数理工学 —— 「工学」諸問題を数理する！

藤重 悟　(京都大学数理解析研究所)

本小文[1]は，数学やその応用に関心をもつ高校生や大学１，２年生および専門外の研究者・技術者に「数理工学」について広く知ってもらうために，専門的な記述は極力避けて「数理工学」について書いたものである．「数理工学」および関連する分野として本小文で説明する「数理計画」や「離散最適化・離散アルゴリズム」に関するより専門的な事柄に関しては文末の参考文献を参照されたい．

1.　数理工学とは

数理工学について語るには，その言葉の定義から始めなければならないが，数理工学に関わっている人たちの間で，はっきりとした共通の定義が了解されているとは言いがたいのが実情であろう．したがって，本小文で述べる「数理工学」はあくまでも私見に過ぎないことを始めにお断りしておきたい．

さて，私見であるが,「**数理工学**」とは，端的に述べると，**「工学」諸問題を数理する学問**である．

ここで，括弧付きの「工学」とは，(括弧付きの)「**もの作り**」である．ここで言う「もの作り」とは，従来の伝統的な工学の分野で対象としてきた物理的な実在としての物（たとえば，自動車，飛行機，建築物，電気製品，コンピュータ，道路，通信網など）の物作りは勿論，それらの物を動かし運用するシステム作りや設計・配置，さらには計画作り・スケジューリングなどの産業諸活動におけるソフトな「もの作り」をも意味し，もっと広く企業・自治体や人間などの組織や個人の意思決定に関わる経済諸活動や社会活動におけるシステム作りや計画作りも「もの作り」の一つである．このような広い意味での「もの作り」をここでは括弧付きの「工学」と考えている．したがって,「数理工学」は，いわゆる工学諸問題は勿論のこと，経済，経営，社会，環境，生命，情報の諸問題など，あらゆる現実の実際的問題を数理するのである (図 1 参照).

[1]これは、文部科学省科学技術政策研究所 編著：「数学イノベーション」第７章の元原稿です。

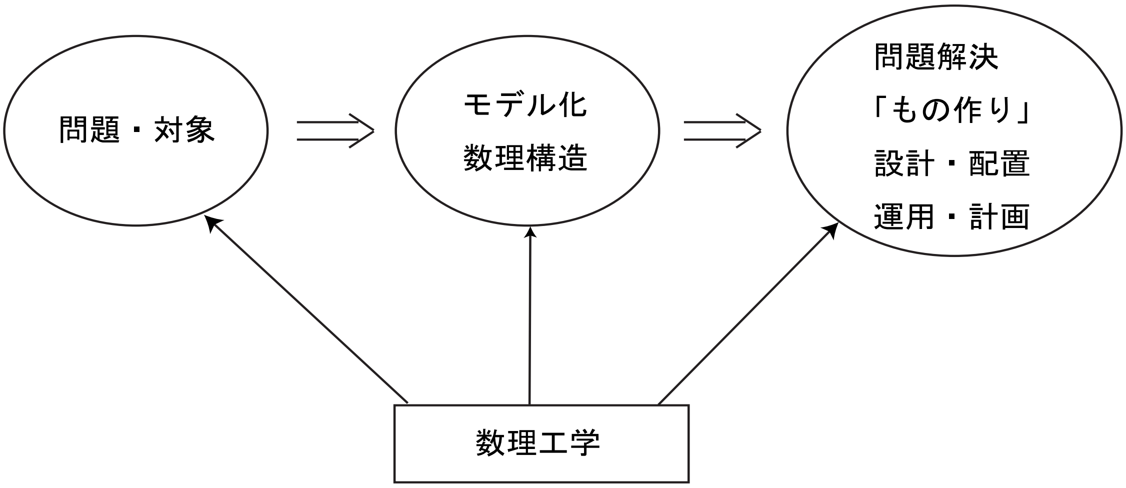

図 1.「数理工学」の役割.

なお,「**数理する**」という用語はまだあまり広く認知されてはいない使い方であると思われるが,「数理する」とは，対象を分析し，その本質的な数理構造を解明し，数学的，論理的にモデル化し，曖昧さなく数学的，論理的な洞察により問題解決を図ることである.（不確実さや曖昧さも数学的に「曖昧さ」なく定義するのである.）したがって，数理するために数学は必須であり，数学あっての数理工学であることをまずは注意しておきたい.

ところで，工学が付いているからといって,「数理工学」を「数理する工学」や「数理的な工学」として，狭く工学の一分野と考えてはいけない. その逆であって,「数理工学」は広範な「もの作り」を数理し，さらに文理横断的な「もの作り」をも数理する学問である.「もの作り」を必ずしも意識しない「数理科学」と「もの作り」を数理する「数理工学」は数理するという観点から極めて近い学問分野である. 言い換えれば,「数理工学」は,「もの作り」を意識する「数理科学」であるとも言えよう.（「数理科学」は科学を数理する学問であるが,「数学」と同義に考えられることも多い.）日本で育てられてきた「数理工学」が，科学研究費の申請分野では「工学基礎」の形で，工学の中に小さく位置づけられているように見受けられるが,「数理工学」は，広範な対象を数理する学問として，工学を超えた位置づけがされるべきではないだろうか？

2.　数理工学と数学

純粋数学は,「もの作り」を（必ずしも）意識することなく，現実の実際的な問題に囚われることなく自由な発想と思考によって高度に発展してきた. 現実世界に囚われず，高度に究められた数学的成果が，近年のファイナンスや符号化・暗号化などへの応用に見られるように，現実の問題の解決に決定的な役割を果たすことも少なくない. この意味で，何ものにも囚われず自由な発想と思考で展開される「数学」の持続的な発展は極めて重要である.

一方,「数理工学」は,「もの作り」を数理する学問であり，いわゆる伝統的な「数学」ではないが，問題の解決にあたっては，既存の数学の成果を活用し，対象の数理構造に深く切り込む. そして，必要に応じて創出される有効な解決法が新たな「数学」的な理論を生み出し，それが，新たな「数学」的な成果となって「数学」の発展に寄与することも少なくない.（たとえば，後述のオペレーションズ・リサーチにおける実際的な問題解決のために創出された G. B. ダンツィク (Dantzig) による線形計画のアルゴリズム（単体法）と双対定理[2]は，最適化は勿論，凸解析や組合せ論などへも大きな寄与をしている.）(以下に述べる「応用数学」においても，同様に「数学」との相互作用がある. ）このような「数学」との相互作用は,「数学」と「数理工学」の双方の発展にとって重要である (図 2).　なお，数学と数理工学は共に，他の諸科学との相互作用も大きい. 特に，数学は物理学との相互作用が大きく，数理工学はコンピュータ・サイエンス（計算機科学）との相互作用も大きい (後述の「アルゴリズム」はその接点にある).

ところで，数学の高度な成果が現実の問題解決に有効に寄与するという形で，現実の問題解決に使われた (使われる) 数学という「**応用数学**」(applied mathematics) は,「数理工学」と密接に関係する．両者を同一視する向きもあるが,「数理工学」は「もの作り」を目指すという点で意識の違いがある．すなわち,「応用数学」は，応用された実績をもつ数学あるいは応用され得る (applicable) 数学を意味するが,「数理工学」は，未解決な「もの作り」を数理し解決するという，問題解決型の将来の展開へ向けての学問である（ただし,「応用され得る (applicable) 数学」は「応用数学」と「数理工学」が共有する部分ではあるが）.

[2]線形計画の双対定理は，ダンツィクが助言を求めて J. フォン・ノイマン (von Neumann) を訪ねた際に得られた.

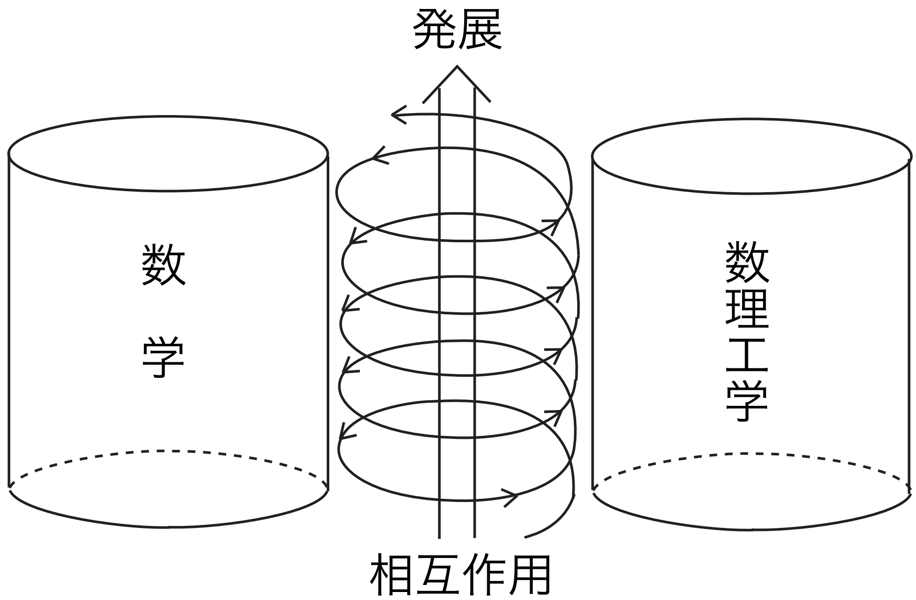

図 2. 数学と数理工学.

3. 「数理工学」の実践

本書の「第二部」で扱われるテーマはすべて,「数理工学」が対象とするべきものであり,「数理工学」の立場から寄与できるものである. ここでは，筆者が関わってきている研究分野における「数理工学」の実践についてお話ししよう.

3.1. オペレーションズ・リサーチ

筆者は，東大の助手・講師時代に伊理正夫先生の下で「**離散最適化（組合せ最適化）**」，特に「マトロイド」構造あるいは「劣モジュラ」構造が関わる「離散最適化」の研究を始めた. 「離散最適化」はさらに広く「**数理計画（最適化）**」に，それはさらに「**オペレーションズ・リサーチ**」に包含される (図 3 参照).

オペレーションズ・リサーチ (Operations Research，略称 OR)[3]は，第二次世界大戦中にアメリカやイギリスにおいて作戦 (オペレーションズ) 研究として始められた. 特に，前線で必要となる武器や物資を供給する後方支援活動を効率よく実施するロジスティクス（兵站）の研究で成果を上げた. そして，戦後，その成果が産業の現場

[3]ヨーロッパでは Operational Research とも呼ばれる.

オペレーションズ・リサーチ

　数理計画（最適化）

　　連続最適化（線形計画，凸計画，非線形計画，半正定値計画，
　　　変分不等式，大域最適化，· · · ）

　　離散最適化（整数計画，ネットワーク計画，劣モジュラ最適化，
　　　離散凸解析，制約充足問題，分枝限定法，
　　　メタヒューリスティクス，· · ·）

　　動的計画

　　確率計画

　　ゲーム理論

　　多目的計画

　　シミュレーション

　　　⋮

　待ち行列

　スケジューリング・生産管理

　⋮

図 3. オペレーションズ・リサーチと数理計画（最適化）.

で有効に生かされ，その分野は，数理的解析技法や最適化技法の進展と共に，オペレーションズ・リサーチとして成長発展していった.

オペレーションズ・リサーチ（OR）は，現在あるものをいかに効率よく‘運用’して（必要なら不足するものを外部から調達して）目標を達成するかを数理するものである. そのための解析・設計の理論や技法として，数理計画，待ち行列，シミュレーション，スケジューリング，統計・データ解析，分類・評価法，予測・制御，生産管理・在庫管理，品質管理，信頼性・保全，意思決定論，ゲーム理論などがあり，物流・配送・輸送，情報通信ネットワーク，経営情報・経営管理，マーケティング，金融工学，都市・地域，資源・環境などにおける問題解決に活用されている.

オペレーションズ・リサーチについては，[1], [2] などを参照されたい.

3.2. 数理計画と離散最適化

さて,「**数理計画**」とは, まさに「計画を数理する理論（技法）」である. その技法を強調する場合には, しばしば,「**数理計画法**」と呼ばれる. 英語では, Mathematical Programming と言われるが, Programming は Planning と同義であって, 計画を意味する.[4]

数理計画が扱う問題は, いくつかの「**制約**」を満たすという要請（条件）の下で,「**目標**」を達成する解を見つける問題であって, 対象となる実際的問題は極めて多岐にわたり,「工学」諸問題が対象となる. ここで,「制約」や「目標」は, 可能な解を（多次元の）変数として数学的に明確に定義される. たとえば,「制約」は等式や不等式で表されたり,「目標」は指定された関数 (評価関数) の最大化であったりする. また, 変数は, 長さや嵩（かさ）などの連続量であったり, 個数などの（非負）整数あるいは処理の順序や配置などの組合せ的な関係を表す離散量であったりする. 連続量を扱う**連続最適化**と離散量を扱う**離散最適化**に大きく分けられるが, 両者が混在する最適化もある.

数理計画では, このように問題が数学的に曖昧さなく記述されたモデルから, いかにして最適な（目標を達成する）解を '効率よく' 見つけるか, が課題となる.[5] そのような解を見つける手続き (手順) を**アルゴリズム**といい, 通常の場合コンピュータの利用が想定される. 数学的, 論理的に裏打ちされた「数理計画」の真骨頂は, 最適解を示すことによって「もっと良い解があるのではないか？」という問いにはっきりと「ない. これが最良である」と言い切れることである.（それでもなお, 意思決定者が納得できないのであれば, そのことはモデルの修正を要請しているのである.） なお, 最適解を見出すことが困難（実際上不可能）である問題も数多く存在し, そのような問題に対しても, 実用上満足のいく解を高速に求める実用的なアルゴリズムの研究が精力的になされている (後述).

[4]コンピュータ・サイエンスにおいてプログラミングというと, コンピュータを動かすためのいわゆるプログラムの作成を意味するが, これはコンピュータの処理作業を指示する一連の命令からなる処理手順 '計画' 書の作成である.

[5]オペレーションズ・リサーチでは, 現実の問題から本来望まれる解を見出すために, 本質でない部分を捨象し, しかも本質を見失わずに取り扱い可能な形のモデルを 'うまく' 構築することが肝要であり, 意思決定者が満足する解を得るまでに,「モデル化, 最適化, 再モデル化」のサイクルが何度も繰り返される.

3.3. 使う数学・使える数学

さて，離散最適化では，通常，考察の対象となる可能な解[6]の個数は有限である．したがって，最適解は，そのような可能な解をすべて‘しらみつぶし的’に調べることによって原理的には求められる．その意味では，単純で容易な問題とみなされるかも知れない．ところが，実際にはそのような‘しらみつぶし的’な方法ではほとんどの場合使い物にならないのである．そのことを実感するために，たとえば，要素数 50 の集合のすべての部分集合を一つずつ調べるのにどのくらい時間がかかるかを考えてみよう．一つ調べるのに 10^{-6} 秒かかるとして，部分集合の個数は 2^{50} であるから，全体で $10^{-6} \times 2^{50}$ 秒，すなわち約 35 年もかかるのである．1000 倍速くなるとしても，約 13 日かかる．実際的な問題では，要素数が数千，数万の集合の部分集合族を扱うこともめずらしくないのであるから，使い物にならないことが分かるであろう．

図書館の端末やインターネットなどで文献情報の検索をする際，あるいは自動車に乗ってカーナビで目的地への経路を探索する際に，その裏では巧妙な離散アルゴリズムが働いており，あっと言う間に結果を表示してくれる．これにたとえば 1 分もかかるとすれば大変不便である．問題となる対象が何の構造も持っていなければお手上げであり，基本的に‘しらみつぶし的’な方法しかないのであるが，有用な数理構造を解明することによって実用的に効率の良いアルゴリズムを構築することが可能となる．[7]

このように，離散最適化においては，有効な数理的離散構造を抽出して，天文学的に大きな個数の実行可能解の中からいかにして高速に最適解を見つけるかという極めて自明でない問題に取り組むことになるのである．

「数理工学」の観点からいうと,「離散最適化」あるいはより広く「数理計画」は,数学を使い，対象の持つ有用な数理構造を解明し，効率的に最適解を見出す「**使える数学**」(その実現としての「**アルゴリズム**」) の構築である (図 4).

3.4. 離散アルゴリズム

伝統的な「数学」を現実の実際的な問題に適用する場合に，理論的，解析的にうまく陽に解けることは少なく，実際にはコンピュータを使って個別の実例の問題を

[6]数理計画では実行可能解あるいは可能解などと呼ばれる．

[7]この便利さはアルゴリズムの進歩もさることながらハードウエアの進歩も大きい．しかしながら，性能の向上は，ハードウエアの進歩だけでは物理的に限界があるのは明らかであり，アルゴリズムの進歩が必須である．

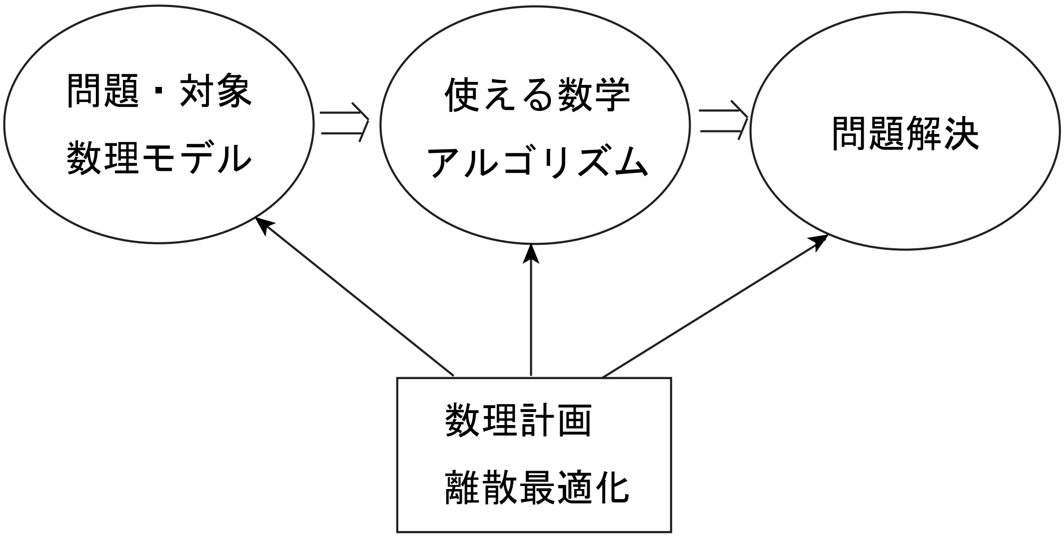

図 4. 使える数学へ.

解くことが必要となる. 有限な資源を使うコンピュータでは，与えられた問題のデータを有限長の数値で表現し，微分や偏微分を差分などで近似し，あるいは，空間的な広がりも離散的なサンプル点で代表して，というような離散化の手続きを経てコンピュータで計算可能になる (これとは違う形の離散化や量子化もある).[8] 誤差解析や精度保証を伴うこのような「数値計算法」もここでいう「アルゴリズム」の一つの重要な技法であり，高度に進歩した理論的な「数学」を実用の「使える数学」にするための重要な役割を果たしている.

上述のように,「離散最適化」では，扱うものが基本的に有限であり，最適解を見出す問題は，可能な解の全てを単純に調べれば（有限時間内に) 分かるのであるから，容易に片付けられるように思われるかも知れないが，実用上問題となる有限は，天文学的に大きな有限であって，単純に ‘しらみつぶし的’ に調べようとすると現在の最高速なコンピュータを使っても（例えば何十年，何百年もかかり）実用に耐えられなくなる．したがって，有限個の解の集まりから最も良い解を一つ選ぶという見かけは単純な問題でも，実用上「使える数学」の観点からは，極めて自明でない難しい問題となる．いかにして高速に実時間内に良い（できれば最適な）解を見出すかということが「(離散) アルゴリズム」の主要なテーマである. 高速なアルゴリズムの開発のために，対象となる問題の根底にある有用な離散構造を解明することが肝要である.

[8] このような連続から離散への変換に対して，たとえば整数格子点の集まりをその凸包による凸多面体として捉えるような離散から連続への変換もある. このような離散構造の凸多面体緩和による表現は離散最適化における強力な枠組み (**多面体組合せ論** (Polyhedral Combinatorics)) となっている.

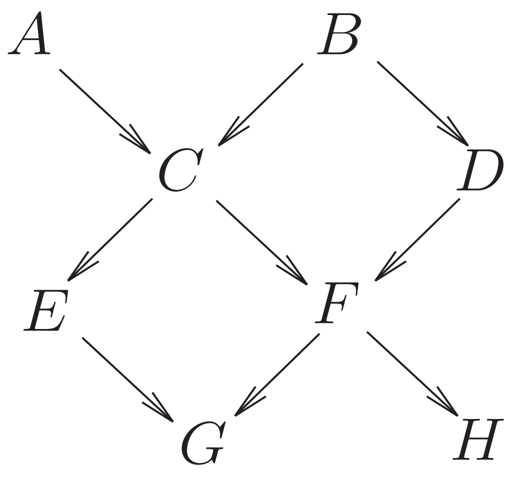

図 5. 回送可能なバスルートの関係図.

ここで，単純化したモデルであるが，少し具体的に離散最適化問題を考えてみよう.

バスのスケジューリング問題

あるバス会社において，あるバス停を何時何分に出発していくつかの停留所を経由して終点のバス停に何時何分に到着するという時刻表が定まったバスルート $A \sim H$ が指定されているとする.[9] そこで，そのバス会社のすべてのバスルートを時刻表にしたがって走らせるバスは最小で何台あればよいか，を考えてみよう.

一つのバスルートを走ったバスは，そのバスルートの終点のバス停から移動して他のバスルートの始点の出発時刻に間に合えば，引き続きその次のバスルートを走ることが可能である．１台のバスで引き続き走ることが可能なバスルートを矢線で結ぶと，例えば，図 5 のような矢線図が得られる．(ただし，図が複雑になるので，($A \to C \to F$ から $A \to F$ であるが) $A \to F$ のような推移的な矢線を省略している.)[10] たとえば，$A \to C \to F \to H$ と $B \to E$ と $D \to G$ のようにバスルートを結べば，３台のバスで運行可能であるし，$A \to C \to E \to G$ と $B \to D \to F \to H$ とすれば，２台で済む. 一方，A, B のように１台のバスで引き続いては運行できないルートが存在するから，バスが最低２台は必要であることが分かる. したがって，答えは２台である.

---

[9] 同じバス運行経路でも異なる時間帯で走行するものは異なる ‘バスルート’ として扱われることを注意する.

[10] このような矢線図はグラフと呼ばれる. ただし，これは特殊な構造をしたグラフで，半順序集合のハッセ図と呼ばれるものに対応するものになっている.

この問題は，つぎのような数理構造を有している．二つのバスルートが 1 台のバスで引き続き運行できないとき，その二つは独立であると言うことにしよう．すると，容易に分かるように，すべてのバスルートを走り運行可能なバスの台数は，互いに独立なバスルートの集まりのサイズより少なくはできない．ところが，さらに強く一般的に，

$$(\text{運行可能なバスの最小数}) = (\text{互いに独立なバスルートの集まりの最大サイズ})$$

が成り立つ．この最小・最大定理は，半順序集合 P におけるディルワース (Dilworth) の定理として知られる等式

$$(P \text{ を被覆する鎖の最小個数}) = (P \text{ の独立点集合の最大サイズ})$$

に対応するものである.[11] この最小・最大定理は，実は，多面体緩和することによって得られる線形計画問題の双対定理から（その整数性によって）も得られるものなのである．

このバス・スケジューリングの問題は，バスルートの数を n として，$\mathrm{O}(n^3)$ の計算時間で解くことが可能である. (正整数 k に対して，計算時間が $\mathrm{O}(n^k)$ であるとは，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意のサイズ n に対して Cn^k 以下であることである.[12] このようなアルゴリズムは**多項式時間アルゴリズム**と呼ばれている.)

さらに，バスの台数を指定して，バスルートを結ぶためにバスが回送される総距離あるいは総時間を最小にするようなバスの運行計画を求める問題も，同様に線形計画の双対定理に支えられて，効率よく解くことが可能である．

ここで，単純に‘しらみつぶし的’に調べるとどのようなことになるかを見るために，たとえば，独立なバスルートが午前中に m 個，午後にも m 個あるとして，総回送時間を最小にする問題を考えてみよう．すると，m 台のバスで可能な回送のパタンは $m!$ 個ある．$m = 50$ で，一つの回送パタンの総回送時間の計算に 10^{-12} 秒かかるとして，すべての回送パタンを調べるのに $10^{-12} \times 50!$ 秒 $=$ 約 9.6×10^{44} 年も必要である．ところが，実際にはこの程度の大きさの問題は 1 秒もかからずに解くことができるのである．

さらに，グラフとネットワークの問題から「離散アルゴリズム」のいくつかの基本例をあげておこう．

[11] 引き続き走ることが可能なバスルートの系列が半順序集合 P の鎖に対応する．
[12] したがって，計算時間の評価としては最悪のケースを考えていることになる．

(a) 最短路問題 (Dijkstra(ダイクストラ) 法) (ある地点から各地点への最短路が効率よく見つけられる. グラフ構造と距離の非負性が本質的. 自動車のカーナビなどに使われる.)

(b) 最小木問題 (貪欲算法) (通信ネットワークや電力・給水ネットワークなどの最適設計の原型. グラフの木の族の有するマトロイド構造から効率よく解ける.)

(c) 巡回セールスマン問題 (近似解法) (より一般化した配送問題が日常的に解かれて，配送の効率化に寄与している. しかし，効率よく厳密に解くことが難しい代表的問題. スケジューリング問題の一種.)

(d) 大規模連立１次方程式 (2 部グラフの DM-分解) (係数行列の非零要素から定まる 2 部グラフの最大マッチングを求めて，係数行列をブロック上三角行列に分解し，行列の疎性を利用して効率よく解く. 最大マッチング問題は凸多面体緩和が有効に働く典型例で，上述のディルワースの定理と密接に関係する.)

これらは教科書的な基本的問題であるが，実用上の大規模かつ複雑な離散的，組合せ的な問題に対して高速に (良い) 解を見出す研究が精力的に続けられている. 特に，多項式時間アルゴリズムの計算時間 $\mathrm{O}(n^k)$ (k: 定数，n：問題のサイズ) のベキの k がなるべく小さくなるものを見つける努力がなされている. なお， 実際には，最悪で指数時間を要するアルゴリズムでも実用上は速いというものもある (たとえば，線形計画問題に対する単体法など). また，時間に厳しい状況では，ベキの大きさだけでなく，その前にかかる係数 C の大きさも気にしてアルゴリズムを設計しなければならない.

アルゴリズムには，厳密な最適解を高速に見出す (多項式時間) アルゴリズムの他に，次のようなアルゴリズムも研究されている．主として厳密な最適解を見出すことが困難な問題に対して,

- 求めた解の最適解からの劣化の割合が何パーセントかを事前に保証する精度・品質保証付きの**近似アルゴリズム**,

- 精度保証はないが，実用上，十分に満足のいく精度の近似解を高速に求める**メタヒューリスティク・アルゴリズム** (局所探索法，タブー探索，遺伝アルゴリズム，アニーリング法，$\cdots$),

- 必ず厳密な最適解を見つけるというわけにはいかないが，ある一定の (大きな) 正の確率で最適解を見出すようなアルゴリズム (**確率的アルゴリズム**)

などの研究が精力的に行われている．

数理計画については文献 [3, 4, 5, 6]，離散最適化 (組合せ最適化) や離散アルゴリズムについては文献 [7, 8, 9, 10, 11] などを参照されたい．

付記．数理工学の流れ

「数理工学」は日本において創始されたパラダイムである．それは，1951 年の東京大学工学部応用物理学科の数理工学コースの設置に始まる.[13] その後，1959 年に京都大学工学部に数理工学科が開設された．（なお，東京大学の応用物理学科は，1962 年に計数工学科と物理工学科に分離拡充されて，計数工学科に数理工学コースが設置された．)[14] 私は，京大の数理工学科と数理工学専攻を 1970 年と 1975 年に修了し，その後，助手，講師として東大の計数工学科数理工学コースを担当した経験をもつ．私は，両者の類似と相違を肌で感じることが出来た数少ない者の一人であろう．以下に述べることは，主にそのころの体験を基にした私見である．

東大の数理工学は，その創設の当初から「数理工学」の理念が明確にされ，“「工学」諸問題を数理する” という思想があったようである．また，単に「工学」諸問題を数理するにとどまらず，統一的な理論の構築という視点も強く意識されていたようである．近藤一夫先生，森口繁一先生の指導の下に「数理工学」の教育と研究が行われ，伊理正夫先生，甘利俊一先生を始めとする「数理工学」をリードする極めて優秀な多くの研究者を生み出してきている．ここでは,「数理工学」のスペクトルの幅の広い教育がなされ，まさに「数理工学」を専門とする学生が育てられている．

一方，京大の数理工学科では，工業数学，工業力学，応用数学から，非線形力学，制御理論，オペレーションズ・リサーチ，計算機工学まで，それぞれの専門の教官による講義があった．カリキュラムをこなす中で「数理工学とは何か」を自ら理解していくという形式をとり，学生は,「工学」を数理するために必要となる基礎 (専門) 教育を受けて，上記のそれぞれの分野を専門とする教官の指導を受けた．それにより，それぞれの専門の分野で「数理工学」を実践し，それぞれの分野を専門とする学生が育てられた．「数理工学」を学び産業界あるいは学界で活躍できる学生を送り出すには，効果的な方式であったと考えられる．優れた教官陣の指導で，優秀な多くの人材を世に送り出し，広範な様々な分野で活躍している．

[13]組織の系譜としては，旧制の航空学科から，第二次世界大戦後の処理に伴う組織の改編による応用数学科を経て応用物理学科数理工学コースへ繋っている．

[14]ほぼ同時期の 1961 年に，科学と技術の融合を謳って大阪大学に基礎工学部が発足した．その創設には数学者である正田健次郎先生が深く関わり，理学（数学）と工学の相互作用による科学技術の展開を目指したのは，数理工学の理念と相通じるものがある．

東大の計数工学科数理工学コースでは，産業界の即戦力への距離は多少遠くなるかも知れないが,「数理工学」を専門分野として幅広い視野を持つ個性ある学生が社会に送り出されているように思われる. 多くは,「数理工学」を実践する場としての専門分野は大学を出てから決まるのである. 一方，京大の数理工学では大学を出るときには「数理工学」を実践する専門分野がほぼ決まっている傾向がある.

なお,「数理工学」の英語名は，東大では Mathematical Engineering であって，京大では Applied Mathematics and Physics である. そのことが二つの校風をよく表しているように思う.（私が学生の頃，京大数理工学科の学生の間では,「数理工学」は,「数」学，物「理」,「工学」を融合する学問である，とする声も多かったが，あながち的外れでもなさそうに思われる. ）

その後，国内のいくつかの大学に数理工学（あるいは，＊＊＊数理工学，数理＊＊＊工学など）の名称を持つ学科などが開設されている. 東大方式と京大方式はその後，３代目，４代目の世代に続いており，この付記で述べた30~40 年前の事情とはずいぶん変っていると思われる. 京大の数理工学は現在，工学部情報学科の数理工学コース [13]，大学院は情報学研究科の数理工学専攻としてその流れが続いている. また，東大の数理工学は，工学部計数工学科数理情報工学コース [14]，大学院は情報理工学系研究科の数理情報学専攻へ改組され，流れは続いている（数理工学の名称が消えてしまったのは誠に残念ではあるが).

「数理工学」に関連する著書や文献として [12, 13, 14, 15, 16] などがある. 本小文で書ききれなかった多くの話題に触れることができる. 「数理工学」に関心を持たれた読者は是非読まれることをお薦めする.

本書の第二部も,「数理工学」の理解を深めてから読むと，また違った観点から味わうことが出来ると思う.

参考文献

[1] 森, 松井 :「オペレーションズ・リサーチ」朝倉書店，2004 年.

[2] 今野 浩 :「役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年」 日本評論社, 2006 年.

[3] G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, and M. J. Todd (eds.): *Optimization* (Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 1) (Elsevier, 1989). (伊理，今野，刀根 (監訳) :「最適化ハンドブック」朝倉書店，1995 年)

[4] 久保，田村，松井 (編) :「応用数理計画ハンドブック」朝倉書店，2002 年.

[5] 福島 雅夫: 「数理計画入門」 朝倉書店，1996 年.

[6] A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming* (Wiley，1986).

[7] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency* (Algorithms and Combinatorics，Vol. 24) (Springer，2003).

[8] A. Aardal，G. L. Nemhauser，and R. Weismantel (eds.): *Discrete Optimization* (Handbooks in Operations Research and Management Science，Vol. 12) (Elsevier, 2005).

[9] 杉原，茨木，浅野 (孝)，山下 (編)：「アルゴリズム工学—計算困難問題への挑戦—」共立出版，2001 年.

[10] B. Korte and J. Vygen: *Combinatorial Optimization——Theory and Algorithms* (Third Edition) (Algorithms and Combinatorics，Vol. 21) (Springer，2005). (浅野 (孝)・平田・小野・浅野 (泰)(訳)：「組合せ最適化—理論とアルゴリズム」シュプリンガー・フェアラーク，2005 年).

[11] 藤重 悟：「グラフ・ネットワーク・組合せ論」共立出版，2002 年.

[12] 森口，奥野，末包，伊理，竹内 (編著)：「生きている数学：数理工学の発展」培風館，1979 年.

[13] 京都大学工学部情報学科数理工学コース編：「数理工学のすすめ」（改訂版）現代数学社，2000 年.

[14] 東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース編：「数理工学への誘い」日本評論社，2002 年.

[15] 合原，室田 (編)：「数理工学の地平」数理科学，No. 474，サイエンス社，2002 年.

[16] 有本 卓：「数学は工学の期待に応えられるのか」 岩波書店，2004 年.