コンピュータサイエンス基礎・講義資料（2017年度）

長谷川真人
京都大学数理解析研究所

2017年7月6日

1　復習：完備半順序集合と連続関数、及び最小不動点定理

この節は、前回までに導入した概念及び結果のうち、以後の講義に必要となる部分を要約したものである。

1.1　半順序集合と単調関数

定義 1.1

集合 X 上の**半順序**とは X 上の二項関係 $\leq$ で以下を満たすものである。

- (反射律) 全ての $x \in X$ で、$x \leq x$ が成り立つ。
- (推移律) 全ての $x, y, z \in X$ で、$x \leq y$ と $y \leq z$ が成り立つなら $x \leq z$ が成り立つ。
- (反対称律) 全ての $x, y \in X$ で、$x \leq y$ と $y \leq x$ が成り立つなら $x = y$ が成り立つ。

半順序集合とは集合 X と X 上の半順序の組のことである。混乱のおそれがない場合は半順序を省略し単に X を半順序集合と呼び、その半順序には記号 $\leq$ を使う。

自明な半順序　任意の集合 X は自明な半順序

$$x \leq y \iff x = y$$

により半順序集合とみなせる。

順序集合の持ち上げ　X を順序集合とする。特別な要素 $\perp$ を用意し (ただし $\perp \notin X$)、半順序集合 $X_\perp = X \cup \{\perp\}$ を

$$x \leq y \iff x = \perp または\ x = y$$

により定義する。一般に半順序集合 X の要素 $x \in X$ で任意の $y \in X$ について $x \leq y$ が成り立つとき x は**最小元**と呼ばれる。順序集合の持ち上げ $X_\perp$ は順序集合 X に最小元を追加する操作である。

直積　半順序集合 X と半順序集合 Y が与えられるとそれらから直積により新しい半順序集合 $X \times Y$ が構成できる。$X \times Y$ の半順序は

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \leq x' \text{ かつ } y \leq y'$$

で与えられる。

単調関数空間　半順序集合を考える場合、ただの関数ではなく単調性をもつ関数を考えるのが自然である。単調性とは半順序集合の間の関数で半順序を保つことである。

定義 1.2

半順序集合間の関数 $f\colon X \to Y$ が全ての $x, y \in X$ について $x \leq y$ なら $f(x) \leq f(y)$ を満たすとき f を**単調** (monotone) であるいう。X から Y への単調関数全体の集合を $X \to_{\mathrm{m}} Y$ と書く。

$X \to_{\mathrm{m}} Y$ には各点毎の比較で与えられる半順序

$$f \leq g \iff \text{すべての } x \in X \text{ で } f(x) \leq g(x)$$

がある。

1.2　完備半順序集合と連続関数

定義 1.3

半順序集合 X の要素 x で次の条件を満たすもののことを上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ の**最小上界（上限）**と呼ぶ。

- x は上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ の**上界**である。つまり全ての $n \in \mathbb{N}$ で $x_n \leq x$ が成り立つ。
- (最小性) 任意の $y \in X$ について y が上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ の上界なら $x \leq y$。

上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ の最小上界を $\bigvee_{n \geq 1} x_n$ と書く。半順序集合 X が最小元を持ち、さらに任意の X の上昇列の最小上界が存在するとき、X を**完備半順序集合**[a]と呼ぶ。

[a]多くの文献では、最小元の存在は仮定せず、最小元を持つ完備半順序集合のことは点付き完備半順序集合と呼んでいる。

定義 1.4

完備半順序集合 X から完備半順序集合 Y への単調関数 $f\colon X \to Y$ が任意の X の上昇列 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$ について $f\left(\bigvee_{n\ge 1} x_n\right) = \bigvee_{n\ge 1} f(x_n)$ を満たすとき f は**連続** (continuous) であるという。完備半順序集合 X から完備半順序集合 Y への連続関数全体の集合を $X \to_{\mathrm{c}} Y$ と書く。

半順序集合に対する構成はそのまま完備半順序集合の構成にもなっている。X と Y が完備半順序集合であるなら $X_\perp$ や $X \times Y$、$X \to_{\mathrm{c}} Y$ は完備半順序集合である。ただし $X \to_{\mathrm{c}} Y$ 上の半順序は各点ごとの比較で与えられるものである。$X \to_{\mathrm{c}} Y$ の最小元は常に Y の最小元を返す定数関数である。（なお、X が最小元を持たなくても、$X \to_{\mathrm{c}} Y$ は最小元をもつ完備半順序集合になる。たとえば、$\mathbb{N} \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp$ は完備半順序集合である。）

定義 1.5

完備半順序集合 X, Y に対し、連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} Y$ と $g\colon Y \to_{\mathrm{c}} X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在するとき X は Y と**同型**であると言い $X \cong Y$ と書く。

命題 1.6

完備半順序集合 X, Y, Z に対し、関数 *curry* は以下の同型を与える。

$$X \times Y \to_{\mathrm{c}} Z \;\cong\; X \to_{\mathrm{c}} (Y \to_{\mathrm{c}} Z)$$

1.3 再帰的定義と不動点定理

定理 1.7

完備半順序集合 X 上の連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ は最小不動点を持つ。最小不動点は

$$\bigvee_{n\ge 1} f^n(\perp)$$

で与えられる。

2 不動点帰納法（2017 年 6 月 29 日）

連続関数の最小不動点を用いて再帰的プログラムの解釈を与えたが、それは数学的な興味にとどまらず、プログラムの性質について有用な情報を得る手段をもたらすものである。ここでは、最小不動点に関するもっとも古典的な結果である**不動点帰納法**（別名 *Scott* 帰納法）について解説する。

2.1 最小不動点演算子

最小不動点に関して、若干の補足をする。まず、完備半順序集合 X について、関数 $\mathit{fix}_X\colon (X \to_{\mathrm{c}} X) \to X$ を、

$$\mathit{fix}_X(f) \;=\; \bigvee_{n\geq 1} f^n(\bot)$$

と定める。すなわち、fix_X は、連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ をその最小不動点 $\mathit{fix}_X(f)$ に写す関数である。実は、fix_X は、$X \to_{\mathrm{c}} X$ から X への連続関数であることが容易にわかる（したがって $\mathit{fix}_X\colon (X \to_{\mathrm{c}} X) \to_{\mathrm{c}} X$ である）。fix_X を、（X 上の）**最小不動点演算子**と呼ぶ。

2.2 許容的部分集合と不動点帰納法

定義 2.1

完備半順序集合 X の部分集合 P で以下の条件を満たすものを**許容的**（admissible）であるという。

- X の上昇列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$ について、各 x_i が P の要素であるならば、その上限 $\bigvee_{n\geq 1} x_n$ も P の要素である。
- $\bot$ は P の要素である。

いいかえると、X の部分集合であって、X の順序を制限したものがそのまま完備半順序となるのが許容的部分集合である。

許容的部分集合を用いると、不動点帰納法は以下のように定式化される。

定理 2.2

完備半順序集合 X とその許容的部分集合 P が与えられているとする。連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ が条件

任意の $x \in X$ について、$x \in P$ ならば $f(x) \in P$

を満たすとき、$\mathit{fix}_X(f) \in P$ である。

（証明）条件より、$\bot, f(\bot), f^2(\bot), \ldots$ はすべて P の要素である。P が許容的であることから、この無限単調列の上限 $\mathit{fix}_X(f)$ も P の要素である。 ■

自然数に関する（通常の）帰納法と比較してみよう。自然数に関する性質（$\mathbb{N}$ の部分集合）P について、0 が P を満たすこと（$0 \in P$）、および条件

任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$n \in P$ なら $n+1 \in P$

から

任意の $n \in \mathbb{N}$ について $n \in P$ が成り立つ

ということを導くのが、自然数に関する帰納法であった。少なくとも見た目は、不動点帰納法と通常の帰納法はよく似ていると言える。ただし、自然数の帰納法が自然数という概念そのものの特徴づけと不可分なものであることに対し、不動点帰納法は、どちらかといえば、通常の帰納法と同じような感覚で使えるように都合よく定式化されたものであり、あくまでも便利な道具と割り切って使うべきものである。（なお、不動点帰納法が成り立つような最小限の構造は何か、という問いかけは不毛なものではなく、完備半順序集合・連続関数の世界にとどまらず、非常に広い範囲の数学的構造について不動点帰納法の類似が成り立つことが知られている。）

2.3 許容的部分集合の構成方法

一見シンプルな不動点帰納法であるが、だまされてはいけない。ほとんどの面倒ごとは許容的部分集合をどうやってつくるか（あるいは与えられた部分集合が許容的であることをどのように証明するか）という下準備に押し付けられているのである。

幸い、許容的部分集合の構成方法は多く知られている。実用上は、知りたい性質（部分集合）が、いくつかの構成方法の組み合わせで得られるか調べることになる。以下では、基礎的な構成方法を紹介する。

命題 2.3

（下に閉じた集合） 完備半順序集合 X とその要素 d に対し、集合

$$\downarrow d \ = \ \{x \in X \mid x \leq d\}$$

は X の許容的部分集合である。

命題 2.4

（等号と不等号） 完備半順序集合 X に対し、集合

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

および

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \leq y\}$$

はいずれも $X \times X$ の許容的部分集合である。

命題 2.5

（逆像） 連続関数 $f \colon X \to_{\mathrm{c}} Y$ および Y の許容的部分集合 P に対し、もしも $f(\perp) \in P$ であるならば、集合

$$f^{-1}(P) \ = \ \{x \in X \mid f(x) \in P\}$$

は X の許容的部分集合である。

命題 2.6

（和と積） 完備半順序集合 X とその許容的部分集合 P, Q に対し、集合

$$P \cup Q$$

および

$$P \cap Q$$

はいずれも X の許容的部分集合である。

命題 2.7

（全称量化） 完備半順序集合 $X \times Y$ とその許容的部分集合 P に対し、もしも任意の $x \in X$ について $(x, \perp) \in P$ であるならば、集合

$$\{y \in Y \mid \text{すべての } x \text{ に対し } (x, y) \in P\}$$

は Y の許容的部分集合である。

練習問題 2.8 命題 *2.3*〜命題 *2.7* を示せ。

2.4 例：最小不動点の諸性質

命題 2.9

連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ および X の要素 d に対し、$f(d) \leq d$ ならば $\mathit{fix}_X(f) \leq d$ が成り立つ。

練習問題 2.10 命題 *2.9* を不動点帰納法を用いて証明せよ。（ヒント：許容的部分集合として $\downarrow d$ を使う。$x \in \downarrow d$ ならば $f(x) \in \downarrow d$ であることを示してみよう。）

練習問題 2.11 命題 *2.9* を（不動点帰納法を用いず）最小不動点の定義から直接証明せよ。

命題 2.12

連続関数 $f, g\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ が、$f \circ g \leq g \circ f$ （すなわち、すべての x について $f(g(x)) \leq g(f(x))$ が成り立つ）を満たしているとする。もしも $f(\perp) \leq g(\perp)$ ならば、$\mathit{fix}_X(f) \leq \mathit{fix}_X(g)$ が成り立つ。

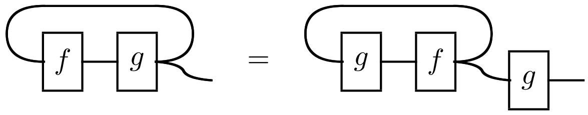
練習問題 2.13 命題 *2.12* を不動点帰納法を用いて証明せよ。（ヒント：最初に、命題 *2.4* と命題 *2.5* を用いて $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ が許容的集合であることを示そう。）

練習問題 2.14 命題 *2.12* を最小不動点の定義から直接証明せよ。

練習問題 2.15 連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} Y$ および $g\colon Y \to_{\mathrm{c}} X$ について、

$$\mathit{fix}_X(g \circ f) = g(\mathit{fix}_Y(f \circ g))$$

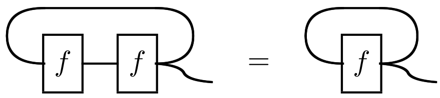
が成り立つことを示せ。



練習問題 2.16 連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ について、

$$\mathit{fix}_X(f \circ f) = \mathit{fix}_X(f)$$

が成り立つことを示せ。



2.5 例：プログラムの部分正当性

以下では、もう少し実際的な問題を考えてみる。一般に、プログラム p がある関数 f を計算する、と主張したいとき、以下のふたつの課題にわけて考えることが多い：

1. （停止性）任意の入力 x について、p(x) の実行が停止すること
2. （部分正当性）任意の入力 x について、p(x) の実行が停止するならばその結果が $f(x)$ と一致すること

不動点帰納法は、後者の部分正当性を示す際にしばしば有効である。（逆に、停止性の証明にはほぼ無力である。）

再帰的プログラム foo: $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{foo}(x,y) & = & \mathsf{if}\ (x=0)\ \mathsf{then}\ 0 \\ & & \qquad\qquad \mathsf{else\ if}\ (y=0)\ \mathsf{then}\ 0 \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad \mathsf{else\ foo}(x-1,y-1)+1 \end{array}$$

を例に考えてみよう。直感的には、自然数 x, y に対し、foo(x,y) は、それらの最小値 $min(x,y)$ を計算するはずである。

foo の意味は、連続関数

$$\begin{array}{l} F : ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp) \to_c ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp) \\ (F\ f)(x,y) \ = \ \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ または } y = 0 \\ f(x-1,y-1)+1 & \text{その他の場合} \end{cases} \end{array}$$

の最小不動点として捉えられる。したがって、

主張（部分正当性）: 自然数 x, y に対し、もしも $\mathsf{foo}(x, y)$ の実行が停止するならばその結果は $min(x, y)$ に等しい

は、F の最小不動点に関する主張

主張'（部分正当性'）: 自然数 x, y に対し、$\mathit{fix}_{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\to_{\mathrm{c}}\mathbb{N}_\perp}(F)(x, y) \le min(x, y)$

に置き換えることができる。これは、min を $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp$ の要素とみなせば、完備半順序集合 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp$ における不等式

$$\mathit{fix}_{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\to_{\mathrm{c}}\mathbb{N}_\perp}(F) \le min$$

に他ならない。ここで不動点帰納法の出番である。許容的部分集合

$$\downarrow(min) = \{f \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp \mid f \le min\}$$

を考えると、任意の $f : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to_{\mathrm{c}} \mathbb{N}_\perp$ について、$f \in\downarrow(min)$ であるならば $F(f) \in\downarrow(min)$ である。実際、$x = 0$ または $y = 0$ ならば、$(F(f))(x, y) = 0 = min(x, y)$ なので問題ない。それ以外の場合は、$(F(f))(x, y) = f(x-1, y-1)+1 \le min(x-1, y-1)+1 \le min(x, y)$ なので大丈夫である。したがって、不動点帰納法により、$\mathit{fix}_{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\to_{\mathrm{c}}\mathbb{N}_\perp}(F) \le min$ を示せた。

この方法は、より入り組んだ例、例えば McCarthy の 91 関数[1] や竹内のたらいまわし関数[2] でも全く同様に用いることができる。もちろん、不動点帰納法を用いずとも、より直接的な証明を与えることは可能だが、再帰的プログラムの部分正当性を示すための簡潔かつ汎用性の高い証明パターンとして、不動点帰納法と許容的部分集合を用いた手法が広く用いられている。（なお、不動点帰納法に匹敵し、より有名な証明技法として、Hoare 論理の、繰り返しを含む手続き型プログラムの部分正当性の証明技法が挙げられる。いずれも、再帰・繰り返しにおける不変な性質に着目する点が共通している。実際、Hoare 論理におけるループ不変性の議論が最小不動点を用いた意味論に帰着できることは、古くよりよく知られている。）

3　矛盾したものを構成する（2017 年 7 月 6 日）

（本節は長谷川の以前の数学入門公開講座 (2002) の内容に基づいている。）

---

[1] John McCarthy (1927-2011) が考案した再帰的プログラム

$$\begin{aligned} &F\colon \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N} \\ &F(x) \ = \ \mathsf{if}\ (x > 100)\ \mathsf{then}\ (x - 10)\ \mathsf{else}\ F(F(x + 11)) \end{aligned}$$

[2] 竹内郁雄 (1946-) が考案した再帰的プログラム

$$\begin{aligned} &T\colon \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{Z} \\ &T(x, y, z) \ = \ \mathsf{if}\ (x \le y)\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else}\ T(T(x - 1, y, z), T(y - 1, z, x), T(z - 1, x, y)) \end{aligned}$$

完備半順序集合と連続関数の世界は、非常に不思議な世界である。すべての連続関数が不動点を持つということ自体がすでに数学的に珍しい状況であるが、今回は、もっと非自明な、一見すると矛盾しているような事例を構成してみせる：

定理 3.1

任意の完備半順序集合 A について、

$$X \to_{\mathrm{c}} A \;\cong\; X$$

となるような完備半順序集合 X が存在する。

これは、集合と関数の世界では絶対に不可能なことである：A として二点集合を取れば、この定理は、$\wp(X)$ と X が同型となるような集合 X が存在する、ということを主張してしまうからである。

なお、この定理は、任意の連続関数 $f\colon A \to_{\mathrm{c}} A$ が不動点を持つことも（最小不動点定理とは独立に）主張している。[3]

3.1 最小不動点の発想と最初の試み

計算を簡単にするため、以下では、A が二点からなる完備半順序集合 $\Omega = \{\bot \le \top\}$ である場合だけを扱う。

完備半順序集合上の連続関数 $f\colon X \to_{\mathrm{c}} X$ の最小不動点 $\mathit{fix}_X(f)$ は、単調増加列

$$\bot, f(\bot), f^2(\bot), \ldots, f^n(\bot), \ldots$$

の上限として得られるのであった。同じように、$(X \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong X$ をみたすような X も、完備半順序集合 D に完備半順序集合 $D \to_{\mathrm{c}} \Omega$ を対応させる関数の "最小不動点"、すなわち適当な完備半順序集合 X_0 からはじまる無限列

$$X_0,\;\; (X_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega),\;\; ((X_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega) \to_{\mathrm{c}} \Omega),\;\; (((X_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega) \to_{\mathrm{c}} \Omega) \to_{\mathrm{c}} \Omega), \ldots$$

の "上限" として得られるのではないかと期待するのは自然な発想である。以下では、この直感的なアイデアを、実際に計算しながら検証していく。

完備半順序集合の無限列 $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ を、以下のように定める。

$$\begin{array}{rcll} X_0 & = & \{0\} & \text{(一点 0 だけからなる完備半順序集合)} \\ X_{i+1} & = & X_i \to_{\mathrm{c}} \Omega & (X_i \text{ から } \Omega \text{ への連続関数からなる完備半順序集合}) \end{array}$$

---

[3] $X \to_{\mathrm{c}} A \;\cong\; X$ であることから、可逆な連続関数 $\sigma\colon (X \to_{\mathrm{c}} A) \overset{\cong}{\to}_{\mathrm{c}} X$ が存在する。連続関数 $f\colon A \to_{\mathrm{c}} A$ に対し、新しい連続関数 $\Delta_f\colon X \to_{\mathrm{c}} A$ を $\Delta_f(x) = f((\sigma^{-1}(x))(x))$ で定義すると、$\sigma(\Delta_f) \in X$ であり、$\Delta_f(\sigma(\Delta_f)) \in A$ となるが、

$$\begin{array}{rcl} \Delta_f(\sigma(\Delta_f)) & = & f((\sigma^{-1}(\sigma(\Delta_f)))(\sigma(\Delta_f))) \\ & = & f(\Delta_f(\sigma(\Delta_f))) \end{array}$$

より、$\Delta_f(\sigma(\Delta_f))$ が f の不動点であることがわかる。この不動点の構成は、ラムダ計算における不動点コンビネータの構成や、素朴集合論におけるラッセルの逆理と本質的に同じである。

命題 3.2

D_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を、$n + 1$ 個の要素からなる完備半順序集合

$$\{0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq n\}$$

とする。このとき、任意の n について $X_n \cong D_n$ がなりたつ。

（証明）n に関する帰納法を用いる。$X_0 = D_0$ だから、明らかに $X_0 \cong D_0$ である。$X_n \cong D_n$ と仮定して、$X_{n+1} \cong D_{n+1}$ がなりたつことを示そう。$X_n \cong D_n$ より、$X_{n+1} = (X_n \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong (D_n \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ である。$(D_n \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ の要素は D_n から Ω への連続関数であるが、それは、連続関数の定義により、ある $0 \leq k \leq n + 1$ について

$$f^n_k(i) = \begin{cases} \bot & i + k \leq n \text{ のとき} \\ \top & i + k > n \text{ のとき} \end{cases}$$

というかたちになっていなくてはならない。とくに f^n_0 はつねに $\bot$ を返す定数関数、また f^n_{n+1} はつねに $\top$ を返す定数関数である。したがって、$(D_n \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ は、$n + 2$ 個の要素 $f^n_0, f^n_1, \dots, f^n_n, f^n_{n+1}$ を持つことがわかる。また、これらは、順序

$$f^n_0 \leq f^n_1 \leq \cdots \leq f^n_n \leq f^n_{n+1}$$

をなすので、$(D_n \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong D_{n+1}$ である。$X_{n+1} \cong (D_n \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ だったから、$X_{n+1} \cong D_{n+1}$ がなりたつ。 ■

この結果から、我々が考察している無限列は (同型なもので置き換えると)

$$\{0\},\ \{0 \leq 1\},\ \{0 \leq 1 \leq 2\}, \dots,\ \{0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq n\}, \dots$$

であることがわかった。直感的には、これらは単調に増加していく完備半順序集合の列になっていると言ってよさそうである。では、その “上限” はなんだろうか？単純にこれらを全部あわせた

$$\{0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq n \leq \dots\}$$

だろうか？ 一見これでよさそうだが、問題がある。まず、単純なことだが、この順序集合は完備半順序集合ではない。単調列 $0 \leq 1 \leq \cdots \leq n \leq \dots$ の上限が存在しないのである。さいわい、簡単な解決法として、“無限大”∞ を追加してやれば、完備半順序集合

$$\{0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq n \leq \cdots \leq \infty\}$$

を得ることができる。この完備半順序集合を Θ とよぶことにしよう。では、$(\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong \Theta$ だろうか？

命題 3.3

$(\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong \Theta$ はなりたたない。

（証明）実際に $(\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ を計算してみればよい。Θ から Ω への連続関数は、ある $k \geq 0$ について

$$f_k(x) = \begin{cases} \top & k \leq x \text{ のとき} \\ \bot & \text{その他のとき} \end{cases}$$

というかたちをしているか、または定数関数 $f_\infty(i) = \bot$ でなくてはならない。これらの間の順序は、

$$f_\infty \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots \leq f_2 \leq f_1 \leq f_0$$

(いいかえれば $-\infty \leq \cdots \leq -2 \leq -1 \leq 0$) となり、これは Θ と同型ではない (確かめよ)。なお、$((\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega) \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong \Theta$ もなりたたない (これも練習問題とする)。 ■

練習問題 3.4 $((\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega) \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong \Theta$ もなりたたないことを確かめよ。しかし、$(D \to_{\mathrm{c}} E)$ の要素のうち $\bot_D$ を $\bot_E$ にうつすものだけからなる完備半順序集合を $(D \multimap E)$ とあらわすことにすると、実は $((\Theta \to_{\mathrm{c}} \Omega) \multimap \Omega) \cong \Theta$ がなりたつ。確かめよ。

3.2 埋め込みと射影

以上の試みでは、なにがいけなかったのだろう？ 無限列

$$\{0\},\ \{0 \leq 1\},\ \{0 \leq 1 \leq 2\}, \ldots,\ \{0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots \leq n\}, \ldots$$

を考えたところまでは問題がないのだが、それから安易に (和集合として)“上限”Θ を計算したのがどうもまずいようである。

実は、この無限列を “単調増加列” とみなす方法はひととおりにはきまらない：

定義 3.5

完備半順序集合 D と E について、$D \leq E$ であるとは、連続関数 $e\colon D \to_{\mathrm{c}} E$ および $p\colon E \to_{\mathrm{c}} D$ が存在して $p \circ e = id_D$ と $e \circ p \leq id_E$ をみたすことをいう。e のことを埋め込み、また p のことを射影とよぶ。

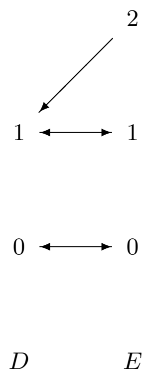
$D \leq E$ となるための埋め込みと射影の取り方は、ひととおりとは限らない。たとえば、$D = \{0 \leq 1\}$, $E = \{0 \leq 1 \leq 2\}$ とすると、$D \leq E$ とするための埋め込み e と射影 p は、

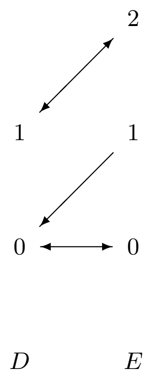
$$e(0) = 0, e(1) = 1,\ p(0) = 0, p(1) = p(2) = 1$$

とすることも、また

$$e(0) = 0, e(1) = 2,\ p(0) = p(1) = 0, p(2) = 1$$

とすることもでき、これらは D より E が “大きい” とみなす二通りの方法をあらわしている。図示すると以下のようになる。左から右への矢印は埋め込み e の作用を、また右から左への矢印は射影 p の作用をそれぞれあらわす。





なお、埋め込みを定めると、対応する射影はただひとつ定まり、また、射影を定めると対応する埋め込みもただひとつに定まる。証明は練習問題とする。

練習問題 3.6 $e\colon D \to_{\mathrm{c}} E$, $p, p'\colon E \to_{\mathrm{c}} D$ について、e, p と e, p' がともに埋め込みと射影の組をなすならば、$p = p'$ であることを示せ。また、$e, e'\colon D \to_{\mathrm{c}} E$, $p\colon E \to_{\mathrm{c}} D$ について、e, p と e', p がともに埋め込みと射影の組をなすならば、$e = e'$ であることを示せ。

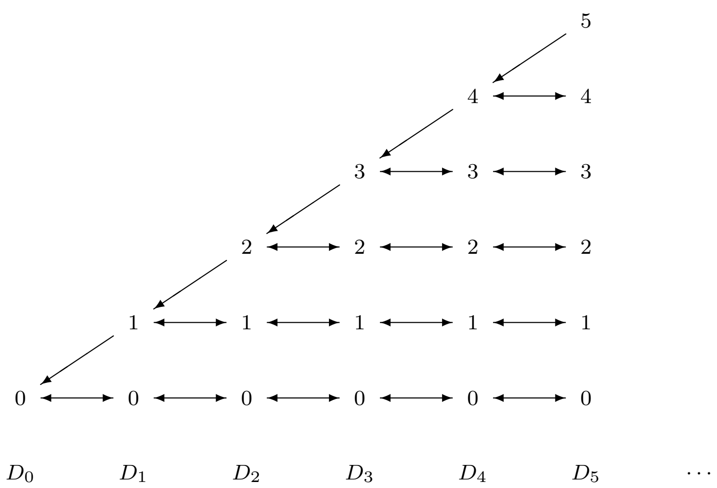
練習問題 3.7 $e\colon D \to_{\mathrm{c}} E$ と $p\colon E \to_{\mathrm{c}} D$ が埋め込みと射影になっているとき、e は D の最小元を E の最小元に写すことを示せ。

3.3 失敗の分析

特に、Θ を得た発想は、以下の図で理解することができる。ここでは、単純に、埋め込み $e_n : D_n \to D_{n+1}$ と射影 $p_n : D_{n+1} \to D_n$ を

$$e_n(x) = x, \quad p_n(x) = \begin{cases} x & x \leq n \text{ のとき} \\ n & x = n+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めている。



この図で、射影によりつながった無限列 $(0,1,2,\ldots,n,n,n,\ldots)$ を n と、また (無限に増加していく) 無限列 $(0,1,2,\ldots,n,n+1,\ldots)$ を ∞ と同一視して考えることにより、Θ が得られるのである。

ところが、この埋め込みと射影の定め方は、$(X \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong X$ をみたす X を見つけるためにはうまく働かない。例として、D_0 から D_1、また D_1 から D_2 への埋め込みおよび射影がどのようになっているべきか考えよう。

まず、$D_0 = \{0\}, D_1 = \{0 \leq 1\}$ であった。この場合には埋め込みと射影はひとつおりしか存在しない。その埋め込み $e_0 : D_0 \to D_1$ は 0 を 0 に写し、また射影 $p_0 : D_1 \to D_0$ は 0 も 1 も 0 に写す。

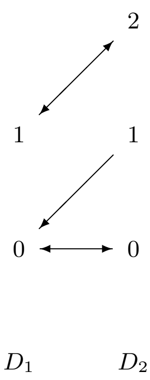
次に、$D_2 = \{0 \leq 1 \leq 2\}$ であった。しかし、D_1 は、

$$X_1 \cong (D_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega) = \{f_0^0 \leq f_1^0\}$$

また、D_2 は、

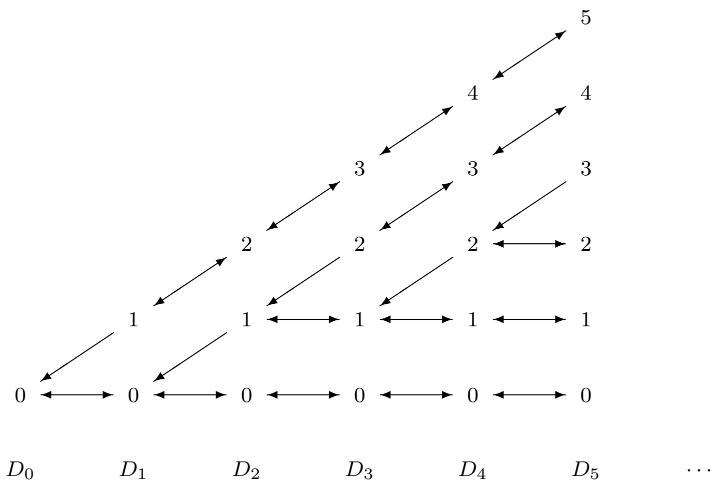
$$X_2 \cong (D_1 \to_{\mathrm{c}} \Omega) = \{f_0^1 \leq f_1^1 \leq f_2^1\}$$

として得られたものであり、$D_1 \leq D_2$ とするための正しい埋め込みは、$f_0^0 : D_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega$ をその自然な拡張である $f_0^0 \circ p_0 = f_0^1 : D_1 \to_{\mathrm{c}} \Omega$ に、また $f_1^0 : D_0 \to_{\mathrm{c}} \Omega$ をその拡張である $f_1^0 \circ p_0 = f_2^1 : D_1 \to_{\mathrm{c}} \Omega$ に、それぞれ対応させるものでなくてはならない。D_1 と D_2 の要素について言い換えると、埋め込み $e_1 : D_1 \to D_2$ は 0 を 0 に、また 1 を 2 に写さなくてはならない。一方、射影の方は、$f_0^1 : D_1 \to \Omega$ をその自然な制限である $f_0^1 \circ e_0 = f_1^0 : D_0 \to \Omega$ に、また f_1^1 を $f_1^1 \circ e_0 = f_0^0$ に、さらに f_2^1 を $f_2^1 \circ e_0 = f_1^1$ に、それぞれ対応させるものである。D_1 と D_2 について言い換えると、射影 $p_1 : D_2 \to D_1$ は、0 と 1 を 0 に、また 2 を 1 に写すものである。これを図示すると以下のようになる。



3.4 正しい解の構成：逆極限法

同様にして、D_2 から D_3 への埋め込みと射影、D_3 から D_4 への埋め込みと射影、...、も、関数が自然な拡張・制限に対応されるように定めていくことができる。その結果を途中まで示したのが以下の図である。



この埋め込み・射影の“上限”として得られる完備半順序集合が Θ ではないことは、容易に想像がつくだろう。実際、

$$
\begin{array}{lll}
0 & \text{を無限列} & (0,0,0,0,\dots)\ \text{と} \\
1 & \text{を無限列} & (0,0,1,1,1,\dots)\ \text{と} \\
\vdots & & \\
n & \text{を無限列} & (0,0,1,1,2,2\dots,n,n,n,\dots)\ \text{と} \\
\vdots & & \\
\infty & \text{を無限列} & (0,0,1,1,2,2,\dots,m,m,m+1,m+1,\dots)\ \text{と} \\
\vdots & & \\
n' & \text{を無限列} & (0,0,1,1,2,2,\dots,n,n+1,n+2,\dots)\ \text{と} \\
\vdots & & \\
1' & \text{を無限列} & (0,0,1,2,3,\dots)\ \text{と} \\
0' & \text{を無限列} & (0,1,2,3,\dots)\ \text{と}
\end{array}
$$

同一視することにより、完備半順序集合

$$\Phi = \{0 \le 1 \le 2 \le \cdots \le \infty \le \cdots \le 2' \le 1' \le 0'\}$$

が得られる。

定理 3.8

$(\Phi \to_{\mathrm{c}} \Omega) \cong \Phi$ がなりたつ。

（証明）$x \in \Phi$ に対し連続関数 $\psi_x : \Phi \to_{\mathrm{c}} \Omega$ を以下の表で定める (ψ_x を y に適用した結果 $\psi_x(y)$ を、ψ_x 行の y 列に示す)。

	0	1	$\dots$	$n-1$	n	$\dots$	∞	$\dots$	n'	$n-1'$	$\dots$	$1'$	$0'$
ψ_0	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$
ψ_1	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\top$
$\vdots$													
ψ_n	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$
$\vdots$													
ψ_∞	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$
$\vdots$													
$\psi_{n'}$	$\bot$	$\bot$	$\dots$	$\bot$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$
$\vdots$													
$\psi_{1'}$	$\bot$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$
$\psi_{0'}$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$	$\dots$	$\top$	$\top$

写像 $\psi : x \mapsto \psi_x$ が Φ から $(\Phi \to_{\mathrm{c}} \Omega)$ への同型な連続関数となっていることは容易に確認できる。 ■

練習問題 3.9 $\psi : x \mapsto \psi_x$ が同型な連続関数であることを示せ。

3.5 領域理論

今回解説したことは、Dana Scott (1932-) の歴史的な結果の本質的な部分である：

定理 3.10

$(X \to_{\mathrm{c}} X) \cong X$ であるような非自明な完備半順序集合 X が存在する。

（証明）$A \cong A \times A$ となるような非自明な（つまり、複数の要素を持つような）完備半順序集合 A をとる（たとえば、任意の完備半順序集合 D に対し、その可算無限個の直積 D^ω は $D^\omega \cong D^\omega \times D^\omega$ を満たす）。本節最初の定理より、$(X \to_{\mathrm{c}} A) \cong X$ となる完備半順序集合 X が存在する。A が非自明なら、X も非自明である。ここで、

$$X \cong (X \to_{\mathrm{c}} A) \cong (X \to_{\mathrm{c}} (A \times A)) \cong (X \to_{\mathrm{c}} A) \times (X \to_{\mathrm{c}} A) \cong X \times X$$

なので、$X \cong X \times X$ である。したがって

$$X \cong (X \to_{\mathrm{c}} A) \cong ((X \times X) \to_{\mathrm{c}} A) \cong (X \to_{\mathrm{c}} (X \to_{\mathrm{c}} A)) \cong (X \to_{\mathrm{c}} X)$$

■

$(X \to_{\mathrm{c}} X) \cong X$ であるような完備半順序集合 X は、関数とデータの区別が存在しない計算モデルである**ラムダ計算**の意味論を与える最初の例として、プログラミング言語の意味論の発展に決定的な影響を与えた（Scott は完備半順序集合ではなく完備束を用いていたが、用いられた方法はここで述べたものとほぼ同じである）。いわゆる**領域理論**（domain theory）は、この発見を機に、プログラミング言語の意味論の中心的話題として、1970 年代から広く深く研究されてきた。