なぜモチーフを勉強したいのか？　12/19　Kimura. S　

・異なるコホモロジー理論が、似たふるまいをする。

同じXに対して、ほぼ同値な情報を与える。

理由：Motiveという親玉がいる。

例：Abel-Jacobiの定理　X：リーマン面　$J(X) = H^0(X, \Omega_X)^* / H_1(X, \mathbb{Z})$

$$X \xrightarrow{AJ} J(X) \simeq \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}$$

$$Q \mapsto \left(\int_P^Q : \eta \mapsto \int_P^Q \eta\right)$$

$$S^nX = \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n} / \mathfrak{S}_n \xrightarrow{AJ} J(X)$$

$$[Q_1] + \cdots + [Q_n] \mapsto \sum_{i=1}^{n} AJ(Q_i)$$

$\{P_1, \cdots, P_n\}$ というXのnコの重複を許す点.

$\{P_1, \cdots, P_n\} \cap \{Q_1, \cdots, Q_n\} = \phi$　X上の有理型関数fが存在して、

$P_1, \cdots, P_n$が0点で、$Q_1, \cdots, Q_n$が極.

$$\Longleftrightarrow \quad AJ_n\left(\sum [P_i]\right) = AJ_n\left(\sum [Q_i]\right)$$

fがあれば、$X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1$　$\mathbb{P}^1 \to S^nX$, $t \mapsto f^{-1}(t)$　$\left(\begin{array}{l} f^{-1}(0) = \sum [P_i] \\ f^{-1}(\infty) = \sum [Q_i] \end{array}\right) \Rightarrow$

S^nXの中の2点が、$\mathbb{P}^1$で結べる為の必要充分条件が、$J(X)$で一致.（同じ点）

Xのホモロジー

$$H_*(X; \mathbb{Z}) = \{\gamma \mid \partial\gamma = 0\} / \sim$$

位相的　位相的元　位相的変型 パラメータ　$I = [0,1]$

代数幾何的ホモロジー　$*$次元 subvar.

$$CH_*X = \left\{\sum n_i [V_i]\right\} / \sim$$

代数幾何的変型 パラメーターは、$\mathbb{P}^1$.

$cl : CH_*X \to H_{2*}(X; \mathbb{Z})$: cycle mapが出来る。

$$CH_1X \xrightarrow{\sim} H_2(X; \mathbb{Z})$$

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g} \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)^*$$

$$0 \to J(X) \to CH_0X \to H_0(X; \mathbb{Z}).$$

$$h^1(X)$$

Abel-Jacobiの一般化

X: smooth proj.　　$X \to \mathrm{Alb}(X) := H^0(X,\Omega_X)^* / H_1(X,\mathbb{Z})$

/ℂ　　$CH_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\oplus \mathrm{Alb}(X)$　　$\dim X = d$

一般には，全射にならない。

$$0\to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^\times \to 0$$

$$\underbrace{H^1(X,\mathbb{Z})\to H^1(X,\mathcal{O}_X)}_{\downarrow\ \mathrm{coker}} \to H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{cl} H^2(X,\mathbb{Z})$$

$\mathrm{Pic}\,X = H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) = CH_{d-1}(X)$

imageは，$H^{1,1}(X,\mathbb{Z})$と交わり

定理(Mumford 1968)　$0\to \mathrm{Pic}^0X \to CH_{d-1}(X) \xrightarrow[cl]{} H^2(X,\mathbb{Z})$

Xが，surface. base fieldは，非可算　　$P_g(X)>0$

($\Longleftrightarrow$ $cl: CH_1X_{\mathbb{Q}} \to H^2(X,\mathbb{Q})$ が全射でない。)

ならば，　$CH_0X \to \mathbb{Z}\oplus \mathrm{Alb}(X)$ のkernel (Albanese kernelが)

が，巨大.

$CH_2X \xrightarrow{\sim} H_4$

H_3

$\mathrm{Pic}^0X \to CH_1X \to H_2 \to \mathrm{Coker}(CH_1\to H_2)$

H_1

$\to CH_0X \to H_0 \to \mathbb{Z}$

Albanese kernel $\oplus$ $\mathrm{Alb}X$

予想(Bloch 1975)

逆に，Xが，surface.

$P_g(X)=0$

($\Longleftrightarrow$ $cl: CH_1X_{\mathbb{Q}} \to H^2(X,\mathbb{Q})$ が全射)

$\Longrightarrow$ $CH_0X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\oplus \mathrm{Alb}(X)$

$\kappa(X)\le 1$の時，O.K.

↑

小平次元.　　$\kappa(X)=2$の時 $P_g(X)=0$ なら，$q=0$ より

仮定 $\Longleftrightarrow$ cl全体が全射.　　$\bigoplus_{i=0}^{2\dim X} CH_i(X)_{\mathbb{Q}} \to \bigoplus_{i=0}^{2\dim X} H_i(X,\mathbb{Q})$

Bloch予想の一般化：cycle mapが全射 $\Rightarrow$ 単射.　(X: 任意次元)

定理：(Jannsen 1995)

AMS Motives cycle map が，単射 ⇒ 全射.

Albanese kernel の構造は？ $/\mathbb{C}$

例： X : Abel 多様体 $\underset{\text{位相}}{\simeq} (S^1)^{2g}$

$$H_*(X;\mathbb{Q}) \simeq \bigotimes^{2g} (H_1(S^1;\mathbb{Q}) \oplus H_0(S^1;\mathbb{Q}))$$

$N : X \to X$: N倍写像

$H_1(S^1;\mathbb{Q}) \to H_1(S^1;\mathbb{Q})$: N倍

$H_0(S^1;\mathbb{Q}) \to H_0(S^1;\mathbb{Q})$: 1倍

$\Rightarrow H_i(X;\mathbb{Q})$ に於ては，N^i 倍

$\mu : X \times X \to X$: 群の演算

Pontragin Product for $CH_0 X$ $\quad [V] * [W] := \mu_* [V \times W]$

$CH_0 X$ 上では，$[P] * [Q] = [P+Q]$ これで，$CH_0 X$: 可換環.

$\underline{I \subseteq} \ CH_0 X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$ が，環の準同型.

↑ ideal に成る。

ker(deg)

$$CH_0 X \supsetneq I \supset I^{*2} \supset \cdots \supset I^{*n} \supset \cdots$$

Claim： $I/(I^*)^2 \simeq X$ $\qquad$ I は，$[P]-[O]$ で，生成される。

$\overline{[P]-[O]} \mapsto [P]$ $\qquad$ I^* は $([P]-[O]) * ([Q]-[O])$

$= [P+Q] - [P] - [Q] + [O]$

で生成.

N_* による固有値は，N のみ.

$$I^{*k}/(I^*)^{k+1} \twoheadleftarrow \left(I/I^{*2}\right)^{k}$$ より，$I^{*k}/I^{*(k+1)}$ では，N_* は，N^k 倍.

$I^{*(g+1)} = 0$

Bloch-Beilinson 予想 $\quad d = \dim X$

$CH^i X := CH_{d-i} X$

$CH^i X_{\mathbb{Q}} = F^0 CH^i X_{\mathbb{Q}} \supset F^1 CH^i X_{\mathbb{Q}} \supset \cdots$ と filt. が入り.

① : $F^1CH^iX_{\mathbb{Q}}$ は. cycle map の kernel.

③ : f_*, f^* は, filt. を保つ

② : Intersection Product について,

$$F^rCH^iX_{\mathbb{Q}} \otimes F^sCH^jX_{\mathbb{Q}} \subseteq F^{r+s}CH^{i+j}X_{\mathbb{Q}}.$$

④ : $F^nCH^iX_{\mathbb{Q}} / F^{n+1}CH^iX_{\mathbb{Q}}$ は, $H^{2i-n}(X, \mathbb{Q})$ で control. される.

⑤ : $F^{i+1}CH^iX_{\mathbb{Q}} = 0$

④については,
$$Gr^n CH^i(X) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{MM}}(\underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{Q}}}{\mathbb{1}}, h^{2i-n}(X)(i))$$
と予想される.