 代数などの無限次元リー環のある種の一般化.
- (アフィン)W 代数は Slodowy の横断片の量子化である有限 W 代数のアフィン化でもある.
- (アフィン)W 代数は 80 年代に物理学における二次元の共型場理論の研究の中で登場した.
- (アフィン)W 代数は可積分系やモジュラー表現論, 幾何学的ラングランズ対応, 4 次元のゲージ理論などとも密接に対応する

例

Zamolodchikov の W_3 代数（歴史上, 最初に登場した W 代数）

生成元: L_n $(n \in \mathbb{Z})$, W_n $(n \in \mathbb{Z})$, $\mathbf{c}$,

関係式: $[\mathbf{c}, W_3] = 0$, $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\mathbf{c}$,

$[L_m, W_n] = (2m-n)W_{m+n}$,

$$[W_m, W_n] = \\ (m-n)\left(\tfrac{1}{15}(m+n+3)(m+n+2) - \tfrac{1}{6}(m+2)(n+2)\right)L_{m+n} + \\ \tfrac{16}{22+5\mathbf{c}}(m-n)\Lambda_{m+n} + \tfrac{1}{360}m(m^2-1)(m^2-4)\delta_{m+n,0}\mathbf{c},$$

ここで, $\Lambda_n = \sum_{k \geq 0} L_{n-k}L_k + \sum_{k<0} L_kL_{n-k} - \frac{3}{10}(n+2)(n+3)L_n$.

W 代数は一般にはリー環ではなく、頂点代数.

W_3 代数の表現論

W_3 代数のベクトル空間 M 上の表現は

$$L_n m = W_n m = 0 \ (n \gg 0, \forall m \in M)$$

という条件を課すことで意味を成す.

W_3 代数の最高ウエイト表現とは,

$$\begin{aligned} &L_n v = W_n v = 0 \ (n > 0), \\ &L_0 v = a_1 v, \ W_0 v = a_2 v, \ \mathbf{c} v = c v \qquad ((a_1, a_2, c) \in \mathbb{C}^3) \end{aligned}$$

を満たすベクトル v で生成される表現を言う.

W_3 代数の最高ウエイト表現 M に対しては, その (正規化された) 指標

$$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{tr}_M(q^{L_0 - \frac{\mathbf{c}}{24}})$$

が意味を持つ.

基本問題

1. 既約な最高ウエイト表現を分類し, その指標を決定せよ.
2. 既約な最高ウエイト表現の中に, アフィンカッツ・ムーディ代数の可積分表現のような「良い」表現が存在するかどうか調べよ.

これらは, W_3 代数だけではなく, 一般の W 代数を含む全ての頂点代数に対する基本問題でもある.

$\mathfrak{g}$: 単純リー環, $f \in \mathfrak{g}$: 冪零元 ($(\mathrm{ad}\, f)^r = 0$ ($r \gg 0$))

$\rightsquigarrow \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$: ペア $(\mathfrak{g}, f)$ に付随したレベル $k \in \mathbb{C}$ の W 代数.

(頂点代数のワンパラメーター族)

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は量子 Drinfeld-Sokolov 還元法と呼ばれるハミルトニアン還元法の一種によって定義される. ([Feigin-Frenkel '90, . . . , Kac-Roan-脇本 '03]):

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) := H^0_{DS,f}(V^k(\mathfrak{g}))$$

ここで,

$H^0_{DS,f}(?)$: $(\mathfrak{g}, f)$ に付随する量子 Drinfeld-Sokolov 還元法の BRST コホモロジー (リー環のコホモロジーの semi-infinite 版)

$V^k(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k の普遍頂点代数 (アフィン Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ に対応する頂点代数).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の例

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0) = V^k(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t]+\mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$

($V^k(\mathfrak{g})$ 加群 $=$ Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の滑らかな表現).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2, f_{prin}) =$ 中心電荷 $1 - 6(k+1)^2/(k+2)$ の Virasoro 頂点代数 (k が臨界レベル $(=-2)$ でないの時).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f_{prin}) = W_3$ at $\mathbf{c} = 2 - 24(k+2)^2/(k+3)$

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{prin})$: $n-1$ 個の生成元の族で生成される Fateev-Lukyanov の W_n 代数

「全ての」スーパーコンフォーマル代数はあるスーパーリー環 $\mathfrak{g}$ とその極小冪零元 f_{min} に付随する W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{min})$ として実現される ([Kac-Roan-脇本 '03]).

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の生成元と関係式よる記述は一般には知られていない.

定義から, 次の関手が存在することがわかる.

$$\begin{aligned} V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} &\to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod} \\ M &\mapsto H^0_{DS,f}(M). \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_k$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の Bernstein-Gelfand-Gelfand 圏 (最高ウエイト表現の件).

$L(\lambda)$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイト λ の既約最高ウエイト表現。

$L(\lambda)$ の指標 ch $L(\lambda)$ は Kazhdan-Lusztig 多項式で表される ([柏原・谷崎]).

結果

定理 (T.A. Duke Math. 05')

$f = f_\theta$ (極小冪零元) とする (レベル k は任意).

(i). $H^{i\neq 0}_{DS,f_\theta}(M) = 0$ ($\forall M \in \mathcal{O}_k$). 従って $\mathcal{O}_k \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$-Mod, $M \mapsto H^0_{DS,f_\theta}(M)$, は完全関手.

(ii). $H^0_{DS,f_\theta}(L(\lambda))$ は零または既約最高ウエイト表現. さらに、$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ の任意の既約最高ウエイト表現はこのようにして現れる.

Euler-Poincaré の原理より, ch $H^0_{DS,f_\theta}(L(\lambda))$ は ch $L(\lambda)$ を用いて表される. $\Rightarrow$ $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ の全ての既約最高ウエイト表現の指標を得る.

注意

上の定理において, $\mathfrak{g}$ をスーパーリー環としても成立する.

結果 (続き)

定理 (T.A.)

(i). *([Invent. Math. '07])* 同様の結果が主冪零元 $f = f_{prin}$ に対して成立する．特に, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ の任意の既約最高ウエイト表現の指標が分かる．

(ii). *([Adv. Stud. Pure Math.'11])* 同様の結果が A 型の全ての冪零元 f に対して成立する．

有理性と平滑性

定理 (Y. Zhu 90')

V を「良い」頂点（作用素）代数 とすると, 任意の有限生成 V 加群に対しその指標 $\mathrm{ch}\, M = \mathrm{tr}_M\, q^{L_0}$ は上半平面上の正則関数に収束する $(q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$. さらに, $\{\mathrm{ch}\, M \mid M : \text{有限生成 } V \text{ 加群}\}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な部分空間をなす.

ここで, 頂点（作用素）代数 V が「良い」とは次の二つの条件を満たすことを言う.

- V は平滑 (lisse) である (あるいは C_2 有限である). つまり, $\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}\, V) = \{0\}$,
- V は有理的である. つまり, 任意の V 加群は最高ウエイト既約表現の直和.

有理性と平滑性

注意

(i). 有理的かつ平滑な頂点作用素代数の表現の圏はモジュラーテンソル圏をなす事が知られている ([Huang]).

(ii). 宮本により, 先の定理のある種の一般化が有理性条件を満たさない平滑な頂点作用素代数に対しても成立することが知られている.

「良い」頂点代数の例

普遍アフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ は平滑ではない.

実際, ベクトル空間として $V^k(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ であり,

$$\operatorname{gr} V_k(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1}) = \mathbb{C}[J_\infty \mathfrak{g}^*].$$

ここで, $J_\infty X$ は X のアーク空間:

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} R, J_\infty X) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} R[[t]], X).$$

$L_k(\mathfrak{g})$ を $V^k(\mathfrak{g})$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての唯一の既約商とする (商頂点代数として構造が入る).

事実

$L_k(\mathfrak{g})$ が平滑 $\iff$ $L_k(\mathfrak{g})$ が可積分表現 ($\iff$ $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

さらに, この場合 $L_k(\mathfrak{g})\text{-Mod} = \{\widehat{\mathfrak{g}}$のレベル k の可積分表現 $\}$.
従って, $L_k(\mathfrak{g})$ は有理的.

V: 頂点代数

$\rightsquigarrow R_V = V/C_2(V)$: Zhu の C_2 代数 (有限生成ポアソン代数)

$\rightsquigarrow X_V := \mathrm{Specm}(R_V)$: V の随伴多様体 ([T.A.'12])

Li の結果から $\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}\, V) \subset J_\infty X_V$ となる. さらに, 次がわかる.

補題 (T.A. Math.Z.'12)

V が平滑 ($\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}\, V) = \{0\}$) であることと, $X_V = \{0\}$ であることは同値.

例: $X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$. 従って $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathfrak{g}^*$, G 不変な錐

例: $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} = \mathcal{S}_f := f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$: f における Slodowy の横断片. ここで, $\{e, f, h\}$ は $\mathfrak{sl}_2$ トリプル. また, $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\, \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong J_\infty \mathcal{S}_f$ が成立する.

W 代数の随伴多様体

$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の唯一の既約商とする (単純 W 代数).

$\rightsquigarrow X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)} \subset X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} = \mathcal{S}_f$, $\mathcal{S}_f$ 上の点 f に可縮な自然な $\mathbb{C}^*$ 作用に関して不変.

定理 (T.A. IMRN '15)

1. 全射 $V^k(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow L_k(\mathfrak{g})$ は全射
   $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^0_{DS,f}(V^k(\mathfrak{g})) \twoheadrightarrow H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))$ を誘導する.
2. $X_{H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))} = X_{L_k(\mathfrak{g})} \cap \mathcal{S}_f$ （スキームとして成立). 従って,
   - 2.i) $H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))$ が零でないことと $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ が軌道の閉包 $\overline{G.f}$ を含むことは同値,
   - 2.ii) $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{G.f}$ であるならば $X_{H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))} = \{f\}$. 従って $H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))$ は平滑であり, その商である $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ もまた平滑である.

- $U(\mathfrak{g})$ の原始イデアルの随伴多様体の場合と異なり, $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零錐 $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}\, x)^r = 0\ (r \gg 0)\}$ に含まれるとは限らない
(実際, k が generic のときは $X_{L_k(\mathfrak{g})} = X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$.)
- $L_k(\mathfrak{g})$ が可積分であることと $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \{0\}$ は同値であったので, $L_k(\mathfrak{g})$ が可積分のときは上の定理から $H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g})) = 0$ となってしまう.

一方, アフィンリー環には完全可約性や指標のモジュラー不変性といった可積分表現と同様な性質を持つ, 可積分表現よりずっと広い許容表現と呼ばれる表現のクラスが存在する ([Kac-脇本'88]).

$$\{\text{ 可積分表現 }\} \subsetneq \{\text{ 許容表現 }\} \subsetneq \{\text{ 最高ウエイト表現 }\}$$

定理 (T.A.)

$L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とする.

1. *([IMRN '15])*
   - 1.i) *([Feigin-Frenkel 予想]) $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$.*
   - 1.ii) $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は既約である. つまり, $\mathfrak{g}$ の冪零軌道 $\mathbb{O}_k$ が存在し, $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_k}$.
2. *([Duke Math.'16 (Admovic-Milas 予想 '95)])*
   $L_k(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{O}$ の中では有理的である. すなわち, $\mathcal{O}$ に属する任意の $L_k(\mathfrak{g})$ 加群は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容表現の直和である.

注意

(i). $L_k(\mathfrak{g})$ は可積分な時は WZW 模型と呼ばれる共型場理論に対応していたが, 許容表現の場合はログ共型場理論と呼ばれるエグゾティックな共型場理論に対応している ([Creuztig-Ridout]).

(ii). 条件 $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$ から, $L_k(\mathfrak{g})$ に対応するコンフォーマルブロックに関して, その台が大域冪零錘に含まれることがわかり, 従って $Bun_G(\Sigma)$ 上 (Σ は曲線) の D 加群としてホロノミックであることが従う.

W 代数の平滑性に関する結果

系 (T.A. IMRN'15 (Kac-脇本予想 '08 の一部))

$L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とし, $f \in \mathbb{O}_k$, (つまり $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_k}$）とすると, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は平滑である.

注意

全ての平滑かつ有理的な W 代数は上の系のように現れると予想されていたが, 最近川節和哉氏 ([川節, IMRN2016]) によって反例が与えられた.（後述の 4 次元の超対称性超共形場理論との関係で重要).

最も重要な W 代数は f が主冪零元に属する W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ であり、主 W 代数と呼ばれる.

許容アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ は

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathcal{N} = \overline{G.f_{prin}}$$

となるとき, 非退化であると呼ばれる. このとき, 前ページの系より, 単純 W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は平滑である. 従ってこれがさらに有理的であれば「良い」頂点代数となる.

定理 (T.A. Ann. Math. '15, (Frenkel-Kac-脇本 予想 '92))

$L_k(\mathfrak{g})$ を非退化な許容アフィン頂点代数とする. このとき, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は有理的である.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき, これらの有理的 W 代数は極小系列ヴィラソロ頂点代数に他ならない. このため, 上の定理に現れる W 代数は極小系列 (主)W 代数と呼ばれる.

コセット構成法との関係

W 代数の定義には, 量子 Drinfeld-Sokolov 還元法を使わない方法もいくつか存在する. しかし, 生成元と関係式がわかっていないので、異なる方法で定義された W 代数の間の同型を証明することは一般には困難.

定理 (T.A.-Creutzig-Linshaw '17 (in prepration))

$\mathfrak{g}$ を ADE 型, $L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とした時, コセット頂点代数

$$(L_k(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}[t]}$$

は極小系列 (主)W 代数に同型である. 逆に ADE 型の極小系列 (主)W 代数は全てこのようにして現れる.

(Virasoro 代数 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$) の場合は上はよく知られた GKO 構成法)

遮蔽作用素

前ページの定理の証明は物理においてよく使われる遮蔽作用素と呼ばれるものを用いる. W 代数の遮蔽作用素による記述は主 W 代数の場合以外は知られていなかったが, 最近元良直樹氏がその修論 [元良, Sel. Math. New Ser. published online] で一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の遮蔽作用素による記述を与えた.

シューア指数と頂点代数

物理において, 四次元の $N=2$ 超対称性を持つ超共形場理論 $\mathcal{T}$ はいくつかの重要な不変量（オブザーバブル）を持つが, その一つにシューア指数 $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(q)$ と呼ばれるものがある. 最近, Rastelli 等 ([Comm. Math. Phys. '15]) は

$$\mathrm{ch}\,\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(q)$$

を満たす「関手」

$$\Phi : \{\text{4d } N=2 \text{ SCFTs}\} \to \{\text{ 頂点代数 }\}$$

を構成した.

この対応によって現れる頂点代数は非常に興味深いが, エキゾチックでもある. 例えばこれらの頂点代数は決してユニタリーにならず, 従ってアフィンリー環の可積分表現などは現れない. また必ずしも有理的ではなく, 平滑とも限らない.

四次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ超共形場理論 $\mathcal{T}$ には, ヒッグス枝と呼ばれる別の不変量 $\mathrm{Higgs}(\mathcal{T})$ が存在する. ヒッグス枝は $\mathcal{T}$ のカイラル環のスペクトルとして定義されるシンプレクティックな代数多様体である. (実際にはハイパーケーラー).

ヒッグス枝と頂点代数の関係について, 次の「物理的」予想が存在する.

予想 (Beem-Rastelli '16)

四次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性を持つ超共形場理論 $\mathcal{T}$ に対して

$$\mathrm{Higgs}(\mathcal{T}) = X_{\Phi(\mathcal{T})}.$$

注意

$4d$-$3d$ 双対性というものが存在し，例えば A 型のクラス $\mathcal{S}$ 理論と呼ばれる四次元の超対称性超共形場理論のヒッグス枝は，最近 [Braverman-Finkelberg-中島] によって数学的な定義が与えられた (星形の箙に付随する)3 次元のゲージ理論のクーロン枝と一致する.

注意

頂点代数の随伴多様体は一般には単にポアソン代数多様体であるが、シンプレクティックとは限らない。

(非自明な例としては $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ が $\mathfrak{g}$ の Dixmier シートの閉包になる場合がある [T.A.-Moreau'17])

随伴多様体がハイパーケーラーである頂点代数の例

(i). 許容アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$: $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}}$,

(ii). ([T.A.-Moreau, J. Inst. Math. Jussieu '16] $\mathfrak{g} \in DES$ (Deligne 例外系列):

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8,$$

$k = -h^\vee/6 - 1$:

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_{min}}.$$

(四次元の超対称性超共形場理論から得られる頂点代数の最初の主要例)

(iii). $L_k(\mathfrak{g})$ を上に現れるアフィン頂点代数とし, $f \in X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}}$ としたときの W 代数 $H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))$:

$$X_{H^0_{DS,f}(L_k(\mathfrak{g}))} = \overline{\mathbb{O}} \cap \mathcal{S}_f \quad \text{(冪零スロードリー横断片)}.$$

擬平滑頂点代数

頂点代数は, その随伴多様体が有限個のシンプレックティク葉を持つとき, 擬平滑 (quasi-lisse) であるという ([T.A.-川節'16])

- 平滑頂点代数は擬平滑
- 前ページの例に現れる頂点代数は全て擬平滑
- 四次元の超対称性超共形場理論から得られる頂点代数は擬平滑 (ヒッグス枝予想+物理的考察).

定理 (T.A.-Moreau, '17 in preparation)

V を擬平滑な頂点代数とすると,

$$\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}\, V) = J_\infty X_V$$

(一般には $\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}\, V) \subset J_\infty X_V$ のみ)

擬平滑頂点代数とシューア指数のモジュラ不変性

定理 (T.A.-川節 '16, to appear in Kostant Memorical Vol.)

V を擬平滑な頂点（作用素）代数とすると, その指標 ch V はモジュラー線形微分方程式を満たす.

(平滑の場合は上はよく知られた結果 ([Zhu'96]))

モジュラー線形微分方程式の解空間は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変

$\Rightarrow$ 四次元の超対称性超共形場理論のシューア指数のモジュラ不変性 (物理的にも非自明)

例えば, 楕円ファイブレーションから作られるアフィン頂点代数の指標は非自明な Kazudan-Lusztig 多項式を用いて表されるため, モジュラー不変性は全く非自明 (モジュラー関数ではなく擬モジュラー関数になる $\Rightarrow$ 擬テータ関数を用いて表されるだろう ([Kac-脇本 '17, arXiv]))

今後の展望

四次元の超対称性超共形場理論などの高次元の場の理論と頂点代数の関係は現在発展中の話題で物理的も分かっていないことが多いが、大変興味深い内容とアイデアが (本当に) 数多く含まれる.
今後はこの周辺の話題を中心に研究していきたいと考えている.

ご静聴ありがとうございました.