

異なるモホジ=理論が、似ている事を示す。

同じXに対し、ほぼ同様な情報を与える。

理由: Motive という親玉がいる。

例: Abel-Jacobiの定理

$$X: \text{リーマン面}_n \quad J(X) = \frac{H^0(X, \Omega_X)^*}{H_1(X, \mathbb{Z})}$$

$$X \xrightarrow{AJ} J(X) \cong \frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}^{2g}}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\mathbb{Q} \mapsto \left(\int_P^Q \cdot \eta \mapsto \int_P^Q \eta \right)$$

$$S^n X = \underbrace{X \times \dots \times X}_{\mathbb{S}^n} \xrightarrow{AJ} J(X)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$[Q_1] + \dots + [Q_n] \mapsto \sum_{i=1}^n AJ(Q_i)$$

$\{P_1, \dots, P_n\}$ というXのn個の重複を許す点。

$\{P_1, \dots, P_n\} \cap \{Q_1, \dots, Q_n\} = \emptyset$ X上有理型関数が存在して、

P_1, \dots, P_n が0点で、 Q_1, \dots, Q_n が極。

$$\Leftrightarrow AJ_n(\sum [P_i]) = AJ_n(\sum [Q_i])$$

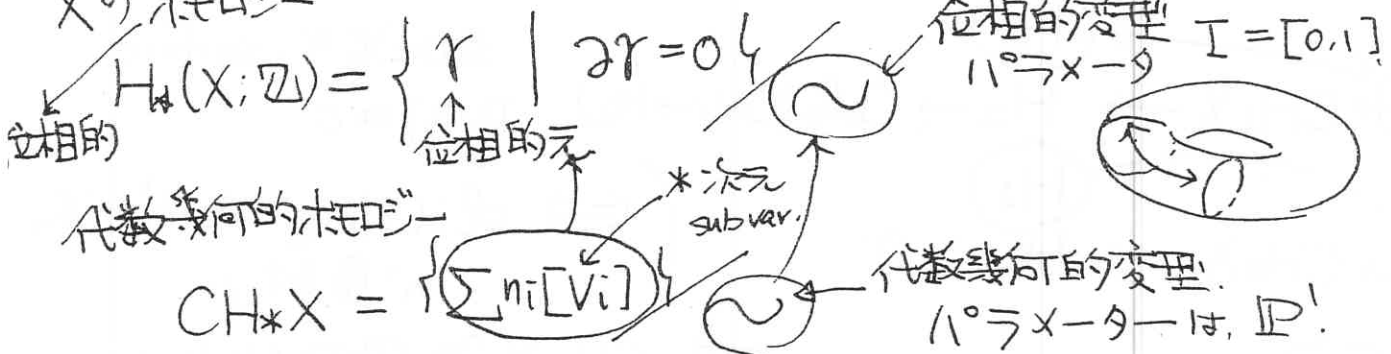
$$f \text{ があれば, } X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \quad \mathbb{P}^1 \rightarrow S^2 X \quad f^{-1}(0) = \sum [P_i]$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$t \mapsto f^{-1}(t) \quad t \mapsto f^{-1}(t) \quad f^{-1}(\infty) = \sum [Q_i] \Rightarrow$$

$S^n X$ 中の2点が、 \mathbb{P}^1 で結べる為の必要充分条件が、 $J(X)$ で一致 (同じ点)

Xのモホジ



$\alpha: CH_* X \rightarrow H_{2*}(X; \mathbb{Z})$: cycle map が出る..

$$CH_1 X \xrightarrow{\sim} H_2(X; \mathbb{Z})$$

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^{2g} \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)^*$$

$$0 \rightarrow J(X) \rightarrow CH_0 X \rightarrow H_0(X; \mathbb{Z})$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$R^1(X) \quad R^1(X)$$

X : smooth proj. $X \rightarrow \text{Ab}(X) := \frac{H^0(X, \Omega_X)^*}{H_1(X, \mathbb{Z})}$

$\text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Ab}(X)$ $\dim X = d$
 一般には, 全射にならない。

$0 \rightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$ $\text{Pic } X$

$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{d} H^2(X, \mathbb{Z})$
 image は, $\text{CH}_{d-1}(X)$ $H^{2,1}(X, \mathbb{Z})$ と
 交代!

定理 (Mumford 1968) $0 \rightarrow \text{Pic}^0 X \rightarrow \text{CH}_{d-1}(X) \xrightarrow{d} H^2(X, \mathbb{Z})$

X が, surface. base field は, 非可算 $P_g(X) > 0$

(\Rightarrow) $d: \text{CH}_1 X_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ が全射ではない。

ならば, $\text{CH}_0 X \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Ab}(X)$ の kernel (Albanese kernel) が, 巨大。

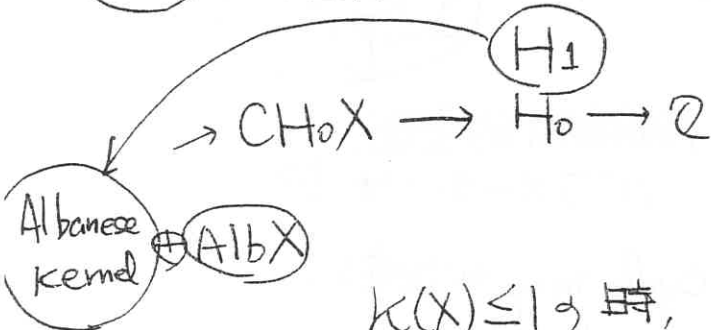
$\text{CH}_2 X \xrightarrow{\sim} H_4^*$

予想 (Bloch 1975)

逆に, X が, surface.

$\text{Pic}^0 X \rightarrow \text{CH}_1 X \rightarrow H_2 \rightarrow \text{Coker}(\text{CH}_1 \rightarrow H_2)$ $P_g(X) = 0$

(\Rightarrow) $d: \text{CH}_1 X_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ が全射)



$\Rightarrow \text{CH}_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \oplus \text{Ab}(X)$

$K(X) \leq 1$ の時, O.K.

↑
 降次元.

$K(X) = 2$ の時 $P_g(X) = 0$ なら, $g = 0$ しか

仮定 $\Leftrightarrow d$ 全体が全射.

$\bigoplus_{i=0}^d \text{CH}_i(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^d H_i(X, \mathbb{Q})$

Bloch 予想の一般化: cycle map が全射 \Rightarrow 単射. (X : 任意次元)

定理: (Jannsen 1995)

AMS Motives cycle map が, 単射 \Rightarrow 全射.

Albanese kernel の構造は? \mathbb{C}

例: X : Abel 多様体 $\simeq (S^1)^{2g}$
位相.

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \simeq \bigotimes_{\mathbb{Z}} (H_1(S^1; \mathbb{Z}) \oplus H_0(S^1; \mathbb{Z}))$$

$N: X \rightarrow X$: N 倍写像

$$H_1(S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1; \mathbb{Z}): N \text{ 倍}$$

$$H_0(S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(S^1; \mathbb{Z}): 1 \text{ 倍}$$

$\Rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$ には N^i 倍

$\mu: X \times X \rightarrow X$: 群の演算

Pontragin Product for $CH_0 X$

$$[V] * [W] := \mu_* [V \times W]$$

$CH_0 X$ 上では, $[P] * [Q] = [P+Q]$ であり, $CH_0 X$: 可換環

$\mathbb{C} \subset CH_0 X \xrightarrow{\text{deg}}$ \mathbb{Z} が, 環の準同型.
 \uparrow ideal に成る.

$\mathbb{F}_p(\text{deg})$

$$CH_0 X \supseteq I \supseteq I^{*2} \supseteq \dots \supseteq I^{*n} \supseteq \dots$$

$$\text{Cl}_1: \quad \begin{array}{ccc} I / (I^*)^2 & \simeq & X \\ \cup & & \cup \\ [P] - [O] & \mapsto & [P] \end{array}$$

I は, $[P] - [O]$ により生成される。
 I^* は $([P] - [O]) * ([Q] - [O])$
 $= [P+Q] - [P] - [Q] + [O]$

N^* による固有値は, N のみ.

により生成.

$$\frac{I^{*g}}{(I^*)^{g+1}} \longleftarrow \left(\frac{I}{I^{*2}} \right)^{\mathbb{F}_g}$$

より, $\frac{I^{*g}}{I^{*(g+1)}}$ には, N^* は, N^g 倍.

Bloch-Beilinson 予想 $d = d_i X$

$$CH^i X := CH_{d-i} X$$

$$I^{*(g+1)} = 0$$

$CH^i X_{\mathbb{Q}} = F^0 CH^i X_{\mathbb{Q}} \supseteq F^1 CH^i X_{\mathbb{Q}} \supseteq \dots$ と filtration が 'X'.

①: $F^i CH^i X_\mathbb{Q}$ は cycle map の kernel.

②: Intersection Product $\in \mathbb{Z}$.

③: f_*, f^* は \mathbb{Z} -filtr. を保つ

$$F^r CH^i X_\mathbb{Q} \otimes F^s CH^j X_\mathbb{Q} \subseteq F^{r+s} CH^{i+j} X_\mathbb{Q}$$

④: $F^i CH^i X_\mathbb{Q} / F^{i+1} CH^i X_\mathbb{Q}$ は $H^{2i-2} (X, \mathbb{Q})$ と control. する.

⑤: $F^{i+1} CH^i X_\mathbb{Q} = 0$

⑥: \mathbb{Z} は, $Gr^i CH^i(X) \simeq Ext_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}, h^{2i-2}(X)(i))$
と予想される.