中間重みクリスタリン変形の保型性持ち上げ

中村　健太郎

平成21 年2 月1 日

目 次

0　序

本稿は「$R=T$ の最近の発展についての勉強会」における「Modularity lifting for crystalline deformations of intermediate weights after Kisin」の報告書である．本稿では, 総実体の二次元 p 進ガロア表現で p の上の素点の分解群に制限したら中間重みクリスタリン表現となるような表現について, 保型性持ち上げ定理を Kisin の修正 Taylor-Wiles 系を適応することで証明する．本報告集山下氏の「Kisin の修正 Taylor-Wiles 系」([Ya]) において詳しく解説されているように, 修

正 Taylor-Wiles 系を適応する際に必要な性質のうち示すことが最も難しい性質は, p の上の素点で適当な局所条件を課した局所普遍変形環の整域性である. 本稿では, タイトルにもあるとおり, その局所条件として中間重みクリスタリン表現という条件を課す. 中間重みクリスタリン表現の局所普遍変形環が整域であることを示すことが本稿の主目標である. 整域性を示すための基本的なアイデアは

- $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の中間重み二次元クリスタリン表現の法 p 還元（の半単純化）を明示的に決定する

というものである. そして, 本稿ではこの計算を

(1) Wach 加群を用いた計算

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応を用いた計算

という二つの方法を用いて行う. 本稿の一章において, この計算のために必要な上の (1), (2) の理論の解説及び具体的な計算方法の解説を行う. 二章においては, Wach 加群のモジュライを考えることでクリスタリン表現の局所普遍変形環を構成し, 最後に一章の計算結果を用いて, 中間重みクリスタリン表現の局所普遍変形環の整域性を示す. なお, 二章の Wach 加群のモジュライの部分は, 本報告集山下氏, 今井氏（[Ya], [Im]）のところで詳しく解説されている Kisin 加群のモジュライとほぼ同様の議論なので, 証明など大幅に省いたことをお断りしておく. なので, 本稿の中心的な部分は, 第一章全部と二章の整域性の定理の証明である（と思われる）.

1 中間重みクリスタリン表現の法 p 還元の計算

1.1 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の二次元クリスタリン表現

まず初めに, 絶対既約な $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の二次元クリスタリン表現を, Fontaine の D_{cris} 関手で対応するフィルトレイション付き φ 加群を用いて分類することから始める. $\overline{\mathbb{Z}}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の整数環, $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ を $\overline{\mathbb{Z}}_p$ の極大イデアルとする. $k \geq 2$ となる整数, $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ に対し, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 係数のフィルトレイション付き φ 加群 $D_{k,a_p} := \overline{\mathbb{Q}}_p e_1 \oplus \overline{\mathbb{Q}}_p e_2$ を次のように定める.

(1) $\varphi(e_1) := p^{k-1}e_2$, $\varphi(e_2) := -e_1 + a_p e_2$

(2) $\mathrm{Fil}^0 D_{k,a_p} := D_{k,a_p}$, $\mathrm{Fil}^1 D_{k,a_p} = \cdots = \mathrm{Fil}^{k-1} D_{k,a_p} := \bar{\mathbb{Q}}_p e_1$, $\mathrm{Fil}^k D_{k,a_p} := 0$.

補題 1.1. D_{k,a_p} は絶対既約な弱許容的 (weakly admissible) フィルトレイション付き φ 加群.

証明 . まず、$\det(D_{k,a_p}) := \overline{\mathbb{Q}}_p e, \varphi(e) = p^{k-1}, \mathrm{Fil}^{k-1}\det(D_{k,a_p}) = \overline{\mathbb{Q}}_p e, \mathrm{Fil}^k \det(D_{k,a_p}) = 0$ なので, $t_N(D_{k,a_p}) = t_N(\det(D_{k,a_p})) = k-1 = t_H(\det(D_{k,a_p})) = t_H(D_{k,a_p})$ となる. 次に, β_1, β_2 を $X^2 - a_p X + p^{k-1} = 0$ の解とすると, D_{k,a_p} の非自明な部分 φ 加群は, $\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)$ $(i = 1, 2)$ となり, それぞれ φ の固有値は β_i となっている. $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ かつ $k \geq 2$ から $\beta_i \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ となり, これは $t_N(\bar{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)) > 0$ を意味する. 一方フィルトレイションの定義から, $\mathrm{Fil}^0\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2) = \overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)$, $\mathrm{Fil}^1\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2) = 0$ なので, $t_H(\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)) = 0$ となる. よって, $t_N(\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)) > t_H(\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2))$ となる. 以上のことと弱許容的の定義から D_{k,a_p} は弱許容的になる. また, 非自明な部分 φ 加群 $\overline{\mathbb{Q}}_p(e_1 - \beta_i e_2)$ は弱許容的ではないので D_{k,a_p} は絶対既約になる.

以下, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 表現 V に対し, V の双対を $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p)$ と記し, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 構造を $f \in \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(V, \mathbb{Q}_p)$, $a \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して $af(x) := f(ax)$ と定める. 上の補題と Colmez-Fontaine の定理（「弱許容性」=「許容性」定理）により, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約二次元クリスタリン $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 表現 V_{k,a_p} が唯一つ存在して, $D_{\mathrm{cris}}(V^*_{k,a_p}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(V_{k,a_p}, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} D_{k,a_p}$ となる. 定義により, V_{k,a_p} は Hodge-Tate 重み $0, k-1$ をもつクリスタリン表現である. (本論稿では, Tate 捻り $\mathbb{Q}_p(1)$ の Hodge-Tate 重みが 1 となるよう定義する.) $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対して連続指標 $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を $\mu_\lambda|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$、$\mu_\lambda(p) = \lambda$ を満たす連続指標とする. さらに $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ のときは, 局所類体論によって導かれる $G_{\mathbb{Q}_p}$ の指標も同じ記号 μ_λ で表すことにする. (μ_λ は不分岐指標で, 幾何的 Frobenius を λ に写すものとなる.)

命題 1.2. $k \geqq 1$ なる整数とする. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約二次元クリスタリン $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 表現で Hodge − Tate 重み $0, k-1$ をもつとする. このとき $k \geq 2$ で, さらに $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ と不分岐指標 $\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ の組 (a_p, χ) で $V \xrightarrow{\sim} V_{k,a_p}(\chi)$ となるものが存在する. また, $V_{k,a_p}(\chi) \xrightarrow{\sim} V_{k,a'_p}(\chi')$ であることと, $(a'_p, \chi') = (a_p, \chi)$ または $(a'_p, \chi') = (-a_p, \chi\mu_{-1})$ であることは同値.

証明 . V を上の仮定を満たす表現とする. まず, $k = 1$ と仮定すると, $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ は $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{cris}}(V^*) = D_{\mathrm{cris}}(V^*)$, $\mathrm{Fil}^1 D_{\mathrm{cris}}(V^*) = 0$ を満たす. $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ の φ の固有値を（重複も込めて）β_1, β_2 とし, e_1,e_2 を $\varphi(e_1) = \beta_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \alpha e_1 + \beta_2 e_2$ となる $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ の広義固有ベクトルとすると $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ の弱許容性から, $\beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ となり, $\overline{\mathbb{Q}}_p e_1$ は $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ の弱許容的な部分 φ 加群となる. よって V は絶対既約ではないので, $k \geq 2$ でなければならない. そこで, $k \geq 2$ と仮定すると $D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ は, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上二次元, $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{cris}}(V^*) = D_{\mathrm{cris}}(V^*)$, $\mathrm{Fil}^1 D_{\mathrm{cris}}(V^*) = \mathrm{Fil}^{k-1} D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ は $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上

一次元となる．そこで $\mathrm{Fil}^{k-1}D_{\mathrm{cris}}(V^*) = \bar{\mathbb{Q}}_p e_1$ とおく．$D_{\mathrm{cris}}(V^*)$ の弱許容性と絶対既約性から $D_{\mathrm{cris}}(V^*) = \overline{\mathbb{Q}}_p e_1 \oplus \bar{\mathbb{Q}}_p \varphi(e_1)$ となり，さらに $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ と $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ が存在し $\overline{\mathbb{Q}}_p\varphi(e_1) = \overline{\mathbb{Q}}_p e_2$ かつ $\varphi(e_1) = \lambda p^{k-1} e_2$, $\varphi(e_2) = \lambda(-e_1 + a_p e_2)$ を満たす e_2 が取れる．（そのような (a_p, λ) の組は, (a_p, λ) と $(-a_p, -\lambda)$ のみであることも分かる．）このとき $V \xrightarrow{\sim} V_{k,a_p}(\mu_\lambda)$ となる．

絶対可約な二次元 p 進表現の法 p 還元（の半単純化）は直ちに求まることから，$G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元クリスタリン表現の法 p 還元の計算のためには V_{k,a_p} の法 p 還元の計算が出来れば十分である．$\overline{V}_{k,a_p}$ を V_{k,a_p} の法 p 還元の半単純化をする．現在のところ全ての (k, a_p) に対して $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算は行われていない．次に定義する中間重みクリスタリン表現の場合に $\overline{V}_{k,a_p}$ の明示的に求めることが，第一章の目標である．

定義 1.3. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元クリスタリン $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 表現で Hodge-Tate 重み $0, k-1$ を持つとする．このとき, V が中間重みクリスタリン表現であるとは, $2 \leqq k \leqq 2p-1$ を満たすこととする．

この後に続く二つの小章で中間重みの $\overline{V}_{k,a_p}$ を求めるが, 正確には中間重みの場合だけでなく, もう少し一般の場合に計算する．まず, 次の小章では, k が任意で k に応じて $v_p(a_p)$ が大きい場合（詳細は後述）に Wach 加群を用いて $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算を行い, それに続く小章では, $2 \leqq k \leqq 2p$ の場合に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進 Langlands 対応を用いて $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算を行う．

1.2 Wach 加群を用いた法 p 表現の計算

ここでは, (φ, Γ) 加群の精密版である Wach 加群というものを用いて, k が任意で k に応じて $v_p(a_p)$ が大きい場合に $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算を行うことが目的である．まずは, その計算のために必要な Wach 加群の基礎理論を復習する．F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大, $\mathcal{O}_F$ をその整数環, k_F をその剰余体, $F := F(\zeta_{p^\infty}), \Gamma_F := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ とする．$\chi_p : \Gamma_F \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を p 進円分指標とする．$\mathbf{A}_F^+ := \mathcal{O}_F[[u]] \subseteq \mathbf{A}_F := \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n u^n | a_n \in \mathcal{O}_F, a_n \to 0 (n \to -\infty)\}$, $\mathbf{B}_F^+ := \mathbf{A}_F^+[1/p]$, $\mathbf{B}_F := \mathbf{A}_F[1/p]$ とおく．$\mathbf{A}_F$ は剰余体 $k_F((u))$ をもつ p が素元の完備離散付置環で商体は $\mathbf{B}_F$ である． これらの環に Frobenius 作用 φ と Γ_F 作用を $\varphi(u) := (u+1)^p - 1$, $\varphi(a) := \sigma(a)$, $\gamma(u) := (u+1)^{\chi(\gamma)} - 1$, $\gamma(a) := a$ と定める． ($a \in F$, σ は F の絶対 Frobenius, $\gamma \in \Gamma$) $q := \varphi(u)/u \in \mathbf{A}_F^+$ とおく．

定義 1.4. $b \geqq a \in \mathbb{Z}$ とする．有限生成自由 $\mathbf{B}_F^+$（または $\mathbf{A}_F^+$) 加群 N が重み $[a, b]$ の Wach 加群であるとは, 次の条件を満たすこととする．

(1) N は Γ_F の連続半線形作用を持ち, この作用は N/uN には自明な Γ_F 作用を誘導する,

(2) Γ_F 作用と可換な Frobenius 半線形な単射 $\varphi : N[\frac{1}{u}] \to N[\frac{1}{\varphi(u)}]$ を持ち, $\varphi(u^b N) \subseteq u^b N$ を満たし, さらに $u^b N/\varphi^*(u^b N)$ は q^{b-a} で消える.

Fontaine のエタール (φ, Γ) 加群の理論によると, $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の $\mathbb{Q}_p$ 表現の圏（または $\mathbb{Z}_p$ 表現の圏）と $\mathbf{B}_F$(または $\mathbf{A}_F$) 上のエタール (φ, Γ) 加群の圏とは圏同値であった. （G_F の表現 V に対応する (φ, Γ) 加群を $D(V)$ とおく） F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大という仮定の下で, さらに考える p-進表現をクリスタリン表現に制限すると, Fontaine の圏同値の精密版として次の定理が得られる.

定理 1.5. (Berger)

(1) Hodge – Tate 重みが $[a, b]$ の間にある G_F のクリスタリン表現 V に対して, $N(V) \subseteq D(V)$ となる $\mathbf{B}_F^+$ 上の重み $[a, b]$ の Wach 加群が一意に存在する. （$N(V)$ 上の φ, Γ_F 作用は $D(V)$ 上の作用から誘導されるもの）

(2) (1) の対応は次の圏同値を導く.

$$\{G_F \text{ のクリスタリン表現の圏}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbf{B}_F^+ \text{ 上の Wach 加群の圏}\} : V \mapsto N(V)$$

(3) $T \subset V$ を V の G_F 同変な $\mathbb{Z}_p$ 格子とし, $N(T) := D(T) \cap N(V) \subset D(V)$ とすると, $N(T)$ は $\mathbf{A}_F^+$ 上の Wach 加群で, この対応は, 「V の G_F 同変な $\mathbb{Z}_p$ 格子の集合」と「$N(V)$ の $\mathbf{A}_F^+$ 格子で Wach 加群となっているもの」との間に一対一対応を与える.

証明 . [Be1, Theorem2] 参照.

系 1.6. E を $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の代数拡大体とし, V を G_F の E-クリスタリン表現, $T \subseteq V$ を G_F 同変な $\mathcal{O}_E$ 格子とする. このとき, (φ, Γ) 加群としての同型 $D(T/\mathfrak{m}_E T) \xrightarrow{\sim} (N(T)/\mathfrak{m}_E N(T)) \otimes_{k_F[[u]]} k_F((u))$ が存在する.

証明 . $N(T) \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{A}_F \xrightarrow{\sim} D(T)$ であることと関手 $D(-)$ の完全性から従う.

Fontaine の圏同値により $\overline{V}$ を求めることは、$D(V)$ の法 p 還元（の半単純化）$\overline{D}(V)$ を求めることに帰着されるが, この系により V がクリスタリン表現の場合には, さらに $N(T)/\mathfrak{m}_E N(T)$ を求めることに帰着される.

特に V_{k,a_p} に対して, $N(V_{k,a_p}^*)$ とそれのある $\mathbf{A}_F^+$ 格子を具体的に求めることができれば, $\overline{V}_{k,a_p}$ を求めることが（ある場合には）出来るようになる. V_{k,a_p} の具体的な表示は難しく, V_{k,a_p} から直接 $N(V_{k,a_p}^*)$ を求めることは難しい. そこで, より具

体的な表示を持つ $D_{\mathrm{cris}}(V^*_{k,a_p})$ と $N(V^*_{k,a_p})$ を直接（V_{k,a_p} を経由しないで）結び付けることが必要となる.

V を Hodge-Tate 重みが $[a,0]$ に含まれる G_F のクリスタリン表現とする.（つまり, $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$ を満たすとする）すると, Wach 加群の定義からこの場合は $\varphi(N(V)) \subset N(V)$ を満たす. さらに $\varphi(u) = uq \in u\mathbf{A}_F^+$ だから, φ は $N(V)/uN(V)$ にも作用する. （さらに $N(V)/\varphi^* N(V)$ が q^b で消えるという条件と $q|_{u=0} = p \in \mathbb{Q}_p^\times$ から $N(V)/uN(V)$ への φ は半線形な同型で作用することが分かる.）次に、$N(V)$ に部分 B_F^+ 加群による減少フィルトレイションを $\mathrm{Fil}^i N(V) := \{x \in N(V) | \varphi(x) \in q^i N(V)\}$ と定める（$i \geqq 0$). さらに F-ベクトル空間 $N(V)/uN(V)$ に, 今定めた $N(V)$ のフィルトレイションから自然に誘導されるフィルトレイションを定める. この手続きにより $N(V)$ から F 上のフィルトレイション付き φ 加群 $N(V)/uN(V)$ が得られる.

定理 1.7. (Berger) 上の状況で, 自然なフィルトレイション付き φ 加群の同型

$$D_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} N(V)/uN(V)$$

が存在する.

証明 . [Be1, Theorem3.4.4] 参照.

系 1.8. 上の状況で, ある重み $[a',0]$ の $\mathbf{B}_F^+$ 上の Wach 加群 N があり, フィルトレイション付き加群として $D_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} N/uN$ ならば, $N \xrightarrow{\sim} N(V)$ となる.

証明 . 上の条件を満たす N をとる. まず, 定理1.6により、$N \xrightarrow{\sim} N(V')$ となるクリスタリン表現 V' がある. すると, 定理1.7と仮定により $D_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} N(V')/uN(V')$ $\xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{cris}}(V')$ となる. 関手 D_{cris} は（クリスタリン表現に制限すると）充満忠実なので $V \xrightarrow{\sim} V'$ となる. よって $N \xrightarrow{\sim} N(V') \xrightarrow{\sim} N(V)$.

以上で, $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算に必要な Wach 加群の理論の復習を終わる. $r \in \mathbb{R}$ に対して, $[r] \in \mathbb{Z}$ を $r \geqq k$ を満たす最大の整数 k と定める. $\overline{\mathbb{F}}$ を $\mathbb{F}_p$ の代数閉包, v_p を $v_p(p) = 1$ を満たす $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の非自明な付値とする. 以下, $F = \mathbb{Q}_p$ として, $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ とおく. $\omega : G_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{F}}^\times$ を法 p 円分指標, $\omega_2 : I_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{ur}) \to \overline{\mathbb{F}}^\times$ を Serre の第二基本指標とする. $(p+1) \nmid r$ を満たす整数 r に対して, $\mathrm{ind}(\omega_2^r)$ を $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元絶対既約 $\bar{\mathbb{F}}$ 表現で, $\mathrm{ind}(\omega_2^r)|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega_2^r & \\ 0 & \omega_2^{pr} \end{pmatrix}$ かつ $\det(\mathrm{ind}(\omega_2^r)) \xrightarrow{\sim} \omega^r$ を満たす唯一の表現とする. (詳しくは, [Na, 第一章] 参照） この小章の目的は Wach 加群の理論を用いて $\overline{V}_{k,a_p}$ についての次の定理を証明することである.

定理 1.9. $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 2}$, $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ とし, $v_p(a_p) > [(k-2)/(p-1)]$ を満たすとする. このとき,

(1) $(p+1) \nmid (k-1)$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,

(2) $(p+1) \mid (k-1)$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{(k-1)/(p+1)}$.

さらに, $k = p+1$ のときは, ($[(k-2)/(p-1)] = 1$ であるが) $v_p(a_p) > 0$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^p)$.

この定理の証明の基本的なアイデアは, 各 k に対して Wach 加群の $\mathbb{Z}_p[[u,X]]$ 上の族 $N_k(X)$ を構成し, 法 p での合同を用いて特殊な a_p に対する $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算に帰着させることである.

まず最初に, φ, Γ に対応する行列を定めることで $\mathbb{Z}_p[[u,X]]$ 上の Wach 加群 $N_k(X)$ を定義する. 次に, これが実際に V_{k,a_p} たちの族になっていることを確かめるために, 任意の $\alpha \in \mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p}$ に対して $N_k(X)$ の $X = \alpha$ での特殊化 $N_k(\alpha)$ が $N_k(\alpha)[1/p] \xrightarrow{\sim} N(V^*_{k,\alpha p^m})$ を満たすことを定理 1.7 を用いてを証明する. (ここで, $m = [(k-2)/(p-1)]$ とおいた.)　すると, 族 $N_k(X)$ の定義から任意の $\alpha \in \mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p}$ に対して $N_k(\alpha)/\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p} N_k(\alpha) \xrightarrow{\sim} N_k(0)/\mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p} N_k(0)$ となり, 系 1.6 により $\overline{V}_{k,\alpha p^m} \xrightarrow{\sim} \overline{V}_{k,0}$ を得る. 最後に $\overline{V}_{k,0}$ を直接計算することで定理の結果を得る.

以下, この基本的アイデアに沿って, 実際に $N_k(X)$ を構成していく. $N_k(X)$ の係数となる $\mathbb{Z}_p[[u,X]]$ は $\mathbf{A}^+_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[X]]$ の u 進完備化と見なして, この環に φ, Γ を $\mathbb{Z}_p[[X]]$ 線形に作用させることにする. $q := \varphi(u)/u$, 任意の自然数 n に対して $q_n := \varphi^{n-1}(q) = \varphi^n(u)/\varphi^{n-1}(u)$ とおく. $\lambda^+ := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n}}{p} = \frac{q_2}{p} \times \frac{q_4}{p} \times \cdots$, $\lambda_- := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n-1}}{p} = \frac{q}{p} \times \frac{q_3}{p} \times \cdots$ とおく. $q_n \in \mathbb{Z}_p[u]$ で, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{Q}_p[[u]]$ となる.

補題 1.10. $m := [(k-2)/(p-1)]$, $p^m(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1} := \sum_{i \geq 0} z^i u^i \in \mathbb{Q}_p[[u]]$ とおく. このとき, $z := z_0 + z_1 u + \cdots z_{k-2} u^{k-2}$ とおくと, $z \in \mathbb{Z}_p[u]$ となる. また, $k = p+1$ のときは $m = 0$ とした上の主張が成り立つ.

証明 . $\mathbb{Q}_p[[u]]$ の部分環 R を, $R := \{\sum_{i \geq 0} a_i u^i | v_p(a_i) + \frac{i}{p-1} \geq 0\}$ とおく. R は環になり, $q = p(1 + uh(u)) + u^{p-1}$ であること ($h(u) \in \mathbb{Z}_p[u]$ は $p-3$ 次以下) と φ の定義から, 任意の n に対して $\frac{q_n}{p}$, $\frac{p}{q_n} \in R$ となる. これらと R の完備性から, $(\lambda_+/\lambda_-)^{k-1} \in R$ となる. $(\lambda_+/\lambda_-)^{k-1} := \sum_{i \geq 0} a_i u^i$ とおくと, $z_i = p^m a_i$ なので, $i \leqq k-2$ のとき, $v_p(z_i) = m + v_p(a_i) > \frac{k-2}{p-1} - 1 + v_p(a_i) \geq \frac{i}{p-1} + v_p(a_i) - 1 \geq -1$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$ なので $z_i \in \mathbb{Z}_p$ となる. $k = p+1$ のときは, 直接計算で示せる.

この補題の z を用いて, Wach 加群の族 $N_k(X)$ の φ 作用を定める行列 $P(X) \in M_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ を, $P(X) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q^{k-1} & zX \end{pmatrix}$ と定める. この $P(X)$ の $u = 0$ での値を

見ると, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^{k-1} & p^m X \end{pmatrix}$ であるから, X の値を色々と取ることで $P(X)$ が D_{k,a_p} たちの φ 作用の族を与えていることが理解されると思う. 次の問題は, この $P(X)$ と可換な Γ 作用を定義することであるが, そのためには任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $G_\gamma \in \mathrm{Id} + u\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ で, $P(X)\varphi(G_\gamma) = G_\gamma\gamma(P(X))$, $G_{\gamma\gamma'} = G_\gamma\gamma(G_{\gamma'})$ となる行列 G_γ たちを定義すればよい. この構成は（おそらく）$P(X)$ のように明示的にはできず, まずは G_γ を近似する $G_\gamma^{(k-1)}$ を明示的に構成し, 次に $G_\gamma^{(k-1)}$ から帰納的に G_γ へ近づけていくという手順を踏んで行われる.

まず, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $G_\gamma^{(k-1)} \in \mathrm{Id} + u\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ を, $G_\gamma^{(k-1)} := \begin{pmatrix} (\frac{\lambda_+}{\gamma(\lambda_+)})^{k-1} & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda_-}{\gamma(\lambda_-)})^{k-1} \end{pmatrix}$ と定める.

補題 1.11. $P(X)\varphi(G_\gamma^{(k-1)}) - G_\gamma^{(k-1)}\gamma(P(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^{k-1}* \end{pmatrix} \in u^{k-1}\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$。

証明 . これは, $z - p^m(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1} \in u^{k-1}\mathbb{Q}_p[[u]]$ であることと, $\varphi(\lambda_-) = \lambda_+$, $\varphi(\lambda_-) = \frac{q}{p}\lambda_+$ であることを用いると, あとは計算から従う.

命題 1.12. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, $G_\gamma \in \mathrm{Id} + \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ で, $P(X)\varphi(G_\gamma) = G_\gamma\gamma(P(X))$ を満たすものが唯一つ存在する.

証明 . まずは, G_γ の一意性を示す. G_γ, G'_γ が題意を満たすとする. すると, $H := G_\gamma G'^{-1}_\gamma$ は、$H \in \mathrm{Id} + u\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ かつ $HP(X) = P(X)\varphi(H)$ を満たす. もし, $H \neq \mathrm{Id}$ で $H = \mathrm{Id} + u^l H_l + u^{l+1}H_{l+1} + \cdots$ $H_i \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$, $H_l \neq 0$ ($l \geq 1$) とすると, $\varphi(u) = pu + \cdots$, $q(0) = p$, $z(0) = p^m$ であることから, $HP(X) = P(X)\varphi(H)$ の u^l の両辺の項を比較することで $H_l \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^{k-1} & p^m X \end{pmatrix} = p^l \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^{k-1} & p^m X \end{pmatrix} H_l$ が導かれる. $P_0(X) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^{k-1} & p^m X \end{pmatrix}$ とおく。$H_l \neq 0$ なので, 適当な無限個の値 $\alpha \in p\mathbb{Z}_p$ に対して, $H_l|_{X=\alpha} \neq 0$ かつ $P_0(\alpha)$ が相異なる固有値 $\beta, p^l\beta$ をもつ. これは $P_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p^{k-1} & p^m \alpha \end{pmatrix}$ であることに矛盾する. よって G_γ は一意に定まる. 次に, G_γ を $G_\gamma^{(k-1)}$ を近似させて行くことで次のように構成する. これは, $l \geq k$ に対して, $G_\gamma^{(l)}$ を $G_\gamma^{(l)} \equiv G_\gamma^{(l-1)} (\mathrm{mod}\, u^{l-1})$, $P(X)\varphi(G_\gamma^{(l)}) - G_\gamma^{(l)}\gamma(P(X)) \in u^l\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p[[u,X]])$ となる $G_\gamma^{(l)}$ を帰納的に構成し, $G_\gamma := \lim_{l\to\infty} G_\gamma^{(l)}$ と定める. (詳細は省略する）

G_γ の一意性から次が導かれる.

系 1.13. 任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して, $G_{\gamma\gamma'} = G_\gamma\gamma(G_{\gamma'})$.

任意の $k\geq 2$ に対して, $\mathbb{Z}_p[[u,X]]$ 上の Wach 加群の族　$N_k(X):=\mathbb{Z}_p[[u,X]]e_1\oplus \mathbb{Z}_p[[u,X]]e_2$ を,

(1) $\varphi(e_1):=q^{k-1}e_1$、$\varphi(e_2):=-e_1+zXe_2$,

(2) $\gamma(e_1):=g_{11\gamma}(X)e_1+g_{21\gamma}(X)e_2$, $\gamma(e_2):=g_{12\gamma}(X)e_1+g_{22\gamma}(X)e_2$,

と定義する. （ここで, $G_\gamma:=\begin{pmatrix} g_{11\gamma}(X) & g_{12\gamma}(X) \\ g_{21\gamma}(X) & g_{22\gamma}(X)\end{pmatrix}$ とする.）

この族を $\alpha\in\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ に特殊化して得られる, $\mathbf{A}^+_{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\overline{\mathbb{Z}}_p$ 上の Wach 加群を $N_k(\alpha)$ とおく. Wach 加群からフィルトレイション付き φ 加群を構成する方法 (定理 1.7 とその前の定義参照）に従ってフィルトレイション付き φ 加群 $N_k(\alpha)/uN_k(\alpha)[1/p]$ を計算することにより, 次の命題が得られる.

命題 1.14. $a_p:=\alpha p^m$ とおくと, フィルトレイション付き φ 加群の同型

$$N_k(\alpha)/uN_k(\alpha)[1/p]\xrightarrow{\sim} D_{k,a_p}$$

が存在する.

系 1.15. $\mathbf{B}_{\mathbb{Q}_p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上のエタール (φ,Γ) 加群の同型, $D(V^*_{k,a_p})\xrightarrow{\sim} N(\alpha)\otimes_{\mathbf{B}^+_{\mathbb{Q}_p}}\mathbf{B}_{\mathbb{Q}_p}$ が存在する.

証明 . 上の命題と系 1.8 から直ちに従う.

定理 1.5(3) によって Wach 加群 $N(\alpha)$ に対応する V_{k,a_p} の $\overline{\mathbb{Z}}_p$ 格子を T_{k,a_p} とおき, $\overline{T}_{k,a_p}:=T_{k,a_p}/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}T_{k,a_p}$ とおく.

定理 1.16. 任意の $\alpha\in\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ $(a_p:=p^m\alpha$ とおく $)$ に対して,

$$\overline{T}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\overline{T}_{k,0}.$$

証明 . 系 1.6 により, $D(\overline{T}^*_{k,a_p})\xrightarrow{\sim}(N_k(\alpha)/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}N_k(\alpha))\otimes_{\mathbb{F}_p[[u]]}\mathbb{F}_p((u))$ かつ $D(\overline{T}^*_{k,0})\xrightarrow{\sim}(N_k(0)/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}N_k(0))\otimes_{\mathbb{F}_p[[u]]}\mathbb{F}_p((u))$ が成り立つ. 定義により, 任意の $\alpha\in\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ に対して $N_k(\alpha)/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}N_k(\alpha)\xrightarrow{\sim}N_k(0)/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}N_k(0)$ なので, $D(\overline{T}^*_{k,a_p})\xrightarrow{\sim}D(\overline{T}^*_{k,0})$ も成り立つ. 最後に, Fontaine の圏同値により $\overline{T}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\overline{T}_{k,0}$ が成り立つ.

この定理により, $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算は $\overline{V}_{k,0}$ の計算に帰着された. $\overline{V}_{k,0}$ の計算は, $\mathbb{Q}_p$ の二次不分岐拡大 $\mathbb{Q}_{p^2}$ に付随する Lubin-Tate 指標を用いて, 次のように計算される.

命題 1.17.　(1) $(p+1)\nmid(k-1)$ のとき, $\overline{V}_{k,0}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,

(2) $(p+1) \mid (k-1)$ のとき, $\overline{V}_{k,0} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{\frac{k-1}{p+1}}$.

証明． $\varepsilon_2 : \mathbb{Q}_{p^2}^\times \to \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ を素元 $p \in \mathbb{Q}_{p^2}$ に付随する Lubin-Tate 指標とする．ε_2 は、$\varepsilon_2(p) = 1$, $\overline{\varepsilon}_2|_{I_{\mathbb{Q}_p}} = \omega_2$ を満たし, さらに $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}(\varepsilon_2^{k-1})$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元クリスタリン表現で, $D_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}(\varepsilon_2^{k-1}) \otimes \mu_{\sqrt{-1}}) \xrightarrow{\sim} D_{k,0}^*$ を満たす．$(p+1) \nmid (k-1)$ のときは, $\det(\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})) = \omega^{k-1}$ であることを考慮すると, $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{\varepsilon}_2^{k-1})) \otimes \mu_{\sqrt{-1}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ であることが分かり, $(p+1) \mid (k-1)$ のときは, $\omega_2^{p+1} = \omega$ であることから $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{\varepsilon}_2^{k-1})) \otimes \mu_{\sqrt{-1}} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{\frac{(k-1)}{(p+1)}}$ であることが分かる．

系 1.18. (定理 1.9) $k \geqq 2$ となる整数とする．$k \neq p+1$ のとき, $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$ は $v_p(a_p) > [(k-2)/(p-1)]$ を満たすとし, $k = p+1$ のとき, $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ は任意とする．このとき,

(1) $(p+1) \nmid (k-1)$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$、

(2) $(p+1) \mid (k-1)$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega^{\frac{(k-1)}{(p-1)}}$.

証明． 定理 1.16 から上の条件を満たす a_p に対して $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \bar{V}_{k,0}$ なので, 命題 1.17 から直ちに従う．

特に, 上の定理で中間重みの場合 $2 \leqq k \leqq 2p-1$ の場合は次のようになる．

定理 1.19. $a_p \in \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$ とする．

(1) $2 \leqq k \leqq p+1$ のとき, 任意の a_p に対して, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$、

(2) $k = p+2$ のとき, $v_p(a_p) > 1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_{\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & \mu_{-\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega$,

(3) $p+3 \leqq k \leqq 2p-1$ のとき, $v_p(a_p) > 1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p-2}) \otimes \omega$.

証明． (3) の場合は, $\omega_2^{k-1} = \omega_2^{(k-p-2)+(p+1)} = \omega_2^{k-2-p}\omega_2^{p+1} = \omega_2^{k-2-p}\omega$ となるから．

1.3 p 進局所 Langlands 対応を用いた計算

この章では, k が中間重み $2 \leqq k \leqq 2p$ のときの $\overline{V}_{k,a_p}$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応を用いて計算する. (中間重み $2 \leqq k \leqq 2p-1$ の場合より, 1 だけ広い範囲で計算できる.) p 進局所 Langlands 対応を用いて, 「$G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 p 進表現の法 p 還元の計算」という問題を「$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Banach 表現の法 p 還元の計算」という問題に帰着させるというのが基本的なアイデアである.

E を $\mathbb{Q}_p$ の十分大きい有限次拡大とする. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約 E 表現とする. $T \subset V$ を V の $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な $\mathcal{O}_E$ 格子とし, $T/\pi_E T \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}}$ の $\overline{\mathbb{F}}[G_{\mathbb{Q}_p}]$ 加群としての半単純化を $\overline{V}$ とおく. 特性多項式で半単純化は決まるという一般的な事実 (Brauer-Nesbitt の定理) により, $\overline{V}$ は V の格子 T の取り方にはよらない. 本報告集 [Na] 第一章で定義した (半単純) 法 p Langlands 対応によって $\overline{V}$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の半単純法 p 表現を $\Pi(\bar{V})$ とおく. 一方, [Na] 第二, 三章で解説した, p 進局所 Langlands 対応によって, 絶対既約な V に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の許容ユニタリー E-Banach 表現 $\Pi(V)$ が定まる. ([Na, 定理 3.15] 参照) $|-|_{\Pi(V)}$ を $\Pi(V)$ 上の E-Banach ノルムの一つとする. すると $\Pi(V)$ のユニタリー性から, $|-|_{\Pi(V)}$ から定まる $\Pi(V)$ の単位球 $\Pi(V)_0 := \{x \in \Pi(V) | |x|_{\Pi(V)} \leqq 1\}$ 及び $\pi_E \Pi(V)_0$ は, $\mathcal{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 加群となり, 作用の連続性からその商 $\Pi(V)_0/\pi_E\Pi(V)_0$ は, 滑らかな $k_E[\mathrm{GL}(\mathbb{Q}_p)]$ 表現となる. $\Pi(V)$ の許容性から $\Pi(V)_0/\pi_E\Pi(V)_0 \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}}$ は長さ有限の $\overline{\mathbb{F}}[\mathrm{GL}(\mathbb{Q}_p)]$ 加群になる. そこで, $\Pi(V)_0/\pi_E\Pi(V)_0 \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}}$ の $\overline{\mathbb{F}}[\mathrm{GL}(\mathbb{Q}_p)]$ 加群としての半単純化を $\overline{\Pi}(V)$ とおくことにする. $\overline{\Pi}(V)$ はノルム $|-|_{\Pi(V)}$ によらないことも証明できる. $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}^\times$ に対して, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の法 p 表現 $\pi(r, \lambda, \chi) := \mathrm{Ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^r \bar{\mathbb{F}}^2/(T-\lambda) \otimes \chi \circ \det$ とおく. (詳しい定義は [Na] 第一章を参照) 整数 r に対して, $[r]$ を $[r] \in \{0, 1, \cdots, p-2\}$ かつ $[r] \equiv r (\mathrm{mod}(p-1))$ を満たす整数とする.

「$G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 p 進表現の法 p 還元の計算」という問題を「$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Banach 表現の法 p 還元の計算」という問題に帰着させるために鍵となる定理が次の「p 進局所 Langlands 対応と法 p Langlands 対応の両立性」の定理である.

定理 1.20. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約二次元 E 表現, $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}^\times$ とするこのとき, 次の（1）,（2）は同値,

(1) $\overline{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$,

(2) $\overline{\Pi}(V) \xrightarrow{\sim} \pi(r, 0, \chi)$.

次の（3）と（4）は同値,

(3) $\overline{V} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi$、

(4) $\overline{\Pi}(V) \xrightarrow{\sim} \pi(r,\lambda,\chi)^{ss} \oplus \pi([p-3-r],\lambda^{-1},\chi\omega^{r+1})^{ss}$.

証明 . V が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 cristabelline 表現の場合は、[Na, 定理 3.14] 参照. 一般の場合も, 全く同様にして証明出来る.

この定理により, $\overline{V}$ の計算が $\Pi(V)$ の法 p 還元 $\overline{\Pi}(V)$ の計算に帰着される. 以下, V が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元クリスタリン表現 V_{k,a_p} かつ $2 \leqq k \leqq 2p$ の場合に $\overline{\Pi}(V_{k,a_p})$ の計算方法について具体的に解説していく.

$G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $Z := \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Q}_p^\times\}$ とする. 任意の $\mathbb{Z}_p$ 代数 R に対して R 線形な KZ の表現 $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2 := \oplus_{i=0}^{k-2} Rx^iy^{k-2-i}$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x^iy^{k-2-i}$ $:= (ax+cy)^i(bx+dy)^{k-2-i}$ $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K)$、$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} x^iy^{k-2-i} := x^iy^{k-2-i}$ と定義する. $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2$ を $R = \overline{\mathbb{F}}$ の場合と同様にして定義する. $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $v(x,y) \in \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2 - \{0\}$ に対して, $[g, v(x,y)] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2$ を $[g,v(x,y)](g^{-1}) = v(x,y)$, $\mathrm{Supp}([g,v(x,y)]) = KZg^{-1}$ となる元とする. また $R = \overline{\mathbb{F}}$ の場合の Hecke 作用素 T の一般化として, $R[G]$ 自己準同型 $T : \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}R^2$ を $T([g,v(x,y)]) := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} [g \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v(x, py - [\lambda]x)] + [g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, v(px, y)]$ と定める. ($g \in G$, $v(x,y) \in \oplus_{i=0}^{k-2} Rx^iy^{k-2-i}$, $\lambda \in \mathbb{F}_p$ に対して, $[\lambda] \in \mathbb{Z}_p$ は Teichmuller 持ち上げとする) $R = E$, $a_p \in \mathfrak{m}_E$ のとき, $\Pi_{k,a_p} := \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E/(T-a_p)$ とおく. $R = \mathcal{O}_E$ の場合から Π_{k,a_p} への自然な射の像を $\Theta_{k,a_p} := \mathrm{Im}(\mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathcal{O}_E^2 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2/(T-a_p))$ とおく. V_{k,a_p}, D_{k,a_p} なども E 上で考える. (以下, 係数 E は適当に大きく出来るので係数についてはあまり気にしないことにする.)

命題 1.21. $\Pi(V_{k,a_p})$ を p 進局所 Langlands 対応で V_{k,a_p} に対応する G の E-Banach 表現とする. このとき, 同型

$$\Pi(V_{k,a_p}) \xrightarrow{\sim} (\lim_{\leftarrow n} \Theta_{k,a_p}/\pi_E^n \Theta_{k,a_p}) \otimes_{\mathcal{O}_E} E$$

が存在し, さらに $\overline{\Pi}(V_{k,a_p}) \xrightarrow{\sim} (\Theta_{k,a_p}/\pi_E\Theta_{k,a_p} \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}})^{ss}$ となる.

この命題と定理 1.20 により, $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算は $(\Theta_{k,a_p}/\pi_E\Theta_{k,a_p} \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}})^{ss}$ の計算に帰着される. 命題の証明の前にいくつか準備をする. $a_p \in \mathfrak{m}_E$ に対して, $a_p = \lambda_1 + \lambda_2$,

$\lambda_1\lambda_2 = p^{k-1}$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{m}_E$ を取る. $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}}) := \{f : G \to E | f :$ 局所定数関数, $f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \mu_{\lambda_1^{-1}}(a)\mu_{p\lambda_2^{-1}}(d)f(g)\}$ とおく. $\mathrm{Ind}_B^G(1 \otimes 1)$ は部分 G 加群 1（自明な G の表現）をもつ（$1 \xrightarrow{\sim} \{$G 上の定数関数$\} \subseteq \mathrm{Ind}_B^G(1 \otimes 1)$ となる）が, その商を $\mathrm{St} := \mathrm{Ind}_B^G(1 \otimes 1)/1$ とおく.

補題 1.22. (1) $a_p \neq \pm p^{\frac{k}{2}-1}(p+1)$ のとき, 同型

$$\Pi_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}}) \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2$$

が存在する.

(2) $a_p = \pm p^{\frac{k}{2}-1}(p+1)$ のとき, 次の完全列が存在する,

$$0 \to \mu_{\pm 1} \circ \det \otimes \mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \to \Pi_{k,a_p} \to \mu_{\pm 1} \circ \det \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \to 0.$$

証明 . まず, 任意の $a \in E$ に対して $a = \lambda + p\lambda^{-1}$ とおく. このとき $E[G]$ 準同型 $\frac{\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1}{(T-a)\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1} \to \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)$ を次のように構成する.（ここで, 1 は KZ の自明表現） $f_0 \in \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)$ を $f_0(g) = f_0(bk) := (\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)(b)$ と定義する.（ここで, 岩澤分解 $G = BK$ を用いて $g = bk$, $b \in B$, $k \in K$ とする.）f_0 は分解の仕方によらずに定義できる. 定義から f_0 は KZ が自明に作用するので Frobenius 相互法則から $E[G]$ 加群の射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1 \to \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)$ で、$[\mathrm{Id}, e] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G 1$ を f_0 に写すものが唯一つ存在する. (e は, 自明な KZ 表現 1 の基底とする.）これは $(T-a)\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1$ をゼロに写す. $a \neq \pm(p+1)$ のとき, この射は同型 $\frac{\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1}{(T-a)\mathrm{Ind}_{KZ}^G 1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda)$ を誘導する. $a = \pm(p+1)$ のとき, この射の像は $\mu_{\pm 1} \circ \det \subset \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\pm 1} \otimes \mu_{\pm 1})$ で、射の核は $\mathrm{St} \otimes \mu_{\pm 1} \circ \det$ となる. つまり, 短完全列

$$0 \to \mathrm{St} \otimes \mu_{\pm 1} \circ \det \to \mathrm{Ind}_{KZ}^G 1/(T \pm (p+1)) \to \mu_{\pm 1} \circ \det \to 0$$

を得る. 次に, $E[G]$ 同型 $\mu_{p^{(1-\frac{k}{2})}} \circ \det \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_{KZ}^G 1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2$ を, $1 \otimes v \otimes f \mapsto (g \mapsto f(g)gv)$ で定める. すると, T の定義から, この同型で左辺の自己準同型 $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} \otimes p^{\frac{k}{2}-1}T$ は右辺の自己準同型 T と対応することが分かる. よって, 同型 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2/(T-a_p) \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{(1-\frac{k}{2})}} \circ \det \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_{KZ}^G 1/(T - a_p p^{1-\frac{k}{2}})$ を得る. $a_p = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 = p^{k-1}$ より, $a_p p^{1-\frac{k}{2}} = \lambda_1 p^{1-\frac{k}{2}} + p\lambda_2 p^{-\frac{k}{2}}$ で, $\lambda_2 p^{-\frac{k}{2}} = (\lambda_1 p^{1-\frac{k}{2}})^{-1}$ となっているので, $a_p p^{1-\frac{k}{2}} \neq \pm(p+1)$, つまり $a_p \neq \pm p^{\frac{k}{2}-1}(p+1)$ のとき, $\mu_{p^{(1-\frac{k}{2})}} \circ \det \otimes_E \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_{KZ}^G 1/(T - a_p p^{1-\frac{k}{2}}) \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{(1-\frac{k}{2})}} \circ \det \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}p^{\frac{k}{2}-1}} \otimes \mu_{\lambda_2^{-1}p^{\frac{k}{2}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})$ となる. 上の二つの同型を組み合わせて, 求める同型 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2/(T-a_p) \xrightarrow{\sim}$

$\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{Ind}_B^G(\mu_{\lambda_1^{-1}} \otimes \mu_{p\lambda_2^{-1}})$ を得る．$a_p = \pm p^{\frac{k}{2}-1}(p+1)$ のときは，（２）の完全列を得る．

証明． (命題の証明) 上の補題より, 命題は本報告集 [Na, 命題 2.7] から従う．

以上で命題 1.22 が証明され, $\overline{V}_{k,a_p}$ の計算が最終的に $\overline{\Theta}_{k,a_p} := (\Theta_{k,a_p}/\mathfrak{m}_E\Theta_{k,a_p}) \otimes_{k_E} \overline{\mathbb{F}}$ の計算に帰着された．以下, $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ の計算を $2 \leqq k \leqq p+1$ の場合と $p+2 \leqq k \leqq 2p$ の場合に場合分けして行う．

定理 1.23. $2 \leqq k \leqq p+1$ のとき, 任意の $a_p \in \mathfrak{m}_{\mathbb{Z}_p}$ に対して,

$$\overline{\Theta}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \pi(k-2,0,1)$$

証明． まず, Θ_{k,a_p} の定義から $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ は $\pi(k-2,0,1) = \mathrm{Ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{F}}^2/T$ の商になる．$0 \leqq k-2 \leqq p-1$ だから [Na, 定理 1.23] より $\pi(k-2,0,1) = \mathrm{Ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^{k-2}\overline{\mathbb{F}}^2/T$ は既約で, さらに定理 1.20 から特に $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ はゼロでないので同型でなければならない．

注意 1.24. [Br] では, 当時は p 進局所 Langlands 対応の理論がなかったので $\overline{\Theta}_{k,a_p} \neq 0$ であることを直接計算によって確かめていた．定理 1.20 を用いることで, この計算は不要になる．

任意の r に対して、$\overline{\mathbb{F}}[K]$ 加群 $\sigma_r := \oplus_{i=0}^r \overline{\mathbb{F}}x^i y^{r-i}$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x^i y^{r-i} := (\overline{a}x + \overline{c}y)^i(\overline{b}x + \overline{d}y)^{r-i}$ ($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$) と定める．$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ を自明に作用させることで, σ_r に KZ 作用を定める．任意の $m \in \{0,1,\cdots,p-2\}$ に対して, $\sigma_r(m) := \sigma_r \otimes \omega^m \circ \det$ と定める．

$p+2 \leqq k \leqq 2p$ の場合．以下, 簡単のため $p > 2$ と仮定する．この場合は, さらに $k = p+2$ の場合と $p+3 \leqq k \leqq 2p$ の場合に分けて計算する．その前に任意の $k \geqq p+2$ に対して一般的に成り立つ（$k > 2p$ でも成り立つ）次の補題を紹介する．σ_{k-2} の部分 KZ 加群で x^{k-2} で生成されるものを τ_{k-2} とおく．

補題 1.25. $k \geqq p+2$ のとき, $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \tau_{k-2} = T\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$.

証明． 包含関係 $\supseteq$ は T の定義から明らか．$\subseteq$ について．τ は y^{k-2} でも生成されて, $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \tau_{k-2}$ は $[\mathrm{Id}, y^{k-2}]$ で生成されるから $[\mathrm{Id}, y^{k-2}] \in T\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{k-2}$ を示せばよい．$T([\mathrm{Id}, y^{k-2}] - [\mathrm{Id}, x^{p-1}y^{k-2-(p-1)}]) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} [\begin{pmatrix} p & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (-\lambda)^{k-2}x^{k-2} -$

$(-\lambda)^{k-2-(p-1)}x^{k-2}] + [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, y^{k-2}] = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, y^{k-2}]$. ($k-2 \geq p$ だから, 任意の $\lambda \in \mathbb{F}_p$ に対して, $(-\lambda)^{k-2} - (-\lambda)^{k-2-(p-1)} = 0$ になる.) よって, $[\mathrm{Id}, y^{k-2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1} [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, y^{k-2}] \in T\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2}$.

$k = p+2$ の場合. この場合, $\tau_p = \overline{\mathbb{F}}x^p \oplus \overline{\mathbb{F}}y^p$ となっている.

補題 1.26. $\overline{\mathbb{F}}[KZ]$ 加群の次の完全列が存在する.

$$0 \to \tau_p \to \sigma_p \to \sigma_{p-2}(1) \to 0$$

ここで, $\sigma_p \to \sigma_{p-2}(1)$ は, $x^p, y^p \mapsto 0$, $x^{p-1}y \mapsto x^{p-2}$ で（KZ 作用と両立するように）定義される.

証明． まず, 任意の $\overline{\mathbb{F}}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)]$ 加群 σ に対して, $\dim_{\overline{\mathbb{F}}}\sigma^{I(1)} = 1$ で, σ が $\overline{\mathbb{F}}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)]$ 加群として, $\sigma^{I(1)}$ で生成されていたら, σ は既約であることに注意する. (これは, 任意のゼロでない $\overline{\mathbb{F}}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)]$ 加群 σ' に対して $\sigma'^{I(1)} \neq 0$ であることから従う. ここで, $I(1) := \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおいた.) すると, $\sigma_p/\tau_p \xrightarrow{\sim} \sigma_{p-2}(1)$ であることは, $(\sigma_p/\tau_p)^{I(1)} = \overline{\mathbb{F}}\overline{x}^{p-1}\overline{y}$ であることと, σ_p/τ_p の次元が $p-1$ であること, $p-1$ 次元の既約表現は $\sigma_{p-2}(m)$ の形である（[Na, 補題 1.7]) ことから従う.

この命題と誘導表現の完全性と $\tau_p \xrightarrow{\sim} \sigma_1$ とから G の表現の次の完全列を得る.

$$0 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_1 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_p \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{p-2}(1) \to 0$$

系 1.27. 任意の $a_p \in \mathfrak{m}_{\bar{\mathbb{Z}}_p}$ に対して, 自然な全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{p-2}(1) \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_{k,a_p}$ がある.

証明． まず, Θ_{k,a_p} の定義から任意の k, a_p に対して全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2}/T \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_{k,a_p}$ が存在することに注意する. $k = p+2$ の場合は補題 1.25 と 1.26 から, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2}/T \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{p-2}(1)$ となるから系が従う.

定理 1.28. (1) $v_p(a_p) < 1$ のとき, $\overline{\Theta}_{p+2,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{p-2}/T \otimes \omega \circ \det$

(2) $v_p(a_p) \geqq 1$ のとき, $\overline{\Theta}_{p+2,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{p-2}/(T^2 - \frac{\overline{a}_p}{p}T + 1) \otimes \omega \circ \det$

証明． （概略）$v_p(a_p) < 1$ のとき. $z := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p}[\begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{a_p}(x^{p-1}y - y^p)] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\underline{\mathrm{Sym}}^p\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ をとる. $(T-a_p)z$ を計算すると, $v_p(a_p) < 1$ という条件から, $(T -$

$a_p)z \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^p \overline{\mathbb{Z}}_p^2$ で，この元の $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_p$ への像は $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} [\begin{pmatrix} p & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x^{p-1}y - y^p]$ をとなる．Θ_{k,a_p} の定義により，この元 $(T-a_p)z$ は $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ の元としてゼロとなり，さらに補題 1.26 により，$(T-a_p)z$ の $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}(1)$ での像は $T([\mathrm{Id}, x^{p-2}])$ となる．以上より，系 1.27 の射は $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}/T \otimes \omega \circ \det \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_{k,a_p}$ を経由する．これは既約であるから（1）の同型を得る．

$v_p(a_p) \geqq 1$ のとき．$f := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} [\begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{p}(x^{p-1}y - y^p)] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^p \overline{\mathbb{Q}}_p^2$ とおく．$v_p(a_p) \geqq 1$ という条件を用いると，$(T-a_p)(f) \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G \underline{\mathrm{Sym}}^p \overline{\mathbb{Z}}_p^2$ となり，この元を法 p 還元して補題 1.26 の全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_p \to \mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}(1)$ で送った像は $(T^2 - \frac{\overline{a}_p}{p}T + 1)([\mathrm{Id}, x^{p-2}]) \in \mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}(1)$ となる．$\overline{\Theta}_{k,a_p}$ の定義により，$(T-a_p)(f)$ は $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ の元としてゼロとなるので，補題 1.27 の射は $\mathrm{Ind}_{KZ}^G \sigma_{p-2}/(T^2 - \frac{\overline{a}_p}{p}T + 1) \otimes \omega \circ \det \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_{k,a_p}$ を経由する．さらに，半単純法 p Langlands 対応に現れ得る G の半単純法 p 表現を考えると (定理 1.20 参照），この射が同型でなければならないことがわかる．

定理 1.20 から次を得る．

系 1.29. (1) $v_p(a_p) < 1$ のとき，$\overline{V}_{p+2,a_p} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{ind}(\omega_2^{p-1})) \otimes \omega$,

(2) $v_p(a_p) \geqq 1$ のとき，$\overline{V}_{p+2,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mu_\lambda \omega & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\omega \end{pmatrix}$．（ここで，$\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$ は，$T^2 - \frac{\overline{a}_p}{p}T + 1 = 0$ の解の一つ）

最後に $p+3 \leqq k \leqq 2p$ の場合の計算を行う．

補題 1.30. $p+3 \leqq k \leqq 2p$ のとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 加群の次の完全列がある．

$$0 \to \tau_{k-2} \oplus \sigma_{k-p-3}(1) \to \sigma_{k-2} \to \sigma_{2p-k}(k-1-p) \to 0$$

ここで，射 $\sigma_{k-p-3}(1) \to \sigma_{k-2}$ は，$v \mapsto (x^py - xy^p)v$ で定義され，射 $\sigma_{k-2} \to \sigma_{2p-k}(k-1-p)$ は，$x^{p-1}y^{k-p-1}$ を x^{2p-k} に写す．

証明． σ_{k-2} の部分空間で，$\overline{\mathbb{F}}$ 上 $\{x^iy^{k-2-i} | i \geqq p$ または，$k-2-i \geqq p\}$ で生成される部分空間を τ とすると，τ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の作用で閉じている．このとき，商 σ_{k-2}/τ は，$(\sigma_{k-2}/\tau)^{I(1)} = \overline{\mathbb{F}}\overline{x}^{p-1}\overline{y}^{k-1-p}$ を満たし，$\overline{x}^{p-1}\overline{y}^{k-1-p}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ 加群として σ_{k-2}/τ を生成するので，σ_{k-2}/τ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の既約な表現であることが分かる．また，σ_{k-2}/τ の次元とそれへの G の中心の作用を見ることで，$\sigma_{k-2}/\tau \xrightarrow{\sim} \sigma_{2p-k}(k-1-p) : \overline{x}^{p-1}\overline{y}^{k-p-1} \mapsto x^{2p-k}$ となることが分かる．また，$\tau \xrightarrow{\sim} \tau_{k-2} \oplus (x^py - xy^p)\sigma_{k-p-3}$ となることも確かめることができる．

この補題と補題 1.25 から, 完全列

$$0 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1) \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2}/T \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-1-p) \to 0$$

を得る.

定理 1.31. (1) $v_p(a_p) < 1$ のとき, $\overline{\Theta}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}/T \otimes \omega^{(k-1-p)} \circ \det$,

(2) $v_p(a_p) = 1$ のとき, $\lambda := \overline{\frac{(k-1)a_p}{p}} \in \bar{\mathbb{F}}^{\times}$ とおくと, 次の完全列がある,

$$0 \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}/(T-\lambda) \otimes \omega \circ \det \to \bar{\Theta}_{k,a_p} \to \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}/(T-\lambda^{-1}) \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det \to 0,$$

(3) $v_p(a_p) > 1$ のとき, $\overline{\Theta}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}/T \otimes \omega \circ \det$.

証明 . (1) $v_p(a_p) < 1$ のとき. $f := [\mathrm{Id}, \frac{1}{a_p}(x^p y - xy^p)y^{k-p-3}] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ とおく. $v_p(a_p) < 1$ という条件を用いると, $(T-a_p)(f) \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Z}}_p^2$ で, この元を法 p 還元した $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2}$ への像は, $[\mathrm{Id}, (x^p y - xy^p)y^{k-p-3}]$ となっている. これは, 補題 1.30 により部分 G 加群 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1)$ の生成元と対応する元である. よって Θ_{k,a_p} の定義から, 自然な射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-2} \to \overline{\Theta}_{k,a_p}$ は $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1) \to \overline{\Theta}_{k,a_p}$ を経由することが分かる. さらにこのとき, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1)$ の商で半単純法 p Langlands 対応に現れうる表現は $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1)/T$ しかないので, (1) を得る.

(3) $v_p(a_p) > 1$ のとき. まず, 補題 1.27 の射による $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1)$ の $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ への像を $\overline{\Theta}_1$ とし $\overline{\Theta}_2 := \overline{\Theta}_{k,a_p}/\overline{\Theta}_1$ とおく. 補題 1.30 から全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1) \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_2$ がある. $f = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p}[\begin{pmatrix} p^2 & p[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p^{-1}[\lambda]^{2p-k}(x^{p-1} - y^{p-1})y^{k-p-1}] + [\mathrm{Id}, p^{-1}(p-1)(x^{p-1} - y^{p-1})x^{k-p-1}] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ とおく. $v_p(a_p) > 1$ の条件の下で計算すると, $(T-a_p)(f) \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Z}}_p^2$ で, この元の法 p 還元の $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1)$ への像は生成元 $[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_p^{\times} y^{2p-k}] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{2p-k}(k-p-1)$ であることが分かる. これより $\overline{\Theta}_2 = 0$ で, $\overline{\Theta}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{\Theta}_{k,a_p}$, つまり $\overline{\Theta}_{k,a_p}$ は $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1)$ の商であることが分かる. すると, (1) の場合と同様にして $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1)$ の商で半単純法 p Langlands 対応に現れる表現は $\mathrm{Ind}_{KZ}^{G}\sigma_{k-p-3}(1)/T$ しかあり得ないので (3) を得る.

(2) $v_p(a_p) = 1$ のとき. まず, (2) と同じ $f := \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p}[\begin{pmatrix} p^2 & p[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{[\lambda]^{2p-k}}{p}(x^{p-1} - y^{p-1})y^{k-p-1}] + [\mathrm{Id}, \frac{(p-1)}{p}(x^{p-1} - y^{p-1})x^{k-p-1}]$ をとる. $v_p(a_p) = 1$ の条件の下では,

$(T-a_p)(f)\in \mathrm{Ind}_{KZ}^G\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Z}}_p^2$ で, この元の法 p 還元の $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-2}\to \mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{2p-k}(k-p-1)$ への像は $(-1)^{2p-k+1}\frac{\bar{a}_p}{p}(T-\lambda^{-1})[\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, y^{2p-k}]$ となっている. (ここで, $\lambda := \overline{\frac{(k-1)a_p}{p}}$) よって, 全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{2p-k}/(T-\lambda^{-1})\otimes\omega^{(k-p-1)}\circ\det \twoheadrightarrow \overline{\Theta}_2$ を得る. 次に, $f' := [\mathrm{Id}, (x^py-xy^p)x^{k-p-3}]\in \mathrm{Ind}_{KZ}^G\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Q}}_p^2$ とおく. $v_p(a_p)=1$ の条件の下で, $(T-a_p)(f')\in \mathrm{Ind}_{KZ}^G\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\overline{\mathbb{Z}}_p^2$ で, この元の $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-2}/T$ への像は $\frac{1}{(k-1)}(T-\lambda)([\mathrm{Id}, x^{k-p-3}])\in \mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-p-3}(1)$ の $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-2}/T$ への像と一致することが分かる. これより, 全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-p-3}/(T-\lambda)\otimes\omega\circ\det\to\overline{\Theta}_1$ を得る. 最後に, 再び (1), (3) の場合と同様にして半単純法 p Langlands 対応に現れ得る表現を考えれば, 二つの射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{2p-k}/(T-\lambda^{-1})\otimes\omega^{(k-p-1)}\circ\det\xrightarrow{\sim}\overline{\Theta}_2$ と $\mathrm{Ind}_{KZ}^G\sigma_{k-p-3}/(T-\lambda)\otimes\omega\circ\det\xrightarrow{\sim}\overline{\Theta}_2$ は同型であることが分かり, (2) を得る.

系 1.32. $p+3\leqq k\leqq 2p$ のとき,

(1) $v_p(a_p)<1$ のとき, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{2p-k+1})\otimes\omega^{k-p-1}$,

(2) $v_p(a_p)=1$ のとき, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\begin{pmatrix}\omega^{k-p-2}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix}\otimes\omega$, ここで, $\lambda=\overline{\frac{(k-1)a_p}{p}}$,

(3) $v_p(a_p)>1$ のとき, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{k-p-2})\otimes\omega$.

最後に, 繰り返しになるが, 中間重みの $\overline{V}_{k,a_p}$ について得られた結果をまとめておく.

定理 1.33. $p>2$ とする.

(1) $2\leqq k\leqq p+1$ のとき, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$,

(2) $k=p+2$ のとき,

- $v_p(a_p)<1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{p-1})\otimes\omega$,
- $v_p(a_p)\geqq 1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\begin{pmatrix}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix}\otimes\omega$, （ここで, $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}^\times$ は、$T^2-\frac{\bar{a}_p}{p}T+1=0$ の解）,

(3) $p+3\leqq k\leqq 2p-1$ のとき,

- $v_p(a_p)<1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{2p-k+1})\otimes\omega^{k-p-1}$,

- $v_p(a_p) = 1$ ならば, $\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^{k-p-2}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \omega$, （ここで, $\lambda = \overline{\frac{(k-1)a_p}{p}}$),
- $v_p(a_p) > 1$ ならば、$\overline{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p-2}) \otimes \omega$.

2　中間重みクリスタリン変形の保型性持ち上げ

前章で, 中間重みクリスタリン表現の半単純法 p 還元は全て決定できた. この章では, これらの計算結果を用いて, 中間重みクリスタリン表現の局所普遍変形環が整域であることを示し, その応用として中間重みクリスタリン表現の保型性持ち上げに関する定理が得られることを紹介したい. この章では $p > 2$ と仮定する.

2.1　Wach 格子のモジュライとクリスタリン表現の変形環

この小章では, Wach 加群の理論を用いてクリスタリン表現の局所普遍変形環を構成する方法を紹介する.

F を $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大, E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ をその整数環, $\mathbb{F}$ をその剰余体とする. $V_{\mathbb{F}}$ を $G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の二次元 $\mathbb{F}$ 表現とする. $R^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $V_{\mathbb{F}}$ の $\mathcal{O}$ 上の枠付き普遍変形環とし, $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{\mathbb{Q}_p}]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ のときは $R_{V_{\mathbb{F}}}$ を $\mathcal{O}$ 上の $V_{\mathbb{F}}$ の普遍変形環とする. （詳しい定義は, 本報告集 [Ya] 参照）Kisin の修正 Taylor-Wiles 系の議論を適応するために, ここでは $V_{\mathbb{F}}$ の持ち上げでクリスタリン表現で Hodge-Tate 重みを固定したものからなる部分変形空間を考えたい. この小章では, Wach 加群のモジュライを用いることでこの変形空間が実際に普遍変形環 $R^{\square}_{V\mathbb{F}}$ や $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の商環として実現されることを解説する.

任意の $\mathbb{Z}_p$ 代数 B に対して, $\mathbf{A}_{F,B} := \mathbf{A}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} B$, $\mathbf{A}^+_{F,B} := \mathbf{A}^+_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} B$ とおく. $W(\mathbb{F})$ 代数 A を局所 Artin 環で剰余体が $\mathbb{F}$ であるものとする. V_A をランク d の自由 A 加群で G_F が A 線形に連続作用しているものとし、V_A^* を V_A の A 双対とする. $D(V_A^*)$ を Fontaine の関手で V_A^* と対応する ($\mathbf{A}_F$ 上の）エタール (φ, Γ) 加群とする. $D(V_A^*)$ はランク d の自由 $\mathbf{A}_{F,A}$ 加群になっている.

定義 2.1. $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$, B を A 代数とする. このとき, 有限生成射影的 $\mathbf{A}^+_{F,B}$ 加群 $\mathfrak{M}_B \subseteq D(V_A^*) \otimes_A B$ が重み $[0, k]$ の Wach 格子であるとは, 次の 4 つの条件を満たすものとする,

(1) $\mathfrak{M}_B$ は $D(V_A^*)\otimes_A B$ の (φ,Γ) 作用で閉じている,

(2) $\mathfrak{M}_B$ は $\mathbf{A}_{F,B}$ 上 $D(V_A^*)\otimes_A B$ を生成する,

(3) $\mathrm{Cok}(\varphi^*(\mathfrak{M}_B)\to\mathfrak{M}_B)$ は q^k で消える $(q:=\varphi(u)/u\in\mathbf{A}_F^+)$、

(4) $\Gamma_F:=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ は $\mathfrak{M}_B/u\mathfrak{M}_B$ に自明に作用する.

A 代数の圏から集合の圏への共変関手 $W_{V_A,\leqq k}$ を A 代数 B に対して, $W_{V_A,\leqq k}(B):=\{\mathfrak{M}_B\subseteq D(V_A)\otimes_A B|\mathfrak{M}_B$ は $D(V_A^*)\otimes_A B$ の Wach 格子$\}$ と定義する. ($\mathfrak{M}_B$ は有限生成射影的という条件から $W_{V_A,\leqq k}$ が関手になることを確かめることが出来る.)

命題 2.2. 関手 $W_{V_A,\leqq k}$ は, A 上の射影的スキーム $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}$ によって表現される. さらに, A', A を局所 Artin 環で剰余体 $\mathbb{F}$ を持ち, 局所射 $A\to A'$ があるとし, $V_{A'}:=V_A\otimes_A A'$ とすると, A' 上のスキームの自然な同型 $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}\otimes_A A'\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_{V_{A'},\leqq k}$ が存在する. (ここで, $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}\otimes_A A'$ は、$\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}$ と $\mathrm{Spec}(A')$ の $\mathrm{Spec}(A)$ 上のファイバー積を表す.)

証明 . 本報告集 [Im], [Ya] 参照. 正確には, この場合は Γ_F 作用に関する表現性も証明する必要があるが, それは容易なので省略する.

次に, $W(\mathbb{F})$ 代数 A を Noether 完備局所環で剰余体が $\mathbb{F}$ のものとし, V_A をランク d の自由 A 加群で G_F が A 線形連続に作用しているものとする. $D(V_A^*):=\lim_{\leftarrow n}D(V_A^*\otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n)$ とする. すると, $D(V_A^*)$ は, $\mathbf{A}_{F,A}:=\lim_{\leftarrow n}(\mathbf{A}_F\otimes_{\mathbb{Z}_p}A/\mathfrak{m}_A^n)$ 上, ランク d の自由加群になる. A 代数 B で, ある n が存在して $\mathfrak{m}_A^nB=0$ となるような B の圏から集合の圏への共変関手 $W_{V_A,\leqq k}$ を, $W_{V_A,\leqq k}(B):=\lim_{\rightarrow n}W_{V_{A/\mathfrak{m}_A^n},\leqq k}(B)$ と定める. 上の命題の極限(の代数化)を取ることで次の命題が得られる.

命題 2.3. 上の状況で, 関手 $W_{V_A,\leqq k}$ は A 上の射影的スキーム $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}$ で表現される. さらに,

(1) 構造射 $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}[1/p]\hookrightarrow\mathrm{Spec}(A)[1/p]$ は閉埋め込みとなる,

(2) B を $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上有限な局所 Artin 環で, $x:A[1/p]\to B$ で A 代数の構造をもつとする. このとき, 「構造射 $x^*:\mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A[1/p])$ が閉埋め込み $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}[1/p]\hookrightarrow\mathrm{Spec}(A[1/p])$ を経由すること」と, 「$V_B:=V_A\otimes_A B$ が Hodge − Tate 重みが $[0,k]$ の間にあるクリスタリン表現となること」は同値.

証明 . 関手が射影的スキームによって表現されることと, 主張(1)は [Im]、[Ya] の場合と同様に証明される. ((1)は、Wach 加群の圏からエタール (φ,Γ) 加群の圏への(係数拡大による)関手が忠実平坦であること(定理 1.5(3)) から従う.)

（２）の証明．まず，[Im]，[Ya] と同様にして，「構造射 x^* ：$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A[1/p])$ が $\mathcal{W}_{V_A,\leqq k}[1/p] \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A[1/p])$ を経由すること」と，「$\mathbf{B}_{F,B}$ 上の Wach 加群 N で $N \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{A}_F \xrightarrow{\sim} D(V_B^*)$ となるものが存在すること」が同値であることを証明することが出来る．これより（２）は定理 1.5 から従う．

A を $\mathbb{Q}_p$ 上有限な局所環とし, V_A をランク d の有限自由 A 加群で G_F が A 線形連続に作用しているものとする．さらに, V_A は G_F の $\mathbb{Q}_p$ 表現としてクリスタリン表現であるとする．すると, $D_{\mathrm{cris}}(V_A^*) := (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_A^*)^{G_F}$ は $d \times \dim_{\mathbb{Q}_p}(A)$ 次元の F ベクトル空間であるが,（φ の作用を考えることで）さらにランク d の自由 $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 加群であることが分かる．定義により, $D_{\mathrm{cris}}(V_A^*)$ には $\varphi^{[F:\mathbb{Q}_p]}$ が $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 線形に作用している．そこで, この作用の固有多項式を

$$P_{V_A}(T) := \det_{F\otimes_{\mathbb{Q}_p}A}(T - \varphi^{[F:\mathbb{Q}_p]}|D_{\mathrm{cris}}(V_A^*)) \in F \otimes_{\mathbb{Q}_p} A[T]$$

と定義する．これは, $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 係数の次数 d の多項式となる．$0 \leqq i \leqq d$ に対して $P_{V_A}(T)$ の T^i の係数を $c_{V_A,i} \in F \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ とおく．

$R = R^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ または $R = R_{V_{\mathbb{F}}}$ とする．命題 2.3 を $A = R$, $V_A = V_R$ は普遍的な $V_{\mathbb{F}}$ の変形, に適応する．$R_{\leqq k}$ を命題 2.3 の構造射 $\mathcal{W}_{V_R,\leqq k} \to \mathrm{Spec}(R)$ のスキーム論的像の関数環とする．（つまり, $R_{\leqq k} := \mathrm{Im}(R \to \Gamma(\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}))$ とおく.）

系 2.4. $0 \leqq i \leqq d-1$ なる任意の整数 i に対して, $c_i \in F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R_{\leqq k}[1/p]$ であって, 任意の局所有限 $W(\mathbb{F})[1/p]$ 代数 A と任意の $W(\mathbb{F})$ 代数の射 $h : R_{\leqq k} \to A$ に対して,（$V_A := V_R \otimes_{R,h} A$ とおくと）$c_{V_A,i} = \mathrm{id}_F \otimes h(c_i)$ となる c_i が存在する．さらに, c_i は $\mathrm{Im}(\mathrm{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R_{\leqq k} \to F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R_{\leqq k}[1/p])$ 上整となる．

証明． まず, [Im], [Ya] の場合と同様に, $\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}$ 上には普遍的 Wach 格子 $\mathfrak{M}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}$ が存在する．$D_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}} := \mathfrak{M}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}/u\mathfrak{M}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}$ とおく．$D_{\mathrm{W}_{V_R,\leqq k}}$ には $\mathfrak{M}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}$ からの φ 作用が誘導され, ランク d の有限射影的 $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}$ 加群となる．よって, $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}$ 線形な作用 $\varphi^{[F:\mathbb{Q}_p]}$ の d 次の行列式

$$P(T) := \det(T - \varphi^{[F:\mathbb{Q}_p]}|D_{\mathrm{W}_{V_R,\leqq k}}) \in \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Gamma(\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}})[T]$$

を得る．$0 \leqq i \leqq d-1$ に対して, $P(T)$ の i 次の係数の自然な射 $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Gamma(\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}) \to F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \Gamma(\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}})[1/p] \xrightarrow{\sim} F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R_{\leqq k}[1/p]$ での像を c_i とする．（ここで, 最後の同型で命題 2.3(1) を用いた）命題 2.3 より $\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}$ は R 上固有であるから $\Gamma(\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}})$ は $R_{\leqq k}$ 上有限で, これより c_i は $\mathrm{Im}(\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} R_{\leqq k} \to F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R_{\leqq k}[1/p])$ 上整となる．次に, 任意の局所有限 $W(\mathbb{F})[1/p]$ 代数 A と任意の $W(\mathbb{F})$ 代数の射 $h : R_{\leqq k} \to A$ に対して, $\mathfrak{M}_A := \mathfrak{M}_{\mathcal{W}_{V_R,\leqq k}}[1/p] \otimes_{R_{\leqq k}[1/p]} A$ とおくと, これは $D(V_A^*)$ に含まれる Wach 加群となり, 定理 1.5 より V_A はクリスタリン表現でさらに定理 1.7 から同型 $D_{\mathrm{cris}}(V_A^*) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_A/u\mathfrak{M}_A \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{W}_{V_R,\leqq k}}[1/p] \otimes_{R_{\leqq k}[1/p]} A$ を得る．よって $c_{V_A,i} = \mathrm{id}_F \otimes h(c_i)$ となる．

ここから, $F=\mathbb{Q}_p$ とする． $k \geqq 2$, E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ をその整数環, $\mathbb{F}$ を剰余体とする．$V_{\mathbb{F}}$ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 $\mathbb{F}$ 表現でさらに $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{\mathbb{Q}_p}]}(V_{\mathbb{F}})=\mathbb{F}$ を満たすものとする．このとき $V_{\mathbb{F}}$ の $W(\mathbb{F})$ 上の普遍変形環が存在し, それを $R_{V_{\mathbb{F}}}$ と書く．$R_{V_{\mathbb{F}}}$ 上の普遍変形を $V_{R_{V_{\mathbb{F}}}}$ とおく．$\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{O}^{\times}$ を連続指標で惰性群 $I_{\mathbb{Q}_p}$ への制限が $\psi|_{I_{\mathbb{Q}_p}}=\chi_p^{k-2}$ を満たすものとする．(χ_p は p 進円分指標)

命題 2.5. $R_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}$ の商環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する．

(1) $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ は p-torsion free で $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p]$ は E 上形式的滑らか,

(2) E' は E の有限次拡大, $x : R_{V_{\mathbb{F}}} \to E'$ を $W(\mathbb{F})$ 代数の射とし, $V_x := V_{R_{V_{\mathbb{F}}},x} \otimes_{R_{V_{\mathbb{F}}},x} E'$ とする．(つまり, V_x は $V_{R_{V_{\mathbb{F}}}}$ の $x : R_{V_{\mathbb{F}}} \to E'$ での底変換) このとき,「x が $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \to E'$ を経由すること」と「V_x が $\mathrm{Hodge-Tate}$ 重み 0、$k-1$ をもつ $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ のクリスタリン表現で $\det(V_x)=\psi\chi$ となること」は同値になる．

さらに, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \neq 0$ とすると, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p]$ は Krull 次元 1 となる．

証明． まず, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi}$ を $R_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}$ の商で, $\det=\psi\chi$ となる変形に対応するものとする．次に, Sen の Hodge-Tate 重みの解析的変動の理論, または Wach 加群の理論（q-高さと Hodge-Tate 重みの関係）を用いることで, $R_{V_{\mathbb{F}},\leqq k-1}$ の商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1}$ で Hodge-Tate 重みが $0, k-1$ となる変形に対応するものが存在する．そこで, I_1, I_2 を $R_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}$ のイデアルでそれぞれ商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi}$, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}$ に対応するものとし, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} := \mathrm{Im}(R_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}/(I_1+I_2) \to R_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}/(I_1+I_2)[1/p])$ とおくと, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ は題意の条件 (2) を満たす．$R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \neq 0$ とし, 任意の閉点 $x : R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \to E'$ をとる．E' を剰余体にもつ有限 ArtinE' 代数 B に対して, $D_{V_x}^{f,\psi}(B) := \{V_B | V_B$ は V_x の B へのクリスタリンな変形で $\det(V_B)=\psi\chi$ となる $\}/\sim$ と関手を定めると（$\sim$ は [Ya] と同様な同値関係）, [Ya] と同様にして, 関手 $D_{V_x}^{f,\psi}(-)$ は, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p]$ の x での完備化によって表現されていることを示すことができる．そして, [Ya] と同様の議論で関手 $D_{V_x}^{f,\psi}(-)$ は E' 上形式的滑らかで,（det を固定した変形なので）接空間の次元は $\dim_{E'} D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{ad}(V_x)^0)/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{ad}(V_x)^0) + \dim_{E'}(\mathrm{ad}(V_x)^0)^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}}$ となり, $k \geqq 2$ という条件からこの値は 1 となることが分かる．

2.2 主定理の証明

前小章と同じ設定の下でさらに, k が中間重み, つまり $2 \leqq k \leqq 2p-1$ を満たすとする．次の定理が本論稿の主定理である．この定理の証明において, 一章で行った $\bar{V}_{k,a_p}$ の計算が本質的に用いられる．

定理 2.6. $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ は整域.

この定理の証明のために, Gabber により証明された次の可換環論の定理を紹介する. V を完備 Noether 局所環とし, 圏 $\mathcal{C}$ を対象が $V[[x_1,\cdots,x_d]]$ 上有限な V 代数からなる圏とする (射は V 代数の射とする). すると, 任意の $R\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ は完備局所環の有限積になっている. $\mathrm{Max}(R)$ を R の全ての極大イデアルからなる有限集合とする.

定理 2.7. (Gabber) $R, R' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ で, R は整閉整域の有限積, R' は被約とする. $f : R \to R'$ を V 代数の射, U を $\mathrm{Spec}(R)-\mathrm{Max}(R)$ に含まれる開部分スキームで, U と $U' := f^{-1}(U)$ はそれぞれ $\mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{Spec}(R')$ の中で稠密 (dense) であるとする. さらに, f は次の条件 (1), (2) を満たすとする,

(1) $\mathrm{Spec}(f)$ は集合の全単射 $\{U'$ の閉点 $\} \xrightarrow{\sim} \{U$ の閉点 $\}$ を導く,

(2) 任意の $\mathfrak{m}' \in \mathrm{Max}(R')$ に対して, $\overline{f} : R/f^{-1}(\mathfrak{m}') \xrightarrow{\sim} R'/\mathfrak{m}'$ は同型.

このとき, f は同型になる.

証明 . この定理は, Gruson-Raynaud　の平坦化テクニックを用いて証明されるが, 詳しい解説は省略する. [Ki, Theorem] in Appendix 参照.

証明 . (主定理の証明）まずは, 適当な不分岐指標 $G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{O}^\times$ で変形をひねることで $\psi=\chi_p^{k-1}$ のときに示せばよい. そこで以下 $\psi=\chi_p^{k-1}$ と仮定する.

$V_{\mathbb{F}}$ の $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\chi}[1/p]$ の各閉点に対応するクリスタリン表現は絶対既約かそうでないかのいずれかである. 絶対可約なクリスタリン表現の法 p 還元の半単純化は Hodge-Tate 重みの条件と det の条件から $\begin{pmatrix}\omega^{k-1}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix}$ という形でなければならない. 一方, 定理 1.33 を見ると, $2 \leqq k \leqq 2p-1$ のときは, 絶対既約なクリスタリン表現の法 p 還元の半単純化は $\begin{pmatrix}\omega^{k-1}\mu_\lambda & 0\\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}}\end{pmatrix}$ という形にはなっていないことが分かる. よって, 中間重みの場合は $V_{\mathbb{F}}$ に応じて $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p]$ の各点に対応するクリスタリン表現は全て絶対既約になる場合か, 全て絶対可約になる場合かのいずれかの場合になる. 全て絶対可約になる場合は, 古典的な通常表現の変形理論によって $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\chi}$ が整域になることが証明できるので, ここでは省略する. 以下, 全ての変形が絶対既約なクリスタリン表現になる場合に, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\chi}$ が整域であることを示す.

まず, 次の主張（1）を示す

（１）$(V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}')^{ss} \xrightarrow{\sim} \overline{V}_{k,a_p}$ のとき, E-代数の射 $x : R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p] \to E'$ で $V_x \xrightarrow{\sim} V_{k,a_p}$ となる x が唯一つ存在する.

一意性は $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ の普遍性から容易に示せるので, 射 x の存在を示す. また, $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約なときは, これは明らかな主張なので $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ の場合に示す. まず, 仮定より $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{\mathbb{Q}_p}]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ なので, $\chi_1 \neq \chi_2$ かつ, $* \neq 0$ を満たす. $\dim_{\mathbb{F}} H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{F}(\chi_1/\chi_2)) = 1$ のときは, 非自明な拡大は全て同型となるので, 簡単な議論で V_{k,a_p} の $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な $\mathcal{O}_{E'}$ 格子 T_{k,a_p} で $T_{k,a_p}/\pi_{E'}T_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}$ となるものをとることが出来る. (V_{k,a_p} の絶対既約性を用いる.)　$\chi_1 \neq \chi_2$ かつ $\dim_{\mathbb{F}} H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{F}(\chi_1/\chi_2)) \neq 1$ で $\overline{V}_{\mathbb{F}}^{ss} \xrightarrow{\sim} \overline{V}_{k,a_p}$ となるのは, 定理 1.33 の結果を見ると, $k = p+3$ で $v_p(a_p) = 1$, さらに $\bar{V}_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^2\mu_{\pm 1} & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\pm 1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}^{ss}$ となる場合のみであることが分かる. この場合は $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^2\mu_{\pm 1} & * \\ 0 & \omega\mu_{\pm 1} \end{pmatrix}$ で $* \neq 0$ となる. ところが, この場合は定理 2.2.5[B-B1] において, V_{k,a_p} の $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な $\mathcal{O}_{E'}$ 格子 T_{k,a_p} で $T_{k,a_p}/\pi_{E'}T_{k,a_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega\mu_{\pm 1}$ で $* \neq 0$ ならば, $*$ は必ず peu-ramifie な拡大になることが証明されている. (この定理は Wach 加群を用いて証明される.)　よって, この場合 $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^2\mu_{\pm 1} & * \\ 0 & \omega\mu_{\pm 1} \end{pmatrix}$ で, $*$ が peu-ramifie の場合は V_{k,a_p} に対応する射 $x : R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \to E'$ が存在し, $*$ が tre-ramifie の場合は $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} = 0$ となる. 以上により, 主張（１）の証明ができた.

この主張（１）を用いて, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ の整域性を次のようにして証明する.

$2 \leqq k \leqq p+1$ のとき. このときは定理 1.33 (1) により, $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$ のときのみ, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi} \neq 0$ となる. この場合, 上の主張 (1) と定理 1.33(1) により「$R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p]$ の閉点」と, 「$v_p(a_p) > 0$ なる V_{k,a_p}」とが一対一に対応していて, 系 2.4 の c_1 の V_{k,a_p} に対応する閉点での値は $a_p \in \pi_E\mathcal{O}_E$ となる. よって, $\mathcal{O}$ 代数の射 $f : \mathcal{O}[[X]] \to R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[c_1] :\mapsto c_1$ が存在する. 系 2.4 により c_1 は $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ 上整だから $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[c_1] (\subseteq R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[1/p])$ は, 定理 2.6 の圏 $\mathcal{C}$ の対象になっていて, $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}[[X]][1/p])$, $U' = \mathrm{Spec}(R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[c_1][1/p])$ とおけば, この射 $f : \mathcal{O}[[X]] \to R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[c_1]$ は定理 2.6 の仮定を満たす. よって, 定理 2.6 により $f : \mathcal{O}[[X]] \xrightarrow{\sim} R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}[c_1]$ は同型で特に右辺も整域でその部分環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{0,k-1,\psi}$ も整域となる.

それ以外の場合も同様なアイデアで定理 2.6 に帰着させる. ここでは例として $p+3 \leqq k \leqq 2p-1$ かつ, $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$ の場合のみに示す. この場合は, 定

理 1.33(3) と上の主張 (1) により,「$R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の閉点」は「$0 < v_p(a_p) < 1$ なる V_{k,a_p}」と一対一に対応している. すると, 上の場合と同様のアイデアによって $c_1/p \in R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]^{\times}$ でさらに p/c_1 は $R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}}$ 上整であり, 射 $f : \mathcal{O}[[X,Y]]/(XY-p) \to R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}}[c_1, p/c_1] : X \mapsto c_1, Y \mapsto p/c_1$ という射が定義できる. すると, この射 f は定理 2.6 の仮定を満たし, よって同型となり, 特に $R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}}$ は整域となる.

この主定理と Kisin の修正 $R = T$ により, 次のタイプの保型性持ち上げ定理を得る.

定理 2.8. F を総実体で, p が完全分解しているものとする. $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ を連続表現とし, 次の条件を満たすとする. ある $2 \leqq k \leqq 2p-1$ に対して,

(1) p の上にある F の素点 v で, ρ はクリスタリン表現で Hodge-Tate 重みが $0, k-1$ となる.

(2) F 上のパラレルウェイト k の Hilbert 保型形式 f で $\bar{\rho} \xrightarrow{\sim} \bar{\rho}_f$ となるものが存在する.

(3) $\rho|_{F(\zeta_p)}$ は絶対既約で, p の上の任意の素点 v で $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[\mathrm{G}_{F_v}]}(\bar{\rho}|_{\mathrm{G}_{F_v}}) = \mathbb{F}$ となる.

このとき, F 上のある Hilbert 保型形式 g が存在して $\rho \xrightarrow{\sim} \rho_g$ となる.

証明. p の上の F の素点 v に対して,(本報告集 [Ya] 第三章の記号と同様に)枠付き普遍変形環 $R^{\psi,\square}_v := R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}|_{\mathrm{G}_{F_v}}}$ の商環を $\overline{R}^{\psi,\square}_v := R^{0,k-1,\psi}_{V_{\mathbb{F}}|_{\mathrm{G}_{F_v}}} \otimes_{R^{\psi}_{V_{\mathbb{F}}|_{\mathrm{G}_{F_v}}}} R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}|_{\mathrm{G}_{F_v}}}$ と定める. すると, 命題 2.5 及び主定理 2.6 より, $\overline{R}^{\psi,\square}_v$ は, [Ya] 三章冒頭の性質 1、2、3 を満たす. これより, [Ya] の議論により定理の主張が導かれる.

参考文献

[B-B1] L.Berger, C.Breuil, Sur la reduction des representations cristallines de dimension 2 en poids moyens, preprint.

[B-B2] L.Berger, C.Breuil, Sur quelques representations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Asterisque (to appear).

[Be1] L.Berger, Limites de representations cristallines, Compositio Math. 140 (2004), 1473-1498.

[Be2] L.Berger, Representations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et representations Galoisiennes de dimension 2, Asterisque (to appear).

[BLZ] L. Berger, H. Li, H.J. Zhu, Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations, Math. Ann. 329 (2004), 365-377.J. Inst. Jussieu 2 (2003), 23-58.

[Br] C.Breuil, Sur quelques representations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, J. Inst. Math. Jussieu 2, 2003, 165-188.

[Im] 今井直毅, 有限平坦群スキームのモジュライ、本報告集

[Ki] M.Kisin, Modularity of some geometric Galois representations (with an appendix by O.Gabber) , L-functions and Galois representations (Durham 2004), 438-470.

[Pa1] V.Paskunas, On some crystalline representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint

[Na] 中村健太郎, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進ラングランズ対応入門、本報告集

[Ya] 山下剛, Kisin の修正 Taylor-Wiles 系、本報告集