# Taylorによる潜保型性定理

2009年 9月 6日

津嶋　貴弘
*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku Tokyo 153-8914, JAPAN*
E-mail: tsushima@ms.u-tokyo.ac.jp

**要旨**

この論説では、Taylorによる潜Serre予想の証明、およびFontaine-Mazur予想のある場合の証明中で用いられた技術について解説する。([Tay1],[Tay2])

## 1　[Tay1],[Tay2]の主定理の概説

はじめにSerre予想とFontaine-Mazur予想について思い出す。以下円分指標を$\epsilon$と書く。

**予想 1.1.** *(Serre予想)* 奇な既約 mod $l$ ガロワ表現 $\bar{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}_l})$ はすべて保型的である。(奇であるとは複素共役 $c$ に対し $\det\overline{\rho}(c) = -1$ をみたすことをいう。)

この予想は、Khare-Wintenbergerによって、[KW]に於いて解決された。

**予想 1.2.** *(Fontaine-Mazur予想)* 奇な既約連続表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ が以下の二条件を充たすとする。

$\rho$は有限個の素点を除いて不分岐である。$\rho|_{G_{\mathbb{Q}_l}}$は潜準安定である。

このとき、$\rho$は保型的である。

これらの予想に対して Taylor は [Tay1] において以下の定理を証明した。

**定理 1.3.** *([Tay1, Theorem B])* $l$ を奇素数とし、奇な既約連続表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ は、以下の二条件を充たすとする。

1. 有限個の素点を除いて不分岐である。
2. $\rho$ の $l$ での分解群 $G_l$ への制限 $\rho|_{G_l}$ は

$$\rho|_{G_l} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^n \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$$

の形をしている。ここで $n$ は正の整数とし $\chi_1$ と $\chi_2$ は有限分岐な指標で $(\epsilon^n \chi_1 \chi_2)(I_l)$ が副 $l$*(pro-$l$)* ではないものとする。

このとき、総実代数体 $E$, 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)$ の正則代数的尖点的保型表現 $\pi$, $\pi$ の係数体の $l$ の上にある素点 $\lambda$ があって

$$\rho \sim \rho_{\pi,\lambda}$$

を充たす。ここで $\rho_{\pi,\lambda}$ は $\pi$ に伴う $\lambda$-進表現とする。

このように表現 $\rho$ 自身の保型性でなく代数体を拡大してその絶対ガロワ群に制限して得られる表現に対して保型性を主張するので定理 1.3 のようなタイプの定理を潜保型性定理と呼ぶ。[Tay1] の Introduction に定理 1.3 の証明のあらすじが書いてある。[Yo, 3.2] に日本語で [Tay1] の証明に関する事が大変わかり易く述べられている。それらに基づいてここで定理 1.3 の証明の概略を述べる。

まず、以下の条件をみたす総実代数体 $E$ と $M$, 素数 $p \neq l$ 及びアーベル多様体 $A/E$ を見つけてくる。

1. $p, l$ は $E$ で不分岐である。
2. $\dim A = [M : \mathbb{Q}]$.
3. 埋め込み $i : \mathcal{O}_M \hookrightarrow \mathrm{End}(A/E)$ がある。
4. $\mathcal{O}_M$ のある素点 $\lambda | l$ があって、$\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ 加群として、$A[\lambda](\overline{E}) \sim \overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)}$.
5. $A$ が、$p$ の上にある $\mathcal{O}_E$ のすべての素点でよい通常還元を持つ。

6. $p$ の上のある $\mathcal{O}_M$ の素点 $\wp$ で以下をみたすものが存在する。

$$A[\wp](\overline{E}) \sim \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)}^{\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)} \psi.$$

ここで $L$ は $E$ の総虚二次拡大体で $E(\zeta_p)$ には含まれないものとし、$\psi$ は $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ の適当な Hecke 指標とする。

特にアーベル多様体 $A$ は $M$ で実乗法を持つ $E$ 上のアーベル多様体である。以下では上の条件 6 をみたす総実代数体 $E$ と $M$, 素数 $p \neq l$ 、アーベル多様体 $A/E$ が得られたと仮定してどのように上の定理の主張である潜保型性が導かれるかを説明する。条件 6 によって $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ 加群 $A[\wp](\overline{E})$ は保型的であることがわかり、（代数的 Hecke 指標からの誘導表現なのでこの保型性は類体論の帰結である。）保型性持ち上げ定理（MLT, modularity lifting theorem）より、Tate 加群 $T_\wp A$ が保型的であることが従う。このことから $T_\lambda A$ の保型性がわかり、条件 4 から $\overline{\rho}$ の潜保型性が従う。([Tay4, Section 5.5] を参照。) これは Wiles が、Fermat 予想を証明したときに用いた $(3,5)$-trick の議論の類似である。$(3,5)$-trick の議論については、[Sa, 3 分点と 5 分点] を見られたい。Taylor-Wiles 系は Diamond、Fujiwara、Skinner-Wiles らによって総実代数体の場合に一般化が成された。ここでは、Skinner-Wiles による総実代数体の場合の MLT を用いている。上記の証明はガロワ表現と幾何学（モチーフ）と保型形式の間に深い対応関係があるという理念に基づいて成されている。これらの背景にある思想的なことは、[Yo] を参照していただきたい。

件のようなアーベル多様体をどのようにして探してくるか、ということについて以下で説明したい。以下では言葉を少し準備する。上の条件 2 と 3 をみたす $M$ による実乗法付きのアーベル多様体とそれにある偏極の条件 $j$ を加えた組 $(A,i,j)$ のことを、$M$-Hilbert-Blumental アーベル多様体とよぶ。偏極の条件 $j$ とは、順序付き可逆 $\mathcal{O}_M$ 加群としての同型 $j : \mathcal{O}_M^+ \simeq \mathcal{P}(A,i)$ のことである。ここで以下の用語、記号を用いた。

- 順序付き可逆 $\mathcal{O}_M$ 加群とは、可逆 $\mathcal{O}_M$ 加群 $X$ と各 $M$ の各無限素点 $x$ に対して $(X \otimes M_x - \{0\})$ の連結成分 $X_x^+$ を指定したものとの組 $(X, \{X_x^+\}_{x:M\hookrightarrow\mathbb{R}})$ のことである。

- $\mathcal{O}_M^+$ は、組 $(\mathcal{O}_M, \{(M_x^\times)^0\})$ のことである。ここで $(M_x^\times)^0$ は、$M_x^\times$ の 1 の連結成分のこととする。

- $\mathcal{P}(A,i)$ は対称な準同型写像 $f : (A,i) \longrightarrow (A^\vee, i^\vee)$ のなす可逆 $\mathcal{O}_M$ 加群であって、偏極の類を含む唯一つの $\mathcal{P}(A,i) \otimes M_x$ の連結成分を指定したものの組とする。

以下 $M$-Hilbert-Blumental アーベル多様体を M-HBAV と略記する。この M-HBAV のレベル構造込みのモジュライ空間（Hilbert-Blumental modular 多様体）は精モジュライであって擬射影的平滑で幾何学的に既約という大変によい空間になることが知られている。([Hida2],[Ra] を参照。)

**定理 1.4.** *(Moret-Bailly [Tay2, Theorem G])* $K$ を代数体、$S$ を $K$ の素点の有限集合とする。（与えられた $K$ の代数閉包のなかで）$S$ の各素点が完全分解するような最大拡大体を $K_S/K$ とおく。$X/\mathrm{Spec}K$ を幾何的に既約で擬射影的平滑な代数多様体とする。このとき、全ての素点 $v \in S$ について $X(K_v)$ が空でないならば、$X(K_S)$ は $X$ の中で *Zariski* 稠密である。

この数論幾何の定理を上の Hilbert-Blumental modular 多様体に当てはめることによって、上の条件１－６をみたす総実代数体 $E$ 及び $E$ 上のアーベル多様体 $A$ の存在が導かれる。（しかしこのことによって、潜在的という条件がついてしまう。総実代数体 $E$ としてどのようなものが取れるかの情報は与えてくれない。）勿論、Moret-Bailly の定理にある局所的な条件は確かめなければならない。そのために、代数体 $M$, 素数 $p$, 代数的ヘッケ指標 $\theta$ を注意深く選んでくる必要があり、そのため [Tay1],[Tay2] の議論は複雑なものとなっている。

Hilbert-Blumental modular 多様体に上の Moret-Bailly の定理を適用するためには, この多様体に局所的な有理点が存在することを示さねばならない。そこで以下ではその有理点をどのようにして見つけてくるかについての概略を述べたい。まず Honda-Tate 理論を用いて、標数 $l$ の有限体上の実乗法付きのアーベル多様体の存在をいい、得られたアーベル多様体を適当に同種のもので置き換え、偏極の条件を付けて有限体上の Hilbert-Blumental アーベル多様体が得られる。（条件 1,5,6 に現れる素数 $p$ は、$M$ のヒルベルト類体で完全分解するようにとってくる。）その後局所体上に持ち上がることを示すのだが、これは持ち上げが存在するための条件を Serre-Tate の理論を用いてガロワコホモロジーに関する条件に言い換え、後者の条件を詳しく検討する、という流れで証明が成される。（ここの部分が論文 [Tay1] で頑張っているところなのでここは第３節で証明を解説するつもりである。）以上が [Tay1, Theorem B] の証明の概略である。この [Tay1] においては、ordinary の場合に Fontaine-Mazur 予想に対する結果を出しているので、Skinner-Wiles による MLT を使えるように、$(p,l)$-trick の所で工夫して色々と技術的な部分を乗り越えている、というような趣だと思う。[Tay2] のほうでは、crystalline の場合にこれらの話の変種を証明するために、MLT も必要な形で証明せねばならず、総実体における $R = T$ に着手していて前半の三章はその一般化に費やされている。この [Tay2] でも Moret-Bailly の定理を用いてアーベル多様体を見つけてくるのだが上の $(p,l)$-trick を強化した $(p_1,p_2,l)$-trick と呼べる新しい議論をしている。この論説では、[Tay2] に於いて、Taylor が証明した MLT 、潜

Serre 予想、Fontaine-Mazur 予想への寄与について要約することを目標として話を進めていきたいと思う。

勉強会を企画し、啓蒙的な発表をして下さり、今回筆者に本報告集の原稿を書く機会を与えてくださった安田正大さん、山下剛さんに改めて感謝の意を表したいと思います。力不足で原稿の内容が非常に貧弱なものになってしまったことをお詫びしたいと思います。また山下剛さんから原稿修正過程で助言を頂いたことにも感謝したいと思います。なお安田さんには東京で直接原稿の手直しに関する丁寧な助言をいただきました。重ねて感謝の意を表したいと思います。

# 2 復習

## 2.1 偏極、Weil ペアリング、Rosati 対合の定義

この節では [Tay1, Theorem B] の証明に用いられるアーベル多様体の基本用語、基本事項について簡単にまとめておく。詳細については [Mi1], [Mi2] 見られたい。$k$ を体とする。$A$ を $k$ 上のアーベル多様体とする。有理点 $a \in A(k)$ に対し、$t_a : A \longrightarrow A; x \mapsto x + a$ とおく。$\mathscr{L}$ を $A$ 上の可逆層とする。このとき射

$$\phi_{\mathscr{L}} : A(k) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A); a \mapsto t_a^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$$

は準同型写像であって、もし $\mathscr{L}$ が豊富ならば像は次数が 0 のピカール群 $\mathrm{Pic}^0(A)$ となる。換言すれば豊富な可逆層は同種射 (全射で核が有限平坦群スキームであるようなアーベル多様体間の射のこと。) $\phi_{\mathscr{L}} : A \longrightarrow A^\vee$ を誘導する。

以下では $A$ をスキーム $S$ 上のアーベルスキームとする。ここで $S$ 上のアーベルスキームとは $S$ 上固有平滑かつ幾何的に既約な可換群スキームのことをいう。同種射 $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$ が $\lambda = \lambda^\vee$ を充たすとき対称同種射であるという。対称同種射 $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$ がファイバーごとにある可逆層 $\mathscr{L}$ に付随する同種写射 $\phi_{\mathscr{L}}$ でかけるとき、偏極であるという。

次に Weil ペアリングについて述べる。$A$ はスキーム $S$ 上のアーベルスキームとする。

同種射 $f : A \longrightarrow B$ とその双対 $f^\vee : B^\vee \longrightarrow A^\vee$ の核をそれぞれ $M, N$ と書く。このとき標準的なペアリング

$$M \times N \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

が存在し、これにより一方は他方の Cartier 双対と見なせる。$m$ 倍写像 $m : A \longrightarrow A$

に対して上のペアリングを考えるとペアリング

$$e_m : A[m] \times A^\vee[m] \longrightarrow \mu_m$$

を得る。偏極 $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$ に関して $\lambda$-Weil ペアリングを

$$e_m^\lambda : A[m] \times A[m] \longrightarrow \mu_m; (a, b) \mapsto e_m(a, \lambda b)$$

と定義する。

Rosati 対合を定義する。アーベルスキーム $A, B$ に対し $\mathrm{Hom}^0(A, B) := \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Q}$ とおく。偏極 $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$ に関する $\lambda$-Rosati 対合 $\dagger_\lambda$ を

$$\dagger_\lambda : \mathrm{End}^0(A) \longrightarrow \mathrm{End}^0(A); \alpha \mapsto \lambda^{-1} \circ \alpha^\vee \circ \lambda$$

と定義する。

$K$ を完全体とする。$A/K$ をアーベル多様体とする。$M$ を代数体、$\mathcal{O}_M$ をその整数環とする。$A/K$ は $\mathcal{O}_M$ 乗法を持つ。すなわち、単位元を単位元に移す環の準同型 $\mathcal{O}_M \longrightarrow \mathrm{End}(A/K)$ が与えられているとする。$X$ を有限生成自由 $\mathcal{O}_M$ 加群の部分加群とする。次の関手を表現するアーベル多様体を $A \otimes_{\mathcal{O}_M} X$ とかくことにする。

$$(Sch/K) \longrightarrow (Sets); T \mapsto A(T) \otimes_{\mathcal{O}_M} X.$$

ここで、左辺 $(Sch/K)$ は $K$ 上のスキーム全体のなす圏とし、右辺は集合のなす圏とする。

## 2.2 実乗法をもつアーベル多様体について

ここでは実乗法をもつアーベル多様体についての定義や事実をまとめる。

以下 [Ra] に従って定義や事実を述べる。[Hida2, section 4.1.1] に詳しい解説がある。$F$ を総実代数体、$\mathcal{O}$ を $F$ の整数環とする。$S$ をスキームとする。$S$ 上の実乗法を持つアーベルスキームとは以下の組のこととする。

1. $X$ は $S$ 上のアーベルスキームである。
2. 乗法 $m : \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ は単位元を単位元に移す環の準同型写像であるとし $m$ を通じて $Lie(X)$ を $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_S$ 加群と見做すと $S$ 上局所的に階数 1 の自由加群である。

$S$ 上の実乗法を持つアーベルスキーム $X$ の偏極 $\lambda : X \longrightarrow X^\vee$ とは任意の元 $a \in \mathcal{O}$ について $\lambda \circ m(a) = m(a)^\vee \circ \lambda$ をみたす対称同種射のことをいう。

**補題 2.1.** *([Ra, Proposition 1.10])* 実乗法を持つアーベルスキームは常に偏極を持つ。

簡単のため以下では $(A, i)$ を完全体上の実乗法を持つアーベル多様体とする。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{symm}}(A, A^{\vee})$$

を $\mathcal{O}$ 線形 (任意の $a \in \mathcal{O}$ に対して $f \circ i(a) = i(a)^{\vee} \circ f$ が成立すること。) かつ対称（$f = f^{\vee}$）なアーベル多様体の射 $f : A \longrightarrow A^{\vee}$ のなす $\mathcal{O}$ 加群とする。この $\mathcal{O}$ 加群は上の補題によりゼロではなく、捩れがないので射影的である。更に対称写像 $f : A \longrightarrow A^{\vee}$ は $H^1(A, \mathbb{Z}_l)$ 上の交代形式で唯一つに決まるので階数は 1 である。（実乗法をもつアーベル多様体のリー環に関する定義を思い出せばよい。）

**補題 2.2.** *([Ra, Proposition 1.17])* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{symm}}(A, A^{\vee})$ は可逆 $\mathcal{O}$ 加群である。

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{symm}}(A, A^{\vee})$ の中の偏極全体からなる部分集合を考えると $\mathcal{O}$ の総正な元による $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{symm}}(A, A^{\vee})$ への作用はこの部分集合を保持する。これは次のようにしてわかる。$A$ 上の可逆層 $\mathscr{L}$ をとるとこれは対称な準同型写像 $\phi_{\mathscr{L}} : A \longrightarrow A^{\vee}$ を定める。$a \in \mathcal{O}$ に対し引き戻し $i(a)^*\mathscr{L}$ は準同型 $a^2\phi_{\mathscr{L}} : A \longrightarrow A^{\vee}$ を誘導する。$\mathscr{L}$ が豊富ならば引き戻し $i(a)^*\mathscr{L}$ も豊富である。よって $\phi_{\mathscr{L}}$ が偏極ならば $a^2\phi_{\mathscr{L}}$ も偏極である。以下 $\phi_{\mathscr{L}}$ が偏極であるとする。総正な元 $a \in \mathcal{O}$ を取ると $a$ は $F$ に属する元 $f_i$ の平方の和 $a = \Sigma_i f_i^2$ の形に表示できる。従って適当な正整数 $r$ を取れば $r^2 \cdot a$ $\mathcal{O}$ に属する元の平方の和 $r^2 \cdot a = \Sigma_i a_i^2$ の形に書ける。上記の議論から $r^2 \cdot a\phi_{\mathscr{L}}$ が偏極であ驕 B ゆえに $a\phi_{\mathscr{L}}$ は偏極である。

### 2.3 Neron モデル、様々な還元について

ここでは Neron モデルの定義と色々な還元の名前を導入する。Neron モデルの存在定理を述べる。

**定理 2.3.** $\mathcal{O}$ を離散付値環とし、$K$ をその分数体、$F$ を $\mathcal{O}$ の剰余体、$A_K$ を $K$ 上のアーベル多様体とする。このとき、$\mathcal{O}$ 上の可換群スキーム $\mathscr{A}$ で以下の性質をみたすものが存在する。$\mathscr{A}$ の生成ファイバーは $A_K$ であって任意の平滑な $\mathcal{O}$ 上のスキーム $X$ に対して、制限写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(X_K, A_K)$$

が全単射になる。さらにこのような $\mathscr{A}$ は標準同型を除き一意的である。

**Definition 2.4.** 上記の定理の可換群スキーム $\mathscr{A}$ を $A_K$ の Neron モデルと呼ぶ。$\mathscr{A}$ の特殊ファイバーを $A_F := \mathscr{A} \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}} \mathrm{SpecF}$ とおく。

代数群の一般論から $A_F$ には以下のフィルトレーションがある；

$$A_F \supset A_F^0 \supset A_F^1 \supset 0.$$

ここで $A_F^0$ は $A_F$ の単位元を含む連結成分であり $A_F^1$ はアファイン可換群スキームである。商 $A_F/A_F^0$ は連結成分のなす有限群になり商 $A_F^0/A_F^1$ はアーベル多様体になる。以下の三つの場合がありうる。
(1). $A_F$ がアーベル多様体である。このとき $A_K$ はよい還元を持つという。
(2). $A_F^1$ が自明でないトーラスである。
(3). $A_F^1$ がアファイン直線の直積を含む。このとき $A_K$ は加法的な還元を持つという。(1) 或いは (2) の場合に $A_K$ は準安定還元を持つという。

有限体上の $g$ 次元のアーベル多様体 $A$ が通常であるとはエタール局所的に有限平坦群スキームの埋め込み $\mu_p^g \hookrightarrow A[p]$ が存在することをいう。

### 2.4 Serre-Tate の定理

アーベル多様体の変形はその等分点の逆系である Barsotti-Tate 群の変形を考えることと同値である、と主張する Serre-Tate の定理を紹介する。以下、[Gr], [Ka] から引き写す。[Hida2, section 8.2.2] にもこの定理の解説がある。まず Barsotti-Tate 群の定義を思い出す。$S$ をスキームとする。$S$ 上のスキームの圏から群の圏への反変関手 $G : (Sch/S)_{\mathrm{fppf}} \longrightarrow (Groups)$ で fppf 位相に関して層となるものを以下単に $S$ 上の群と呼ぶ。

**Definition 2.5.** ([Gr, Definition 4.1, 4.2]) $S$ 上の可換群 $G$ が $p$-可除であるとは、$p$ 倍写像が全射となることとする。$G_n$ を $p^n$ 倍写像の核とする。$p$-可除群 $G$ が Barsotti-Tate 群であるとは、

$$\varinjlim_n G_n = G$$

であって、 $G_1$ が局所自由な有限スキームで表現可能であることをいう。（このように定義すると各 $G_n$ も局所自由な有限スキームで表現可能となる。）

$R$ を $p^n = 0$ となる可換環とし、$I$ を $R$ の冪零イデアルとする。$R_0 := R/I$ とおく。以下の二つの圏を考える。$\mathcal{A}(R)$ を $R$ 上のアーベルスキームの圏とする。$\mathrm{Def}(R)$ を三つ組 $(A_0, G, \epsilon)$ のなす圏とする。ここで $A_0$ は $R_0$ 上のアーベルスキーム、$G$ は $R$ 上の Barsotti-Tate 群とする。$G$ の $R_0$ への底変換を $G_0$ とかくことにすると、$\epsilon$ は $R_0$ 上の Barsotti-Tate 群の同型 $\epsilon : G_0 \simeq A_0[p^\infty]$ のことである。（$A_0[p^\infty]$ はアーベルスキーム $A_0$ の $p$-冪等分点からなる Barsotti-Tate 群である。）

**定理 2.6.** *([Ka, Theorem 1.2.1])* 記号は上記の通りとする。このとき以下の関手は圏同値を誘導する。

$$\mathcal{A}(R) \longrightarrow \mathrm{Def}(R); A \mapsto (A_0, A[p^\infty], \epsilon).$$

### 2.5 Honda-Tate 理論

有限体上の単純なアーベル多様体の分類理論である Honda-Tate 理論の簡単な概略を以下に述べる。アーベル多様体が単純であるとは、非自明な真の部分アーベル多様体が存在しないことをいう。

有限体上の単純なアーベル多様体の同種類の分類を説明するために言葉を用意する。$p$ を素数とし $q = p^r$ とおく。Weil $q$ 数 $\pi$ とは、代数的数であってすべての埋め込み $\sigma : \mathbb{Q}[\pi] \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して $|\sigma(\pi)| = q^{\frac{1}{2}}$ をみたすもののことをいう。$\mathbb{Q}[\pi]$ は総実代数体或いは CM 体である。二つの Weil $q$ 数 $\pi, \pi'$ が共役であるとは、$\pi, \pi'$ が $\mathbb{Q}$ 上同じ最小多項式を持つことをいう。$\mathbb{F}_q$ 上のアーベル多様体 $A$ のフロベニウス写像を $\pi_A$ とかく。$\pi_A$ は $A$ のすべての自己準同型写像と可換なので $\mathrm{End}^0(A)$ の中心に含まれる。もし $A$ が単純ならば $\mathrm{End}^0(A)$ は斜体である。ゆえにこの場合は $\mathbb{Q}[\pi_A]$ は体となる。任意の埋め込み $\sigma : \mathbb{Q}[\pi_A] \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対し Weil 予想の発端となった Weil の定理から $|\sigma(\pi_A)| = q^{\frac{1}{2}}$ がわかる。さらに単純なアーベル多様体間の同種射 $A \longrightarrow B$ は同型 $\mathbb{Q}[\pi_A] \simeq \mathbb{Q}[\pi_B]$ を引き起こす。

**定理 2.7.** 記号は上記の通りとする。アーベル多様体 $A$ に対してフロベニウス写像 $\pi_A$ を対応させる写像は $\mathbb{F}_q$ 上の単純なアーベル多様体の同種類全体と *Weil* $q$ 数の共役類全体との間の全単射を誘導する。

全射性は本田氏による。より詳しい解説が [HT, V.2] にある。

### 2.6 尖点的保型表現

ここでは尖点的保型表現の定義を復習する。$F$ を代数体、$\mathbb{A}_F$ を $F$ のアデール環とする。このとき $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現の定義を [B] から引き写す。$\omega$ を $\mathbb{C}$ に値を取るユニタリー Hecke 指標とする。(i.e. $|\omega| = 1$.) 群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の Haar 測度を固定する。$L^2(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F), \omega)$ を以下の二条件を充たす可測関数 $f$ のなすヒルベルト空間とする。

1. 元 $z \in \mathbb{A}_F^\times$ に対して $f(zg) = \omega(z)f(g)$.
2. 元 $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$ に対して $f(\gamma g) = f(g)$.

3. $f$ は $L^2(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega)$ に属し、

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}_F} f(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g))dy = 0$$

がほとんどすべての元 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ に対して成立する。

上記三条件をみたす可測関数のなす部分空間を $L^2_0(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega)$ とかく。群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の $L^2(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega)$ への作用を元 $g, x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ に対して

$$(\rho(g)f)(x) = f(xg)$$

と定める。この作用で部分空間 $L^2_0(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega)$ は安定である。

**補題 2.8.** 空間 $L^2_0(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega)$ はヒルベルト空間として既約閉部分空間の直和成分に分解する。

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の表現が上の既約な直和成分に同型なときその表現を尖点的保型表現とよぶ。

### 2.7 保型表現に伴うガロワ表現

ここでは保型表現に伴うガロワ表現の構成に関する事実を述べる。

$F$ を総実代数体とする。$\pi$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の代数的（「代数的」の定義に関しては、[C], [Kn1], [Kn2, Chapter VII], [De] を参照。）尖点的保型表現とする。係数体を $M_\pi \subset \mathbb{C}$ とする。$\pi_\infty$ が正則であって $\pi_\infty$ の重さが $(1,..,1)$ の場合を含む幾つかの場合に関して $M$ は CM 体であり $M$ の各素点 $\lambda$ に対し $\pi$ に標準的に伴う連続既約表現

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(M_\lambda)$$

が存在する。（詳しくは [Tay3] を参照。）共役でとりかえると像が $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{M,\lambda})$ に入るようにできる。よって還元して連続な表現 $\overline{\rho}_{\pi,\lambda} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_M/\lambda)$ が考えられる。還元で得られる表現が既約になるとき、還元は共役の取り方によらず唯一つに定まる。

## 3 潜 Serre 予想、Part1[Tay1]

この節では、Hilbert-Blumental modular 多様体の局所的な有理点が存在することの証明を解説する。([Tay1])

$l$ を奇素数、$k$ を $\mathbb{F}_l$ の有限次拡大体とする。$F$ を総実体とする。以下の二条件を充たす奇な mod $l$ ガロワ表現 $\overline{\rho} : G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow GL_2(k)$ を考える。

1. $\overline{\rho}$ 可解でない像を持つ。
2. $l$ の上にある $F$ の全ての素点 $v$ に対し、分解群 $G_v$ への $\overline{\rho}$ の制限が以下の形をしている。
$$\overline{\rho}|_{G_v} \sim \begin{pmatrix} \epsilon{\chi_v}^{-1} & * \\ 0 & \chi_v \end{pmatrix}.$$

$l$ の上にある $F$ の素点 $v$ に対し $F_v$（素点 $v$ における $F$ の完備化の商体）の完全馴分岐拡大体であって、そのガロワ群への $\chi_v$ の制限が不分岐となるようなものの中で極小のものを $\widetilde{F}_v$ とかく。

以下では、指標 $\chi_v$ を大域体に値を持つ指標に持ち上げ、更に Hecke 指標としてよい性質のものを取ってこれるという補題を紹介する。そのために記号を準備する。

$\zeta$ を 1 の原始 $\sharp k^\times$ 乗根とする。$N_0 = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt{1-4l})$ とおく。$N_0$ は CM 体である。$N_0$ の最大総実部分体を $M_0$ とおく。$k$ を十分大きくとれば、$M_0$ のある有限素点で分岐しているようにできる。$l$ の上にある $N_0$ の素点 $\lambda_0$ をとり、同型 $\mathcal{O}_{N_0}/\lambda_0 \simeq k$ を固定しておく。

$l$ の上にある $F$ の各素点 $v$ に対し $\beta_v = {\zeta_v}^{b_v}(1+\sqrt{1-4l}/2)^{[k(v):\mathbb{F}_l]} \in N_0$ とおく。ただし、ここで整数 $b_v$ は $\beta_v = \chi_v(\psi_v) \bmod \lambda_0$ を充たすようにとる。ここで $\psi_v \in G_{\widetilde{F}_v}$ はフロベニウス元の持ち上げとする。以下の性質を充たす唯一の指標 $\widetilde{\chi}_v : W_{F_v} \longrightarrow N_0^\times$ を考える。ここで、$W_{F_v}$ は $F_v$ の Weil 群とする。

1. $\chi_v^2 \neq 1$ の時、$\widetilde{\chi}_v$ は $\psi_v$ を $\beta_v$ に写し、さらに惰性群上で $\widetilde{\chi}_v$ は $\chi_v$ のタイヒミュラー持ち上げに等しい。
2. $\chi_v^2 = 1$ の時、$\widetilde{\chi}_v$ は $\chi_v$ のタイヒミュラー持ち上げに等しい。

$6l$ と互いに素な素数 $p$ を以下の四条件を充たすようにとる。($(3,5)$-trick の類似で $(l,p)$-trick である。)

1. $p$ の上にある $F$ の各素点 $w$ に対し、$\overline{\rho}$ は不分岐であって、$\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_w)$ は相異なる固有値を持つ。
2. $p$ は、$N_0$ のヒルベルト類体において完全分解する。

3. $p$ は、$(\overline{F})^{\ker(\epsilon^{-1}\det\overline{\rho})}$ で完全分解する。

4. $l$ の上にある $F$ の各素点 $v$ に対し、$p$ は $\beta_v - {\beta_v}^c$ と互いに素である。（このような素数 $p$ の存在は Chebotarev の稠密性定理より容易に従う。）

$N_0$ の $p$ の上にある素点 $\wp_0$ をとる。$p$ の上にある $F$ の各素点 $w$ に対しノルムが $p$ であるような元 $\alpha'_w \in \mathbb{Z}[1+\sqrt{1-4l}/2]$ をとり $\alpha_w = \zeta^{a_w}\alpha'_w$ とおく。（このような元 $\alpha'_w$ の存在は、上の条件 2 から従う。）ただし、$a_w$ は $\alpha_w$ が mod $\lambda$ で $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_w)$ の固有値の一つと合同になるようにとる。

以下の補題は局所、大域類体論を用いて証明される。

**補題 3.1.** $p$ を素数とし、$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大の整数環とし $\mathbb{F}$ をその剰余体とする。$K$ を総実代数体とし $p$ の上にある $K$ の素点が分解するような総虚二次拡大体 $L$ を考える。$S$ を $K$ の素点の有限集合とする。$p$ の上にある $K$ の素点は全て $S$ に属し、$S$ に属する $K$ の素点は全て $L$ で分解すると仮定する。$S$ の各元に対し、その上にある $L$ の相異なる二つの素点のうち一つを選び、それらの素点からなる有限集合を $S_L$ とする。以下の二条件を充たす連続準同型 $\phi : G_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ をとる。

*1.* $\phi$ は全ての複素共役を $-1$ にうつす。

*2.* ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在し、 $\phi$ は ${\epsilon_p}^n$ と有限位数の指標の積に等しい。

さらに各 $x \in S_L$ に対して、連続準同型 $\overline{\psi}_x : G_x \longrightarrow \mathbb{F}^\times$ が与えられているとする。

このとき、$\mathcal{O}$ の商体の有限次拡大体の整数環 $\mathcal{O}'$ と以下の二条件を充たす連続準同型 $\psi : G_L \longrightarrow \mathcal{O}'^\times$ が存在する。

*1.* 全ての $x \in S_L$ に対して $\psi|_{I_{L_x}}$（$I_{L_x}$ は惰性群とする。）は像が有限であって還元すると $\overline{\psi}_x$ になる。

*2.* $\det\ \mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K}\psi = \phi$ が成立する。

上の補題から以下の条件を充たす二次拡大 $L/F$ と連続指標 $\psi : G_L \longrightarrow (\overline{N_{0,\wp}})^\times$ を取ることができる。

1. $L$ は、$F$ に原始 $p$ 乗根を添加した体には含まれない $F$ の総虚二次拡大体である。

2. $l$ の上にある $F$ の任意の素点 $v$ は、$L$ で $v_1{v_1}^c$ と分解し mod $\wp_0$ で $\psi|_{W_{L_{v_1}}} = \widetilde{\chi}_v|_{W_{L_{v_1}}}$ が成立する。

3. $p$ の上にある $F$ の任意の素点 $v$ は、$L$ で $w_1{w_1}^c$ と分解し $\psi|_{G_{w_1}}$ は不分岐であって算術的フロベニウスを $\alpha_w$ にうつす。

4. $\det \mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K}\psi = \epsilon_p$ が成立する。（最初に条件 1. を充たす様に拡大体 $L/F$ をとり $K = F, L = L, \mathcal{O} = \mathcal{O}_{N_{\wp_0}}, \psi = \epsilon_p$、$S$ を $p$ と $l$ の上にある $K = F$ の素点の全体、$\overline{\psi}_{v_1}$ としては $\widetilde{\chi}_v|_{W_{L_{v_1}}} \bmod \wp_0$ を取り、$\overline{\psi}_{w_1}$ としてはフロベニウス元を $\alpha_w$ に移す不分岐指標をとって上の補題を適用すればよい。）$\overline{\psi} : G_L \longrightarrow (\overline{\mathcal{O}_{N_0}/\wp_0})^\times$ を $\psi$ の還元とする。すると、$p$ は $\beta_v - {\beta_v}^c$ と互いに素であるようにとっていたので、$l$ の上にある $F$ の素点 $v$ について $\overline{\psi}|_{G_{v_1}} \neq \overline{\psi}^c|_{G_{v_1}}$ が成立する。

以下を充たすような CM-Galois 拡大 $N/N_0$ が存在する。

1. $l$ 上の $N_0$ の素点は、$N/N_0$ で分解する。

2. $p$ の上の $N_0$ の素点は、$N/N_0$ で不分岐である。

3. $N_0$ で分岐するような最大総実部分体の素点は $N$ の最大総実部分体 $M$ で不分岐とする。

4. $\wp_0$ の上の $N$ の素点 $\wp$ があって、$\overline{\psi}$ の像が $\mathcal{O}_N/\wp$ に含まれる。$\lambda$ を $\lambda_0$ の上にある $N$ の素点とする。

ここまでで総虚二次拡大 $L/F$、および $\bar{\rho}$ とよい関係にある（(3) の条件 2,3。）Hecke 指標 $\psi : G_L \longrightarrow (\overline{N_{0,\wp}})^\times$ を取り、値を取る代数体 $N/M$ を上手く取った。素数 $p$ は $\bar{\rho}$ がその上の各素点で不分岐になるようとっているので Hecke 指標 $\psi$ はフロベニウス元の行き先を上の条件にあるように上手くとれば $\bar{\rho}$ と結び付く。

以上の準備により、Hilbert-Blumental modular 多様体の局所体有理点の存在を主張する次の補題が紹介できる。

**補題 3.2.** *$l$ の上にある $F$ の各素点 $v$ に対して、次の三条件を充たす $F_v$ 上の M-HBAV $(A_v, i_v, j_v)$ が存在する。*

*1.* $A_v$ は潜在的によい通常還元を持つか潜在的に乗法還元を持つ。

*2.* $G_v$ 表現として、$A_v[\lambda|_M] \sim \overline{\rho}|_{G_v}$.

*3.* $G_v$ 表現として、$A_v[\wp|_M] \sim \overline{\psi}|_{G_{v_1}} \oplus \overline{\psi}^c|_{G_{v_1}}$.

*Proof.* 以下では、$\chi_v^2 \neq 1$ の場合の証明を紹介する。Honda-Tate 理論より、次の三条件を充たす $k(v)$ 上の通常かつ単純なアーベル多様体 $A_0$ が存在する。($k(v)$ は $v$ における剰余体とする。)

1. $\dim\ A_0 = [\mathbb{Q}(\beta_v) : \mathbb{Q}]/2$. ($\beta_v$ はある適当な正整数 $r$ を取ると Weil$l^r$ 数である。)

2. $i_0 : \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta_v)} \simeq \mathrm{End}(A_0/k(v))$. (ただし、この同型を通じて $\beta_v$ は $A_0$ のフロベニウス元に移る。)

3. $A_0[l](\overline{k(v)}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta_v)}$.

$A_0$ の偏極 $\mu_0 : A_0 \longrightarrow A_0^\vee$ を一つ選ぶ。$\mu_0$ に対応する Rosati 対合は $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta_v)}$ に複素共役で作用する。

$A_1 := A_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta_v)}} \mathcal{O}_N$ とおく。$A_1$ は次元が $[M : \mathbb{Q}]$ の $k(v)$ 上の通常なアーベル多様体になる。$A_1$ は $\mathcal{O}_N$ 乗法 $i_1 : \mathcal{O}_N \hookrightarrow \mathrm{End}(A_1/k(v))$ を持ち同型 $A_1[l](k(v)^{\mathrm{ac}}) \simeq \mathcal{O}_N/({\beta_v}^c)$ が成り立つ。

ペアリング

$$\mathcal{O}_N \times \mathcal{O}_N \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto \mathrm{tr}_{N/\mathbb{Q}}(ab^c)$$

と偏極 $\mu_0 : A_0 \longrightarrow A_0^\vee$ より、偏極 $\mu_1 : A_1 \longrightarrow A_1^\vee$ が誘導される。同じく $\mu_1$-Rosati 対合は、$\mathcal{O}_N$ の複素共役 $c$ を誘導する。

偏極 $\mu_1$ を基底として取ると $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_M}(A_1, {A_1}^\vee)$ と $N$ の分数イデアル $\mathfrak{a}$ との同型が得られこの同型はさらに同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_M}^{\mathrm{symm}}(A_1, {A_1}^\vee) \simeq \mathfrak{a} \cap M$ を誘導する。$\mathfrak{a} \cap M$ に総正な元達から定まる順序構造を入れると、後者の同型は両辺の順序構造と両立する。$N$ の分数イデアル $\mathfrak{b}$ について $A_1$ を $A_1/A_1[\mathfrak{b}]$ で取り替えると $\mathcal{P}(A_1, i_1)$ は、$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^c \cap M$ に取り替わる。

$N$ の強イデアル類群から $M$ のそれへのノルム写像は全射である。($M$ のヒルベルト類体は総実であるが、$N$ は総虚であるから。)よって $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^c = (\mathfrak{a} \cap M)^{-1}$ なる分数イデアル $\mathfrak{b}$ が存在するので、$(A_1, i_1|_{\mathcal{O}_M})$ は、M-HBAV $(A_1, i_1|_{\mathcal{O}_M}, j_1)$ の構造を入れることができる。よって有限体上の M-HBAV の存在がいえた。

次に上で構成した有限体上の M-HBAV を局所体上に持ち上げる。そのために Serre-Tate の定理を用いる。連続な不分岐指標 $\widetilde{\chi'}_v : G_v \longrightarrow \mathcal{O}_{N,\beta_v^c}^\times \simeq \mathcal{O}_{M,l}^\times$ を $\widetilde{\chi}_v|_{W_{\widetilde{F}_v}}$ の唯一の連続不分岐な延長とする。

Serre-Tate の定理により、三つ組 $(A_1, i_1|_{\mathcal{O}_M}, j_1)$ の $\mathcal{O}_{\widetilde{F}_v}$ への延長は、Barsotti-Tate 群としての $M_l/\mathcal{O}_{M,l}((\widetilde{\chi'}_v)^{-1})$ の $\mu_{l^\infty} \otimes \mathcal{O}_{M,l}((\widetilde{\chi'}_v)^{-1})$ による拡大によってパ

ラメトライズされる。ゆえに Barsotti-Tate 群の変形の同型類は以下のガロワコホモロジーのある部分群で分類される。

$$H^1(G_{\widetilde{F}_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2})).$$

$x \in H^1(G_{\widetilde{F}_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$ に対応する持ち上げを $(A_x, i_x, j_x)$ と書くことにする。$\sigma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)$ の持ち上げへの作用について等式$\sigma(A_x, i_x, j_x) = (A_{\sigma x}, i_{\sigma x}, j_{\sigma x})$. が成り立つ。$\gamma \in \mathcal{O}_N$ に対し $i_1(\gamma)$ が $(A_x, i_x, j_x)$ から $(A_y, i_y, j_y)$ への準同型写像にのびるための必要十分条件は $\gamma\gamma^c = 1$ かつ $\gamma^2 x = y$ が成立することである。ただし、ここで $\mathcal{O}_N$ は $\mathcal{O}_{M,l}$ に $\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_{N,\beta_v^c} \simeq \mathcal{O}_{M,l}$ という写像を通じて作用しているものとする。

以上のことから $\widetilde{F}_v$ への底変換が $(A_1, i_1, j_1)$ の $\widetilde{F}_v$ への持ち上げになっているような $F_v$ 上の三つ組 $(A, i, j)$ を与えることは、以下の組 $(\psi, x)$ をあたえることと同じになる。

1. 指標 $\psi : \mathrm{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v) \longrightarrow \mu_{l^\infty}(N)$.
2. 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)$ に対して $\sigma x = \psi(\sigma)^2 x$ を充たす元 $x \in H^1(G_{\widetilde{F}_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$.

これをさらに言い換えると $(\chi', x)$ を与えることに等しい。

1. $\chi'|_{W_{\widetilde{F}_v}} = \widetilde{\chi'}_v|_{W_{\widetilde{F}_v}}$ を充たす連続指標 $\chi' : G_v \longrightarrow \mathcal{O}_{M,l}^\times$.
2. 元 $x \in H^1(G_{\widetilde{F}_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))^{\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)} \simeq H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$.

拡大 $\overline{\rho}|_{G_v} \in H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,\lambda}/\lambda(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$ の

$$H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,\lambda}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2})) \longrightarrow H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,\lambda}/\lambda(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$$

による逆像に含まれる類 $x_\lambda \in H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,\lambda}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$ を取り、これを $\lambda$-成分に持つような類 $x \in H^1(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$ をとってくる。$H^2(G_{F_v}, \mathcal{O}_{M,l}(\epsilon(\widetilde{\chi'}_v)^{-2}))$ がゼロなので、これは可能である。$(\widetilde{\chi}_v, x)$ に対応する持ち上げ $(A_v, i_v, j_v)$ をとってくれば、これが求めるものである。（補題 3.2 の性質 3 は還元の性質と Hecke 指標 $\psi$ の取り方から自動的に従う。） $\square$

$\bar{\rho}$ に対応する $\mathcal{O}_M/\lambda$ 作用つきの可換群スキームを $V_\lambda/F$ とかく。同様に $V_\wp$ を $\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_F}\overline{\psi}$ に対応する $\mathcal{O}_M/\wp$ 作用つきの可換群スキームとする。$a_\lambda, a_\wp$ をそれぞれ $V_\lambda, V_\wp$ とそれぞれの Cartier 双対との交代的な同型とする。このとき五つ組 $(A, i, j, m_\lambda, m_\wp)$ のモジュライを考える。ただしここで $(A, i, j)$ は M-HBAV とし

$m_\lambda, m_\wp$ は同型 $m_\lambda : V_\lambda \simeq A[\lambda]$, $m_\wp : V_\wp \simeq A[\wp]$ であって $a_\lambda, a_\wp$ をそれぞれ $j(1)$-Weil ペアリングにうつすものとする。するとこのモジュライは精モジュライ $X/F$ であって（[Hida2, Section 4] に Hilbert-Blumental modular 多様体の解説がある。）（これは $\ker(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{M,\wp}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_M/\wp))$ が単位元以外の有限位数の元を含まないことによる。）平滑なることがわかる。（[Ra, Section 1] を参照。）さらに無限素点でのこのモジュライ空間の上半平面のコピー有限個の直積による一意化を考えると幾何的に連結であることがわかる。

上の補題によって $X(F_v) \neq \emptyset$ がわかる。$p$ の上にある $F$ の素点 $w$ について、上の補題に類似の性質を充たす様な $F_w$ 上の M-HBAV の存在も同様にしていえる。無限素点に関しても M-HBAV の存在を主張する必要があるがこれは省略する。Moret-Bailly の定理を適用することにより以下が見つかる。総実代数体 $E/F$ と $E$ 上の M-HBAV$(A, i, j)$ であって以下の二条件を充たすものをみつけることができる。

1. $G_E$ 表現として $A[\lambda] \sim \overline{\rho}|_{G_E}$.
2. $G_E$ 表現として $A[\wp] \sim (\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_F}\psi)|_{G_E}$.

以上のことから Theorem 1.3 が従う。これは第 1 節で説明したとおりである。

# 4 [Tay2] の解説

## 4.1 Fontaine-Laffaille 理論

Wiles が $\mathbb{Q}$ に対する MLT を証明したときには、$p$ 進 Hodge 理論の一部分である重さ 2 の 2 次元 mod $p$ 表現の局所変形を調べるために Fontaine-Laffaille 理論を用いていたが、Taylor の MLT においては重さ $k$ が一般の二次元表現に対する Fontaine-Laffaille 理論が使われる。以下では非常に簡単にこの理論の概説を試みたい。([Tay2, Notation] $k = 2$ の場合は、[DDT, section 2.5] 或いは [Sa, Fermat 予想 2 の付録 C] を参照。)

$K/\mathbb{Q}_l$ を有限次不分岐拡大、$\mathcal{O}$ を $K$ の有限次拡大体の整数環とする。$\lambda$ を $\mathcal{O}$ の極大イデアルとする。$2 \leq k \leq l-1$ とする。$\mathcal{MF}_{K,\mathcal{O},k}$ を次のようなアーベル圏とする。$\mathcal{MF}_{K,\mathcal{O},k}$ の対象は長さ有限の $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathcal{O}$ 加群 $D$ と $D$ の真の部分加群 $D^0$ および二つの $\mathrm{Frob_K} \otimes 1$-準線形な写像 $\psi_{1-k} : D \longrightarrow D$ と $\psi_0 : D^0 \longrightarrow D$ のなす四つ組 $(D, D^0, \psi_{1-k}, \psi_0)$ であって、次の条件をみたすものをこの圏の対象とする。

- $\psi_{1-k}|_{D^0} = l^{k-1}\psi_0$.

- $\mathrm{Im}\psi_{1-k} + \mathrm{Im}\psi_0 = D$.

圏は $p$ 進表現と次のように関係付けられる。$\mathcal{MF}_{K,\mathcal{O},k}$ から連続な $\mathcal{O}[G_K]$ 加群の圏への共変関手 $\mathbb{M}$ で以下の性質を持つものが標準的に存在する。この関手 $\mathbb{M}$ は、忠実充満で $\mathcal{O}$-長さを保持し完全で $\mathcal{O}$-加法的である。更に essential image が部分対象を取る操作で閉じている。

### 4.2 Hecke 環と Hecke 加群

MLT の総実代数体への一般化 ([Tay2, Section 1]) を述べるためには、どういう変形環 $R$ と Hecke 環 $T$ についてその同型を証明したかを述べなければならない。そのために Taylor の Hecke 環とそれ上の加群である四元数環上の保型形式の空間＝ Hecke 加群、の定義を紹介する。(Taylor が扱っているのは四元数環上の保型形式であるが、Jacquet-Langlands-清水対応によって Hilbert 保型形式と関係が付けられる。例えば [Hida] を参照。)

$l > 3$ を素数とし、$F$ を総実代数体、$D$ を $F$ を中心とする四元数環とし、$D$ は、丁度 $F$ の無限素点でのみ分岐していると仮定する。$\mathcal{O}_D$ を極大 order とする。以下仮定より $F$ の各有限素点 $x$ に対して、同型 $\mathcal{O}_{D,x} \simeq \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_{F,x})$ が固定し、$(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^\infty)^\times \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ と同一視する。$U = \prod_x U_x$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ の開コンパクト群とする。更に、$\psi : \mathbb{A}_F^{\infty\times}/F^\times \longrightarrow A^\times$ を連続指標とする。$\tau : U_l \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_\tau)$ を連続表現とする。ただし、$A$ は位相的 $\mathbb{Z}_l$ 代数、或いは $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大とし、$W_\tau$ は有限 $A$ 加群とする。次を仮定する。

$$\tau|_{U_l \cap \mathcal{O}_{F,l}^\times} = \psi^{-1}|_{U_l \cap \mathcal{O}_{F,l}^\times}. \tag{4.1}$$

$U(\mathbb{A}_F^\infty)^\times$ 加群として $U$ は $\tau$ を通して作用し、$(\mathbb{A}_F^\infty)^\times$ は、$\psi^{-1}$ によって作用する加群を $W_{\tau,\psi}$ とかく。以上の記号と仮定のもとで、四元数環上の保型形式の空間 $S_{\tau,\psi}(U)$ を次のような連続関数 $f : D^\times \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty) \longrightarrow W_\tau$ の成す空間として定義する。

- 全ての $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$, $u \in U$ に対し、$f(gu) = \tau(u_l)f(g)$.
- 全ての $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$, $x \in (\mathbb{A}_F^\infty)^\times$ に対し、$f(gx) = \psi^{-1}(x)f(g)$. （この定義のために仮定 (4.1) が必要である。）

もし $x \not| l$ であるか、或いは $x|l$ かつ $\tau|_{U_x} = 1$ であるならば、環 $A[U_x \setminus \mathrm{GL}_2(F_x)/U_x]$ は $S_{\tau,\psi}(U)$ に作用する。この作用は、普通通り、$U_x h U_x = \coprod_i h_i U_x$ と分解して、$([U_x h U_x]f)(g) = \Sigma_i f(gh_i)$ と作用させる。

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ の特別な開コンパクト部分群を定義する。$U_0 = \prod_x \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,x})$ とする。$\mathfrak{n}$ を $\mathcal{O}_F$ のイデアルとし、$\mathfrak{n}$ を割る各素点 $x$ に対して、$H_x$ を $(\mathcal{O}_{F,x}/\mathfrak{n}_x)^\times$ の商が与えられているとする。$H$ を $\prod_{x|\mathfrak{n}} H_x$ とし、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ の開コンパクト部分群 $U_H(\mathfrak{n}) = \prod_x U_H(\mathfrak{n})_x$ とおく。ここで、$U_H(\mathfrak{n})_x$ は次の元達からなる $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,x})$ の開部分群とする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$c$ は $\mathfrak{n}_x$ の元であり、 $H_x$ にうつすと等式 $ad^{-1} = 1$ をみたす。

次に Hecke 環を紹介する。$l$ をわらない $F$ の各素点 $x$ に対し、Hecke 作用素 $T_x$ を

$$\left[ U_H(\mathfrak{n}) \begin{pmatrix} \varpi_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_H(\mathfrak{n}) \right]$$

と定め、Hecke 作用素 $S_x$ を

$$\left[ U_H(\mathfrak{n}) \begin{pmatrix} \varpi_x & 0 \\ 0 & \varpi_x \end{pmatrix} U_H(\mathfrak{n}) \right]$$

と定める。$\mathfrak{n}$ をわる $F$ の各素点 $x$ に対し、$x \nmid l$ 或いは $x|l$ かつ $\tau|_{U_x} = 1$ となるならば、

$$\mathbf{U}_{\varpi_x} = \left[ U_H(\mathfrak{n}) \begin{pmatrix} \varpi_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_H(\mathfrak{n}) \right]$$

とおく。このとき、$T_x (x \nmid l\mathfrak{n}\,)$ と $\mathbf{U}_{\varpi_x}$ $(x|\mathfrak{n}$ かつ $x \nmid l)$ で生成される $\mathrm{End}_A(S_{\tau,\psi}(U_H(\mathfrak{n})))$ の $A$ 部分代数を $h_{\tau,A,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ と書き、これを Hecke 環と呼ぶ。$h_{\tau,A,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ の極大イデアルが、$F$ のある有限次アーベル拡大において完全分解する高々有限個の素点以外の $F$ の素点 $x$ に対し $T_x - 2$ と $S_x - 1$ を含むとき、これを Eisenstein ideal と呼ぶ。

後で重要となる特別な $U_0$ の表現 $\tau$ を定義する。$h \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし、$\mathrm{Symm}^{k-2}(A^2)$ を $k-2$ 次数の $A$ 上の二変数 $X, Y$ の斉次多項式のなす空間とし、$\mathrm{GL}_2(A)$ を以下で作用させる。

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right) (X,Y) = f \left( (X,Y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \right) = f(aX + cY, bX + dY).$$

すべての埋め込み $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ の像を含むようなある拡大 $L/\mathbb{Q}_l$ をとり、$A$ を $L$ の整数環 $\mathcal{O}_L$ 上の代数とする。$(\vec{k}, \vec{w}) \in \mathbb{Z}_{>1}^{\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbb{Q}}_l)} \times \mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbb{Q}}_l)}$ を任意の $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ について $k_\sigma + 2w_\sigma$ が一定になるように取ってくる。$\tau_{(\vec{k},\vec{w}),A}$ を次のような $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,l})$ の $W_{(\vec{k},\vec{w})} = \bigotimes_{\sigma: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l} \mathrm{Symm}^{k_\sigma - 2}(A^2)$ 上の表現とする。

$$g \mapsto \otimes_{\sigma: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l} (\mathrm{Symm}^{k_\sigma - 2}(\sigma g) \otimes \det{}^{w_\sigma}(\sigma g)).$$

このときの $S_{\tau_{(\vec{k},\vec{w}),A},\psi}(U)$ を $S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U)$ と以下では書くこととする。更にこれの部分空間 $S^{\mathrm{triv}}_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U)$ を次のように定める。もし $(\vec{k},\vec{w}) \neq ((2,..,2),(w,....,w))$ ならば、$S^{\mathrm{triv}}_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U)=(0)$ とし、$(\vec{k},\vec{w})=((2,..,2),(w,....,w))$ ならば被約ノルムを経由するような関数達からなる部分空間として $S^{\mathrm{triv}}_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U)$ を定める。次に

$$S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)=\lim_{\to U_l} S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U^l\times U_l)$$

とおくと、$S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)=\lim_{\to U_l} S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U^l\times U_l)$ は右からの作用で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^{\infty,l})$ の平滑な作用を持つ。$(\vec{k},\vec{w})=((k,...,k),(0,...,0))$ のときには、$(\vec{k},\vec{w})$ の代わりに単に $k$ とかく。$\psi:\mathbb{A}_F^\times/F^\times \longrightarrow (\overline{\mathbb{Q}}_l)^\times$ を、$F_l^\times$ の空でない開部分群の元 $a$ について、$\psi(a)=(\mathbf{N}a)^{1-w}$ をみたす指標とする。同型 $i:\overline{\mathbb{Q}}_l\simeq\mathbb{C}$ を選ぶと Jacquet-Langlands の結果から、$S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^{\infty,l})$ の半単純な許容表現となり、$S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)^{U^l}=S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U^l\times U_l)$ もわかる。更に再び Jacquet-Langlands の結果から、次の分解が存在する。

$$S_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)/S^{\mathrm{triv}}_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_l)\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l,i}\mathbb{C}\simeq\bigoplus_\pi \pi^{\infty,l}\otimes {\pi_l}^{U_l}$$

ここで、$\pi$ は、$\pi_\infty$ が重さ $(\vec{k},\vec{w})$ であって、$\pi$ が中心指標 $\psi_\infty$ を持つような $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の正則代数的尖点的保型表現を走る。

次にペアリングを定義する。（これはピーターソン内積である。）

$$\mathrm{Symm}^{k-2}(A^2)\times\mathrm{Symm}^{k-2}(A^2)\longrightarrow A$$

を

$$(f_1,f_2)=f_1(\partial/\partial Y,-\partial/\partial X)f_2(X,Y)|_{X=Y=0}$$

で定める。$2\le k\le l-1$ ならこのペアリングは完全である。このペアリングは完全なペアリング

$$W_{(\vec{k},\vec{w}),A}\times W_{(\vec{k},\vec{w}),A}\longrightarrow A$$

に延びる。これを用いて、$S_{k,A,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ 上に以下の式でペアリングを定義する。

$$(f_1,f_2)=\Sigma_{[x]}(f_1(x),f_2(x))\psi(\mathrm{det}x)^{-1}(\sharp(U_H(\mathfrak{n})(\mathbb{A}_F^\infty)^\times\cap x^{-1}D^\times x/F^\times))^{-1}.$$

右の括弧 $(,)$ は、$W_{(\vec{k},\vec{w}),A}$ 上のペアリングである。$[x]$ は、$D^\times\backslash(D\otimes\mathbb{A}^\infty)^\times/U_H(\mathfrak{n})(\mathbb{A}_F^\infty)^\times$ 上を走る。($(\sharp U_H(\mathfrak{n})(\mathbb{A}_F^\infty)^\times\cap x^{-1}D^\times x/F^\times)^{-1}$ が $l$ で割れない事実を使っているが、ここで $l\neq 3$ の仮定が必要になる。)

以下では、$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大の整数環として、特に $A=\mathcal{O}$ の場合を考える。この場合には $h_{(\vec{k},\vec{w}),A,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ を単に、$h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ とかく。

このとき、[Tay3] の主定理により、次をみたすガロワ表現

$$\rho : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n})) \otimes_{\mathcal{O}} \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

が存在する。

1. $x \nmid \mathfrak{n}l$ ならば、$\rho$ は $x$ で不分岐であって、$\mathrm{tr}\rho(\mathrm{Frob}_x) = T_x$.
2. $\det\rho = \varepsilon(\psi \circ \mathrm{Art}^{-1})$.

更に擬表現の理論から、もし $\mathfrak{m}$ が、$h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ の non-Eisenstein maximal ideal とすると、上の $\rho$ は次の以下の二条件をみたすガロワ表現を誘導する。

$$\rho_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m}})$$

1. もし $x \nmid \mathfrak{n}l$ ならば、$\rho_{\mathfrak{m}}$ は $x$ で不分岐であって、$\mathrm{tr}\rho_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_x) = T_x$.
2. $\det\rho_{\mathfrak{m}} = \varepsilon(\psi \circ \mathrm{Art}^{-1})$.

Fontaine-Laffille 理論とガロワ表現 $\rho_{\mathfrak{m}}$ の構成から次の事実が成り立つ。

**補題 4.1.** *([Tay2, Lemma 1.4])* $x \nmid \mathfrak{n}$ *を* $l$ *の上にある* $F$ *の分解する素点とし,* $2 \leq k_x \leq l-1$ *と仮定する。*$\mathfrak{m}$ *を* $h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ *の non-Eisenstein maximal ideal とし、*$I$ *を* $h_{(\vec{k},\vec{w}),\psi}(U_H(\mathfrak{n}))$ *の開イデアルとする。このとき、*$(\rho_{\mathfrak{m}} \otimes \varepsilon^{-w_x}) \bmod I|_{G_x}$ *は、ある* $D \in \mathcal{MF}_{F_x,\mathcal{O},k_x}$ *があって、*$\mathbb{M}(D)$ *という形をしている。*

最後に $GL_2$ の既約許容表現の分類の結果（[Tay2, Lemma 1.6]）から, 次のことがわかる。（[Tay2, Corollary 1.8]）

1. もし $x \nmid l$ で $x(\mathfrak{n}) = 2$, $H_x = \{1\}$、更に $\mathbf{U}_{\varpi_x} \in \mathfrak{m}$ ならば、$h_{k,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m}}$ で $\mathbf{U}_{\varpi_x} = 0$ が成立。
2. もし、$l$ が $\mathfrak{n}$ と互いに素で、$x|\mathfrak{n}$ なるすべての $x$ について $x(\mathfrak{n}) = 2$、更に $H_x = \{1\}$ で、$\mathbf{U}_{\varpi_x} \in \mathfrak{m}$ と仮定すると、Hecke 環 $h_{k,\psi}(U_H(\mathfrak{n}))_{\mathfrak{m}}$ は被約である。この環が Taylor の MLT に用いられる Hecke 環と Hecke 加群である。

### 4.3 変形環

次に変形環の定義を述べよう。$F$ を偶数次数の総代数体、$l > 3$ を素数とし、$F$ で完全分解しているとする。$D$ は、quaternion algebra で、丁度無限素点でのみ

分岐しているとする。$2 \le k \le l-1$ とする。$F$ の各素点 $x$ に対し素元 $\varpi_x \in \mathcal{O}_{F,x}$ を選んでおく。

Hecke 指標 $\psi : \mathbb{A}_F^\times / F^\times \longrightarrow (\overline{\mathbb{Q}_l})^\times$ は以下の三条件をみたすとする。

1. $x \not| l$ を $F$ の素点とすると、$\psi|_{\mathcal{O}_{F,x}^\times} = 1.$
2. $\psi|_{\mathcal{O}_{F,l}^\times} = (\mathbf{N}u)^{2-k}.$
3. $\varepsilon(\psi \circ \mathrm{Art})$ の還元は、$\det \overline{\rho_\phi}.$

$\phi : h_{k,\mathbb{F}^{\mathrm{ac}},\psi}(U_0) \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{ac}}$ を核が non-Eisenstein であるような、環準同型として、その核を $\mathfrak{m}$ とかく。$\mathcal{O}$ を次の四条件をみたす有限次拡大 $K/\mathbb{Q}_l$ の整数環とする。

1. $K$ は全ての埋め込み $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ の像を含む。
2. $\psi$ は、$\mathcal{O}$ に値を持つ。
3. $\widetilde{\phi} : h_{k,\mathcal{O},\psi}(U_0)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}$ が存在する。
4. $\overline{\rho}_\phi$ の像に含まれる全ての元の固有値は、$\mathcal{O}/\lambda$ 上有理的である。

$F$ の $l$ を割らない有限素点の有限集合 $\Sigma$ に対して、以下のような剰余体が $\mathcal{O}/\lambda$ であるような完備ネーター局所 $\mathcal{O}$ 代数の圏から集合への関手 $\mathcal{D}_\Sigma$ を考える。$\mathcal{D}_\Sigma$ は、完備ネーター局所 $\mathcal{O}$ 代数 $R$ に対して、$\overline{\rho}_\phi$ の持ち上げ $\rho : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R)$ で以下の三条件をみたすものの $1_2 + \mathrm{M}_2(\mathfrak{m}_R)$ 共役類の集合を対応させる関手とする。

1. $\rho$、$l, \Sigma$ の外で不分岐である。
2. $\det\rho = \varepsilon(\psi \circ \mathrm{Art}^{-1}).$
3. $l$ の上にある $F$ の各素点 $x$ と、$\mathcal{O}$ 加群として有限長さの商 $R/I$ に対し、$\mathcal{O}[G_x]$ 加群 $(R/I)^2$ はある $D \in \mathcal{MF}_{F_x,\mathcal{O},k}$ があって $\mathbb{M}(D)$ と同型である。

この関手は、表現可能である。その普遍元を

$$\rho_\Sigma : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R_\Sigma)$$

とかく。（これについては、[CDT, appendix] を参照。）

### 4.4 Taylor の R=T, 極小の場合

この章では、極小の場合 ($\Sigma = \emptyset$) の $R = T$ 定理を述べ、これについての証明の概略を記述したい。$R = T$ 定理については、[Sa],[Ito] に日本語の解説がある。また本報告集第一巻にも詳しい解説 [Ya1],[Ya2] がある。以下では、幾つかの記号を導入し、定理の主張を述べる。$\Sigma$ を, $l$ を割らない $F$ の有限素点で以下の二性質をみたすものの有限集合とする。

1. $\mathbf{N}x \equiv 1 \bmod l$.
2. $\overline{\rho}_\psi$ は、$x$ で不分岐であって、$\overline{\rho}_\psi(\mathrm{Frob}_x)$ は相異なる固有値 $\alpha_x$, $\beta_x$ を持つ。

$x \in \Sigma$ に対し、$(\mathcal{O}_F/x)^\times$ の最大 $l$ べき商を $\Delta_x$ とし、以下のような記号を導入しておく。$\mathfrak{n}_\Sigma = \prod_{x\in\Sigma} x$, $\Delta_\Sigma = \prod_{x\in\Sigma} \Delta_x$, $U_{0,\Sigma} = U_{\{1\}}(\mathfrak{n}_\Sigma)$, $U_{1,\Sigma} = U_{\Delta_\Sigma}(U_{1,\Sigma})$ とおく。$\mathfrak{m}_\sigma$ を、環 $h_{k,\psi}(U_{0,\Sigma})$ 或いは、$h_{k,\psi}(U_{1,\Sigma})$ の次の元達で生成されるイデアルとする。

1. $l$,
2. $x \not| l\mathfrak{n}_\Sigma$ に対して $T_x - \mathrm{tr}\overline{\rho}_\phi(\mathrm{Frob}_x)$,
3. $x \in \Sigma$ に対して $\mathbf{U}_{\varpi_x} - \alpha_x$.

**定理 4.2.** *([Tay2, Theorem 2.6])* $\overline{\rho}_\phi$ は、$F(\sqrt{(-1)^{(l-1)/2}l})$ の絶対ガロワ群に制限すると既約であると仮定する。このとき、自然な写像

$$R_\emptyset \longrightarrow h_{k,\psi}(U_0)_\mathfrak{m}$$

は、完備交叉な環の同型である。更に $S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_0)_\mathfrak{m}$ は、自由 $h_{k,\psi}(U_0)_\mathfrak{m}$ 加群である。

以下では、この定理の証明を解説していくが、ここで用いられる道具や $\mathbb{Q}$ の場合の MLT の証明については、[DDT] や [Sa] に大変詳しい解説があり、かなりの議論が、$\mathbb{Q}$ の場合の MLT の証明の議論と重複しているので、そちらのほうも参照されることをお勧めする。よってここでは、大雑把に概説するに止める。

まず、次の補題により、変形環を群環上の代数だと思える。ここの証明は、[DDT, lemma 2.44] 或いは、[Sa, 10.4 変形環と群環] に詳しい。

**補題 4.3.** *([Tay2, Lemma 2.1])* $\Sigma$ は、上で仮定したような素数の有限集合とする。このとき以下が成り立つ。

- $x \in \Sigma$ に対し、$\rho_\Sigma|_{G_x} \sim \chi_{\alpha,x} \oplus \chi_{\beta,x}$. ここで、$\chi_{\alpha,x} \bmod \mathfrak{m}_{R_\Sigma}$ は、不分岐で、$\mathrm{Frob}_x$ を $\alpha_x$ にうつす。

- $\chi_{\alpha,x} \circ \mathrm{Art}|_{\mathcal{O}_{F,x}^\times}$ は、$\Delta_x$ を経由する。これによって、$R_\Sigma$ は、群環 $\mathcal{O}[\Delta_\Sigma]$ 上の加群として見なせる。

- $R_\Sigma$ の普遍性と上で見た充 *Hecke* 環上に構成したガロワ表現の性質から、$\mathcal{O}[\Delta_\Sigma]$ 上の代数の全射

$$R_\Sigma \longrightarrow h_{k,\psi}(U_{1,\Sigma})_{\mathfrak{m}_\Sigma}$$

を得る。

以下では、変形環と Selmer 群の関係を述べる。これについても [Sa],[DDT] に詳しい説明がある。$\rho : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\lambda^n)$ を、$\overline{\rho}_\phi$ の持ち上げとする。$x$ は、$l$ の上にある $F$ の素点とし、$(\mathcal{O}/\lambda^n)^2 \simeq \mathbb{M}(D)$ とする。

$$H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\rho) = H^1(G_x, \mathrm{ad}^0\rho) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}_{F_x,\mathcal{O}/\lambda^n,k}}(D,D) \longrightarrow H^1(G_x, \mathrm{ad}\rho))$$

[DDT, section 2.5] と全く同じように、Fontaine-Laffille 理論から次が成り立つ。

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}_{F_x,\mathcal{O}/\lambda^n,k}}(D,D) \longrightarrow H^1(G_x, \mathrm{ad}\rho)) \simeq (\mathcal{O}/\lambda^n)^2 \oplus H^0(G_x, \mathrm{ad}^0\rho).$$

合成

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}_{F_x,\mathcal{O}/\lambda^n,k}}(D,D) \longrightarrow H^1(G_x, \mathrm{ad}\rho) \longrightarrow H^1(G_x, \mathcal{O}/\lambda^n)$$

の像は少なくとも一次元はある。ただし、最後の写像は、跡写像 $\mathrm{ad}\rho \longrightarrow \mathcal{O}/\lambda^n$ から誘導される。よって、次がわかる。

$$\sharp H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\rho) | \sharp(\mathcal{O}/\lambda^n) \sharp H^0(G_x, \mathrm{ad}^0\rho).$$

次のような Selmer 群を定義する。

$$H^1_\Sigma(G_F, \mathrm{ad}^0\rho) = \mathrm{Ker}\Big(H^1(G_F, \mathrm{ad}^0\rho) \longrightarrow \bigoplus_{x \nmid l\mathfrak{n}_\Sigma} H^1(I_x, \mathrm{ad}^0\rho) \oplus \bigoplus_{x|l} H^1(G_x, \mathrm{ad}^0\rho)/H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\rho)\Big).$$

ペアリング $(a,b) \mapsto \mathrm{tr}ab$ は、$\mathrm{ad}^0\rho$ 上に完全な双対を誘導する。$x|l$ に対して、Tate 双対の下での $H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi)$ の annihilator を $H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1)) \subset H^1(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$ と書く。更に、双対 Selmer 群 $H^1_\Sigma(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$ を、$H^1(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$ から

$$\bigoplus_{x \nmid l\mathfrak{n}_\Sigma} H^1(I_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1)) \oplus \bigoplus_{x \in \Sigma} H^1(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1)) \oplus \bigoplus_{x|l} H^1(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))/H^1_f(G_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$$

への制限写像の核として定義する。すると定義により、

$$H^1_\Sigma(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1)) = \mathrm{Ker}\Big(H^1_\emptyset(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1)) \longrightarrow \bigoplus_{x\in\Sigma} H^1(G_x/I_x, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))\Big)$$

となる。標準的な計算により、（[Sa, 命題 11.36] 或いは [DDT, Lemma 2.39] を参照。）次のような変形環と Selmer 群の関係が成立する。

$$H^1_\Sigma(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_{R_\Sigma}/\mathfrak{m}^2_{R_\Sigma}, \mathcal{O}/\lambda).$$

上の同型と Wiles の公式（[DDT, Theorem 2.19] 或いは、[Sa, 命題 11.33] を参照。）によって、(この公式は、Selmer 群と双対 Selmer 群の位数の関係を表す公式) 変形環 $R_\Sigma$ は $\mathcal{O}$ 代数として位相的に

$$\sharp\Sigma + \dim H^1_\Sigma(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$$

個の元で生成される。（[DDT, Lemma 2.46(b)] を参照。）次の Cebotarev density theorem の応用は極小の場合の $R = T$ において、核心的な役割を果たす。（[Sa, 定理 5.32 と定理 11.37] を参照。）

**補題 4.4.** *([Tay2, Lemma 2.5])* $\overline{\rho}_\phi$ の $F(\sqrt{(-1)^{(l-1)/2}l})$ への制限は、既約であるとする。任意の整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、以下の三条件をみたす素数の有限集合 $\Sigma_m$ が存在する。

1. $\sharp\Sigma_m = \dim H^1_\emptyset(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$.
2. 変形環 $R_{\Sigma_m}$ は、$\mathcal{O}$ 代数として、位相的に $\dim H^1_\emptyset(G_F, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}_\phi(1))$ 個の元で生成される。
3. $x \in \Sigma_m$ ならば、$\mathbf{N}x \equiv 1 \bmod l^m$ かつ $\overline{\rho}_\phi(\mathrm{Frob}_x)$ の固有値 $\alpha_x, \beta_x$ は相異なる。

この補題と、Hecke 加群の群環上の自由性（ここは大幅に省いてしまった。[Tay2, Corollary 2.4] を見られたい。）と Diamond による Taylor-Wiles 系の改良（[D, Theorem 2.1]）によって、極小の場合の $R = T$ が示せる。

### 4.5 Taylor の R=T, $\Sigma = \emptyset$ とは限らない場合

この節では、Taylor の $R = T$ 定理の $\Sigma = \emptyset$ とは限らない場合の証明を紹介したい。これは、$F = \mathbb{Q}$ の場合の証明と類似的なので、$\mathbb{Q}$ の場合の証明と対比しながら話を進めていきたいと思う。筆者の理解不足で、modular form 絡みの計算

は理解できなかったので、流れを概説することしかできないがご容赦頂きたい。$\mathbb{Q}$ の場合同様、$\Sigma$ についての帰納法で示す。ここも再び Diamond([D]) の改良の結果を使う。Diamond による変形環の完備交叉性と Hecke 加群の変形環上の自由性に関する数値的判定法を使う。以下の議論については、[Sa, 第 5 章 R=T] が参考になる。

記法などは、前節と同じとする。$\rho_{\tilde{\phi}} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ を $\overline{\rho}_\phi$ の $\mathcal{O}$ への持ち上げとする。すると、変形環 $R_\Sigma$ の普遍性より、次の環準同型が得られる。

$$R_\Sigma \longrightarrow R_\emptyset \longrightarrow \mathcal{O}.$$

この合成写像の核を $\wp_\Sigma$ とかく。すると標準的な計算で、([DDT, theorem 2.41(c)] 或いは [Sa, 命題 11.36.2] を参照。)次がわかる。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\wp_\Sigma/\wp_\Sigma^2, K/\mathcal{O}) \simeq H^1_\Sigma(G_F, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes K/\mathcal{O}).$$

ただし、ここで、右辺は、

$$\lim_{\rightarrow n} H^1_\Sigma(G_F, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes \lambda^{-n}/\mathcal{O})$$

とする。このことより、

$$\sharp\mathrm{Ker}\big(\wp_\Sigma/\wp_\Sigma^2 \longrightarrow \wp_\emptyset/\wp_\emptyset^2\big) = \sharp\big(H^1_\Sigma(G_F, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes K/\mathcal{O})/H^1_\emptyset(G_F, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes K/\mathcal{O})\big)$$

は、

$$\begin{aligned}\prod_{x\in\Sigma} \sharp H^1(I_x, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes K/\mathcal{O}) &= \prod_{x\in\Sigma} \sharp H^0(G_x, (\mathrm{ad}^0\rho) \otimes K/\mathcal{O}(-1)) \\ = \prod_{x\in\Sigma} \sharp\mathcal{O}/(1-\mathbf{N}x)&((1+\mathbf{N}x)^2\mathrm{det}\rho(\mathrm{Frob}_x) - (\mathbf{N}x)(\mathrm{tr}\rho(\mathrm{Frob}_x)))\mathcal{O}\end{aligned}$$

を割る。(ここでは、局所条件に包関係がある場合の二つの Selmer 群の位数についての関係を計算する公式が使われている。$\mathbb{Q}$ の場合は [Sa, 命題 11.32] を参照。)

記号を導入する。$\Sigma$ における素イデアルの二乗の積を $\mathfrak{n}'_\Sigma$ とし、$U_\Sigma = U_{\{1\}}(\mathfrak{n}'_\Sigma)$ とおく。更に、$h_\Sigma = h_{k.\psi}(U_\Sigma)_{\mathfrak{m}'_\Sigma}$, $S_\Sigma = S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_\Sigma)_{\mathfrak{m}'_\Sigma}$ とする。ただし、$\mathfrak{m}'_\Sigma$ は以下の元で生成される極大イデアルとする。

1. $\lambda$.
2. $x \not| l\mathfrak{n}'_\Sigma$ に対して $T_x - \mathrm{tr}\overline{\rho}_\phi(\mathrm{Frob}_x)$.
3. $x \in \Sigma$ に対して $\mathbf{U}_{\varpi_x}$.

すると、ガロワ表現 $\rho_{\mathfrak{m}'_\Sigma}$ は全射環準同型写像 $R_\Sigma \longrightarrow h_\Sigma$ を誘導する。$h_\Sigma$ が被約であることがわかる。更に強重複度1定理より $\dim(S_\Sigma \otimes_{\mathcal{O}} K)[\wp_\Sigma] = 1$ がわかる。

$\Omega_\Sigma = S_\Sigma/(S_\Sigma[\wp_\Sigma] \oplus S[\mathrm{Ann}_{h_\Sigma}(\wp_\Sigma h_\Sigma)])$ とおく。すると、極小の場合の $R = T$ と、Diamond の数値判定法（[D, Theorem 2.4]）から以下がわかる。

$$\sharp\Omega_\emptyset = \sharp\wp_\emptyset/\wp_\emptyset^2.$$

$w_\Sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F^\infty)$ を $x \notin \Sigma$ なら $w_{\Sigma,x} = 1$, $x \in \Sigma$ なら

$$w_{\Sigma,x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める。$S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_\Sigma)$ 上に新しい完全なペアリング $(,)'$ を以下のように定義する。

$$(f_1, f_2)' = (\prod_{x\in\Sigma} \psi(\varpi_x))^{-1}(f_1, w_\Sigma f_2).$$

$h_{k,\Sigma}(U_\Sigma)$ の任意の元はこのペアリングに対して自己随伴的に作用するので、$S_\Sigma$ 上に完全なペアリングを誘導する。（$F = \mathbb{Q}$ の場合には、Hecke 加群は、モジュラー曲線の特異ホモロジーを用いて定義していたので、ポアンカレ双対と Atkin-Lehner 対合を組み合わせてこのような完全なペアリングを作ったのであった。）$S_\Sigma[\wp_\Sigma]$ 上の完全な $\mathcal{O}$ 双線形なペアリングを選んでおく。自然な包含写像

$$j_\Sigma : S_\Sigma[\wp_\Sigma] \hookrightarrow S_\Sigma$$

の $S_\Sigma$ 上のペアリング $(,)'$ と選んだ $S_\Sigma[\wp_\Sigma]$ 上の完全な $\mathcal{O}$ 双線形なペアリングに関する随伴写像を $j_\Sigma^\dagger$ と定める。このとき次が成立。

$$j_\Sigma^\dagger : \Omega_\Sigma \simeq S_\Sigma[\wp_\Sigma]/j_\Sigma^\dagger S_\Sigma[\wp_\Sigma].$$

$x \nmid l\mathfrak{n}'_\Sigma$ に対して、

$$i_x : S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_\Sigma) \longrightarrow S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_{\Sigma\cup\{x\}})$$

以下のように定める。

$$i_x(f) = (\mathbf{N}x)\psi(\varpi_x)f - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_x \end{pmatrix} T_x f + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_x^2 \end{pmatrix} f.$$

（$F = \mathbb{Q}$ のときには、レベルの異なるモジュラー曲線の間の有限写像を組み合わせて幾何的に構成した。[Sa, 補題 10.9] を参照。）$S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_\Sigma)$ と $S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_{\Sigma\cup\{x\}})$ 上の各ペアリング $(,)'$ に関する $i_x$ の自己随伴写像を $i_x^\dagger$ とすると、簡単な計算によって、倍率が $i_x^\dagger \circ i_x = \psi(\varpi_x)(\mathbf{N}x)(1 - \mathbf{N}x)({T_x}^2 - (1 + \mathbf{N}x)^2\psi(\varpi_x))$ と計算される。（$F = \mathbb{Q}$ の場合の倍率の計算は [Sa, 命題 5.33 と命題 10.14] を参照。）以下の補題は伊原の補題と呼ばれる。これの証明も省略する。

**補題 4.5.** *([Tay2, Lemma 3.1])*
$S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_{\Sigma\cup\{x\}})/i_x S_{k,\mathcal{O},\psi}(U_\Sigma)$ は、$l$-捻れがない。

この補題により、直ちに $S_{\Sigma\cup\{x\}}[\wp_{\Sigma\cup\{x\}}] = i_x S_\Sigma[\wp_\Sigma]$ が従う。このようにして、以下のことがわかる。

$$\begin{aligned}\Omega_{\Sigma\cup\{x\}} &\simeq S_\Sigma[\wp_\Sigma]/j_\Sigma^\dagger i_x^\dagger S_{\Sigma\cup\{x\}}[\wp_{\Sigma\cup\{x\}}]\\ &\simeq S_\Sigma[\wp_\Sigma]/j_\Sigma^\dagger(\mathbf{N}x)(1-\mathbf{N}x)({T_x}^2-(1+\mathbf{N}x)^2\psi(\varpi_x))S_\Sigma[\wp_\Sigma].\end{aligned}$$

よって、以下が成立する。

$$\sharp\Omega_{\Sigma\cup\{x\}} = \sharp\Omega_\Sigma\mathcal{O}/\sharp(1-\mathbf{N}x)((\mathbf{N}x)\mathrm{tr}\rho(\mathrm{Frob}_x)^2-(1+\mathbf{N}x)^2\mathrm{det}\rho(\mathrm{Frob}_x)).$$

全ての $\Sigma$ について

$$\sharp(\wp_\Sigma/\wp_\Sigma^2)|\sharp\Omega_\Sigma$$

がわかる。再び Diamond の数値判定法から、Hecke 加群 $S_\Sigma$ が、変形環上自由で、変形環が完備交叉であることがわかり、$R=T$ が従う。([Sa, 命題 5.28] を参照。) 即ち、以下の事が示された。

**定理 4.6.** *([Tay2, Theorem 3.2])*
$\overline{\rho}_\phi$ が、$F(\sqrt{(-1)^{(l-1)/2}l})$ の絶対ガロワ群に制限しても既約であると仮定する。$\Sigma$ を、$l$ を割らない $F$ の有限素点の有限集合とする。このとき以下の自然な写像は、同型。

$$R_\Sigma \longrightarrow h_\Sigma.$$

更に、これらの環が完備交叉であり、$S_\Sigma$ が、$h_\Sigma$ 上自 $R$ 加群であることが従う。

この定理の応用として MLT が従う。

**定理 4.7.** *([Tay2, Theorem 3.3])*
$l>3$ を素数とし、$2\le k\le l-1$ を整数とする。$F$ は偶数次数の総実代数体とし、$l$ は完全分解するとする。$\rho: G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_l})$ を高々有限個の素点を除いて不分岐な既約連続表現とする。更に、$F$ の $l$ の上にある素点 $x$ について、$\rho|_{G_x}$ は *crystalline* で、*Hodge-Tate* 数が $0$ と $1-k$ とする。$\overline{\rho}$ を $\rho$ の還元とし、$\overline{\rho}$ の $F(\sqrt{(-1)^{(l-1)/2}l})$ の絶対ガロワ群への制限は既約であり、ある正則代数的尖点的保型表現 $\phi$ と埋め込み $\lambda: M_\phi \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ が存在して、以下をみたすと仮定する。
*1.* $\overline{\rho}_{\phi,\lambda}\sim\overline{\rho}$.
*2.* $\phi_x$ は、全ての $F$ の素点で不分岐である。
*3.* $\phi_\infty$ は、重さが $k$ である。

このとき、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ のある正則代数的尖点的保型表現 $\phi'$ と埋込み $\lambda': M_{\phi'}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_l$ があって、$\rho\sim\rho_{\phi',\lambda'}$ が成り立つ。更に $\phi'_\infty$ は、重さが $k$ である。

### 4.6 潜 Serre 予想, Part2[Tay2]

この章では、Section 1で概説したSerre予想に対する結果（定理 1.3）の変種について述べる。第一章と証明のアイデアは基本的には同じだが、ここではレベル構造付きの Hilbert-Blumental アーベル多様体のモジュライ空間ををガロワ作用で twist した二種類の $\mathbb{Q}$ 上の多様体 $X_{Dih}$ と $X_{\overline{\rho}}$ を導入する。（レベル構造にガロワ作用を込めて考えたモジュライ空間と言ったほうが適当かもしれない。）$X_{Dih}$ の方は上手く取った Hecke 指標の情報を含むモジュライ空間であり $X_{\overline{\rho}}$ は与えられた二次元ガロワ表現の情報を含むモジュライ空間となっている。$X_{Dih}$ はCM理論を用いると比較的容易に $\mathbb{Q}$ 有理点の存在がわかる。この二つの多様体は幾つかの適当な局所体上に底変換すると同型になり、$X_{Dih}$ の $\mathbb{Q}$ 有理点の存在から $X_{\overline{\rho}}$ の局所体有理点の存在がいえる。すると、Moret-Bailly の定理から $X_{\overline{\rho}}$ の総実代数体有理点の存在がわかる。その点に対応するアーベル多様体が欲しかったものになっており知りたかった潜保型性がわかるという寸法である。[Tay2] では [Tay1, Theorem B] の証明でつかわれた $(p, l)$-trick を更に強化した $(p_1, p_2, l)$-trick とでもいうべき新しい技術が用いられる。

$X_{Dih}$ と $X_{\overline{\rho}}$ の定義と乗法の役目を担う総実代数体をどのようにとってくればよいか、また $l$ と異なる素数をどう取ってくるか、について述べたい。ここで使われている技術をわかりやすく解説すべきであると思われるが筆者の力不足で原論文の引き写しになってしまったことをお詫びしたい。

まず定理を述べる。

**定理 4.8.** *([Tay2, Proposition 4.1])* $l > 2$ を素数とする。$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_l)$ を奇な連続表現とする。ある整数 $2 \leq k \leq l$ があって、$\overline{\rho}|_{I_x} \sim \omega_2^{k-1} \oplus \omega_2^{l(k-1)}$ と仮定する。このとき、$l$ が完全分解するような偶数次数の総実代数体 $F$ と $GL_2(\mathbb{A}_F)$ の正則代数的尖点的保型表現 $\pi$ と埋め込み $\lambda : M_\pi \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ があって次の三条件をみたす。

1. $\overline{\rho}|_{G_F} \sim \overline{\rho}_{\pi,\lambda}$.
2. $\pi_\infty$ は重さが $2$ である。
3. $l$ の上にある $F$ の任意の素点 $x$ に対して、$\mathrm{WD}_\lambda(\pi_x)$ は馴分岐であって

$$(\mathrm{WD}_\lambda(\pi_x)|_{I_x} \bmod \lambda) = \omega_2^{k-(l+1)} \oplus \omega_2^{lk-(l+1)}$$

が成立する。ここで、$\omega_2$ はタイヒミュラー指標 $\omega_2(\sigma) = \sigma(\sqrt[l^2-1]{l})/\sqrt[l^2-1]{l}$ である。

ここで、1.3 と異なるのは、$l$ が $F$ で完全分解するということである。これは、この主張を更に精密化するときに重要な条件である。

$\overline{\mu}=\varepsilon^{-1}\det\overline{\rho}$ とおき、$\overline{\mu}$ の核に対応する $\mathbb{Q}$ の拡大体を $N$ とおく。$\mathfrak{f}_\mu$ をこの指標の導手とする。$N$ は、$\mathbb{Q}$ の巡回拡大体である。$\{\pm 1\}$ 以外に 1 の冪根を含まず、$l$ が素イデアルのままであるような虚二次体 $M$ をとる。$\delta_M$ を $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbf{N}\mathbb{A}_F^\times$ の非自明な唯一つの指標とし、これの導手を $\mathfrak{f}_M$ とおく。以下では、総実代数体の拡大 $E''\subset E'\subset E$ を続けて定義する。

まず、$E''$ を $E''M$ が 1 の原始 $2\sharp k^\times$ 乗根 $\zeta$ を含むような総実代数体とする。

包含写像 $M^\times\hookrightarrow(E''M)^\times$ の延長であるような連続指標 $\chi_0: M^\times(M_\infty^\times\times\prod_q\mathcal{O}_{M,q}^\times)\longrightarrow(E''M)^\times$ を考える。$\mathfrak{f}_0$ を $\chi_0$ の導手とする。

次に $l$ と異なる二つの相異なる素数 $p_1,p_2$ を以下の四条件をみたすように取って来る。

1. $\chi_0$ は、$p_1p_2$ 上で不分岐である。
2. $\chi_0$ は、$p_i$ 上で不分岐である。
3. $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_{p_i})$ は相異なる二つの固有値を持つ。
4. $p_i$ は、$M$ のヒルベルト類体で分解する。(このような性質を持つ素数 $p_1,p_2$ は Chebotarev の稠密性定理より従う。)

正の整数 $w_{E''M}$ を $E''M$ に含まれる 1 のべき根の個数とする。

$$w=2w_{E''M}\sharp(\mathcal{O}_M/\mathfrak{f}_M\mathfrak{f}_\mu\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0^c\mathcal{O}_M)^\times$$

とおく。次に素数の有限集合を三つ定義する。
$S_1$ を $\mathfrak{f}_M\mathfrak{f}_\mu\mathfrak{f}_0\mathfrak{f}_0^c$ を割る素数の集合とする。
$S_2$ を $M$ で分解し、その上にある $M$ の素イデアルが $M$ のイデアル類群を生成するような $S_1$ に含まれない素数の有限集合とする。
$S_0=S_1\cup S_2\cup\{l,p_1,p_2\}$ と定める。

$W_0\cap M_{S_0}^\times/\mathbb{Q}_{S_0}^\times\subset(M_{S_0}^\times/\mathbb{Q}_{S_0}^\times)^w$ をみたす開部分群 $W_0\subset\prod_{q\notin S_0}\mathcal{O}_M^\times/\mathbb{Z}_q^\times$ が取れる。([Tay1, lemma 1.1 の証明]) $w'$ を $\prod_{q\notin S_0}\mathcal{O}_M^\times/\mathbb{Z}_q^\times$ における $W_0$ の指数とする。

以下の二条件をみたすガロワ総実代数拡大 $E'/E''$ が取れる。

1. $E'$ は 1 の原始 $ww'$ 乗根を含む。

2. $\chi_0$ は連続指標 $\chi_0 : (\mathbb{A}_M)^\times \longrightarrow (E'M)^\times$ に延長される。

$E/E'$ を $lp_1p_2$ の外不分岐で、この三つの素点の上では馴分岐となるような最大総実代数拡大体とする。$\wp_1, \wp_2$ をそれぞれ $p_1, p_2$ の上にある $EM$ の素点とする。更に $l$ の上にある $EM$ の素点 $\lambda$ と埋め込み $k \hookrightarrow \mathcal{O}_E M/\lambda$ を次のようにとる。Artin 相互写像 $I_l \longrightarrow \mathcal{O}_{M,l}^\times$ と自然な写像 $\mathcal{O}_{M,l}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{EM}/\lambda)^\times$ の合成が $w_2^{-1}$ : $I_l \longrightarrow k^\times \subset (\mathcal{O}_{EM}/\lambda)^\times$ と一致する。mod $\lambda$ で $\overline{\mu}$ に一致する唯一の指標を $\mu$ : $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) \longrightarrow (EM)^\times$ とかく。mod $\lambda$ で $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_{p_i})$ に行き、$\alpha_i\alpha_i^c = p_i$ をみたす元 $\alpha_i \in (\wp_i \cap M)\mathcal{O}_E'' M$ がとって来れる。

このように取って来ると以下のようなことが成立する。

**補題 4.9.** *([Tay2, Lemma 4.2])*
$lp_1p_2$ の上にある $E$ の素点の積を $\mathfrak{a}'$ とする。$\mathfrak{a}'\mathcal{O}_{EM} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^c$ と分解する。($\wp_1\wp_2\lambda|\mathfrak{a}$ である。)このとき、$\eta \equiv \zeta \bmod \mathfrak{a}$ を充たす元 $\eta \in \mathcal{O}_E^\times$ が存在する。

次のような指標が取れる。

**補題 4.10.** *([Tay2, Lemma 4.3])*
以下の四条件を充たす *Hecke* 指標 $\chi : \mathbb{A}_M^\times \longrightarrow (EM)^\times$ が存在する。

1. $\chi$ は、$M^\times$ に制限すると自然な包含写像となる。
2. $\chi|_{\mathcal{O}_{M,l}^\times}$ は、
$$\chi|_{\mathcal{O}_{M,l}^\times} \equiv x^{l+1-k} \bmod l$$
をみたす位数が $l$ と素な唯一つの指標である。
3. $i = 1, 2$ に対し $\chi$ は $p_i$ の上で不分岐であって、$\chi|_{M_{\wp_i}^\times}(p_i) = \alpha_i$ をみたす。
4. $\chi|_{\mathbb{A}^\times} = \mu\delta_M \,\|\|^{-1}\, i_\infty$. 但し、ここで $\|\|^{-1}$ は、普通の絶対値の積とする。$i_\infty$ は、$\mathbb{R}^\times$ への射影とする。

$EM$ の素点 $x$ が $M$ の素点 $x'$ の上にあるとき、Hecke 指標 $\chi_x : \mathbb{A}_M^\times/M^\times \longrightarrow (EM)_x^\times$ を
$$a \mapsto \chi(a)a_{x'}^{-1}$$
と定義する。

以下で更に記号を導入しておく。$\mathfrak{b} = \lambda\wp_1\wp_2$ とし、$\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b} \cap \mathcal{O}_E$ と定める。すると $\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0 \simeq \mathcal{O}_{EM}/\lambda \times \mathcal{O}_{EM}/\wp_1 \times \mathcal{O}_{EM}/\wp_2$ となっている。次に $W_{\mathfrak{b}_0,0}/\mathbb{Q}$ を次のような $\mathcal{O}_E$ 作用を持つ有限平坦群スキームとする。

$$W_{\mathfrak{b}_0,0}(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0(1) \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0.$$

$W_{\mathfrak{b}_0,0}(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の標準的ペアリング $W_{\mathfrak{b}_0,0}(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{d}_E^{-1} \longrightarrow W_{\mathfrak{b}_0,0}^{\vee}$ は、以下のペアリングに対応するものを意味する。

$$(\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0(1) \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0) \times (\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0(1) \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0) \longrightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0(1)$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \mapsto y_2x_1 - y_1x_2.$$

以下でレベル構造つきの Hilbert-Blumental modular 多様体とその twist を紹介する。$(A, i, j)$ を E-HBAV とする。これに加えて標準ペアリングを $j$-Weil ペアリングにうつすレベル構造 $\alpha : W_{\mathfrak{b}_0,0} \simeq A[\mathfrak{b}_0]$ を考えて、四つ組 $(A, i, j, \alpha)$ のモジュライ空間を $X/\mathbb{Q}$ とかく。$\mathfrak{b}_0$ は、剰余標数と互いに素な二つの素イデアルで割れるので、$X$ は精モジュライになり再び [Ra] によりこれは平滑で幾何的に連結な空間となる。（幾何的に連結は [Tay1] 同様無限素点での上半平面の幾つかのコピーによる一意化によってわかる。）

関係式

$$\varepsilon \det\gamma \equiv 1 \bmod \mathfrak{b}_0$$

をみたすような元の組

$$(\gamma, \varepsilon) \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0) \oplus \mathcal{O}_{E,\gg 0}^{\times}/(\mathcal{O}_{E,\equiv 1(\mathfrak{b}_0)}^{\times})^2$$

の集合を $\Gamma$ とする。但し、ここで $\mathcal{O}_{E,\gg 0}^{\times}$ は総実な $\mathcal{O}_E^{\times}$ の元の集合とし、$\mathcal{O}_{E,\equiv 1(\mathfrak{b}_0)}^{\times}$ は法 $\mathfrak{b}_0$ で 1 に合同な数の集合とする。$\Gamma$ は、$X$ に忠実に以下のように作用する。

$$(\gamma, \varepsilon)(A, i, j, \alpha) = (A, i, j \circ \varepsilon^{-1}, \alpha \circ \gamma^{-1}).$$

$G_{\mathbb{Q}}$ は、$X$ の自己同型群の中で $\Gamma$ を保持する形で作用し

$$\sigma(\gamma, \varepsilon) = \Big(\begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big), \varepsilon)$$

をみたす。簡単にわかるように $H^1(G_{\mathbb{Q}}, \Gamma)$ は、関係式

$$\varepsilon^{-1} \det R \equiv \psi^{-1} \bmod \mathfrak{b}_0$$

をみたすような連続表現 $R : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0)$ と連続な準同型写像 $\psi : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,\gg 0}^{\times}/(\mathcal{O}_{E,\equiv 1(\mathfrak{b}_0)}^{\times})^2$ のペア $(R, \psi)$ の集合と 1:1 に対応している。ただし、このペアは次のようにして 1-コサイクルと対応している。

$$(R, \psi)(\sigma) = \Big(R(\sigma) \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi(\sigma)\Big).$$

よって $H^1(G_{\mathbb{Q}},\Gamma)$ の元に対し、それに上の意味で対応するペア $(R,\psi)$ に関する $X/\mathbb{Q}$ の twist$X_{R,\psi}/\mathbb{Q}$ が定義できる。

次にこの $X_{R,\psi}/\mathbb{Q}$ の $F$ 有理点を描出する。$N'$ を $\psi$ の分解体とする。$W_R/\mathbb{Q}$ を次のような $\mathcal{O}_E$ 作用付きの有限平坦群スキームとする。

$$W_R(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0 \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0.$$

但しガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ は $R$ で作用するものとする。標準的ペアリング $W_R \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{d}_E^{-1} \longrightarrow W_R^{\vee}$ は、以下のペアリングに対応するとする。

$$(\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0 \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0) \times (\mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0 \oplus \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0) \longrightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{b}_0$$

$$(x_1,y_1) \times (x_2,y_2) \mapsto y_2x_1 - y_1x_2.$$

このように記号を導入しておくと、$X_{R,\psi}$ の $F$ 有理点は以下のような四つ組 $(A,i,j,\beta)$ と対応する。

1. $(A,i,j)$ は、$N'F$ 上の $E$-HBAV である。

2. 同型 $\beta : W_R \simeq A[\mathfrak{b}_0]$ は、上で定義した標準的ペアリングを $j$-Weil ペアリングにうつす。

3. 全ての $\sigma \in \mathrm{Gal}(N'F/F)$ に対し、次のような条件をみたす同型 $\kappa_\sigma : \sigma(A,i) \simeq (A,i)$ が存在する。ある $\psi(\sigma)$ の持ち上げ $\widetilde{\psi(\sigma)} \in \mathcal{O}_E^{\times}$ があって $\sigma(j) = \kappa_\sigma^* \circ j \circ \widetilde{\psi(\sigma)}$ をみたす。更に、$\sigma$ のある持ち上げ $\widetilde{\sigma} \in G_F$ があって次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} \sigma A[\mathfrak{b}_0] \arrow[r, "\kappa_\sigma"] & A[\mathfrak{b}_0] \\ W_R \arrow[u] \arrow[r, "R(\widetilde{\sigma})"] & W_R. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

但し、左の縦の矢印は $\widetilde{\sigma} \circ \beta$ であり右の縦の矢印は $\beta$ である。

以上のように、Hilbert-Blumental modular 多様体の twist とその有理点の解釈を行ったが次の二つの twist に特に関心がある。$\sigma \in \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ についてある整数 $m_\sigma$ があって $\mu(\sigma) = \zeta^{-2m_\sigma}$ とかける。$\eta_\sigma = (\eta\zeta^{-1})^{m_\sigma} \in \mathcal{O}^{\times}_{EM,\equiv 1(\mathfrak{b})}$, $\psi(\sigma) = \mathbf{N}_{EM/E}\eta_\sigma = \eta^{2m_\sigma}$ とおく。

$$\eta^{2\sharp k^\times} = (-\eta^{\sharp k^\times})^2 \in (\mathcal{O}^{\times}_{E,\equiv 1(\mathfrak{b}_0)})^2$$

なので、

$$\psi : \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}_{E,\gg 0}/(\mathcal{O}^{\times}_{E,\equiv 1(\mathfrak{b}_0)})^2$$

は、準同型である。

$$R_{\overline{\rho}} = \overline{\rho} \oplus \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_\mathbb{Q}} \chi_{\wp_1} \oplus \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_\mathbb{Q}} \chi_{\wp_2},$$

$$R_{Dih} = \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_\mathbb{Q}} \chi_\lambda \oplus \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_\mathbb{Q}} \chi_{\wp_1} \oplus \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_\mathbb{Q}} \chi_{\wp_2}$$

とおくと、二つのペア $(R_{\overline{\rho}}, \psi), (R_{Dih}, \psi)$ は $H^1(G_\mathbb{Q}, \Gamma)$ の元を定め二つの twist $X_{\overline{\rho}}$, $X_{Dih}$ が得られる。この二つの多様体は、$\mathbb{Q}_l, \mathbb{Q}_{p_1}, \mathbb{Q}_{p_2}, \mathbb{R}$ に底変換すると同型になる。この節の最初に触れたことに関する二つの補題を述べる。

**補題 4.11.** *([Tay2, Lemma 4.4])*
$F$ は代数体とする。$X_{\overline{\rho}}$ が $F$ 有理点を持つならば、次元が $[EM : \mathbb{Q}]$ のアーベル多様体 $B/F$ と埋め込み $i' : \mathcal{O}_{EM} \hookrightarrow \mathrm{End}(B/F)$ それに同型 $\beta' : B[\mathfrak{b}_0] \simeq R_{\overline{\rho}}$ が存在する。

*Proof.* 存在を仮定した $X_{\overline{\rho}}$ の $F$ 有理点に対応する四つ組 $(A, i, j, \beta)/F$ をとる。$\sigma \in \mathrm{Gal}(N'F/F)$ に対し上で述べた同型 $\kappa_\sigma : \sigma(A, i) \simeq (A, i)$ を考える。$B = A \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{EM}$ とおき $i' : \mathcal{O}_{EM} \longrightarrow \mathrm{End}(B)$ を自然な射とする。$\beta'$ を以下の合成とする。

$$W_{R_{\overline{\rho}}} \longrightarrow A[\mathfrak{b}_0] \longrightarrow A[\mathfrak{b}_0] \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{EM} = B[\mathfrak{b}].$$

写像 $f_0 : \mathcal{O}_{EM} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{EM}, \mathcal{O}_E)$ を $f_0(a)(b) = \mathrm{tr}_{EM/E} ab^c$ で定める。さらに

$$\kappa'_\sigma = \kappa_\sigma \otimes \eta_\sigma : \sigma B \longrightarrow B$$

とおくと $\kappa'_\sigma$ は $\mathcal{O}_{EM}$ の作用と可換であり $\sigma f = (\kappa'_\sigma)^\vee f \kappa'_\sigma$ をみたし $\sigma$ の任意の持ち上げ $\widetilde{\sigma} \in G_F$ に対し以下の図式を可換にする；

$$\begin{tikzcd} \sigma B[\mathfrak{b}] \arrow[r, "\kappa'_\sigma"] & B[\mathfrak{b}] \\ W_{R_{\overline{\rho}}} \arrow[u] \arrow[r, "R_{\overline{\rho}}(\widetilde{\sigma})"] & W_{R_{\overline{\rho}}}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ただし左の縦の矢印は $\widetilde{\sigma} \circ \beta'$ であり右の縦の矢印は $\beta'$ である。四つ組 $(B, i', f, \beta')$ は非自明な自己同型写像を持たないので $\kappa'_\sigma \sigma \kappa'_\tau = \kappa'_{\sigma\tau}$ が成り立つ。以上の様にして $(B, i')$ は $F$ に下げて定義され同じく同型 $\beta'$ も $F$ 上の同型 $\beta' : W_{R_{\overline{\rho}}} \simeq B[\mathfrak{b}]$ に下げて定義され得ることがわかった。 □

以下の補題は CM 理論から導かれる。

**補題 4.12.** *([Tay2, lemma 4.5])* $X_{Dih}$ は、$\mathbb{Q}$ 有理点を持つ。ゆえに $X_{\overline{\rho}}$ は、$\mathbb{Q}_l, \mathbb{Q}_{p_1}, \mathbb{Q}_{p_2}, \mathbb{R}$ 上有理点を持つ。

*Proof.* 埋め込み $\tau : M \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する。$M$ に制限すると $\tau$ になる埋め込み $EM \hookrightarrow \mathbb{C}$ から成る CM 型を $\Phi$ とかく。$\mathcal{O}_E$ 加群 $\{d \in \mathfrak{d}_{EM}^{-1} : \mathrm{tr}_{EM/E} d = 0\}$ とその $\sigma \otimes \tau$ の作用で総実になる部分集合 $(\mathfrak{d}_{EM}^{-} \otimes_{E,\sigma} \mathbb{R})^{+}$ の組からなる順序付き $\mathcal{O}_E$ 加群を $(\mathfrak{d}_{EM}^{-1})^{-}$ とかく。CM 理論から以下の四つが得られる；

1. $[E : M]$ 次元のアーベル多様体 $A/M$.
2. 埋め込み $i : \mathcal{O}_{EM} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/M)$.
3. 順序付 $\mathcal{O}_E$ 加群としての同型 $j : \mathfrak{d}_{EM}^{-} \simeq \mathcal{P}(A, i|_{\mathcal{O}_E})$.
4. $E$ の各素点 $\mathfrak{q}$ に対してガロワ作用で両立するような同型 $\alpha_{\mathfrak{q}} : \mathcal{O}_{EM,\mathfrak{q}}(\chi_{\mathfrak{q}}) \simeq T_{\mathfrak{q}} M$. であって以下の二性質を充たす。

- $EM$ は $Lie(\tau A)$ に $\oplus_{\sigma \in \Phi} \sigma$ で作用する。
- 　総実な元 $d \in (\mathfrak{d}_{EM}^{-1})^{-}$ に対し $T_{\mathfrak{q}} M$ 上の $j(d)$-Weil ペアリングは以下の様になる；
$$x \times y \mapsto \mathrm{tr}_{EM/E} d x y^{c}.$$

（偏極 $j$ の存在に関しては以下のことからわかる。アーベル多様体 $\tau A/\mathbb{C}$ の偏極 $f$ を $f$-Rosati 対合が $E$ を安定にし、かつ自明に作用しているものとする。このとき $f$-Rosati 対合は $EM$ を安定にし、そこに $CM$ 乗法で作用する。以上のことは $EM$ が $\mathrm{End}(\tau A/\mathbb{C})$ の中で $E$ の中心化群になっていることから従う。）$\chi(c \circ \chi) = (|| \, ||^{-1} i_{\infty}) \circ N_{M/\mathbb{Q}}$ が成り立つので各元 $\sigma \in G_M$ に対して

$$\mathrm{tr}_{EM/M} d \alpha_{\mathfrak{q}}(\sigma x) \alpha_{\mathfrak{q}}(\sigma y)^{c} = \epsilon_{\mathfrak{q}}(\sigma) \mathrm{tr}_{EM/M} d \alpha_{\mathfrak{q}}(x) \alpha_{\mathfrak{q}}(y)^{c}$$

が成立する。このようにして $(A, i|_{\mathcal{O}_E}, j, (\prod_{\mathfrak{q}} \alpha_{\mathfrak{q}}) \bmod \mathfrak{b}_0)$ は $X_{Dih}(M)$ の $M$ 有理点を定める。$\chi(\chi \circ c) = (|| \, ||^{-1} i_{\infty} \mu) \circ N_{M/\mathbb{Q}}$ が成り立つので $c \circ \chi \circ N_{M/\mathbb{Q}} = \chi \circ c \circ N_{NM/M}$ がわかる。よって $NM$ 上では $(A, i, j, \{\alpha_{\mathfrak{q}}\})$ と $(cA, c \circ i \circ c, c \circ j, \{c \circ \alpha_{\mathfrak{q}} \circ c\})$ の間の同型を得る。このようにして $(A, i|_{\mathcal{O}_E}, j, (\prod_{\mathfrak{q}} \alpha_{\mathfrak{q}}) \bmod \mathfrak{b}_0)$ で定まる $X_{Dih}(M) \subset X_{Dih}(NM)$ の点は $c$ で不変なのでこの点は $X_{Dih}(\mathbb{Q})$ の点を定めることがわかった。 □

　以上の事と Moret-Bailly の定理を用いて以下のものが見出される。素数 $l, p_1, p_2$ が完全分解する総実代数体 $F$ と $[EM : M]$ 次元の $F$ 上のアーベル多様体 $B/F$, 乗法 $\mathcal{O}_{EM} \hookrightarrow \mathrm{End}(B/F)$ で以下の二条件を充たす。
1. $B[\lambda] \sim \bar{\rho}|_{G_F}$.
2. $i = 1, 2$ に対して $B[\wp_i] \sim \mathrm{Ind}_{G_M}^{G_{\mathbb{Q}}} \overline{\chi}$.

$B[\lambda]$ は $p_1$ の上にある各素点で不分岐なのでその素点における惰性群の Tate 加群 $T_\lambda B$ への作用の位数は $l$ 冪となる。$B[\wp_2]$ は $p_1$ の上にある各素点で不分岐なのでその素点における惰性群の Tate 加群 $T_{wp_2}B$ への作用の位数は $p_2$ 冪となる。ゆえに $p_1$ の上の各素点における惰性群の Tate 加群 $T_\lambda B$ への作用の位数は $l$ 冪かつ $p_2$ 冪となる。すなわちその惰性群の作用は自明である。よって Tate 加群 $T_\lambda B$ は $p_1$ の上の各素点で不分岐になり $B$ は $p_1$ の上の各素点で準安定還元を持つことがわかった。

さらに $p_1$ は $F$ で完全分解し $B[\wp_1]$ は $p_1$ の上の各素点の分解群の表現として可約であるから Tate 加群 $T_{\wp_1}B$ は通常表現であることもわかる。$F$ の $l$ の上にある各素点 $x$ に対し惰性群 $I_x$ は Tate 加群 $B[\wp_1], B[\wp_2]$ 両方に $\widetilde{\omega}_2^{k-(l+1)} \oplus \widetilde{\omega}_2^{lk-(l+1)}$ を通じて作用する。ここで指標 $\widetilde{\omega}_2 : I_x \longrightarrow \mathcal{O}_{EM}^\times$ は馴分岐で mod $\lambda$ で $\omega_2$ に行く。$\mathrm{Ind}_{G_{FM}}^{G_M}\chi_{\wp_1}$ は保型的であるから [SW, Theorem 5.1] によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の重さ 2 の代数的尖点的保型表現 $\pi$ と埋め込み $M_\pi \hookrightarrow EM$ があって $T_{\wp_1}B \sim \rho_{\pi,\wp_1}$ が成阯つ。加えて $T_\lambda B \sim \rho_{\pi,\lambda}$ もわかる。以上のことから定理が従う。

更に Taylor は、modular forms の間の合同関係式を用いて潜 Serre 予想を更に精密化する結果を得ている。この精密化の証明はここでは紹介することができないが、以下にその主張を書いておく。

**定理 4.13.** *([Tay2, Theorem 5.7])* $l > 3$ を素数とする。$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_l)$ を奇な連続既約表現とする。$\overline{\rho}|_{G_l}$ も既約とする。このとき、$l$ が完全分解するようなある総実代数体 $F$ と、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の正則代数的尖点的保型表現 $\pi$、埋め込み $\lambda : M_\pi \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ が存在して以下が成立する。

1. $\overline{\rho} \sim \overline{\rho}_{\pi,\lambda}$
2. $\pi_\infty$ は重さが $k_{\overline{\rho}}$ である。ここで、$k_{\overline{\rho}}$ は、$\overline{\rho}|_{G_l}$ に伴う *Serre* 重さとする。
3. $\phi_x$ は $F$ の全ての素点 $x$ で不分岐である。

以上の結果達の重要な応用として、L 関数の有理接続と関数等式があるが、これについてはここでは解説できない。[Tay4],[Ito2] にこれらの応用が、Brauer の誘導定理と保型表現の底変換定理を用いてどのように成されるか、の解説がある。

## 参考文献

[B] D.Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55

[CDT] B.Conrad, F.Diamond and R.Taylor, Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations,JAMS 12 (1999), 521-561

[C] L. Clozel, Motifs et forms automorphes: applications to principle de functorialite (French), Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, 77-159

[D] F.Diamond, The Taylor-Wiles construction and multiplicity one, Invent. Math. 128 (1997), 379-391

[DDT] H.Darmon, F.Diamond and R.Taylor, Fermat's last theorem, in Elliptic curves,modular forms and Fermat's last theorem, Internat. Press,1997

[De] P. Deligne, Formes modulaires et representations de $GL(2)$, Modular functions of one variable, II ,Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973, 55-105

[HT] M.Harris and Richard Taylor, the Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties, Annals of Mathematics Studies 2001

[Hida] H.Hida, Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory, Clarendon Press. Oxford 2006

[Hida2] H.Hida, P-Adic Automorphic Forms on Shimura Varieties, Springer Monographs in Mathematics, 2004

[Gr] A. Grothendieck, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonne, Les Presses de l'universite de Montreal, 1974

[Ito] 伊藤哲史、ガロワ表現の変形理論とヘッケ環、数学のたのしみ最終号、2008「佐藤-テイト予想の解決と展望」pp.133-145.

[Ito2] 伊藤哲史、佐藤テイト予想の証明の方針、数学のたのしみ最終号、2008「佐藤-テイト予想の解決と展望」pp.118-132.

[Ka] Katz.N, Serre-Tate local moduli, In Surfaces Algebriques, expose Vbis, Lecture Notes in Math. 868, Springer Verlag, 1981, 138-202

[KW] C. Khare and J. P. Wintenberger, Serre's modularity conjecture I, Ⅱ, preprint 2007.

[Kn1] A. W. Knapp, Local Langlands correspondence: the archimedean case, Motives(Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994

[Kn2] A. W. Knapp, Representation theory of semisimple groups, Princeton Mathematical Series, 36

[Mi1] J.S.Milne, Abelian Varieties, in Arithmetic Geometry(G. Cornell and J.H. Silverman editors.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. and New York 1968

[Mi2] J.S.Milne, Abelian Varieties, in Milne's home page

[Ra] Rapoport, Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumental, Compo. Math. 36(1978), 255-335

[Sa] 斎藤毅、Fermat 予想 1,2 岩波書店.

[SW] C.Skinner and A.Wiles, Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations, Ann.Fac.Sci.Toulouse Math. 10(2001),185-215.

[Tay1] R.Taylor, Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur, Jounal of Inst. of Math. Jussieu(2002), 125-143

[Tay2] R.Taylor, On the meromorphic continuation of degree two L-functions, Documenta Mathematica, Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday (2006), 729-779

[Tay3] R.Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, Invent. Math. 98(1989),265-280

[Tay4] R.Taylor, Galois representations, Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse 13 (2004), 73-119.

[Ya1] 山下剛, Taylor-Wiles 系の復習、本報告集第一巻

[Ya2] 山下剛, Kisin の修正 Taylor-Wiles 系、本報告集第一巻

[Yo] 吉田輝義、ガロワ表現の整合系とその保型性, 数学のたのしみ最終号、2008「佐藤-テイト予想の解決と展望」pp.146-156.

[Yo2] 吉田輝義、ラングランズ対応と志村多様体, 数学のたのしみ最終号、2008「佐藤-テイト予想の解決と展望」pp104-117.