$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応入門

中村　健太郎

February 1, 2009

Contents

0　序

本稿の目的は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応及び法 p Langlands 対応を解説することである. 近年の Colmez の研究 ([Co08]) により, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所

Langlands 対応は完成に近づきつつあるが, 本論稿ではこれら最新の結果についてはあまり詳しく触れることは出来なかった. 本稿のより正確な目的は, 本報告集 [Na] 及び [Ya] で用いられる p 進局所 Langlands 対応の基礎事項を復習することである. まず, 第一章において Breuil([Br03b]) の（半単純）法 p Langlands 対応の定義を復習する. 第二章において, Breuil-Berger による $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元絶対既約 cristabelline 表現に対する p 進局所 Langlands 対応を復習する. そして最後の三章で, Colmez が [Co08] で定義した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の圏から $G_{\mathbb{Q}_p}$ の圏への関手の定義, 基本性質を復習する. 本報告集 [Na] の該当場所を読むためには, 本稿の第一章と二章の知識が最低限必要となり, [Ya] を読むためには本稿の第一章と三章の知識が必要になる（はずである.）なお, 本稿では, 筆者の限られた力量と時間の関係から, 様々な重要定理に証明やその概略などを付けることが出来なかったことをここにお詫びしておく.

1　半単純法 p Langlands 対応

この章では, Breuil（[Br03b]) による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の（半単純）法 p Langlands 対応について解説する. 続く二小章で $G_{\mathbb{Q}_p}$ の法 p 表現, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現の分類結果をそれぞれ紹介し, 本章最後の小章でこれらの分類結果を用い,（半単純）法 p Langlands 対応を定義する.

1.1　$G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元半単純法 p 表現の分類

この小章では, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の半単純二次元法 p 表現の分類を行うことが目標である. そのために, まずいくつかの記号を導入する. $W_{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathbb{Q}_p$ の Weil 群とする.（つまり, $W_{\mathbb{Q}_p}$ は自然な射 $G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}$ による $\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ の逆像として定義される $G_{\mathbb{Q}_p}$ の部分群.）$I_p := \mathrm{Ker}(G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p))$ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の惰性群, $I_p^w (\subseteq I_p)$ を暴分岐群とする. $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ を局所類体論の相互写像で $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(p) \in W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ が幾何的フロベニウス（$x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$）の持ち上げとなっているものとする. 以下, この相互写像によって次の二つの集合, $\{\delta : G_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times :$ 連続指標 $\}$ と $\{\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times :$ 連続準同型 $\}$ を同一視する. 任意の元 $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ に対して不分岐指標 $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を $\mu(p) := \lambda$、$\mu(a) := 1$ (任意の $a \in \mathbb{Z}_p^\times$) と定義する. $\omega : \mathbb{Q}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を法 p 円分指標とする, つまり, $\omega(p) := 1, \omega(a) := \bar{a}$ （任意の $a \in \mathbb{Z}_p^\times$) となる指標とする.

定義 1.1. V が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の法 p 表現であるとは, V は有限次元 $\overline{\mathbb{F}}_p$ ベクトル空間で, 連続 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形に $G_{\mathbb{Q}_p}$ が作用しているもの, とする.

この小章の目的は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の半単純二次元法 p 表現の分類であるから, 次の二つの場合を分類すればよい.

(1) $V \xrightarrow{\sim} \delta_1 \oplus \delta_2$ の場合. （ここで, $\delta_i : G_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ は, 連続指標. ）

(2) V が二次元既約の場合.

（1）可約な場合

補題 1.2. $\delta : G_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を連続指標とすると, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ と $r \in \{0, 1, \cdots, p-2\}$ の組 (λ, r) が唯一組存在して, $\delta = \mu_\lambda \omega^r$ となる.

証明 . まず, 上の同一視で $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ とみなして考える. $\delta|_{1+p\mathbb{Z}_p}$ に制限すると, 定義域は pro-p 群で, 連続性から像は p と素な位数をもつ有限群であるから, $\delta|_{1+p\mathbb{Z}_p}$ は自明な準同型になる. よって, $\delta|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ は, $\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times/1+p\mathbb{Z}_p$ を経由する. よって, 唯一つ $r \in \{0, 1, \cdots, p-2\}$ が存在して, δ/ω^r は不分岐指標となる. つまり, ある $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ が唯一つ存在して, $\delta/\omega^r = \mu_\lambda$ となる.

この補題から次の系が得られる.

系 1.3. V を二次元可約法 p 表現とし, V^{ss} をその半単純化とする. このとき, ある $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, $\chi : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ の三つ組み (r, λ, χ) が存在して,

$$V \sim \begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi$$

となる.

（2）既約な場合

次に既約な二次元法 p 表現を分類する.

$\omega_2 : I_p \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を任意の $g \in G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ に対して,

$$\omega_2(g) := g((p)^{p^2-1})/(p)^{p^2-1}\mathbb{F}_{p^2}^\times \hookrightarrow \bar{\mathbb{F}}_p^\times$$

と定める. すると, ω_2 は, p の p^2-1 乗根の取り方によらずに定義できる準同型で, $\mathrm{Im}(\omega_2) = \mathbb{F}_{p^2}^\times$, $\omega_2^{p+1} = \omega|_{\mathrm{I}_p}$、$\omega_2^{p^2-1}$ は自明な指標となる. この ω_2 を用いて, 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約二次元法 p 表現 $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ を $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})|_{I_p} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega_2^{r+1} & 0 \\ 0 & \omega_2^{p(r+1)} \end{pmatrix}$、$\det(\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) = \omega^{r+1}$ となる唯一の既約表現として定める. （存在と一意性は下の命題 1.4 の証明を参照）

命題 1.4. 任意の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元既約法 p 表現に対して, ある $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ の組 (r, χ) で,

$$V \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$$

となるものが存在する.

注意 1.5. 可約な表現は, (r,χ) の他に $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ も含めた三つ組み (r,λ,χ) で分類されていた. 既約な場合は $\lambda=0$ の場合, $(r,0,\chi)$ の場合とみなすことにする. こうすることの理由は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の法 p 表現の分類結果を見ることで説明することができる.（後述）

証明 . V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元既約法 p 表現とする. まず, I_p^w は pro-p 群, V は p 群（の順極限）なので, $V^{I_p^w}:=\{v\in V|gv=v$ 任意の $g\in I_p^w\}\neq 0$ となる. I_p^w は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の正規部分群であるから, $V^{I_p^w}$ はゼロでない V の部分 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 加群となり, V の既約性から $V=V^{I_p^w}$ となる. これより, $V|_{I_p}$ は, $I_p/I_p^w\xrightarrow{\sim}\prod_{l\neq p}\mathbb{Z}_l$ を経由して作用し, これは（p と素な）アーベル群であるから, $\chi_1,\chi_2:I_p/I_p^w\to\overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ が存在して, $V|_{I_p}\xrightarrow{\sim}\chi_1\oplus\chi_2$ となる. この χ_1,χ_2 に対して, 次のことを示すことができる.

claim 1. ある $s\in\{0,1,\cdots,p^2-2\}$ で $s\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p+1)$ を満たすものが存在して, $\chi_1=\omega_2^s$, $\chi_2=\omega_2^{ps}$ となる.

証明 . まず, $\phi\in G_{\mathbb{Q}_p}$ を p 乗 Frobenius の任意の持ち上げとすると, 任意の $\sigma\in I_p$ に対して, $\phi\sigma\phi^{-1}=\sigma^p\ (\mathrm{mod}\ I_p^w)$ なので, $V|_{I_p}$ を ϕ で twist した表現を考えることにより, $\{\chi_1,\chi_2\}=\{\chi_1^p,\chi_2^p\}$ であることが分かる. ここで, もしも $\chi_1^p=\chi_1$, $\chi_2^p=\chi_2$, かつ $\chi_1\neq\chi_2$ とし, $e_1\in V$ を I_p が χ_1 で作用する元とすると, 再び関係式 $\phi\sigma\phi^{-1}=\sigma^p\ (\mathrm{mod} I_p^w$ を用いることで, $\overline{\mathrm{F}}_pe_1$ が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用で閉じていることが導かれる. そして, これは V の既約性に矛盾する. また, $\chi_1=\chi_2$ のときも同様にして矛盾を導くことができる. よって, $\chi_1^p=\chi_2$, $\chi_2^p=\chi_1$ かつ $\chi_1\neq\chi_2$ でなければならないことが, まず示せた. これより, $\chi_1^{p^2}=\chi_2^p=\chi_1$ で, $\chi_1^{p^2-1}$ が自明になるので, ある $s\{0,1,\cdots,p^2-2\}$ が存在して, $\chi_1=\omega_2^s$, $\chi_2=\omega_2^{ps}$ となる. s に関する条件は, $\chi_1\neq\chi_2$ から従う.

次に, $\mathbb{Q}_{p^2}$ を $\mathbb{Q}_p$ の二次元不分岐拡大とし, $\phi'\in G_{\mathbb{Q}_{p^2}}:=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})$ を p^2 乗 Frobenius の任意の持ち上げとし, $e_1\in V$ を I_p が χ_1 で作用する元とすると, 上の claim と関係式 $\phi'\sigma\phi'^{-1}=\sigma^{p^2}\ (\mathrm{mod} I_p^w)$（任意の $\sigma\in I_p$）から, claim の証明の議論と同様にして, $\overline{\mathbb{F}}_pe_1$ は, $V|_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}$ の部分 $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ 加群であることが示せる. この部分表現から得られる $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ の指標を $\tilde{\chi_1}$ とおけば, 誘導表現の普遍性から, ゼロでない射 $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}\tilde{\chi_1}\to V$ を得る. V の既約性と $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}}\tilde{\chi_1}$ は二次元であることから, この射は同型であることが分かる. ある $r\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $\chi:\mathbb{Q}_p^{\times}\to\overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ が存在して, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}}\tilde{\chi_1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})\otimes\chi$ となることも, $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ の定義から分かる.

1.2 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現の分類

この小章の目的は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現を分類することである. ([Ba-Li], [Br03a])

$$K:=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),\ Z:=\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}|a\in\mathbb{Q}_p^{\times}\},\ B:=\{\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\}\text{ とする.}$$

まずは, 法 p 表現の定義をする.

定義 1.6. Π を $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 加群とする. このとき,

(1) Π が「滑らか」であるとは, 任意の元 $x \in \Pi$ に対して x の固定部分群 $\{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) | gx = x\}$ が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の開部分群となること, とする.

(2) Π が「許容的」であるとは, 任意のコンパクト開部分群 $H \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対して, $\Pi^H := \{x \in \Pi | gx = x$ 任意の $g \in H\}$ が有限次元 $\overline{\mathbb{F}}_p$ ベクトル空間となること, とする.

(3) Π が「中心的指標を持つ」とは, ある連続指標 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ があり, 任意の $a \in \mathbb{Q}_p^\times$、$x \in \Pi$ に対して, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} x = \delta(a)x$ を満たすこと, とする. このとき, δ を Π の中心的指標と呼ぶ.

(4) Π が「法 p 表現」であるとは, Π が滑らか, 許容的で, 中心的指標を持つこと, とする.

このように定義される法 p 表現のうち既約なものを全て決定することが, この小章の目標なのだが, まずは分類のステップに関する基本的なアイデアを述べたい.

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約な法 p 表現とする. すると, $K_1 := \begin{pmatrix} 1 + p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & 1 + p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ は pro-p 群, Π は有限 p 群の順極限なので, $\Pi^{K_1} \neq 0$ となり, さらに K_1 は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群で Π が許容的であることから $\Pi^{K_1} \neq 0$ はゼロでない $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の有限次元ベクトル空間となる. さらに, K_1 は K の正規部分群だから Π^{K_1} には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) = K/K_1$ が作用する. そこで, σ を Π^{K_1} に含まれる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の一つの有限次元既約表現とすると, Π が中心的指標を持つことから, 適当に twist することにより, $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ 加群としての, 単射 $\sigma \hookrightarrow \Pi|_{KZ}$ が得られる. (ここで, K は σ に $K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を通して作用し, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in Z$ は σ に自明に作用させる.) すると, KZ に関するコンパクト誘導表現の普遍性(後述)から、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現の射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma \to \Pi$ を得る. そして, Π が既約であることからこの射が全射であることが分かる.

この議論から, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現を分類するためには,

(1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の有限次元既約表現を分類すること,

(2) 任意の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の有限次元既約表現 σ に対して, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ の既約商を全て分類すること,

が必要になる.

以下, この基本アイデアに従って $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現が, $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元半単純法 p 表現の分類の場合と同様に, パラメーター (r, λ, χ) (ここで、$r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \bar{\mathbb{F}}_p^\times$ 連続指標.）で分類されることを解説していきたい. より正確には, 上の（1）の分類からパラメーター r が, （2）の分類から λ が（そして twisit により χ が）現れることを順を追って説明していきたい.

● $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の既約表現の分類

任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 係数の表現 $\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2$ を,

$$\mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 := \oplus_{i=0}^r \overline{\mathbb{F}}_p x^i y^{r-i}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x^i y^{r-i} := (ax+cy)^i (bx+dy)^{r-i}$$

で定義する. 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $m \in \{0, 1, \cdots, p-2\}$ に対して, $\sigma_{r,m}$ を,

$$\sigma_{r,m} := \mathrm{Sym}^r\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^m$$

で定義する.

これらの $\sigma_{r,m}$ たちが全ての既約表現であることを主張するのが次の命題である.

命題 1.7. 上のような任意の (r, m) に対して, $\sigma_{r,m}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約表現で, 逆に任意の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 係数の既約表現 σ に対して, 上のような (r, m) の組が唯１つ存在して $\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma_{r,m}$ となる.

この命題の証明の前に, 標数 p の体上の有限群の既約表現の個数に関する次の定理を復習する.

定理 1.8. (Brauer) G を有限群とし, $G_{\mathrm{reg}} := \{g \in G |\ g$ の位数は p と素 $\}$ とする. このとき, G の $\overline{\mathbb{F}}_p$ ベクトル空間上の既約表現の同型類の個数は G の共役類で G_{reg} に含まれるものの個数と一致する.

証明 . (命題の証明）$\sigma_{r,m}$ が既約であることの証明. $\sigma_{r,0}$ の既約性を示せば十分で, これの既約性を次のようにして示す. まず, 次の二つの事実

(1) $\sigma_{r,0}^N = \overline{\mathbb{F}_p} x^r$. ここで $N := \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) | a \in \mathbb{F}_p\}$ とする.

(2) $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]x^r = \sigma_{r,0}$

を示すことができる．V をゼロでない $\sigma_{r,0}$ の部分 $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)]$ 加群とすると，N が p 群であることから $V^N \neq 0$ が分かり，上の事実（1）から $V^N = \overline{\mathbb{F}}_p x^r$ となる．すると，事実（2）から $V = \overline{\mathbb{F}_p}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]x^r = \sigma_{r,0}$ であることが分かる．よって，$\sigma_{r,0}$ は既約である．

全ての既約表現が $\sigma_{r,m}$ と一意的に書けることの証明. 異なる (r,m) の組に対して $\sigma_{r,m}$ は互いに同型でないことは容易に示せ，$\sigma_{r,m}$ たちは全部で $p(p-1)$ 個の既約表現の同型類を与えている．よって，あとは上の Brauer の定理を用いて，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の共役類で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{reg}}$ に含まれるものの個数が丁度 $p(p-1)$ 個であることを示せばよい．まず，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の元 g で，位数が p と素になるものは，それの Jordan 標準形が対角型になる場合である．これは次の三つの場合に分かれる．

(1) $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{F}_p^\times)$ の場合，

(2) $g \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\alpha \neq \beta \in \mathbb{F}_p^\times$）の場合，

(3) g が，$\mathbb{F}_p$ に含まれない $\mathbb{F}_{p^2}$ の元を固有値に持つ場合．

簡単な議論で，（1）の場合からは $(p-1)$ 個の，(2) の場合からは $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ 個の，（3）の場合からは $\frac{p(p-1)}{2}$ 個の共役類が得られることが分かり，全部で合計 $p(p-1)$ 個の共役類となる．

以下，$K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ を還元射 $K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を経由して作用させることで，$\sigma_{r,m}$ を K の表現とみなし，さらに，$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ を自明に作用させることで，$\sigma_{r,m}$ を KZ の表現とみなすことにする．特に，$m=0$ の場合，

$$\sigma_r := \sigma_{r,0}$$

とおく．

補題 1.9. Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の法 p 表現とする．このとき，ある $r \in \{0,1,\cdots,p-1\}$，$\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ 連続指標が存在して，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[KZ]}(\sigma_r, \Pi \otimes \chi \circ \det) \neq 0$ となる．

証明 . $K_1 = \mathrm{Ker}(K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$ は pro-p 群であるから，$\Pi^{K_1} \neq 0$ である．K_1 は K の正規部分群だから Π^{K_1} には，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) = K/K_1$ が作用しする．よって，命題 1.7 からある $r \in \{0,1,\cdots,p-1\}$，$m \in \{0,1,\cdots,p-2\}$ が存在し，K の表現としての単射 $\sigma_{r,m} \hookrightarrow \Pi^{K_1}$ が存在する．Π の中心的指標を τ とし，λ を $\lambda^2 := \tau(p)$ とすると，上の単射をひねることにより KZ の表現としての単射 $\sigma_r \hookrightarrow \Pi \otimes \omega^{-m}\mu_{\lambda^{-1}} \circ \det$ を得る．

- コンパクト誘導表現 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}$

ここでは，KZ の表現 σ に対して，コンパクト誘導表現 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ を定義して，それの満たす普遍性 (Frobenius 相互法則）を示す．

定義 1.10. σ を KZ の滑らかな表現とする．このとき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の滑らかな表現 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \sigma | f(kg) = kf(g)$、$k \in KZ$、$g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$、$KZ \setminus \mathrm{Supp}(f)$ は有限集合 $\}$ と定義し, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用を $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$、$f \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ に対し, $gf \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ を $gf(g') := f(g'g)$ と定める．これにより, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の滑らかな表現になる.

$\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ の満たす普遍性を紹介する前に, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ ベクトル空間としての生成元を記述したい．任意の $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $v \in \sigma$ に対して, $[g,v] \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ を $[g,v](g') := g'gv$ $(g'g \in KZ)$ $[g,v](g') = 0$ (それ以外) と定める．すると, （$v \neq 0$ なら）$\mathrm{Supp}([g,v]) = KZg^{-1}$, $[g,v](g^{-1}) = v$ となる．また, 任意の $g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $k \in KZ$ に対して, $g'[g,v] = [g'g,v]$, $[gk,v] = [g,kv]$ となる．そして, 任意の $f \in \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma$ は, $f = \sigma_{i=0}^{n}[g_i,v_i]$ と書ける.

命題 1.11. (Frobenius 相互法則) σ を KZ の滑らかな表現, Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の滑らかな表現とする．このとき, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma, \Pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]}(\sigma.\Pi|_{KZ})$$

が存在する.

証明． 自然な射と逆写像を構成する．射の構成. $\phi : \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma \to \Pi$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の射とする．これに自然な射 $\iota : \sigma \to (\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma)|_{KZ} : v \mapsto [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v]$ を合成した射 $\iota \circ \phi : \sigma \to \Pi|_{KZ}$ により, 射 $\phi \mapsto \iota \circ \phi$ を定める.

逆射の構成. $\psi : \sigma \to \Pi|_{KZ}$ を KZ の表現の射とする．このとき, $\tilde{\psi} : \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma \to \Pi$ を $\tilde{\psi}([g,v]) := g\psi(v)$ と定めると, これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の射になる．すると, $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ が逆射を与える.

系 1.12. Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約な法 p 表現とする．このときある $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\chi : \mathbb{Q}_p \to \bar{\mathbb{F}}_p^{\times}$ が存在して, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \otimes \chi \circ \det \to \Pi$ が存在する.

証明． 補題 1.9 から, ある $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, χ があって, KZ の表現としての単射 $\sigma_r \hookrightarrow \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det|_{KZ}$ がある．Frobenius 相互法則から, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現としてのゼロでない射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \to \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det$ を得る．Π が既約だからこの射は全射になる.

- 法 p Hecke 環

前の系から, 既約法 p 表現の分類のためには, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r$ の既約成分を分類すればよいが, そのために重要なのが, 次に定義する法 p Hecke 環である.

定義 1.13. 任意の $r\{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対し, 環 $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r)$ を法 p Hecke 環とよぶ.

この Hecke 環の構造に関して, 次の命題が最も重要である.

命題 1.14. 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して, $\overline{\mathbb{F}}_p$ 代数の同型

$$\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{F}}_p[T]$$

が存在する. ここで, $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の一変数多項式環. 特に法 p Hecke 環は可換環になる.

証明 . [Ba-Li, Proposition 8]

この命題の証明は省略するが, 上の同型によって右辺の T に対応する $T \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r)$ は, $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 加群の自己準同型 T を $T([g, \sum_{i=0}^{r} c_i x^i y^{r-i}]) := \sum_{j=0}^{p-1}[g\begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sum_{i=0}^{r} c_i(-j)^{r-i}x^r] + [g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, c_0 y^r]$ と定義される.

以下, この同型 $\overline{\mathbb{F}}_p[T] \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r)$ の $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r$ への自然な作用により, $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r$ を $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ 加群とみなす.

系 1.15. Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現とする. このとき, $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi : \mathbb{Q}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ が存在して, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現の全射 $\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r/(T-\lambda)\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \to \Pi$ が存在する.

証明 . まず, 系 1.12 から, ある r, χ に対して, $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det) \neq 0$ である. さらに Frobenius 相互法則から, $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]}(\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)]}(\sigma_r, (\Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det)^{K_1})$ となり, 最後の群は Π が許容的であることから有限次元 $\overline{\mathbb{F}}_p$ ベクトル空間となる. また, $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r)$ の自然な作用により, $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det)$ は, $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ 加群とみなせる. 特に, ゼロでない有限次元 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 空間 $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det)$ には, $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形な T が作用している. そこで, この空間への T の作用の固有値の一つを $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, 固有ベクトルを $\phi \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]}(\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r, \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det)$ とすると, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現のゼロでない射 $\phi : \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r/(T-\lambda)\mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \to \Pi \otimes \chi^{-1} \circ \det$ が得られ, Π の既約性からこれは全射になる.

定義 1.16. 任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ 連続指標に対して,

$$\pi(r, \lambda, \chi) := \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r/(T-\lambda) \otimes \chi \circ \det$$

と定める.

上の系から, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現の分類のためには $\pi(r, \lambda, \chi)$ の既約商の分類をすればよい. この既約商の様子は, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ の場合と $\lambda = 0$ の場合とで全く

様相が異なる. そこで, まず $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ の場合に既約商を決定し, ついで $\lambda = 0$ の場合を解説することにする.

- 法 p 主系列表現 ($\lambda \neq 0$ の場合)

ここでは, まず法 p 主系列表現を定義し, $\lambda \neq 0$ の場合の $\pi(r, \lambda, \chi)$ との関係を説明し, この関係を用いて $\lambda \neq 0$ の場合の $\pi(r, \lambda, \chi)$ の既約商を全て決定する.

定義 1.17. $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ を連続指標とする. このとき $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の法 p 表現 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ を, $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2) := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \bar{\mathbb{F}}_p | f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \delta_1(a)\delta_2(d)f(g)$ 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$、 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, f は局所定数関数 $\}$ と定め, $f \in \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対し, $gf \in \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ を $gf(g') := f(g'g)$ と定める.

$\delta'_1 = \delta\delta_1, \delta'_2 = \delta\delta_2$ について, 自然な同型 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta'_1 \otimes \delta'_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2) \otimes \delta \circ \det$ が存在する. $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (自明な指標) のとき, $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ に対して, $f_a : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \overline{\mathbb{F}}_p : g \mapsto a$ と定数関数を対応させることにより, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の単射 $\overline{\mathbb{F}}_p \hookrightarrow \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1 \otimes 1)$ を得る. (ここで, $\overline{\mathbb{F}}_p$ は一次元の自明な表現を表す.) この単射の商を St と書く. これより, 任意の $\delta : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の短完全列

$$0 \to \delta \circ \det \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_1) \to \mathrm{St} \otimes \delta \circ \det \to 0$$

を得る. さらに, この短完全列は分裂しないことも証明できる.

命題 1.18. $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ 連続指標について, 次が成り立つ.

(1) $\delta_1 \neq \delta_2$ ならば, $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ は既約,

(2) $\delta_1 = \delta_2$ のとき, $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ は, 唯一の既約商 $\mathrm{St} \otimes \delta_1 \circ \det$ を持つ,

(3) $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta'_1 \otimes \delta'_2)$ ならば, $\delta_1 = \delta'_1$ かつ $\delta_2 = \delta'_2$ が成り立つ.

証明 . [Ba-Li, Proposition 29].

この命題により, $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ の既約商を決定できたので, 次は $\pi(r, \lambda, \chi)$ ($\lambda \neq 0$ の場合) と $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ との関係について述べたい. そのために, まず任意の $r \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ に対して $\overline{\mathbb{F}}_p[T, 1/T]$ に係数をもつ主系列表現 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ を次のように定義する. 上のような r を固定し, $X_1^{(r)}, X_2^{(r)} : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \bar{\mathbb{F}}_p[T, T^{-1}]^{\times}$ 連続指標を, $X_1^{(r)}(p) := T^{-1}$、$X_1^{(r)}(a) := 1$, $X_2^{(r)}(p) := T$,

$X_2^{(r)}(a) := \bar{a}^r \quad (a \in \mathbb{Z}_p^\times)$ と定める．$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X^{(r)}) := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \overline{\mathbb{F}}_p[T,T^{-1}] | f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = X_1^{(r)}(a)X_2^{(r)}(d)f(g) \ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B,\ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\ f$ は局所定数関数 $\}$ と定める．（$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用は，従来と同様に定義する．）$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ には自然に $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ 加群の構造が入っていることに注意しておく．

次に, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現かつ $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ 加群としての射 $P_r : \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ を次のように構成する．まず, Frbenius 相互法則から P_r を定義するためには, KZ の表現の射 $\tilde{P}_r : \sigma_r \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ を構成すればよい．任意の $v \in \sigma_r$ に対して，$\tilde{P}_r(v) : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \overline{\mathbb{F}}_p[T,T^{-1}]$ は次のように定義される．任意の $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対して，$\tilde{P}_r(v)(g) := X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)}(b)e_r^*(kv)$ と定義する．（ここで，岩澤分解 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = BK$ より，$g = bk,\ b \in B,\ k \in K$ とし，$e_r^* : \sigma_r \to \overline{\mathbb{F}}_p$ は，$e_r^*(x^i y^{r-i}) := 0\ (i \neq 0)$, $e_r^*(y^r) := 1$ で定義される．）すると，$\tilde{P}_r(v) \in \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ で $\tilde{P}_r$ は KZ の表現の射となり, Frobenius 相互法則から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の射 $P_r : \mathrm{Ind}_{KZ}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\sigma_r \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(X_1^{(r)} \otimes X_2^{(r)})$ を得る．P_r が $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ 加群の射であることも示すことが出来る．

この P_r を $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ で特殊化することで, $\pi(r,\lambda,\chi)$ と法 p 主系列表現の関係が得られる．まず, $X_1^{(r)}, X_r^{(2)} : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p[T,T^{-1}]^\times$ と $\lambda \neq 0$ での特殊化 $\overline{\mathbb{F}}_p[T,T^{-1}]^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times : T \mapsto \lambda$ とを合成することで, $X_1^{(r)}$ は $\mu_{\lambda^{-1}}$ となり, $X_2^{(r)}$ は $\mu_\lambda \omega^r \mu_\lambda$ となる．よって, $P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda))$ をとると, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の射 $P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda)) : \pi(r,\lambda,1) \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda \omega^r)$ を得る．この射について, 次の命題が成り立つ．

命題 1.19. $r \in \{0,1,p-1\}$, $\lambda \neq 0$, $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ 連続指標とする．このとき, $P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda)) \otimes \chi \circ \det : \pi(r,\lambda,\chi) \to \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \chi\mu_\lambda\omega^r)$ に対して次が成り立つ,

(1) $(r,\lambda) \neq (0,1),(0,-1)$ のとき, $P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda)) \otimes \chi \circ \det$ は同型,

(2) $(r,\lambda) = (0,1),(0,-1)$ のとき, $\mathrm{Ker}(P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda)) \otimes \chi \circ \det) \xrightarrow{\sim} \mathrm{St} \otimes \chi\mu_{\pm 1} \circ \det$、$\mathrm{Im}(P_r(\mathrm{mod}(T-\lambda)) \otimes \chi \circ \det) \xrightarrow{\sim} \chi\mu_{\pm 1} \circ \det$ となる．さらに, これにより得られる短完全列

$$0 \to \mathrm{St} \otimes \chi\mu_{\pm 1} \circ \det \to \pi(0,\pm 1,\chi) \to \chi\mu_{\pm 1} \circ \det \to 0$$

は分裂しない．

証明． [Ba-Li, Theorem 30(3)]

以上によって, $\pi(r,\lambda,\chi)(\lambda \neq 0)$ の全ての既約商を決定することができる．

系 1.20. $\pi(r,\lambda,\chi)(\lambda \neq 0)$ の既約商は次のようになる．

(1) $(r,\lambda)\neq(0,\pm1),(p-1,\pm1)$ のとき, $\pi(r,\lambda,\chi)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi\mu_{\lambda^{-1}}\otimes\chi\mu_\lambda\omega^r)$ は既約,

(2) $(r,\lambda)=(0,\pm1)$ のとき, $\pi(0,\pm1,\chi)$ は唯一の既約商 $\chi\circ\det\xrightarrow{\sim}\chi\mu_{\pm1}\circ\det$ を持つ,

(3) $(r,\lambda)=(p-1,\pm1)$ のとき, $\pi(p-1,\pm1,\chi)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi\mu_{\pm1}\otimes\chi\mu_{\pm1})$ は唯一の既約商 $\mathrm{St}\otimes\chi\mu_{\pm1}\circ\det$ を持つ.

注意 1.21. ここまでの結果は, $\mathbb{Q}_p$ 以外の局所体 F でもほぼ同様の結果が成立する. （詳しくは, [Ba-Li] 参照）

- 超特異表現 $(\lambda=0)$ の場合）

最後に, $\lambda=0$ の場合の既約商について結果を解説する.

定義 1.22. Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現とする. ある, $r\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, χ が存在して Π が $\pi(r,0,\chi)$ の商になっているとき, Π を「超特異表現」(suprersingular representation) と呼ぶ.

定理 1.23. 任意の $r\{0,1,\cdots,p-1\}$, χ に対して, $\pi(r,0,\chi)$ は既約になる.

証明 . [Br03a, Theorem 1.1]

注意 1.24. 非常に重要な注意として, この定理は $F=\mathbb{Q}_p$ の場合しか成り立たないことが知られている. 実際, 任意の $F\neq\mathbb{Q}_p$ について $\pi(\vec{r},0,\chi)$ は無限個の互いに同型でない既約商をもつことが知られている. 法 p Langalands 対応を $\mathrm{GL}_2(F)$ の場合に素朴に一般化しようとしたら, 超特異表現と G_F の既約二次元法 p 表現が対応するべきなのであるが, この事実はガロア側よりも GL_2 側の方がはるかに多いことを表しており, 一般の F に対しては素朴な一対一対応が成り立ないことを示している. しかし, F が不分岐拡大の場合には, G_F の二次元法 p 表現の Serre 重みの概念とうまく両立するような（一般には）無限個の超特異表現を組織的に構成する方法が, Breuil-Paskunas により発見され, 近年活発に研究され始めている. ([Br-Pa])

1.3 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の半単純法 p Langlands 対応

前小章までで, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元半単純法 p 表現, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現はともに, 三つのパラメーター $r\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi:\mathbb{Q}_p^\times\to\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ 連続指標の組 (r,λ,χ) を用いて分類されることを見た. この小章では, これらの分類結果に基づいて, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の半単純法 p Langlands 対応を定義する.

定義 1.25. [Br03b, Definition 1.1]

$r\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p$, χ に対して, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の半単純法 p 表現と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の半単純法 p 表現との対応を次のように定める,

(1) $\lambda = 0$ の場合,

$$\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi \leftrightarrow \pi(r, 0, \chi),$$

(2) $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ の場合,

$$\begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \leftrightarrow \pi(r, \lambda, \chi)^{ss} \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \chi\omega^{r+1})^{ss}$$

ここで, $\pi(r, \lambda, \chi)^{ss}$ は $\pi(r, \lambda, \chi)$ の半単純化, $[p-3-r] \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ は, $[p-3-r] = p-3-r \pmod{(p-1)}$ となる数, とする.

注意 1.26. この対応は well-defined になる. つまり, 両者において異なるパラメーター (r, λ, χ), (r', λ', χ') が同型な表現 $\pi(r, \lambda, \chi) \xrightarrow{\sim} \pi(r', \lambda', \chi')$ を与える場合があるが, この場合は対応する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現も同型になっている.（証明は必要だが, ここでは省略した.）

注意 1.27. 古典的な局所 Langlands 対応の場合と異なり, 法 p, p 進 Langlands 対応では $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現に可約なものも現れる. この対応は「p 進局所 Langlands 対応と法 p Langlands 対応の両立性」という予想から自然に導かれて出てきた対応であると思われる. 実際に, この対応が初めて定義された Breuil の論文 [Br03b] では, Hodge-Tate 重みの低い $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元クリスタリン表現に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進 Banach 表現の法 p 還元を具体的に計算することで, この対応の定義の正当性を確かめることに費やされている. (この論文の内容に関しては, 本報告集 [Na] 第二章でも解説している.)

2 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の cristabelline 表現に対する p 進局所 Langlands 対応

この章では, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の特別な場合, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の (絶対既約) cristabelline 表現に対する p 進局所 Langlands 対応を具体的に構成する ([Be-Br]).（後ほど定義する）cristabelline 表現は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の特別な p 進表現のクラスであるが,「全ての二次元 p 進表現の変形空間の中で、cristalbelline 表現 (と, そのひねり）に対応する点が（Zariski) 稠密に存在している」という事実によって, このクラスの p 進局所 Langlands 対応は次章の Colmez の理論でも本質的に重要な役割を果たす.（しかし, この辺りの重要性のより詳しい理由については本稿では説明できない.）さらに, 本報告集 [Na] で用いられる p 進局所 Langlands 対応の理論はこのクラスの場合の対応だけを考えれば十分であるので, 次章で Colmez の関手を定義する前に本章で cristabelline 表現の対応を解説することにする. なお, cristabelline 表現は trianguline 表現と呼ばれる近年, 整数論において重要になりつつある p 進表現のクラスに含まれており, p 進局所 Langlands 対応も trianguline 表現に対しては同様に具体的に構成されているのであるが, 今回の論稿ではこれについての解説は省略する. ([Co04], [Co07] 参照)

2.1 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 cristabelline 表現

この小章では, まず cristabelline 表現を定義し, それを対応するフィルトレイション付き $(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 加群を記述することで分類する. $n \geqq 1$ に対して, $G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))$ とおく. E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathcal{O}$ をその整数環, π_E を素元, $\mathbb{F}$ を剰余体とする.

定義 2.1. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の E-表現であるとする. このとき, V が cristabelline であるとは, ある自然数 n があって, $V|_{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}}$ が $G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}$ のクリスタリン表現になることと定義する.

$\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ を局所定数指標, k を 2 以上の整数とし, 条件 $-(k-1) < v_p(\alpha(p)) \leqq v_p(\beta(p)) < 0$、$-(k-1) = v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p))$ を満たすものとする. また, 十分大きい自然数 $n >> 0$ を $\alpha|_{1+p^n\mathbb{Z}_p} = \beta|_{1+p^n\mathbb{Z}_p} = 1$ を満たすようにとる. $E_n := \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, $G(\alpha/\beta) := \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)} \gamma^{-1}(\zeta_{p^n}) \otimes \frac{\alpha}{\beta}(\chi_p(\gamma)) \in E_n^\times$ とおく. (ここで, ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根の一つ, $\chi_p : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p)^\times$ は円分指標とする. $G(\alpha/\beta)$ は n 及び ζ_{p^n} の取り方による) すると, $G(\alpha/\beta)$ は, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(G(\alpha/\beta)) = \alpha/\beta(\chi_p(\gamma))G(\alpha/\beta)$ を満たす. このような組 (α, β, k) に対してフィルトレイション付き $(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 加群 $D(\alpha, \beta) := Ee_\alpha \oplus Ee_\beta$ を次のようにして定義する.

• $\alpha \neq \beta$ の場合,

(1) $\varphi(e_\alpha) := \alpha(p)e_\alpha$、$\varphi(e_\beta) = \beta(p)e_\beta$,

(2) $\gamma(e_\alpha) = \alpha(\chi_p(\gamma))e_\alpha$, $\gamma(e_\beta) = \beta(\chi_p(\gamma))e_\beta$, (ここで, $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$),

(3) $\mathrm{Fil}^{-(k-1)}(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) := E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)$, $\mathrm{Fil}^{-(k-2)} = \cdots = \mathrm{Fil}^0(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) := E_n(G(\alpha/\beta)e_\alpha + e_\beta)$, $\mathrm{Fil}^1(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) = 0$.

• $\alpha = \beta$ の場合,

(1) $\varphi(e_\alpha) = \alpha(p)e_\alpha$、$\varphi(e_\beta) = \beta(p)(e_\beta - e_\alpha)$,

(2) $\gamma(e_\alpha) = \alpha(\chi_p(\gamma))e_\alpha$, $\gamma(e_\beta) = \beta(\chi_p(\gamma))e_\beta$,

(3) $\mathrm{Fil}^{-(k-1)}(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) := E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)$, $\mathrm{Fil}^{-(k-2)} = \cdots = \mathrm{Fil}^0(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) := E_n e_\alpha$, $\mathrm{Fil}^1(E_n \otimes_E D(\alpha, \beta)) = 0$.

すると, $D(\alpha, \beta)$ は絶対既約な弱許容フィルトレイション付き $(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 加群になっていて,「Colmez-Fontaine の定理」により対応する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の E-cristabelline 表現を $V(\alpha, \beta)$ とおく. (つまり, $V(\alpha, \beta)$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 E-表現で, フィルトレイション付き $(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 加群として同型 $(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\alpha, \beta))^{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}} \xrightarrow{\sim} D(\alpha, \beta)$ となる唯一のもの)

命題 2.2. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約二次元 E-cristabelline 表現とする．このとき（E を適当に大きくしたら）$\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ 局所定数指標と 2 以上の自然数 k で上の条件を満たす組 (α, β, k) と整数 r で，

$$V \xrightarrow{\sim} V(\alpha, \beta) \otimes \chi_p^r$$

となるものが存在する．（$\chi_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^\times$ は p 進円分指標）また，$V(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} V(\alpha', \beta')$ であるための必要十分条件は，$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha', \beta'\}$ であることである．

証明． まずは，χ_p でひねることで，V は Hodge-Tate 重み $0, k-1$ を持つ場合に帰着し（$k \geqq 1$），このとき $V \xrightarrow{\sim} V(\alpha, \beta)$ となるような α, β を見つければよい．cristabelline 表現の定義から十分大きな n に対して、$(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}}$ はランク 2 の自由 E 加群で，E を十分大きくして φ が半単純となる基底表示 $(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}} = Ee_1 \oplus Ee_2$ をとる．e_1, e_2 の固有値をそれぞれ α_p, β_p とする．$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$ と φ の作用の可換性から，$\alpha_p \neq \beta_p$ の場合は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$ も e_1, e_2 のそれぞれに指標として作用するとしてよい．$v_p(\alpha_p) \leqq v_p(\beta_p)$ となるようにとる．この場合は $\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ を $\alpha(p) := \alpha_p$, $\alpha(\chi_p(\gamma)) := \gamma(e_1)/e_1$（$\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$）と定めれば ($\beta$ の定義も同様)，V の絶対既約性と $(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}}$ の弱許容性とフィルトレイションが $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)$ の作用で保たれることとから，$(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})}} \xrightarrow{\sim} D(\alpha, \beta)$ であることが導かれる．他の場合も同様.

2.2 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進解析的主系列表現

この小章では，前小章で定義した二次元 cristabelline 表現 $V(\alpha, \beta)$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の E-Banach 表現 $B(\alpha, \beta)$ を具体的に構成する． これらの基本的な性質（絶対既約であること，許容的であることなど）は，次小章において紹介する．

まずは，定義に必要な p 進解析のいくつかの概念を定義する．E 上の p 進ノルム $|-|$ を $|p| := 1/p$ となるように固定する．$\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, E) := \{f : \mathbb{Z}_p \to E | f$ は連続関数 $\}$ とする．これは自然に E 代数の構造を持つが，ノルムを $\| f \|_0 := \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$ と定義することで，E-Banach 空間の構造をもつ． 任意の自然数 n に対して，$\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数 $\binom{x}{n} := \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n(n-1)\cdots 1}$ を定義する．これは，$x \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ で整数に値をもち，$\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ は $\mathbb{Z}_p$ の中で稠密なので，任意の $x \in \mathbb{Z}_p$ に対して $\binom{x}{n} \in \mathbb{Z}_p$ となる．また，$\binom{n}{n} = 1$ なので，これより $\| \binom{x}{n} \|_0 = 1$ となる．

定理 2.3. (Mahler)

任意の $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, E)$ に対して，$\{a_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}}$ （$a_n(f) \in E$），$a_n(f) \to 0$

$(n \to \infty)$ となるもので,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \binom{x}{n}$$

となるものが唯一つ存在する．さらにこのとき $\| f \|_0 = \sup_n |a_n(f)|$ となる．逆に, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}}$ $(a_n \in E)$ で $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすものに対して, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ は $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, E)$ の元として収束する．

次に, 通常の実数 $\mathbb{R}$ 上の解析で現れる $\mathcal{C}^r$ 級関数の p 進解析版を定義する．$r \in \mathbb{Q}_{\geqq 0}$ とする．このとき, $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E) := \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, E) | n^r |a_n(f)| \to 0 \ (\ n \to \infty) \ \}$ と定義する．これは, E ベクトル空間でノルムを $\| f \|_r := \sup_{n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}} (n+1)^r |a_n(f)|$ と定めると, $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ は E-Banach 空間となる．（$r \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ とすると, 実際にこの定義が「f の r 回微分 $f^{(r)}$ が存在して $f^{(r)}$ が連続になること」と同値であることが示せる.）

これらの定義を用いて $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の E-Banach 表現 $B(\alpha, \beta)$ を次のように定義していく．$\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ 局所定数指標, $k \in \mathbb{Z}_{\geqq 2}$ で $-(k-1) < v_p(\alpha(p)) \leqq v_p(\beta(p)) < 0$ かつ $v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -(k-1)$ を満たすものとする．まず, $B(\alpha) := \{f : \mathbb{Q}_p \to E | f|_{\mathbb{Z}_p} \in \mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}(\mathbb{Z}_p, E)$ かつ, $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \frac{x^{k-2}}{|x|} f(1/x)|_{\mathbb{Z}_p - \{0\}}$ が $\mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}(\mathbb{Z}_p, E)$ の元にのびる．$\}$ と定義する．（$f(x) \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ ならば $f(ax) \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ となる，という事実から）同型 $B(\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}(\mathbb{Z}_p, E) \oplus \mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}(\mathbb{Z}_p, E) : f(x) \mapsto (f(px), \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \frac{x^{(k-2)}}{|x|} f(1/x))$ によって, $f \in B(\alpha)$ のノルムを $\| \ f \ \| := \sup\{\| \ f(px) \ \|_{v_p(\alpha(p))}, \| \ \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \frac{x^{k-2}}{|x|} f(1/x) \ \|_{v_p(\alpha(p))}\}$ と定める．これにより $B(\alpha)$ は E-Banach 空間となる．次に $f(x) \in B(\alpha)$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $gf(x) := \alpha(ad - bc) \frac{\beta(-cx+a)}{\alpha(-cx+a)} \frac{(-cx+a)^{k-2}}{|-cx+a|} f(\frac{dx-b}{-cx+a})$ と定める．$gf(x) \in B(\alpha)$ となること, 及びこの作用 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times B(\alpha) \to B(\alpha) : (g, f(x)) \mapsto gf(x)$ が連続作用になることも証明できる．([Be-Br, Lemma 4.2.1]) さらに, 条件 $v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -(k-1)$ から, $B(\alpha)$ はユニタリー表現（つまり, 任意の $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $v \in B(\alpha)$ に対して $\| gv \| = \| v \|$) であることも示せる．

注意 2.4. $B(\alpha)$ およびそれ上の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 作用は次のようにして p 進解析的な主系列表現と思うことができる．$\mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta x^{k-2}|x|^{-1})^{\mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}} := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to E | f$ は $\mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}$ 級かつ, $f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \alpha(a)\beta(d)d^{k-2}|d|^{-1}$ を満たす$\}$ とする．（この場合の「f は $\mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}$ 級」の定義は省略.）この E ベクトル空間の元 f と $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対して, $gf(g') := f(g'g)$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 作用を定める．このとき, $B(\alpha)$ の定義及びそれへの $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 作用は, 次の射が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 同変な同型となるよう定義されている．$\mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta x^{k-2}|x|^{-1})^{\mathcal{C}^{v_p(\alpha(p))}} \xrightarrow{\sim} B(\alpha) : F \mapsto f(x) := F(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix})$.

補題 2.5. j を $0 \leqq j < v_p(\alpha(p))$ を満たす整数とし, $a \in \mathbb{Q}_p$ とする. このとき, $x \mapsto x^j$ 及び $x \mapsto \frac{\beta(x-a)}{\alpha(x-a)}(x-a)^{k-2-j}|x-a|^{-1}$ は, $B(\alpha)$ の元になる.

証明 . [Be-Br, Lemma 4.2.2]

上の補題の元たちで生成される $B(\alpha)$ の部分 $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 空間の閉包を $L(\alpha)$ とおく. 以上のもとで,

$$B(\alpha,\beta) := B(\alpha)/L(\alpha)$$

と定義する.

注意 2.6. $B(\alpha,\beta)$ は, $B(\alpha)$ を用いて定義されたが α と β を入れ替えたもの $B(\beta)$, $L(\beta)$、$B(\beta)/L(\beta)$ というのも自然に定義できる. さらに, [Be-Br, Corollary 4.3.2] において、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 同変な自然な射 $B(\beta)/L(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ が構成され, $\alpha \neq \beta|-|$ の場合に（$|-| : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ は, $p \mapsto 1/p$、$a \mapsto 1$ ($a \in \mathbb{Z}_p^\times$) となる指標）はこの自然な射が同型であることが示されている. 特に, $v_p(\alpha(p)) = v_p(\beta(p))$ の場合, この射は同型となるので, $B(\alpha,\beta)$ はこの場合にも well-defined であることが分かる.

現時点では, $B(\alpha,\beta)$ は定義しただけで, 基本的な性質（$B(\alpha,\beta) \neq 0$ であるか？, $B(\alpha,\beta)$, $B(\alpha',\beta')$ がいつ同型になるか？, $B(\alpha,\beta)$ は既約か？, $B(\alpha,\beta)$ は許容表現か？など）については何も述べていない. これらの性質については, 次小章において, $B(\alpha,\beta)$ と前小章で定義した $V(\alpha,\beta)$ とを (φ,Γ) 加群を用いて結びつけることで, $V(\alpha,\beta)$ の性質に帰着させることで証明できるということを解説する.

この小章の残りでは, 本報告集 [Na] において必要となる, $B(\alpha,\beta)$ の局所代数的ベクトルに関する一つの命題を紹介する.

$B_{\mathrm{sm}}(\alpha) := \{f : \mathbb{Q}_p \to E | f|_{\mathbb{Z}_p}$ は局所定数, $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}|x|^{-1}f(1/x)|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の局所定数関数に延びる $\}$ とおき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) := \alpha(ad-bc)\frac{\beta(-cx+a)}{\alpha(-cx+a)}|-cx+a|^{-1}f(\frac{dx-b}{-cx+a})$ と定める. $B(\alpha)$ の場合と同様にして, $B_{\mathrm{sm}}(\alpha)$ は $\mathrm{Ind}_B^G(\alpha\otimes\beta|-|^{-1}) := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to E | f$ 局所定数関数, $f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \alpha(a)\beta(d)|d|^{-1}f(g)\}$ と自然に同型になる. $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ を E^2 への自然な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 作用の $(k-2)$ 次対称積とし, この空間を (x を変数とする）$k-2$ 次以下の E-係数多項式の空間と同一視する. このとき, $P(x)$ を $(k-2)$ 次以下の E-係数多項式としたら, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) := (-cx+d)^{k-2}f(\frac{dx-b}{-cx+a})$ という $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用になっている. $\pi(\alpha) := B_{\mathrm{sm}}(\alpha) \otimes_E \mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ とおく. $\pi(\alpha)$ から $B(\alpha)$ への射を $\pi(\alpha) \to B(\alpha) : f(x) \otimes P(x) \mapsto f(x)P(x)$ と定めると, $f(x)P(x)$ は局所的に多項式でさらに, $x = \infty$ での条件も満たされているので $f(x)P(x) \in B(\alpha)$ となり, この射は well-defined になる. この射と自然な商射 $B(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$

の合成を $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ とおく．π^0 を $\pi(\alpha)$ の有限生成 $\mathcal{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-加群で $\pi^0[1/p] = \pi(\alpha)$ を満たすものとする．すると，$B(\alpha)/L(\alpha)$ の完備性から射 $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ は射 $(\lim_{\leftarrow n}\pi^0/\pi_E^n\pi^0) \otimes_{\mathcal{O}} E \to B(\alpha)/L(\alpha)$ を誘導する．

この射に関して次の命題が成り立つ．

命題 2.7. 上のような任意の π^0 に対して，

$$(\lim_{\leftarrow n}\pi^0/\pi_E^n\pi^0) \otimes_{\mathcal{O}_E} E \xrightarrow{\sim} B(\alpha)/L(\alpha)$$

は同型になる．

証明 . [Be-Br, Theorem 4.3.1]

注意 2.8. $V(\alpha,\beta)$ から得られる Weil-Deligne 表現 $D_{\mathrm{pst}}(V(\alpha,\beta))$ に古典的局所 Langlands 対応によって対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の滑らかな既約表現は $B_{\mathrm{sm}}(\alpha)$（の既約商）である．上で定義した射 $\pi(\alpha) \to B(\alpha,\beta)$ は同型 $\pi(\alpha) \xrightarrow{\sim} B(\alpha,\beta)_{\mathrm{alg}}$ の同型を与えることが予想されている．(証明されている?) （ここで、$B(\alpha,\beta)_{\mathrm{alg}}$ は $B(\alpha,\beta)$ の局所代数的ベクトルのなす部分 $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 表現, 詳しくは次章参照）

注意 2.9. $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の滑らか既約表現と代数的表現 $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ のテンソル表現の完備化が, どんな $\mathcal{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 格子をとっても同型になってしまうのは, cristabelline 表現に対応する場合だけでそれ以外の場合では, $\mathcal{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 格子の取り方によって, 得られる完備化は一意ではない．この事実は $D(\alpha,\beta)$ の弱許容的フィルトレイションが一意に定まってしまう事実と対応している．例えば, 準安定表現に対応する場合は, 完備化の取り方と p 進表現側の $\mathcal{L}$-invariant が対応していることが知られている．（cristabelline 表現でない, 潜在的 cristalline 表現の場合は正確なことは, まだよく分かっていない（と思われる.)）

2.3 cristabelline 表現の p 進局所 Langlands 対応の主定理

この小章では, $V(\alpha,\beta)$ と $B(\alpha,\beta)$ を (φ,Γ) 加群を用いて結びつける定理を紹介する．この定理から, $B(\alpha,\beta)$ の基本性質に関する定理, 及び $V(\alpha,\beta)$, $B(\alpha,\beta)$ が実際に一対一対応になっていることなど, ほぼ全ての重要な定理が導かれる．

まずは, 定理を述べるために必要な $(E\text{-})(\varphi,\Gamma)$ 加群の一般論について解説したい．$\mathcal{O} := \{f(X) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n | a_n \in \mathcal{O}_E, a_{-n} \to 0 (n \to \infty)\}$, $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ とおく．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ は, 素元 π_E を持つ完備離散付置環, $\mathcal{E}$ はその商体となっている．これらの環に E 線形な φ, Γ 作用を $\varphi(X) := (X+1)^p - 1$, $\gamma(X) := (X+1)^{\chi_p(\gamma)} - 1$ $(\gamma \in \Gamma)$ と定める．

定義 2.10. D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群であるとは, 次の条件を満たすこととする．

(1) D は有限生成自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群,

(2) φ 半線形な作用 $\varphi : D \to D$ があって, $\varphi \otimes \mathrm{id} : D \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\varphi} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} D$ は同型,

(3) φ 作用と可換な連続半線形 Γ 作用をもつ.

D が $\mathcal{E}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群であるとは, D は有限次元 $\mathcal{E}$ ベクトル空間で互いに可換な φ, Γ 作用をもち, さらにある $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群 D_0 があって, (φ, Γ) 加群として同型 $D_0[1/p] \xrightarrow{\sim} D$ が存在するもの, と定める.

定理 2.11. (Fontaine)

次の圏同値が存在する.

(1) $\{G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathcal{O}$-表現の圏 $\} \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ, Γ)-加群の圏 $\}$,

(2) $\{G_{\mathbb{Q}_p}$ の E-表現の圏 $\} \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{E}$ 上のエタール (φ, Γ)-加群の圏 $\}$.

注意 2.12. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 V に対応する (φ, Γ) 加群を $D(V)$ とおく. この関手の定義は, 正確には定義しないが $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ を含む p 進周期環 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$, $\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ で, φ, $G_{\mathbb{Q}_p}$ が作用して, $\mathbb{A}^{\varphi=1} = \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{A}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_P/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}))} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ となる環を用いて, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 V に対して $D(V) := (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{A})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}))}$ と定義することで定める.

以下 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の E 表現 (または $\mathcal{O}$ 表現) V に対応する (φ, Γ) 加群を $D(V)$ と書く. 次に, $D(V(\alpha, \beta))$ と $B(\alpha, \beta)$ を結びつけるために必要な作用素 ψ の定義と, それに関連するいくつかの命題について解説する. まず, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の φ の定義から $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ の任意の元 x は $x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)(X+1)^i \quad (x_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ の形に一意的に書くことが出来る. このとき, $\psi(x) := x_0$ によって, $\mathcal{O}$ 線形な作用 $\psi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を定める. 定義から $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ を満たす. $\mathcal{E}$ 及び $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ にも同様にして ψ が定まる. また, φ と Γ が可換であることから ψ は $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ 上の Γ 作用, $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ 上の $G_{\mathbb{Q}_p}$ 作用と可換であることも示せる. すると, 任意の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現に対して, $D(V) := (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{A})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}))}$ にも ψ が $\psi(x \otimes y) := x \otimes \psi(y)$ という定義から誘導される. そして $\psi(\varphi(x)v) = x\psi(v) \quad (x \in \mathcal{E}, v \in D(V))$ を満たす. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ の定義により, この環は部分環 $\mathcal{O}[[X]]$ をもち, φ, Γ, ψ はこの部分環を保つ. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ に位相を 0 の基本近傍系が $\{\pi_E^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + X^m \mathcal{O}[[X]] | n, m \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\}$ となるように定める. 部分環 $\mathcal{O}[[X]]$ に誘導位相を入れる. (この位相は, $\mathcal{O}[[X]] \xrightarrow{\sim} \prod_{n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}} \mathcal{O}$ と見做し, 右辺に $\mathcal{O}$ の直積位相を入れたものと等しい.) すると $\mathcal{O}[[X]]$ はコンパクトな部分環になっている. 任意の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群 D にも位相を $D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\oplus d}$ と同型を一つ定めてこれが同相となるように位相を定める.

命題 2.13. D を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群とする. このとき D の部分 $\mathcal{O}[[X]]$ 加群 $D^\sharp$ で次の性質を満たすものがただ一つ存在する.

(1) $D^\sharp$ は D のコンパクト部分空間で $\mathrm{Im}(D^\sharp \to D/\pi_E D$ は有限生成 $\mathbb{F}[[X]]$ 加群で $\mathbb{F}((X))$ ベクトル空間として $D/\pi_E D$ を生成する,

(2) ψ は $D^\sharp$ を保ち, さらに $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ は全射,

(3) 任意の $x \in D$、$k \in \mathbb{N}$ に対して, $n(x.k) \in \mathbb{N}$ で $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ （任意の $n \geqq n(x,k)$）となる $n(x,k)$ が存在する.

さらに N を D の部分 $\mathcal{O}[[X]]$ 加群で上の条件 (1), (2) を満たすものとすると, $N \subseteq D^\sharp$ となる.

証明 . [Be-Br, Proposition 2.3.3]

D を $\mathcal{E}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群とし, D_0 を D の $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 格子となっている $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群とする. このとき, $\psi^{-\infty}(D_0^\sharp) := \{\{x_n\}_{n \geqq 0} | x_n \in D_0^\sharp, \psi(x_{n+1}) = x_n$, 任意の $k \geqq 1$ に対して, $D_0/\pi_E^k D_0$ の $\mathcal{O}/\pi_E^k[[X]]$ 格子 L_k で $\bar{x}_n \in L_k$ (任意の n) となるものが存在する $\}$ とおき, $(\psi^{-\infty}(D^\sharp))^b := E \otimes_\mathcal{O} (\psi^{-\infty}(D_0^\sharp))$ とおく. (これは D_0 の選び方によらないことが証明できる.）また, $D_0^\sharp$ の位相の射影極限として $\psi^{-\infty}(D_0)$ に位相を入れ, $1/\pi_E^k \psi^{-\infty}(D_0^\sharp)$ の位相の帰納的極限として $(\psi^{-\infty}(D^\sharp))^b$ の位相を定める. 次に, $(\psi^{-\infty}(D^\sharp))^b$ に $M(\mathbb{Q}_p) := \{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix}\}$ の連続作用を次のように定義する.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (x_n)_n := (\gamma_a^{-1}(x_n))_n$ （$a \in \mathbb{Z}_p^\times$, $\gamma_a \in \Gamma$ は $\chi_p(\gamma_a) = a$ となる元）,

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} (x_n) := (\psi(x_n))_n$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} (x_n) := (x_{n+1})_n$,

(4) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x_n) := (\psi^k((1+X)^{p^{n+k}b} x_{n+k}))_n$, （ここで, $k \geqq 0$ は $p^k b \in \mathbb{Z}_p$ となる任意の整数）.

この作用が $(\psi^\infty(D^\sharp))^b$ の位相に関して連続となる.([Be-Br, Proposition 3.4.4])

前二小章の条件を満たす局所定数指標 $\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ をとり, $V(\alpha, \beta)$ を 2.1 で定義した $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元 cristabelline E 表現, $B(\alpha, \beta)$ を 2.2 で定義した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ のユニタリー E-Banach 表現とする. $D(\alpha, \beta)$ を $V(\alpha, \beta)$ に対応する, $\mathcal{E}$ 上の (φ, Γ) 加群とする. $\chi : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{O}^\times$ を $\chi := \det(V(\alpha, \beta))$ とおき, 局所類体論で $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ と見做す. （定義から, $\chi = \alpha\beta x^{k-1} : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times : y \mapsto \alpha(y)\beta(y)y^{k-1}$ となる）$(\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha, \beta)))^b$ に, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (x_n)_n := (\chi^{-1}(a) x_n)_n$ と定めることで, $(\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha, \beta)))^b$ に $B := \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix}$ の作用を定める. また,

$B(\alpha,\beta)^* := \{\mu : B(\alpha,\beta) \to E | \mu$ は連続 E-線形 $\}$ とおき, $B(\alpha,\beta)$ に弱位相を入れる. ($\mu_n, \mu \in B^*(\alpha,\beta)$ に対して,「$\mu_n \to \mu$ $(n \to \infty)$ となること」と「任意の $f \in B$ に対して $\mu_n(f) \to \mu(f)$ $(n \to \infty)$ となること」が同値になる位相の内最も粗い位相のこと) 次がこの章の主定理である.

定理 2.14. $\alpha \neq \beta$ のとき, B の表現の自然な位相同型

$$(\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)))^b \xrightarrow{\sim} B^*(\alpha,\beta)$$

が存在する.

証明 . [Be-Br, Theorem 5.2.7]

注意 2.15. この定理の証明では, cristabelline 表現に対する Wach 加群の理論, p 進 Fourier 解析の理論 ($\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ の E-Banach 双対に関する Amice 変換の理論), p 進 distribution と (φ,Γ) 加群に現れる p 進周期環との関係, などなど p 進表現論, p 進 Fourier 解析の精密な理論を駆使することで証明され, 証明は面白いが非常に難しい (と思う).

この定理から, $B(\alpha,\beta)$ に関する様々な基本性質に関する系が得られる.

系 2.16. $\alpha \neq \beta$ のとき,

$$B(\alpha,\beta) \neq 0$$

証明 . $D(\alpha,\beta)$ の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 格子 $D_0(\alpha,\beta)$ に対して $D_0^\sharp(\alpha,\beta) \neq 0$ で $\psi : D_0^\sharp(\alpha,\beta) \to D_0^\sharp(\alpha,\beta)$ は全射なので, $\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)) \neq 0$. よって, 定理2.14により $B(\alpha,\beta)^* \neq 0$. よって $B(\alpha,\beta) \neq 0$.

系 2.17. $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$ となる (α,β), (α',β') に対して次の二条件は同値,

(1) $V(\alpha,\beta) \xrightarrow{\sim} V(\alpha',\beta')$,

(2) $B(\alpha,\beta) \xrightarrow{\sim} B(\alpha',\beta')$ ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の E-Banach 表現としての位相同型).

証明 . (1) ならば (2) となるのは, 命題 2.2 と注意 2.6 から従う. (2) ならば、定理 2.14 により、B の表現としての同型 $f : \psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)) \xrightarrow{\sim} \psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha',\beta'))$ をまず得る。この f を用いて、射 $f_0 : D^\sharp(\alpha,\beta) \to D^\sharp(\alpha',\beta')$ を次のようにして作ることができる。まず, $x \in D^\sharp(\alpha,\beta)$ に対して, $\{x_n\} \in \psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta))$ を $x_0 = x$ を満たすようにとる. $f(\{x_n\}) := \{y_n\}$ とし, $f_0(x) := y_0$ とおくと, これが $\{x_n\}$ の取り方によらずに定義でき, f_0 が $\mathcal{O}[[X]]$ 上の (ψ,Γ) 加群の射であることを証明できる. さらに, f_0 が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の (φ,Γ) 加群の射 $f_0' : D(\alpha,\beta) \to D(\alpha',\beta')$ に延びることも証明でき, 最後に絶対既約性から, (1) が導かれる. 詳しくは, [Be-Br, Propositon 3.4.5] の証明を参照.

系 2.18. $B(\alpha,\beta)$ は B の E-Banach 表現として既約. とくに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現としても既約.

証明． 定理 2.14 により, B の表現 $(\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)))^b$ の既約性に帰着される．そこで, $0 \neq M \subseteq (\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)))^b$ を閉 $E[B]$ 加群とする．このとき, $M_0 := \{x \in D^\sharp(\alpha,\beta) |$ ある $\{x_n\} \in M$ があって, $x_0 = x$ となる $\}$ とおくと, M_0 は $\mathcal{O}[[X]]$ 上の (ψ,Γ) 加群でさらに, $M \xrightarrow{\sim} (\psi^{-\infty}(M_0))^b$ であることが証明できる．さらにこのとき, $D(\alpha,\beta)$ が絶対既約二次元であることを用いると $M = D^\sharp(\alpha,\beta)$ であることが導かれ, $M = (\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta)))^b$ となってしまう．詳しくは, [Be-Br, Proposition 3.4.6] 参照.

系 2.19. *$B(\alpha,\beta)$ は許容表現．つまり, $B_0(\alpha,\beta)$ を $B(\alpha,\beta)$ の任意の $\mathcal{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ 格子とすると, $B_0(\alpha,\beta)/\pi_E B(\alpha,\beta)$ は, 長さ有限な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の法 p 表現となる.*

証明． [Be-Br, Corollary 5.3.3]

3 Colmez の理論

3.1 関手の定義

この章では, Colmez の定義した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現から $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現への関手の定義, 及び基本的性質について解説する．逆向きの関手（(φ,Γ) 加群の圏から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現への関手）は, 局所解析的ベクトルおよび局所代数的ベクトルなどを調べるときに, 必須となるのであるが, 本報告集では解説しないことにする．なお, 本報告集 [Ya] で用いられるのは, 本論稿で解説する関手であるので, [Ya] を読むための必要最小限度の事実については, 本稿で解説してある（と思う）.

$G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ とおく．E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\mathbb{F}$ を剰余体とする．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を前章で（E を固定した場合に）定義した (φ,Γ) 加群に現れる周期環とする．$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ を長さ有限許容的滑らか $\mathcal{O}[G]$ 加群で中心的指標をもつものからなる圏とする．$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ を長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群で $G_{\mathbb{Q}_p}$ が連続 $\mathcal{O}$ 線形に作用しているものからなる圏とする．$\Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tors}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上長さ有限なエタール (φ,Γ) 加群の圏とする．（つまり, この圏の対象 D は, 長さ有限 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群で, 互いに可換な $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 半線形 φ,Γ 作用をもち, $\varphi(D)$ が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上 D を生成するもの, である）

まずは, 捩れ（torsion) の場合の完全共変関手 $V : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ を, 完全反変関手 $D : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ と Fontaine の (反変）圏同値 $\Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p}) : D \mapsto V(D^*) \otimes \chi_p$ の合成として定める．そこで以下, 反変完全関手 $D : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ の定義について解説していく.

関手の構成の基本的なアイデアは, $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して, まずは, 本稿命題 2.13 に現れた $D^\sharp$ の varinat である, $\mathcal{O}[[T]]$ 上の (ψ,Γ) 加群 $D^\natural_W(\Pi)$ と, $\mathcal{O}[[T]]$ 上の (φ,Γ) 加群 $D^+_W(\Pi)$ 及び自然な単射 $D^+_W(\Pi) \hookrightarrow D^\natural_W(\Pi)$ を構成する．（ここで, $W \in \Pi$ はある有限性を満たす Π の部分 KZ 加群で, $D^\natural_W(\Pi)$ などは W に依存する．）ここまでは,（局所体を $\mathbb{Q}_p$ に制限する必要はなく）任意の局所体に対して行うことができる．しかし, ここから以降は, 局所体が $\mathbb{Q}_p$ であるということが本

質的に必要になってくる．特に, 任意の $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して, うまく W を選べば「Π,W が標準表示 (standard presentation) をもつ」という事実が重要で、これは局所体が $\mathbb{Q}_p$ の場合しか成立しないことが知られている．「Π,W が標準表示を持つ」という条件のもとで, 上の単射 $D_W^+(\Pi) \hookrightarrow D_W^{\natural}(\Pi)$ の余核は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群になり, これより得られる同型 $D(\Pi) := D_W^+(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \xrightarrow{\sim} D_W^{\natural}(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ により, Π から定まる (φ, Γ) 加群 $D(\Pi)$ を定義する．（$D(\Pi)$ が $W \subseteq \Pi$ の選び方によらないことも証明できる）また, 再び「任意の Π が標準表示をもつという」事実を用いると関手 $D(\Pi)$ が完全関手になることも証明できる．最後に本稿第一章で分類した G の既約法 p 表現のこの関手による像の計算結果を紹介する．

補題 3.1. 任意の $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して, Π の部分 KZ 加群 W で $\mathcal{O}$ 加群として長さ有限であり, G 加群として Π を生成するものが存在する．

証明． 任意の自然数 n に対して $K_n := \begin{pmatrix} 1+p^n\mathbb{Z}_p & p^n\mathbb{Z}_p \\ p^n\mathbb{Z}_p & 1+p^n\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ とおく．Π は長さ有限滑らかな G 加群なので, ある n が存在して Π^{K_n} が G 加群として Π を生成する．Π は許容的なので, Π^{K_n} は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群で K_n は K の正規部分群でさらに Π は中心的指標を持つので Π^{K_n} は KZ の作用で閉じている．よって $W = \Pi^{K_n}$ とすればよい．

$\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して, $\mathcal{W}(\Pi)$ を Π の部分 KZ 加群 W で $\mathcal{O}$ 上長さ有限かつ G 加群として Π を生成するものからなる集合とする．$W \in \mathcal{W}(\Pi)$ に対して, $I(W) := \mathrm{Ind}_{KZ}^G W = \{f : G \to W | f(kg) = kf(g)\ k \in KZ\ KZ\backslash\mathrm{Supp}(f) \text{ は有限}\}$ とする．$g \in KZ$、$v \in W - \{0\}$ に対して, $[g,v] \in I(W)$ を $\mathrm{Supp}([g,v]) = KZg^{-1}$, $[g,v](g^{-1}) = v$ となる元と定める．

自然な KZ 表現の単射 $W \hookrightarrow \Pi$ から Frobenius 相互法則によって定義される G 表現の射 $I(W) \to \Pi : [g,v] \mapsto gv$ は, W が G 上 Π を生成することから全射になる．この射の核を, $R(W,\Pi)$ とおく．これより G 加群の完全列

$$0 \to R(W,\Pi) \to I(W) \to \Pi \to 0$$

を得る．

$\Pi^{\vee} := \{\mu : \Pi \to E/\mathcal{O} | \mu \text{ は } \mathcal{O} \text{ 線形}\}$ とおく．$\mu \in \Pi^{\vee}$、$v \in \Pi$ に対して, $<\mu, v> := \mu(v)$ とおく．$\Pi^{\vee}$ に G の作用を $<g\mu, v> := <\mu, g^{-1}v>$ となるように定める。$I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W) := \sum_{a\in\mathbb{Z}_p, n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}} \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W \subseteq \Pi$ とおく．定義より, $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ は, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p^{\times})$ の作用で閉じている．$D_W^{\natural}(\Pi) := \{\mu : I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W) \to E/\mathcal{O} | \mathcal{O} \text{ 線形}\}$ とおく．$\Pi^{\vee}$ の場合と同様に G の元を作用させることにすると, $D_W^{\natural}(\Pi)$ には $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p^{\times})$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ が作用している．このとき, $D_W^{\natural}(\Pi)$ に $\mathcal{O}[[X]]$ 上の (ψ, Γ) 加群の構造を次のように定義する．$\mu \in D_W^{\natural}(\Pi)$ に対して,

(1) $\psi(\mu) := \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu,$

(2) $\gamma_a(\mu) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu,$ （$a \in \mathbb{Z}_p^\times$、$\gamma_a \in \Gamma$ は $\chi_p(\gamma_a) = a$ となる元）

(3) $(1+T)^b \mu := \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu,$ ($b \in \mathbb{Z}_p$).

これらの定義で $\mathcal{O}[[X]]$ 上の (ψ, Γ) 加群が定まること（つまり, ψ と Γ 作用が可換であること, ψ, Γ が $\mathcal{O}[[X]]$ 半線形に作用すること）は全て, 各作用に対応する G の元たちの（積の）関係から自然に導かれる. 次に, $\Pi^\vee$ の部分 $\mathcal{O}$ 加群 $D_W^+(\Pi)$ を $D_W^+(\Pi) := \{\mu \in \Pi^\vee | \mu(\begin{pmatrix} p^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W) = 0 \ n \in \mathbb{Z}_{\leqq -1}$ または $b \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p\}$ と定義する. $D_W^+(\Pi)$ には, $\Pi^\vee$ 上の G 作用から誘導される $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p^\times)$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{Z}_p)$ が作用する. これより, $D_W^+(\Pi)$ に $\mathcal{O}[[X]]$ 上の (φ, Γ) 加群の構造を, $\varphi(\mu) := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu,$ （$\mathcal{O}[[X]], \Gamma$ 作用は $D_W^\natural(\Pi)$ の場合と同様）と定義する. 次に $\mu \in \Pi^\vee$ を $I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$ に制限して得られる $\mathcal{O}$ 加群の全射 $\Pi^\vee \to D_W^\natural(\Pi)$ と（全射となるのは $E/\mathcal{O}$ が入射的加群であることから従う）自然な単射 $D_W^+(\Pi) \hookrightarrow \Pi^\vee$ との合成を $D_W^+(\Pi) \hookrightarrow D_W^\natural(\Pi)$ とおく. （定義からこの射は単射になる.）これらから, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 上のエタール (φ, Γ) 加群を定義するためには, 次の, 標準表示の概念が必要になる.

定義 3.2. $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$, $W \in \mathcal{W}(\Pi)$ とする. このとき, $\Pi \xrightarrow{\sim} I(W)/R(W, \Pi)$ が標準表示であるとは, $R(W, \Pi)$ が $\mathcal{O}[G]$ 加群として, $R^{(0)}(W, \Pi) := \{[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x] - [\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y] | y \in W \cap \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W, x = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y\}$ で生成されていることと定義する.

定理 3.3. 任意の $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して, ある $W \in \mathcal{W}(\Pi)$ が存在して, $\Pi \xrightarrow{\sim} I(W)/R(W, \Pi)$ は標準表示となる.

証明 . まず標準表示をもつ $W \in \mathcal{W}(\Pi)$ が存在するという性質が G の表現の拡大によって閉じていることをしめす.（[Co08, Proposition 3.1.15]） これにより, Π が既約法 p 表現の場合に帰着され, 既約表現の標準表示は [Co08, Corollary 3.3.9], [Co08, Proposition 3.3.11], [Co08, Proposition 3.3.12] において明示的に与えられている.

$\mathcal{W}^{(0)}(\Pi)$ を $\mathcal{W}(\Pi)$ の部分集合で, $I(W)/R(W, \Pi)$ が有限表示となる W からなるものとする. 本稿では, 結果を紹介するだけに留めるが, この標準表示をもつという事実から次のような事実が従う.

命題 3.4. 任意の $W \in \mathcal{W}^{(0)}(\Pi)$ に対して, 自然な単射 $D_W^+(\Pi) \hookrightarrow D_W^\natural(\Pi)$ の余核は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群になる.

証明 . $[\mathrm{Co08}, \mathrm{Lemma}\,4.1.4]$

これより, この自然な単射を $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ に係数拡大したもの $D_W(\Pi) := D_W^+(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} D_W^\natural(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群の同型になる. この同型は両者の Γ 作用と両立し, さらに $D_W^+(\Pi)$ から誘導される φ 作用、$D_W^\natural(\Pi)$ の ψ から誘導される ψ 作用をもつ.

また, 二つの $W_1 \subseteq W_2 \in \mathcal{W}(\Pi)$ に対して, $I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W_1) \subseteq I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W_2)$ の双対により誘導される自然な全射 $D_{W_2}^\natural(\Pi) \to D_{W_1}^\natural(\Pi)$ が得られるが, この余核は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる.($[\mathrm{Co08}, \mathrm{Lemma}\,4.1.2]$) よって, この全射を $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ に係数拡大した射 $D_{W_2}^\natural(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} D_{W_1}^\natural(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}[[X]]} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ は同型になる. 任意の $W \in \mathcal{W}^{(0)}(\Pi)$ に対して $W^{[1]} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} W + \sum_{0 \leqq i \leqq p-1} \begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W$ とおくと, $W^{[1]}$ は KZ 作用で閉じていて $W^{[1]} \in \mathcal{W}^{(0)}(\Pi)$ となることが証明できる. さらに, $W^{[2]} := (W^{[1]})^{[1]}$, 以下帰納的に $W^{[n]} := (W^{[n-1]})^{[1]}$ と定義すると, 任意の $W' \in \mathcal{W}(\Pi)$ に対して, 十分大きな自然数 n をとれば $W' \subseteq W^{[n]}$ となる. 以上より, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 上の振れ (φ, Γ) 加群として, $D_W(\Pi)$ は $W \in \mathcal{W}^{(0)}(\Pi)$ の取り方によらない. そこで,

定義 3.5. $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対し, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 上の振れ (φ, Γ) 加群を $D(\Pi) := D_W(\Pi)$ $(W \in \mathcal{W}^{(0)}(\Pi))$ と定義する.

再び, 標準表示であることを用いると, 次が得られる.

命題 3.6. $D(\Pi)$ はエタール φ 加群になる. つまり, $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} : \varphi^*(D(\Pi)) \xrightarrow{\sim} D(\Pi)$ は同型になる.

証明 . $[\mathrm{Co08}, \mathrm{Proposition}\,4.1.9]$

定理 3.7.

$$0 \to \Pi_1 \to \Pi_2 \to \Pi_3 \to 0$$

が $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ の完全列とすると,

$$0 \to D(\Pi_3) \to D(\Pi_2) \to D(\Pi_1) \to 0$$

は $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群の完全列になる.

証明 . $[\mathrm{Co08}, \mathrm{Proposition}\,4.2.12]$

$D(\Pi) \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ であるためには, $D(\Pi)$ が長さ有限 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群であることを示す必要がある. 関手 $D(-)$ の完全性から, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ の既約表現 Π に対して $D(\Pi)$ が長さ有限 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群であることを示せばよい. さらに, 本稿第一章により, 任意の既約表現は $\pi(r, \lambda, \chi)$ の商であるから, $D(\pi(r, \lambda, \chi))$ が長さ有限 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群であることを示せばよい.

定理 3.8. $0 \leqq r \leqq p-1$, $\lambda \in \mathbb{F}$ に対して, $W_r := \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^r\mathbb{F}^2 \to \pi(r,\lambda,\chi))$ とおく. このとき,（$W_r \in \mathcal{W}(\pi(r,\lambda,\chi))$ で、）$\mathcal{O}[[X]]$ 加群としての次の同型がある,

(1) $\lambda = 0$ のとき, $D^{\natural}_{W_r}(\pi(r,0,\chi)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[[X]] \oplus \mathbb{F}[[X]]$,

(2) $\lambda \neq 0$ のとき, $D^{\natural}_{W_r}(\pi(r,\lambda,\chi)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}[[X]] \oplus \mathbb{F}[[X]]/X$.

証明 . [Co08, Theorem 4.2.1]

系 3.9. $D : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) : \Pi \mapsto D(\Pi)$ は反変完全関手.

次に, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ を, $\mathcal{O}[G]$ 加群 Π で中心的指標をもち, p 進位相に関して分離的完備で p-torsion をもたなくて, さらに任意の自然数 n に対して $\Pi/p^n\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ となるもの、のなす圏とする. $\mathrm{Rep}_L(G)$ を, $L[G]$ 加群 Π で, $\mathcal{O}[G]$ 格子 $\Pi_0 \subseteq \Pi$ で $\Pi_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ となるものをもつものからなる圏とする. $\Phi\Gamma^{et}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ を, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群 D たちがなす圏とする. （つまり, D は有限自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群となる (φ,Γ) 加群）$\Phi\Gamma^{et}(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群の圏とする. $D : \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G) \to \Phi\Gamma^{et}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ を $D(\Pi) := \lim_{\leftarrow n} D(\Pi/p^n\Pi)$ と定義する. （ここで, $D(\Pi/p^{n+1}\Pi) \to D(\Pi/p^n\Pi)$ は, 自然な単射 $\Pi/p^n\Pi \xrightarrow{\sim} \frac{1}{p^n}\Pi/\Pi \hookrightarrow \frac{1}{p^{n+1}}\Pi/\Pi \xrightarrow{\sim} \Pi/p^{n+1}\Pi$ によって得られるものとする. ）また, $D : \mathrm{Rep}_L(G) \to \Phi\Gamma^{et}(\mathcal{E})$ を $D(\Pi) := D(\Pi_0)[1/p]$ と定める. (ここで, $\Pi_0 \subseteq \Pi$ は, Π の任意の $\mathcal{O}[G]$ 格子） $D : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ の完全性から, これらの関手も反変完全関手になる. $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ を長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群で $G_{\mathbb{Q}_p}$ が連続 $\mathcal{O}$ 線形に作用しているもののなす圏, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ を, 有限自由 $\mathcal{O}$ 加群で $G_{\mathbb{Q}_p}$ が連続 $\mathcal{O}$ 線形に作用しているもののなす圏, $\mathrm{Rep}_E(G_{\mathbb{Q}_p})$ を E 表現の圏とする. Fontaine の圏同値, $V : \Phi\Gamma^{et}_{\mathrm{tor}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$, $\Phi\Gamma^{et}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$, $\Phi\Gamma^{et}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_E(G_{\mathbb{Q}_p}) : D \mapsto V(D) := (D \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}))^{\varphi=1}$ とする. $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p})$（または, $V \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$, $V \in \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$）に対して, $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (または, $V^* := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}_p)$) とする. これらを用いて, G の表現から $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現への共変関手 $V(-)$ を次のように定義する.

定義 3.10. 次の三つの完全共変関手, $V : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{\mathbb{Q}_p})$, $V : \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$, $V : \mathrm{Rep}_L(G) \to \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ を $V(\Pi) := V(D(\Pi))^*(\chi_p)$ によって定義する.

G の既約法 p 表現 Π に対する, 関手 V での像 $V(\Pi)$ に関する定理を紹介する. $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{F}^\times$ を連続指標とする. $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{F}^\times$ を法 p 円分指標とする. $B(\delta_1,\delta_2) := \mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1})$ とおく. 第一章の結果により, $B(\delta_1,\delta_2)$ は $\delta_1 \neq \delta_2\omega$ のとき既約で $\delta_1 = \delta_2\omega$ のときは, 完全列

$$0 \to \mathbb{F}(\delta_2 \circ \det) \to B(\delta_1,\delta_2) \to \mathrm{St} \otimes \delta_2 \circ \det \to 0$$

をもち, $\mathrm{St} \otimes \mathbb{F} \circ \det$ は既約になる. 本稿第一章の結果から, G の法 p 既約表現は,（１）一次元表現 $\mathbb{F}(\delta \circ \det)$, （２）既約主系列表現 $B(\delta_1,\delta_2)$ ($\delta_1 \neq \delta_2\omega$), （３）$\mathrm{St} \otimes \delta \circ \det$, （４）超特異（supersingular) 表現 $\pi(r,0,\delta)$ ($r \in \{0,1,\cdots,p-1\}$), であった. これらの関手 $V(-)$ での像は次のようになる.

定理 3.11. (1) $V(\mathbb{F}(\delta \circ \det)) = 0$,

(2) $V(B(\delta_1, \delta_2)) = \mathbb{F}(\delta_1)$,

(3) $V(\mathrm{St} \otimes \delta \circ \det) = \mathbb{F}(\omega\delta)$,

(4) $V(\pi(r, 0, \delta)) = \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \delta$.

証明 . [Co08, Theorem 0.10]

注意 3.12. この計算結果は, 第一章で定義した半単純法 p Langlands 対応の定義と矛盾していない.

この小章の最後に, 前章の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の cristabelline 表現に対する（明示的）p 進局所 Langlands 対応と, この小章で定義した $V(-)$ との関係について解説する. 前章では, $\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ 局所定数指標で, いくつかの条件を満たすものに対して, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の二次元絶対既約 cristabelline 表現 $V(\alpha, \beta)$ と G の絶対既約許容 E-Banach 表現 $B(\alpha, \beta)$ を定義し, (φ, Γ) 加群の理論を用いて B 加群としての位相同型「$\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha, \beta))^b \xrightarrow{\sim} B(\alpha, \beta)^*|_B$」が存在することを紹介した. 詳細は述べられないが, 再びこの同型と関手 $V(-)$ のいくつかの基本性質を用いることで, 次の定理が得られる.

定理 3.13. 上の状況で、自然な同型

$$V(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} V(B(\alpha, \beta))$$

が存在する。

証明 . [Co08, Theorem 4.4.12]

この定理から, 二次元 cristabelline 表現に対する, 「p 進局所 Langlands 対応と法 p Langlands 対応の両立性」の定理を証明することができる.

定理 3.14. 上と同じ状況で, $\overline{V}(\alpha, \beta)$, $\overline{B}(\alpha, \beta)$ をそれぞれ $V(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$ の（半単純）法 p 還元とする. このとき, 次の条件（１）,（２）は同値,

(1) $\overline{V}(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \chi$,

(2) $\overline{B}(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} \pi(r, 0, \chi)$.

次の条件（３）,（４）は同値,

(3) $\overline{V}(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \omega^{r+1}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi$,

(4) $\overline{B}(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} \pi(r, \lambda, \chi)^{ss} \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \chi\omega^r)^{ss}$.

証明． まず,（２）ならば（１）が成り立つこと,（４）ならば（３）が成り立つことは定理 3.11, 3.13 から直ちに従う．（１）ならば（２）が従うこと（の概略）．まず, 前章の主定理 2.14 により, $\psi^{-\infty}(D^\sharp(\alpha,\beta))^b \xrightarrow{\sim} B^*(\alpha,\beta)|_B$ であった．これと, $\psi^{-\infty}(-^\sharp)$ がエタール (φ,Γ) 加群から B の表現への完全関手であるという事実を用いると, $D(\alpha,\beta)$ の $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 格子 D_0 に対して, B 加群としての同型 $\psi^{-\infty}((D_0/\pi_E D_0)^\sharp) \xrightarrow{\sim} \psi^{-\infty}(D_0^\sharp)/\pi_E\psi^{-\infty}(D_0^\sharp)$ を得る．この同型の左辺は,（１）のとき $\psi^{-\infty}((D_0/\pi_E D_0)^\sharp) \xrightarrow{\sim} (\pi(r,0,\chi))^*|_B$ となることが計算されている．右辺は, $\psi^{-\infty}(D_0^\sharp)$ が $B^*(\alpha,\beta)$ の $\mathcal{O}[B]$ 格子なので, $\psi^{-\infty}(D_0^\sharp)/\pi_E\psi^{-\infty}(D_0^\sharp) \xrightarrow{\sim} \overline{B}^*(\alpha,\beta)|_B$ となることが示せる．これで,（４）の同型を B に制限したものが得られたことになるが, 実はこのような同型はいつも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の同型に拡張できることが知られている．（４）ならば（３）の証明も同様に行う．詳しい証明は [Be, Theorem 3.1.1]

3.2 p 進局所 Langlands 対応と古典的局所 Langlands 対応の両立性

最後に, p 進局所 Langlands 対応と古典的な局所 Langlands 対応との関係について簡単にではあるが解説したい.

このためには, 前小章で定義した $D(-)$ とは逆向きの関手, つまり (φ,Γ) 加群から G の表現への関手が必要になる．これを定義するためには, (φ,Γ) 加群に現れる様々な周期環と第二章で現れた様々な p 進解析的関数の空間 $(\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p,\mathcal{O}))$ やその双対空間との絶妙な深い関係を用いて定義され, 非常に面白いのであるが今回は省略することにする．ここでは, 次の定理を紹介するだけにとどめる.

定理 3.15. *D をランク 2 の $\mathcal{E}$ 上の既約エタール (φ,Γ) 加群とする．このとき, 既約な $\Pi(D) \in \mathrm{Rep}_E(G)$ で, $D(\Pi(D)) \xrightarrow{\sim} D^*(1)$ を満たすものを標準的な仕方で構成することができる.*

証明． [Co08, Theorem 0.9.1]

この定理から, ランク 2 の $\mathcal{E}$ 上の既約 (φ,Γ) 加群 D に対して, 標準的なやり方で $\Pi(D)$ を得ることができるが, 以下, $V(D)$ が de Rham 表現であるということと $\Pi(D)$ が局所代数的ベクトルを持つこととの関係について解説していきたい. まず, $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ に対して, $v \in \Pi$ が局所代数的ベクトルであるとは, 任意の $\mu \in \Pi^*$ に対して定まる G の関数 $G \to E : g \mapsto \mu(gv)$ が, G の局所代数的関数になっていることと定義する．（ここで, G の関数 $f : G \to E$ が局所代数的であるとは, 局所的に f が G の成分 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d と $\frac{1}{ad-bc}$ の E 係数の多項式になっていることとする．）$\Pi^{\mathrm{alg}} \subseteq \Pi$ を Π の局所代数的ベクトルのなす部分 $E[G]$ 加群とする.

定理 3.16. *D を $\mathcal{E}$ 上のランク 2 既約エタール (φ,Γ) 加群とし, $V(D)$ を Fontaine の関手で対応する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現とする．このとき, 次の 2 条件は同値,*

(1) $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$,

(2) $V(D)$ は相異なる Hodge-Tate 重みをもつ de Rham 表現になる.

さらに, 上の条件を満たすとき, $V(D)$ の Hodge-Tate 重みを $a < b$ とおくと, $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} = \Pi(D)^{\mathrm{lc}} \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det^a$ となる. ここで, $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ は G の滑らか許容的表現.

証明 . [Co08, Theorem 0.11.1]

$V(D)$ が de Rham 表現のとき上, 定理の $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ についてより詳しいことが分かる. V をランク 2 の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham 表現とする.（Berger の定理から, V は潜在準安定表現なので,）Fonaine の関手によって $\overline{E}$ 上のランク 2 の Weil-Deligne 表現 $D_{\mathrm{pst}}(V)$ が得られる. D_{pst}^{ss} を $D_{\mathrm{pst}}(V)$ の Frobenius 半単純化とすると, 古典的な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の局所 Langlands 対応により, $D_{\mathrm{pst}}(V)^{ss}$ に対して G の既約許容的滑らか表現 $LL(D_{\mathrm{pst}}(V)^{ss})$ が定まる. (表現の係数は, （E を十分大きくして）E であるとする.）

定理 3.17. D を前定理の条件 (1), (2) を満たす (φ, Γ) 加群とする. このとき,

$$\Pi(D)^{\mathrm{lc}} \xrightarrow{\sim} LL(D_{\mathrm{pst}}^{ss})$$

証明 . この定理は、V が critabelline 表現の場合, 潜在的クリスタリンではない潜在的準安定表現の場合には, [Co08, Tehorem, 6.6.46] において証明されている. それ以外の場合（cristabelline ではない潜在的クリスタリン表現の場合は、Emerton の大域的な議論を用いて, 条件付で証明されている.）より詳しい内容は, [Co08, Theorem 0.21] とその後に続く注意を参照.

References

[Ba-Li] L.Barthel, R.Livné, Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, Duke Math.J. 75, 261-292,(1994).

[Be] L.Berger, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations Galoisiennes de dimension 2, Astérisque to appear.

[Be-Br] L.Berger, C.Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, arXiv preprint math/0601545 (2006).

[Br03a] C.Breuil, Sur quelques représentations modulaires p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Comp. Math.138, 165-188, (2003).

[Br03b] C.Breuil, Sur quelques représentations modulaires p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, J. Institut Math. Jussieu 2, 23-58 (2003).

[Br-Pa] C.Breuil, V.Paskunas, Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2, preprint (2007).

[Co04] P.Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint (2004).

[Co07] P.Colmez, La série principale unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint (2007).

[Co08] P.Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, preprint (2008).

[Na] 中村健太郎, 中間重みクリスタリン変形の保型性持ち上げ, 本報告集 vol.1

[Ya] 安田正大, Breuil-Mezard 予想とモジュラー性持ち上げ, 本報告集 vol.2