SERRE 予想の証明について (レベル 1 の場合)

萩原　啓 (東大数理)

1. 序

本稿では Serre 予想の内、レベル 1 と呼ばれる場合の証明について解説する。大雑把に言うと、Serre 予想とはある種の法 p Galois 表現 (即ち、標数 p の体上の Galois 群の表現) が保型形式から来るであろうという予想である。まず、この予想を正確に定式化する。

以下、$\overline{\mathbb{Q}}$ で複素数体 $\mathbb{C}$ に於ける $\mathbb{Q}$ の代数閉包を、$\overline{\mathbb{Z}}$ で $\mathbb{C}$ に於ける $\mathbb{Z}$ の整閉包を表す。また、各素数 p に対して p 進体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 及び埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を 1 組ずつ固定する。今後、断らない限りこれらの埋め込みによって $\overline{\mathbb{Q}}$ の元は $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の元と同一視する。更に $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の整数環を $\overline{\mathbb{Z}_p}$、その極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$ とし、$\overline{\mathbb{F}_p} = \overline{\mathbb{Z}_p}/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$ とおく。

定義. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ を $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の 2 次元連続表現とする。ここで絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ は Krull 位相によって、$\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ は離散位相によって位相群の構造を入れる。

(1) $\overline{\rho}$ が奇かつ既約のとき S **型** (of S-type) と呼ぶ。ここで一般に、$G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元表現 ρ が**奇** (odd) であるとは、複素共役 $c \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し $\det \rho(c) = -1$ であることをいう。

(2) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1(N))$ を正規化された同時固有新形式とする。このとき、$\overline{\rho}$ が (ι_p に関して)f **から来る** (arise from f) とは、任意の素数 $l \nmid Np$ に対して

$$\mathrm{tr}\,\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_l) = a_l \mod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$$

但し Frob_l は**算術的**Frobenius を表す、が成り立つことである (一般に $a_n \in \overline{\mathbb{Z}}$ が成り立つことに注意)。

(3) $\overline{\rho}$ が**保型的** (modular) であるとは、
 (a) 既約であってある f から来る、
 (b) 又は、可約且つ奇であることをいう。

S 型であるという性質はより一般の体上の ($G_{\mathbb{Q}}$ の) 表現についても定義できるが、今後、単に S 型法 p 表現といったら $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の表現であるとする。

注意 1.1. 保型的であるという性質は、実は ι_p の固定の仕方にはよらない。

注意 1.2. 保型形式の一般論より、保型的なら奇であることは容易に分かる。

注意 1.3. $\overline{\rho}$ という記法は、しばしばある p 進表現 ρ の還元と思えることの現れであり、今後そのように用いることもあるが、ここではあくまで $\overline{\rho}$ で一つの記号である。

さて、Serre は [Ser87] において次の予想を提示した。これを Serre 予想と呼ぶ (後で述べるように (注意 2.7) これより精密な予想も Serre は提示している。それと対比する場合にはこちらを弱い Serre 予想と呼ぶ)。

予想. (Serre) すべての S 型法 p 表現は保型的である。

注意 1.4. Serre 予想の定式化の為には、保型性の定義に可約の場合を含める必要はないが、以下の証明を円滑に行うにはこのように保型性の定義を広げておいた方が都合が良い。

この予想に関し、Khare と Wintenberger はその特別な場合を [KW] に於いて示し、さらに Khare はそこでの手法を更に発展させることで、それより一般の場合を証明した ([Kha06])。この 2 つの結果を併せると「Serre 予想のレベル 1 の場合」と呼ばれる次の定理が得られる (何故レベル 1 の場合と呼ばれるかは 2.2 節を参照せよ):

定理 1.5. p の外で不分岐な (即ち全ての素数 $l \neq p$ について惰性群への制限 $\overline{\rho}|_{I_l}$ が自明な表現であるような)、任意の S 型法 p 表現 $\overline{\rho}$ は保型的である。

以下、この定理の証明について解説するが、その前に各章の構成について述べておく。まず、第 2 章及び第 3 章に於いて法 p 表現及び p 進表現の基本事項について述べたあと、第 4 章で Serre 予想の証明の鍵となる幾つかの定理を紹介し、これらの定理を認めた上で第 5 章で定理 1.5 の証明を行う。

その後の、第 6 - 9 章は、第 4 章で紹介した諸定理の証明に当てられ、ここまでで Khare と Wintenberger によるレベル 1 の Serre 予想の証明は完了する。

残りの 3 章は付録である。第 10 章には演習問題を載せておいた。解答は特に付けていないが、本稿を読んで頂ければ比較的容易に解くことが出来ると思う。第 11 章では Dieulefait によるレベル 1 の Serre 予想の別証明についてその概要を述べる。第 12 章には本稿で用いた用語・定理の内、重要と思われるものについてその参照先等を挙げておいた。

さて、筆者の至らなさの為、本稿の提出は著しく締切りを過ぎてしまい、編者の斎藤毅先生、安田正大氏、山下剛氏を始め、関係諸氏に大変なご迷惑とご心配をおかけする事となってしまった。この場を借りて深く陳謝するとともに、辛抱強く本稿の完成を待って下さった皆様の御寛恕に心より感謝の意を表したい。また、本稿の執筆にあたり、門外漢の筆者のつまらない質問に快く対応して下さった斎藤毅先生、安田正大氏、新井啓介氏にも心から感謝したい。

しかし、これだけの暖かい援助にも拘らず、筆者の能力不足の為、本稿にはまだまだ多くの間違いや不十分な説明が数多くあると思う。読者の皆様には予めお詫びしておきたい。

本解説が些かなりとも原論文 ([KW]、[Kha06]) を読む際の理解の一助になれば筆者として望外の幸せである。

記号及び約束事.

- 体 Ω に対し、$\overline{\Omega}$ でその代数閉包 (の 1 つ) を表す。p 進表現 ρ の還元も $\overline{\rho}$ と表されるが混乱の恐れは無いと思われる。
- 群 G 及び環 A に対し、G の作用を持つ有限生成自由 A 加群 M と群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_A(M)$ とをしばしば同一視する。特に、指標と 1 次元表現もしばしば同一視する。
- $\mathbb{F}_{p^n}$ で位数 p^n の有限体を表す。有限体や $\overline{\mathbb{F}_p}$、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$ などには常に離散位相を入れて考える。一方、体 F に対しその絶対 Galois 群 G_F には常に Krull 位相を入れておき、特に断らない限り G_F の表現といったときは連続表現を考える。また、G_F の指標といったときも、特に断らない限り (位相) 体の乗法群への連続準同型を意味する。
- $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ 及び $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}}$ でそれぞれ $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 内の $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大及び最大馴分岐拡大を表す。また、$\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ で $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ の整数環を表す。

- 代数体といったときは、特に断らない限り (上で定義しておいた) $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体で $\mathbb{Q}$ 上有限次なものを指すことにする。また、先に述べたように各素数 p に対し $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を固定してあるので、これによって分解群 $D_p \subset G_{\mathbb{Q}}$ と $G_{\mathbb{Q}_p}$、惰性群 $I_p \subset D_p$ と $I_{\mathbb{Q}_p} = G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}$ とをしばしば同一視する。
- E の有限素点という言葉は E の整数環 $\mathscr{O}_E$ の素イデアルを表すことも埋め込み $\lambda : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ も表すこともある。また、E の有限素点 λ に対し、E_λ で E の $\lambda(\subset \mathscr{O}_E)$ 進位相に関する完備化又は $\lambda(E) \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ の閉包を表す。
- 局所環 $\mathscr{O}$ に対しその極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}$ で表し、付値体 K に対してその整数環及び剰余体をそれぞれ $\mathscr{O}_K$、$\mathbb{F}_K$ で表す。
- 「p の外で不分岐」などというときには、無限素点での状況は考慮しないものとする。

2. 法 p 表現に関する諸用語

前章でも述べたように、Serre は法 p 表現 $\overline{\rho}$ に対し、レベル (または Artin 導手の p と素な部分) と呼ばれる自然数 $N(\overline{\rho})$、及び重さと呼ばれる自然数 $k(\overline{\rho})$ を定義することで、より精密な予想を提示した ([Ser87])。これらは Serre 予想の証明中の数学的帰納法に用いられるという点でも重要な量である。

そこで、ここではそれらの定義を与えるとともに、それを用いた Serre 予想の精密化について述べる。後半では、Galois 法 p 表現に関する幾つかの用語を導入するとともに、その性質について纏めておく。

2.1. **基本用語.** この節では、有限平坦及び通常という、法 p 表現に関する 2 つの性質を紹介する。文献によってはこれと違う定義を採用していたり、また有限平坦のことを単に有限や平坦などといったりすることもあるので注意されたい。

まず、素数 p に対し、$\mu_p(\overline{\mathbb{Q}}) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}} | \zeta^p = 1\}$(乗法によって 1 次元 $\mathbb{F}_p$ ベクトル空間とみなす) の定める $G_{\mathbb{Q}}$ の 1 次元法 p 表現を $\overline{\chi_p}$ で表す。代数拡大 $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}$ に関する係数拡大や $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ などとの合成も同じく $\overline{\chi_p}$ と表す (ここで $\overline{\chi_p}$ という記法は、後に定義する p 進円分指標 χ_p の $\mathrm{mod}\, p$ 還元と思えることの現れである)。

定義. $\mathbb{F}$ を標数 p の有限体とする。

(1) $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{F}$ 上の 2 次元表現 $\overline{\rho}$ に対し、
 (a) $\overline{\rho}$ が**通常** (ordinary) とは、$\overline{\rho}|_{I_p}$ が
$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (但し i は整数) の形の表現と同値であることをいう。
 (b) $\overline{\rho}$ が**有限平坦** (finite flat) であるとは、$\mathbb{Z}_p$ 上の有限平坦可換群スキーム A で、$G_{\mathbb{Q}_p}$ 加群として $A(\overline{\mathbb{Q}_p}) \cong V(\overline{\rho})$ となるものが存在することを言う。ここに $V(\overline{\rho})$ は $\overline{\rho}$ の表現空間とする。

(2) $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{F}$ 上の 2 次元表現 $\overline{\rho}$ に対し、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が通常又は有限平坦のとき、$\overline{\rho}$ は p **において** (at p) 通常又は有限平坦という。

注意 2.1. $\mathbb{F}$ を有限体とする。

(1) $\mathbb{F}$ の有限次拡大 $\mathbb{F}'$ に対し $\overline{\rho}$ が有限平坦であることと $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ が有限平坦であることとは同値である。

(2) $\overline{\rho}$ が有限平坦であることと、$\mathbb{Z}_p$ 上のある有限平坦 $\mathbb{F}$ ベクトル空間スキーム A(即ち $\mathbb{F}$ の作用つき有限平坦可換群スキーム) で $G_{\mathbb{Q}_p}$ 加群として $A(\overline{\mathbb{Q}_p}) \cong V(\overline{\rho})$ となるものが存在することとは同値である。

さらにこれは、$\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のある有限平坦 $\mathbb{F}$ ベクトル空間スキーム (又は有限平坦可換群スキーム)A で $I_{\mathbb{Q}_p}$ 加群として $A(\overline{\mathbb{Q}_p}) \cong V(\overline{\rho}|_{I_{\mathbb{Q}_p}})$ となることとも同値である。特に、有限平坦性は実は惰性群への制限のみで決まる。

2.2. **レベル.** 素数 l、非負整数 i に対し、$I_{l,i} \subset G_{\mathbb{Q}_l}$ を第 i 分岐群とする ([Ser68] 参照。但し、そこでは G_i を用いている)。第 0 分岐群が惰性群である。これらを $D_l \subset G_{\mathbb{Q}}$ を通じて $G_{\mathbb{Q}}$ の部分群とみなす。

さて、法 p 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}_p}$) が与えられたとき、各素数 $l \neq p$ に対し、

$$v_l(N(\overline{\rho})) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{[I_{l,0} : I_{l,i}]} \dim(V/V^{I_{l,i}})$$

とおき、

$$N(\overline{\rho}) = \prod_{l \neq p} l^{v_l(N(\overline{\rho}))}$$

とおく。ここに V は $\overline{\rho}$ の表現空間であり、$V^{I_{l,i}}$ はその $I_{l,i}$ 不変部分を表す。

この $N(\overline{\rho})$ を $\overline{\rho}$ の**レベル** (level) と呼ぶ。定義より明らかに、$N(\overline{\rho})$ が素数 $q \neq p$ で割れないことと $\overline{\rho}$ が q で不分岐であること、従って $N(\overline{\rho}) = 1$ であることと p の外で不分岐であることとは同値であることが分かる。

2.3. **重さ.** この節では、標数 p の有限体上の表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ に対し、**Serre 重さ** (Serre weight)、或いは単に**重さ** (weight)、と呼ばれる不変量 $k(\overline{\rho})$ を定義する。その為にまず、$\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の 2 次元表現 $\overline{\rho_p} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ に対してその重さ $k(\overline{\rho_p})$ を定義し、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ については、固定してあった埋め込み $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ を用いて $k(\overline{\rho}) = k(\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}_p})$ で定義する (埋め込み $\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ や、$G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ の固定の仕方によらないことは容易に確かめられる)。

まず、局所体の Galois 群に関する事実を思い出す。$I_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}})$、$P_p = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{t}})$ をそれぞれ分岐群及び暴分岐群とし、$I_{p,\mathrm{t}} = I_p/P_p$ とおく。このとき自然な同型

$$I_{p,\mathrm{t}} \xrightarrow{\cong} \varprojlim \mathbb{F}_{p^n}^{\times}$$

がある (右辺はノルム写像を推移写像とする射影系の極限である)。これを踏まえ、以下のように定義する。

定義. (1) 指標 $\phi : I_{p,\mathrm{t}} \to \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ がある $\mathbb{F}_{p^n}^{\times}$ を経由し、かつそれより小さい m については $\mathbb{F}_{p^m}^{\times}$ を経由しないとき、ϕ を**レベル** n (of level n) の指標と呼ぶ。

(2) 自然な写像 $I_{p,\mathrm{t}} \to \mathbb{F}_{p^n}^{\times}$ と、体の埋め込み $\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$ から誘導される群準同型の合成として得られる指標 $I_{p,\mathrm{t}} \to \mathbb{F}_{p^n}^{\times} \to \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ を**レベル n の基本指標** (the fundamental character of level n) と呼ぶ。相異なるレベル n の基本指標は体の埋め込みに対応して全部で n 個ある。

注意 2.2. 誤解が無い場合には、$I_{p,\mathrm{t}} \to \mathbb{F}_{p^n}^{\times}$ や $I_p \to \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ などに対してもこの用語を用いる。

例. $\overline{\chi_p}|_{I_p}$ は唯 1 つのレベル 1 の基本指標である。

練習 2.3. レベル *2* の基本指標 Ψ に対し、Ψ^p もまたレベル *2* の基本指標であること、$\Psi^{p+1} = \overline{\chi_p}|_{I_p}$ であることを示せ。

さて、V を $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の 2 次元ベクトル空間、$\overline{\rho_p} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}(V)$ を表現とする。この表現の半単純化 $(\overline{\rho_p}^{\mathrm{ss}}, V^{\mathrm{ss}})$ に対し次が知られている。

命題 2.4. (1) P_p は V^{ss} に自明に作用する。

(2) $\overline{\rho_p}^{\mathrm{ss}}|_{I_p} \cong \phi \oplus \phi'$*(*$\phi$、$\phi' : I_{p,\mathrm{t}} \to \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$*)* と直和分解し、$\overline{\rho_p}$、$\phi$、$\phi'$ について次のいずれかが成り立つ*:*

(a) ϕ 及び ϕ' はレベル *2* の指標で、$\phi^p = \phi'$、$\phi'^p = \phi$、且つ $\overline{\rho_p}$ は既約であって、

$$\overline{\rho_p}|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

(b) ϕ 及び ϕ' はレベル *1* の指標 (特に $\phi^p = \phi$、$\phi'^p = \phi'$) で、且つ $\overline{\rho_p}$ は可約であって、

$$\overline{\rho_p}|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \phi & * \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

証明は [Ser87] 参照。以上の事実をつかって重さ $k(\overline{\rho_p})$ を定義する。

定義. $\overline{\rho_p}$ 及び ϕ、ϕ' は上述の通りとする。また Ψ、Ψ' で相異なるレベル 2 の基本指標を表す。

(1) ϕ 及び ϕ' がレベル 2 のとき。このとき、

$$\overline{\rho_p}|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}$$

が成り立ち、必要であれば ϕ と ϕ' を入れ替えることで $\phi = \Psi^a\Psi'^b$、$\phi' = \Psi^b\Psi'^a$、$0 \leq a < b \leq p-1$ と一意に表される。そこで $k(\overline{\rho_p}) = 1 + pa + b$ とおく。

(2) ϕ 及び ϕ' がレベル 1 のとき。

(a) $\overline{\rho_p}|_{P_p}$ が自明のとき。このとき、$0 \leq a \leq b \leq p-2$ なる a、b によって

$$\overline{\rho_p}|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^a & 0 \\ 0 & \overline{\chi_p}^b \end{pmatrix}$$

と一意に表される。そこで、

$$k(\overline{\rho_p}) = \begin{cases} 1 + pa + b & (a,b) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ p & (a,b) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。

(b) $\overline{\rho_p}|_{P_p}$ が非自明のとき。このとき、$0 \leq \alpha \leq p-2$、$1 \leq \beta \leq p-1$ なる α 及び β で、

$$\overline{\rho_p}|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^{\beta} & * \\ 0 & \overline{\chi_p}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

なるものが一意に存在する。そこで、$a=\min(\alpha,\beta)$、$b=\max(\alpha,\beta)$ とおき、$k(\overline{\rho_p})=1+pa+b+\delta_p$ とおく。但しここで、

$$\delta_p=\begin{cases} p-1 & \beta=\alpha+1\text{ で、}\overline{\rho_p}\text{ が有限平坦でなく、}p\neq 2\text{ のとき}\\ 2 & \beta=\alpha+1\text{ で、}\overline{\rho_p}\text{ が有限平坦でなく、}p=2\text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

である。ここで、$\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $\overline{\rho}$ が有限平坦であるとは、ある有限体 $\mathbb{F}$ 上の表現 $\overline{\rho_0}$ で $\overline{\rho}\cong\overline{\rho_0}\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}_p}$ 且つ有限平坦であるようなものが存在することである。

注意 2.5. (1) 上の定義の (2)(b) に於いて、$\delta_p\neq 0$ のときを **très ramifié**、$\beta=\alpha+1$ 且つ $\delta_p=0$ のときを **peu ramifié**、という。

(2) 上の定義の (2)(b) に於いて $\beta=\alpha+1$ のとき、$(1,2)$ 成分「*」は $Z^1(I_p,\overline{\mathbb{F}_p}(\overline{\chi_p}))$ の元 (1-コサイクル) 及びコホモロジー類 $c\in H^1(I_p,\overline{\mathbb{F}_p}(\overline{\chi_p}))$ を与える。しばしばこれらの元に対しても peu ramifié 又は très ramifié であると言う事がある。

(3) peu ramifié であるか très ramifié であるかについては体論的特徴付けもある。実際、Serre はこちらを $k(\overline{\rho})$ の定義に用いている ([Ser87] p.186 参照)。

注意 2.6. $\overline{\rho}:G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ に対し、レベル $N(\overline{\rho})$ は p の外の情報のみで ($\{\overline{\rho}|_{I_l}\}_{l\neq p}$ のみで)、重さ $k(\overline{\rho})$ は $\overline{\rho}|_{I_p}$ のみで決まっていることに注意せよ。

さて、以上の用語を用いることで、Serre は与えられた法 p 表現がどんなレベル、どんな重さの保型形式から来るかについても予想を提示している。これは強い Serre 予想と呼ばれるが、現在では弱い Serre 予想から強い Serre 予想が従うことが知られている。具体的には次が証明されている:

定理 2.7. p を奇素数、$\overline{\rho}$ を S 型法 p 表現とする。もし $\overline{\rho}$ が保型的であれば、$\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ の元から来る。

証明については [Edi97] 及びその参考文献を見られたい。特に定理 1.5 から、強い Serre 予想の一部である

定理 2.8. p の外で不分岐な S 型法 p 表現 $\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の元から来る。

も従うことが分かる。

2.4. **法 p 表現の諸性質.** この節は初読の際には飛ばし、必要に応じて参照すれば十分である。

補題 2.9. ρ を標数が 2 と異なる体 Ω 上の奇の既約 *2* 次元表現とすると、ρ は絶対既約となる。

証明 . V を ρ の表現空間とする。仮に $G_{\mathbb{Q}}$ 安定な 1 次元部分 $\overline{\Omega}$ ベクトル空間 $W\subset V\otimes_{\Omega}\overline{\Omega}$ があったとする。

このとき複素共役 $c\in G_{\mathbb{Q}}$ を取り $V^{\pm}=\{v\in V|\,cv=\pm v\}$ とおくと、仮定よりこれらは各々Ω 上 1 次元であり、さらに $W\subset V^+\otimes_{\Omega}\overline{\Omega}$ または $W\subset V^-\otimes_{\Omega}\overline{\Omega}$ であることが W の基底への作用から直ちに分かるが、次元の比較によりいずれかの等号が成立する。

このとき $(V^{\pm}\otimes_{\Omega}\overline{\Omega})\cap V=V^{\pm}$ より V^+ 又は V^- が $G_{\mathbb{Q}}$ 不変部分ベクトル空間になり既約性に矛盾する。よって $V\otimes_{\Omega}\overline{\Omega}$ も既約である。

以下の補題はいずれも Serre 重さの定義及び $\mathbb{Q}$ の類体論から容易に従う。

補題 2.10. $\mathbb{F}$ を標数 p の有限体、$\overline{\rho}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{F}$ 上の表現とする。このとき、$\overline{\rho}$ の重さ $k(\overline{\rho})$ に対し以下が成り立つ。

(1) $p > 2$ のときは $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p^2 - 1$、$p = 2$ のときは $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq 4$ が成り立つ。

(2) $p \neq 2$ のとき、ある i が存在して $2 \leq k(\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_p}^i) \leq p+1$ となる、つまり適当に $\overline{\chi_p}$ の冪で捻ることでその重さ k を $2 \leq k \leq p+1$ とできる。

(3) $p \neq 2$ で、$2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$ のとき、$\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}_p}$ は次の形のものに限られる。

(a) $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^b & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*(*ここで b は $1 \leq b \leq p-1$ なる整数*)* の形の表現と同値。このとき、$b > 1$ なら $k(\overline{\rho}) = b+1$ であり、$b = 1$ なら $k(\overline{\rho}) = 2$ 又は $p+1$ である。更に、$b = 1$ のときは $\overline{\rho}$ が p で有限平坦であることと $k(\overline{\rho}) = 2$ であることとは同値である。

(b) $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}_p} \cong \Psi^a \oplus \Psi'^a$ (ここで a は $1 \leq a \leq p-1$ なる整数) が成り立つ。このとき $k(\overline{\rho}) = a+1$ である。

(4) $p \neq 2$ とし、$\overline{\rho}|_{D_p}$ は絶対既約とする。このとき常に $k(\overline{\rho}) \neq p+1$ であり、また $2 < k(\overline{\rho}) < p+1$ ならば $k(\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_p}^{2-k(\overline{\rho})}) = p+3-k(\overline{\rho})$ が成り立つ。

補題 2.11. $\mathbb{F}$ を標数 p の有限体とする。

(1) $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{F}$ 上の *1* 次元表現で p の外で不分岐なものは $\overline{\chi_p}^i (0 \leq i \leq p-2)$ の形のものに限る。

(2) $\overline{\rho}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{F}$ 上の *2* 次元表現で p の外で不分岐なものとすると、$\det \overline{\rho} = \overline{\chi_p}^{k(\overline{\rho})-1}$ が成り立つ。特に、$p > 2$ 且つ $\overline{\rho}$ が奇ならば $k(\overline{\rho})$ は偶数である。

(3) $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を可約な表現とすると、ある整数 i に対して $\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_p}^i$ は通常になる。

練習 2.12. これらの補題を証明せよ。

次の命題は Raynaud による ([Ray74]):

命題 2.13. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $\overline{\rho}$ が $\overline{\rho}|_{I_p} \cong \Psi^a \oplus \Psi'^a$(但し a は $1 \leq a \leq p-1$ なる整数) を満たすとき、$\overline{\rho}$ が有限平坦であることと $k(\overline{\rho}) = 2$ であることとは同値である。

特に、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の重さ *2* の表現は有限平坦である。

最後に二面体群的表現の概念を導入し、これに関する幾つかの事実を紹介する。

定義. 体 Ω 上の表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\Omega)$ に対し、自然な全射 $\mathrm{GL}_2(\Omega) \to \mathrm{PGL}_2(\Omega) = \mathrm{GL}_2(\Omega)/\Omega^{\times}$ との合成を ρ^{proj} と書く。$\rho^{\mathrm{proj}}(G_{\mathbb{Q}})$ が二面体群と同型であるとき、ρ は**二面体群的** (dihedral) であるという。

命題 2.14. $\mathbb{F}$ を標数 p の有限体、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の *2* 次元法 p 表現とする。また、$E = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p})$、$F = \mathbb{Q}(\mu_p)$ とおく。このとき次の *(1)*、*(2)* は同値であり、またこれらが成り立つとき *(3)* も成り立つ*:*

(1) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は絶対可約である。

(2) $\overline{\rho}|_{G_E}$ は絶対可約である。
(3) $\overline{\rho}$ は絶対可約又は G_E のある指標から誘導される。特に、絶対可約又は二面体群的である。

証明．まず (2) ⇒ (3) を示す。$\overline{\rho}$ が絶対既約であるとし、V を $\overline{\rho}$ の表現空間とする。$\overline{\rho}|_{G_E}$ の絶対可約性より、ある $\mathbb{F}$ の有限次拡大 $\mathbb{F}'$ に対して G_E の $\mathbb{F}'$ 上の 1 次元表現 W から $\mathbb{F}'\otimes_{\mathbb{F}}V$ への単射が存在するが、このとき随伴性より $\mathbb{F}'[G_{\mathbb{Q}}]$ 準同型 $\mathrm{Ind}_{G_E}^{G_{\mathbb{Q}}}W \to \mathbb{F}'\otimes_{\mathbb{F}}V$ ができ、これは $\overline{\rho}$ の絶対既約性より同型。これより二面体群的であることも容易に分かる ($\overline{\rho}$ の絶対既約性より $\mathrm{Image}\,\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$ は非可換であることに注意)。(1) ⇒ (2) は、より一般的な次の補題より従う。

補題 2.15. G を群、N 及び H をその正規部分群とし、$N\supset H$、$[G:N]=2$、G/H は巡回群と仮定する。また、Ω を体、V を Ω 上の *2* 次元ベクトル空間、$\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ を G の Ω 上の表現とする。このとき、

(1) $\rho|_H$ が可約で $\mathrm{Image}\,(\rho|_H)$ がスカラー行列以外を含むとすると、$\rho|_N$ も可約である。
(2) $\rho|_H$ が絶対可約ならば $\rho|_N$ も絶対可約である。

証明．(1) を示す。ρ は既約であるとして良い。$W\subset V$ を H 安定な 1 次元部分 Ω ベクトル空間、$e\in W$ をその基底とし、$\psi: H\to\Omega^{\times}$ を $\rho(h)e=\psi(h)e\,(h\in H)$ で定める。また、$g\in G$ に対して $\psi^g: H\to\Omega^{\times}$ を $\psi^g(h)=\psi(g^{-1}hg)\,(h\in H)$ とおく。

さて、$\sigma\in G$ を $G=\coprod_{i=0}^{n}H\sigma^i$ となるよう取り、$e'=\rho(\sigma)e$ とおく。ρ は既約であるので $e'\notin W$ であり、従って $\{e,e'\}$ が V の基底となる。さらに $\rho(h)e'=\psi^{\sigma}(h)e'\,(h\in H)$ より e' で張られる部分空間も H 安定である。

もし $\psi=\psi^{\sigma}$ であるとすると $\mathrm{Image}\,(\rho|_H)$ がスカラー行列以外を含むという仮定に反するので、$\psi\neq\psi^{\sigma}$ 従って $\psi^{\sigma}\neq\psi^{\sigma^2}$ である。

すると、$e''=\rho(\sigma^2)e$ が $\rho(h)e''=\psi^{\sigma^2}(h)e''$ を満たすことから $e''\in W$ 及び $\psi^{\sigma^2}=\psi$ が従う。

あとは $N=\coprod_{i:\mathrm{even}}H\sigma^i$ に注意すれば W が N 安定だと分かる。

(2) を示す。(1) より、Ω が代数的閉体、$\rho|_H$ が可約、$\mathrm{Image}\,(\rho|_H)\subset\Omega^{\times}$ の場合を考えれば十分である。このとき、G/H の生成元の持ち上げ $\sigma\in G$ を取り、$v\in V\setminus\{0\}$ を適当にとる。するとある $\alpha\in\Omega$ について $\rho(\sigma)^n v=\alpha v$ であるので Ω が代数的閉体であることから $\rho(\sigma)w=\beta w$ なる $w\neq 0$ 及び $\beta\in\Omega$ が得られる。このとき ρ 自身が可約となる。

以下の補題及び定理は今後しばしば用いられる。

補題 2.16. p を奇素数、$\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ を法 p 表現、$\psi: G_{\mathbb{Q}}\to\overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の指標とする。このとき $\overline{\rho}$ が保型的であることと $\overline{\rho}\otimes\psi$ が保型的であることとは同値である。

証明は例えば [土三 76] の補題 4.3.10 (2) などを参照せよ。

定理 2.17. *(Hecke)* $G_{\mathbb{Q}}$ の *2* 次元表現 $\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ が奇かつ二面体群的であれば、$\overline{\rho}$ は保型的である。

注意 2.18. より一般の結果として Langlands-Tunnell の定理があるが、本稿では用いないので省略する。

3. p 進表現に関する諸用語

3.1. **基本用語.** ここでは、クリスタリンや通常といった p 進表現に関する基本的な概念について復習する。これらについての詳細は例えば Astérisque の本 ([MR194]) などを参照せよ。

まず、χ_p で p 進円分指標 $G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^\times$、$\omega_p$ で $\overline{\chi_p}$ の Teichmüller 持上げ $G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{F}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ を表す。$\mathbb{Z}_p$ 代数 A に対する $\mathbb{Z}_p^\times \to A^\times$ との合成や $G_{\mathbb{Q}_p} (\subset G_{\mathbb{Q}})$ 及びその部分群への制限も χ_p、ω_p で表す。

定義. K 及び L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。

(1) R を完備 Noether 局所 $\mathbb{Z}_p$ 代数とし、V を G_K が R 線型に作用する階数 2 の自由 R 加群とするとき、V が**通常** (ordinary) とは、I_K 安定な階数 1 の自由部分 R 加群 $W \subset V$ で
 (a) V/W は I_K が自明に作用する階数 1 の自由 R 加群で、
 (b) W へは I_K が χ_p^a(a は 0 以上の整数) として作用する
 ようなものが存在することを言う。

(2) V を G_K の L 上の表現とする。
 (a) V が**通常**とは、ある G_K 安定な $\mathscr{O}_L$ 格子で通常であるようなものが存在することを言う。
 (b) V が**クリスタリン** (crystalline) または**半安定** (semistable) であるとは、G_K の $\mathbb{Q}_p$ 上の表現としてみたときクリスタリンまたは半安定であることを言う。**潜在的クリスタリン** (potentially crystalline)、**潜在的半安定** (potentially semistable) についても同様に定義する。

次に、p 進表現の重さを定義する。後で見るように、これは法 p 表現の (Serre) 重さと法 p 還元を通じて関係が深い。

定義. K 及び L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、V を G_K の L 上の 2 次元表現とする。$\mathbb{C}_p$ で $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の完備化を表す。

このとき、十分小さな G_K の開部分群 H に制限すれば、任意の埋め込み $\iota : L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ に対し、$\mathbb{C}_p \otimes_{\iota, L} V$ に $\mathbb{C}_p$ 半線型に V への作用を拡張できる。

さて、k を整数とするとき、任意の埋め込み $\iota : L \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ に対し (H の $\mathbb{C}_p$ 上の半線型表現として)

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\iota, L} V \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(k-1)$$

であるとき、V は**重さ** k (of weight k) であると言う。ここで $\mathbb{C}_p(i) = \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$ である ($G_{\mathbb{Q}_p}$ は対角的に作用する)。重さ 2 の (潜在的) クリスタリン表現であることを特に **(潜在的)Barsotti-Tate** (potentially -) であるともいう (以上は H の選び方にはよらない)。

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、ρ を G_K の p 進表現、K' を K の有限次拡大とするとき $\rho|_{G_{K'}}$ が Barsotti-Tate であることを K' 上 Barsotti-Tate であるなどとも言う。また、F を代数体、$\mathfrak{p}$ を p の上の F の素点とするとき、G_F の表現が $\mathfrak{p}$ において通常 (クリスタリン、半安定、Barsotti-Tate) である、ということを $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ に制限したときそうであることとして定義する。

さて、$K = \mathbb{Q}_p$ の場合は L の埋め込みによらないことが次の命題より分かる:

命題 3.1. L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の有限次元表現とし、H を L の全ての共役 ($\subset \overline{\mathbb{Q}_p}$) の固定群に含まれるような $G_{\mathbb{Q}_p}$ の開部分群とする。このとき H の $\mathbb{C}_p$ 半線型表現として $\mathbb{C}_p \otimes_{\iota, L} V$ は ι によらず同型である。

証明は [Win]、Proposition 1 を参考にされたい。このことと、G_K の $\mathbb{Q}_p$ 上の 1 次元半安定表現 ρ は $\rho|_{I_K} \cong \chi_p^i|_{I_K} (i \in \mathbb{Z})$ を満たすこと (例えば [Fon94b]、5.4.1) から以下の系が従う。

系 3.2. L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。このとき $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の *1* 次元表現 ψ に対し、有限次拡大 K への制限 $\psi|_{G_K}$ が半安定となるとすると、ある整数 i が存在して $\psi|_{G_K} = \chi_p^i|_{G_K}$ となる。特に、ψ 自身半安定ならば、それは円分指標の整数冪である。

また、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の *2* 次元表現 ρ が可約かつ半安定であるとき、ρ の適当な円分指標の冪による捻り $\rho \otimes \chi_p^i$ は通常になる。また、重さ *2* 以上であれば ρ 自身通常である。

系 3.3. L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。このとき、p で潜在的半安定な連続指標 $\psi : G_{\mathbb{Q}} \to L^\times$ は p 進円分指標の冪と有限指数の指標との積である。また、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ が p で重さ k の潜在的半安定表現であるとすると、$\det \rho$ は p 進円分指標の $k-1$ 乗と有限指数の指標との積である。

さて、今後は簡単の為に表現の係数を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ にすることもしばしばある。それが特に新しい現象を引き起こさないことは以下の命題によって保証される:

命題 3.4. $\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ をコンパクト *Hausdorff* 群 Π の連続表現とする。このとき、$\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大 $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ が存在して、$\rho(\Pi) \subset \mathrm{GL}_2(L)$ となる。

証明は [BM02] Lemme 2.2.1.1 を参考にされたい。以下、$\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の G_K (K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) の表現 ρ が、ある $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ 上のクリスタリン表現の係数拡大になっているとき、ρ をクリスタリン表現と呼ぶ。その他の概念についても同様である。

3.2. **p 進表現とその法 p 還元.** この節では p 進表現の法 p 還元という概念を導入し、これらの間に成り立つ関係について紹介する。

定義. L を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の部分体、$\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ を副有限群 Π の 2 次元連続表現とする。このとき、自然な群準同型 $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_L)$ との合成を $\overline{\rho}$ と書き、ρ の**還元** (reduction) という。また ρ は $\overline{\rho}$ の**持ち上げ** (lifting) であるという。

また、L 上の表現 $\tilde{\rho} : \Pi \to \mathrm{GL}_2(L)$ に対して、これと共役 (表現として同値) で $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ を経由するものを 1 つ取り、その還元を取ることで得られる $\mathbb{F}_L$ 上の表現 $\overline{\rho} : \Pi \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_L)$ も $\tilde{\rho}$ の還元と呼ぶ。

注意 3.5. 一般に、$\tilde{\rho}$ に対し上記のようにして得られる還元は一意には定まらないが、半単純化による違いを除けば一意に定まる。

練習 3.6. Π を副有限群、L を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の部分体とする。

(1) $\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_2(L)$ を Π の L 上の連続表現とするとき、ある $g \in \mathrm{GL}_2(L)$ を取れば、$g^{-1}\mathrm{Image}(\rho) g \subset \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ とできることを示せ。

(2) $\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_2(L)$ と $\rho' : \Pi \to \mathrm{GL}_2(L)$ とは互いに共役で、$\mathrm{Image}(\rho)$ 及び $\mathrm{Image}(\rho')$ は共に $\mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ に含まれるとき、これらの還元の半単純化 $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ と $(\overline{\rho'})^{\mathrm{ss}}$ とは同値であることを示せ。

持ち上げと還元の間には既約性や重さに関し様々な関係が知られている。それについて述べる前に Weil-Deligne 群についての用語を導入しておく (Weil-Deligne 群、Weil-Deligne 群の表現やその Frobenius 半単純化、l 進表現 ρ ($l \neq p$ でも $l = p$ でもよい) に伴う Weil-Deligne 群の表現 $\mathrm{WD}(\rho)$ の定義については [Del73]、[Tat79]、[Fon94a] などを参照されたい)。

定義. K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、W'_K をその Weil-Deligne 群とし、ρ を W'_K の体 Ω 上の 2 次元表現とする。このとき、W'_K はその部分群として $I_K \times \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ を持つことに注意して、ρ をこれに制限したものの同型類を**惰性的 Weil-Deligne パラメータ** (inertial Weil-Deligne parameter) といい、さらに I_K に制限したものの同型類を **Galois 型**(Galois type) という。ρ の Galois 型は $\tau(\rho)$ と表す。また、誤解が無い場合には G_K の $\overline{\mathbb{Q}_l}$ (l は p でも $\neq p$ でもよい) 上の連続表現 ρ に対し、$\tau(\mathrm{WD}(\rho))$ を単に $\tau(\rho)$ と書く。

Galois 型は連続表現 $I_K \to \mathrm{GL}_2(\Omega)$ (Ω の位相は離散位相) より、惰性的 Weil-Deligne パラメータは連続表現 $I_K \to \mathrm{GL}_2(\Omega)$ 及び冪零行列 $N \in \mathrm{M}_2(\Omega)$ (であってある条件を満たすもの) より成る。

定理 3.7. *p を奇素数、$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を p 進連続表現とし、$\overline{\rho}$ をその還元 (の 1 つ) とする。*

(1) ρ が、ある $2 \leq k \leq p+1$ なる整数 k に対して重さ k のクリスタリン表現であるとする。このとき、
  (a) ρ が可約であることと、$\overline{\rho}$ が可約であることとは同値であり、
  (b) $\overline{\rho}|_{I_p}$ は次のいずれかに同型:
   - $\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、ここで $k=2$ ならば $*$ は *peu ramifié*
   - $\Psi^{k-1} \oplus \Psi'^{k-1}$

  (c) 特に、$k \neq p+1$ のとき $k(\overline{\rho}) = k$ であり、$k = p+1$ のとき
   (i) ρ が既約ならば $k(\overline{\rho}) = 2$ であり、
   (ii) ρ が可約ならば $k(\overline{\rho}) = 2$ 又は $p+1$ である。

(2) ρ が重さ 2 の潜在的クリスタリン表現であるとし、ある $0 \leq j < p-1$ なる整数 j によって $\tau(\rho) = \mathbf{1} \oplus \omega_p^j$ であるとする。このとき、
  (a) ρ が可約であることと、$\overline{\rho}$ が可約であることとは同値であり、
  (b) $\overline{\rho}|_{I_p}$ は次のいずれかに同型:
   - $\begin{pmatrix} \overline{\chi_p} & * \\ 0 & \overline{\chi_p}^j \end{pmatrix}$、ここで $j=0$ ならば $*$ は *peu ramifié*
   - $\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^{1+j} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、ここで $j=0$ ならば $*$ は *peu ramifié*
   - $\Psi^{j+1} \oplus \Psi'^{j+1}$

  (c) 特に、$k(\overline{\rho}) = j+2$ 又は $k(\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_p}^{-j}) = p-j+1$ が成り立つ。

(1) は $k < p+1$ のときは Fontaine-Laffaille ([FL82])、$k = p+1$ のときは Berger-Li-Zhu ([BLZ04]) による。(2) は Savitt による ([Sav04])。この定理は証明しない。

練習 3.8. 上の定理 *(1)*、*(2)* それぞれについて、*(b)* から *(c)* を導け。

注意 3.9. 関手 WD と制限写像との両立性により、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の 2 次元連続表現 ρ が $\mathbb{Q}_p(\mu_p)$ 上クリスタリンであれば、ある整数 a、b について $\tau(\rho) = \omega_p^a \oplus \omega_p^b$ が成り立つ。さらに、テンソルと WD との両立性により、ある $i \in \mathbb{Z}$ を取れば $\tau(\rho \otimes \omega_p^i) = \mathbf{1} \oplus \omega_p^j$ ($j \in \mathbb{Z}$) の形にできる。

4. 証明のための諸定理

この章では Serre 予想の証明に用いられる幾つかの定理を紹介する。

4.1. **保型性持ち上げ定理 (modularity lifting theorem, MLT).** まず、法 p 表現のときと同様に p 進表現に対しても保型性の概念を定義する。

定義. $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の 2 次元表現とする。

(1) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1(N))$ を正規化された同時固有新形式とする。このとき、ρ が (ι_p に関して)f **から来る** (arise from f) とは、任意の素数 $l \nmid Np$ に対して

$$\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_l) = a_l \mod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$$

但し Frob_l は算術的 Frobenius を表す、が成り立つことである。

(2) ρ が**保型的** (modular) であるとは、ある f から来ることをいう。

注意 4.1. 法 p 表現のときとは異なり、上の状況下では ρ の既約性は自動的に成り立っている。また、$\det \rho$ は χ_p^{k-1} と有限位数指標との積になっている。特に、f の重さ k は ρ から復元できる。

補題 2.16 に対応して次も成り立つ:

補題 4.2. p を奇素数、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を p 進表現、$\psi : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}_p}^{\times}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の有限位数の指標とする。このとき ρ が保型的であることと $\rho \otimes \psi$ が保型的であることとは同値である。

ρ の還元を $\overline{\rho}$ とするとき ρ の保型性から $\overline{\rho}$ のそれが従うことは明らかであるが、逆は全く自明でない。これに関し一定の条件下で $\overline{\rho}$ の保型性から ρ の保型性を保証してくれるのが次の保型性持ち上げ定理 (“$R = T$”定理) である。これについては第 7 章で解説する。

定理 4.3. (MLT) p を奇素数、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を p 進表現とし、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ をその還元 *(の 1 つ)* とする。

このとき、ρ が既約で $\overline{\rho}$ が保型的と仮定すると、以下の各条件下で ρ も保型的となる。

(1) ρ は p の外で不分岐で、更にある $2 \le k \le p$ について p において重さ k のクリスタリンである。
(2) ρ は p の外で不分岐で、p において重さ *2* の半安定表現である。
(3) ρ は p の外で不分岐で、$\mathbb{Q}_p(\mu_p)$ 上 *Barsotti-Tate* である。
(4) ρ は有限個の素数を除いて不分岐で、p において *Barsotti-Tate* である。
(5) ρ は有限個の素数を除いて不分岐で、p において通常且つその重さは 2 以上の偶数である。

注意 4.4. これらの内、(2) は本稿では必要としないが、Khare の論文 ([Kha06]) で (別の目的の為に) 紹介されているので折角だから書いておく。

注意 4.5. 後 (系 5.5) で証明するように、定理 4.3(1) は $2 \le k \le p+1$ でも成り立ち、実際 Serre 予想の証明の後半ではこの形の保型性持ち上げ定理も必要となるが、この結果は Serre 予想の証明の途中で系として得られるため、巡回論法に見えることを避ける為ここでは定理の形では述べておかないことにする。

4.2. **Abel 多様体の存在定理.** この節及び次の節の定理は第 9 章で解説する。

定理 4.6. $\mathbb{F}$ を標数 $p > 2$ の有限体、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を二面体群的でない $\mathbb{F}$ 上の S 型法 p 表現とする。更に

(1) 全ての素数 $l \neq p$ に対し、$\overline{\rho}|_{D_l}$ は不分岐または通常であり、

(2) (a) $k(\overline{\rho}) = p + 1$ 又は
(b) $N(\overline{\rho}) \neq 1$ 且つ $k(\overline{\rho}) = 2$ である

と仮定する。

このとき、代数体 E 及びその有限素点 λ、次元 $[E : \mathbb{Q}]$ の $\mathbb{Q}$ 上の $Abel$ 多様体 A、埋め込み $\mathscr{O}_E \hookrightarrow \mathrm{End}\,(A/\mathbb{Q})$ 及び同型 $\mathscr{O}_E/\lambda \cong \mathbb{F}$ で

(1) $\overline{\rho} \cong \overline{\rho_{A,\lambda}}$ を誘導し、
(2) A は $pN(\overline{\rho})$ の外で良還元、$N(\overline{\rho})$ を割る素数で半安定還元を持ち、
(a) $k(\overline{\rho}) = p + 1$ の場合は p で半安定還元を、
(b) $k(\overline{\rho}) = 2$ の場合は p で良還元を持つ

ようなものが存在する。

注意 4.7. 次章の Serre 予想の証明で用いるのは (a) の場合 ($p = 5$) のみである。(b) は第 10 章で用いる。

4.3. **狭義両立系の存在定理.** まず、狭義両立系の定義から始める。この定義には様々な流儀があるが、ここでは [KW] で使われているものを多少修正して用いる。

定義. E 及び F を代数体とする。

(1) $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ が G_F の 2 次元表現の E **有理的狭義両立系** (E-rational strictly compatible system) であるとは
(a) 各素数 l 及び各埋め込み $\iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ に対し与えられた連続半単純表現 $\rho_\iota : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_l})$ の族及び、
(b) F の各有限素点 q に対して与えられた、Frobenius 半単純な Weil-Deligne 群の表現 $r_q : W'_{F_q} \to \mathrm{GL}_2(E)$ の族

の組であって、
- 有限個の素点を除き r_q は不分岐で、
- 任意の素数 l、埋め込み $\iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ 及び l を割らない F の素点 q に対して
$$\mathrm{WD}(\rho_\iota|_{D_q})^{F-\mathrm{ss}} \cong \iota_*(r_q)$$
ここで左辺は $\rho_\iota|_{D_q}$ に伴う Weil-Deligne 群の表現の Frobenius 半単純化を、ι_* は ι に関する係数拡大を表す、

を満たすものをいう。

(2) 任意の ρ_ι が既約 (奇、保型的) のとき、$\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ は既約 (奇、保型的) であるという。

例. (用語については 12.1 節、12.2 節を参照) F を総実体、π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現で重さ $k \geq 2$ であるようなものとし、M をその定義体とすると、$(\rho_{\pi,\iota})_\iota$ は G_F の 2 次元表現の M 有理的狭義両立系 (のデータの一部) となる。

次の事実は狭義両立系の定義より明らかではあるが、以後活躍する大変重要な事実である。

補題 4.8. $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ に対し、$\boldsymbol{\rho}$ が保型的であることと、ある ρ_ι が保型的であることとは同値である。

定義. $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ を $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元表現の E 有理的狭義両立系とする。

(1) l を素数、$\iota = \iota_l|_E$ とするとき、ρ_ι のことを ρ_l とも表す。
(2) $\boldsymbol{\rho}$ が $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ の**持ち上げ** (lifting) であるとは、ρ_p の還元が $\overline{\rho}$ と同型になることを言う。

狭義両立系の存在定理を紹介する前にもう一つだけ記号を導入しておく。

定義. p、q を素数とする。このとき、自然な準同型

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_q)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\omega_q} \overline{\mathbb{Q}_q}^{\times}$$

及び予め固定してある埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$、$\iota_q : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_q}$ によって誘導される同型 $\mu_{q-1}(\overline{\mathbb{Q}_p}) \cong \mu_{q-1}(\overline{\mathbb{Q}_q})$ との合成によって、$G_{\mathbb{Q}}$ の p 進指標が得られる。これを $\omega_{q,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}_p}^{\times}$ と書く。また、$\overline{\omega_{q,p}} : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{F}_p}^{\times}$ をその還元とする。$G_{\mathbb{Q}}$ の部分群 (特に $I_{\mathbb{Q}_q}$) への制限も同じ記号で表す。

練習 4.9. (1) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\mu_q)/\mathbb{Q}_q)$ を経由する任意の $I_{\mathbb{Q}_q}$ の p 進 (法 p) 表現は $\omega_{q,p}$ の冪 ($\overline{\omega_{q,p}}$ の冪) であることを示せ。

(2) $p^r || q-1$ とする。このとき、整数 i、j に対し $\overline{\omega_{q,p}}^i \equiv \overline{\omega_{q,p}}^j \mod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$ であることと $i \equiv j \mod (q-1)/p^r$ であることとは同値であることを証明せよ。

定理 4.10. p を奇素数、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ を S 型表現とし、その重さ $k(\overline{\rho})$ は $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$、$k(\overline{\rho}) \neq p$ を満たすとする。さらに $\overline{\rho}$ は二面体群的でないと仮定する。

このとき以下のそれぞれについて、$\overline{\rho}$ が条件 *(a)* を満たせば、代数体 E 及び $G_{\mathbb{Q}}$ の *2* 次元表現の E 有理的狭義両立系 (ρ_ι) で、奇かつ既約であり、条件 *(b)* を満たし $\overline{\rho}$ の持ち上げであるようなものが存在する。

(1) (a) $N(\overline{\rho}) = 1$
(b) 各奇素数 l に対し、ρ_l は l の外で不分岐で l において重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリンである。

(2) (a) $N(\overline{\rho}) = 1$ かつ $\overline{\rho}$ は p において通常である。
(b) ρ_p は p の外で不分岐、
$\rho_p|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\chi_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値で、さらに $k(\overline{\rho}) = 2$ なら ρ_p は p で *Barsotti-Tate* である。
一方、p と異なる各奇素数 l に対し ρ_l は l と p の外で不分岐で、
(i) l において *Barsotti-Tate*、
(ii) $\rho_l|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_{p,l}^{k(\overline{\rho})-2} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値で、$k(\overline{\rho}) = 2$ ならば更に ρ_l は p で不分岐である。

(3) ここでは正整数 i を一つ固定しておく。また、$q \neq p$ は奇素数とし、$p | q-1$、$i < q-1$ を満たすとする。
(a) $k(\overline{\rho}) = 2$、$N(\overline{\rho}) = q$ で、$\overline{\rho}|_{I_q}$ は非自明且つ

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega_{q,p}}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値。

(b) ρ_p は p 及び q の外で不分岐、p において *Barsotti-Tate* で、$\rho_p|_{I_q}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_{q,p}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値 ($\omega_{q,p}^i \not\equiv \mathbf{1}$ であることに注意)。
一方、ρ_q は q の外不分岐で、$\rho_q|_{D_q}$ は $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ 上 *Barsotti-Tate* であり、その還元に対して $k(\overline{\rho_q}) = i+2$ または $k(\overline{\rho_q} \otimes \overline{\chi_q}^{-i}) = q+1-i$ が成り立つ。

5. 主定理の証明

この章では前章までに導入された定理を認めた上で主定理 1.5 の証明を行う。

5.1. **ウエイトが低い場合**. 最初に、Khare、Wintenberger の仕事以前に Serre 予想に関して知られていた幾つかの結果を引用する。

まず、下の定理は Tate ($p = 2$) と Serre ($p = 3$) により、その次の定理は Schoof により証明された:

定理 5.1. *(Tate、Serre) p を 2 または 3 とする。このとき、$G_{\mathbb{Q}}$ の表現*

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

は p の外で不分岐ならば可約である。

定理 5.2. *(Schoof)*

(1) p を 2、3、5、7、13 のいずれかとする。このとき、$\mathbb{Q}$ 上の非自明な*(*即ち *1* 次元以上の*)Abel* 多様体で、p の外で良還元を持ち、p で半安定還元を持つようなものは存在しない。
(2) $\mathbb{Q}$ 上の *Abel* 多様体で、11 の外で良還元を持ち、11 で半安定還元を持つようなものはモジュラー曲線の *Jacobi* 多様体 $J_0(11)$ の冪に同種 *(isogenous)* である。

注意 5.3. Schoof の定理のうち、この章、即ち Khare と Wintenberger によるレベル 1 の Serre 予想の証明で必要となるのは $p = 5$ の場合のみである。他の結果は演習問題 (第 10 章) 及び Dieulefait の証明 (第 11 章) で用いる。

さて、Serre 予想の証明を始める。2 以上の整数 k 及び素数 p に対し、
予想 $\mathrm{S}(k,p)$: 任意のレベル 1、重さ k の S 型法 p 表現は保型的である。
予想 $\mathrm{S}(p)$: 任意のレベル 1 の S 型法 p 表現は保型的である。
とおく。

補題 2.10 (2)、補題 2.11 (2) 及び補題 2.16 より、奇素数 p に対して予想 $\mathrm{S}(p)$ を確かめるには $2 \le k \le p+1$ なる偶数 k について予想 $\mathrm{S}(k,p)$ を確かめれば十分であること、また、定理 5.1 により予想 S(2)、予想 S(3) は示されていることに注意されたい。

定理 5.4. 任意の素数 p に対しレベル 1、重さ 2 の S 型法 p 表現は存在しない。特に、予想 $\mathrm{S}(2,p)$ は正しい。

証明 . $p = 2$、3 のときは Serre と Tate の定理 (5.1) より従う。また、$S_2(SL_2(\mathbb{Z})) = 0$、Hecke の定理 (2.17) 及び定理 2.7 より、レベル 1、重さ 2 の S 型法 p 表現で二面体群的であるようなものも存在しない。そこで以下、レベル 1、重さ 2 の S 型法 $p \ge 5$ 表現 $\overline{\rho}$ で二面体群的でないものがあったとして矛盾を導く。

定理 4.10 (1) によって得られる $G_{\mathbb{Q}}$ の表現の既約 E 有理的狭義両立系 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ を考える。これにともなう法 3 表現 $\overline{\rho_3}$ は定理 5.1 により可約となる。ρ_3

が 3 でクリスタリンでその重さが $2 \leq 3+1$ であることに注意すると、定理 3.7 (1a) 及び系 3.2 により $\rho_3|_{D_3}$ は通常であることが分かる。

定義より $\overline{\rho_3}$ は保型的であるから、定理 4.3 (5) によって ρ_3 は保型的だと分かる。これは ρ_3 が $S_2(SL_2(\mathbb{Z}))$ の元から来ることを意味するが、$S_2(SL_2(\mathbb{Z}))=0$ なのでこれは矛盾。以上より定理は示された。

系 5.5. (MLT 補足) p を奇素数、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を p 進表現とし、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ をその還元 *(の 1 つ)* とする。

このとき、ρ が既約で $\overline{\rho}$ が保型的と仮定すると、以下の条件下で ρ も保型的となる*:*

ρ は p の外で不分岐で、更にある $2 \leq k \leq p+1$ について ρ は p において重さ k のクリスタリンである。

証明．ρ の重さが $p+1$ の場合に示せば十分である。定理 3.7(1) 及び定理 5.4 により $\rho|_{D_p}$ が既約ではあり得ないので、可約の場合に証明すればよいが、この場合は系 3.2 に注意すれば定理 4.3 (5) より従う。

定理 5.6. 予想 S(6, 5) は正しい。

証明．$\overline{\rho}$ をレベル 1、重さ 6 の S 型法 5 表現とする。これが二面体群的なら Hecke の定理 (2.17) により保型的である。そうでないとすると定理 4.6 によって 5 の外で良還元、5 で半安定還元を持つ $\mathbb{Q}$ 上の非自明な Abel 多様体が得られるが、これは Schoof の定理 5.2 ($p=5$ の場合) に矛盾する。

5.2. **帰納法の為の準備.**

定理 5.7. p を奇素数、k を $2 \leq k \leq p+1$ なる整数とする。このとき予想 $\mathrm{S}(k,p)$ が成り立てば任意の $q \geq k-1$ なる奇素数 q に対しても予想 $\mathrm{S}(k,q)$ が成り立つ。

証明．p、q を奇素数、k を $2 \leq k \leq p+1$、$k \leq q+1$ なる整数とし、予想 $\mathrm{S}(k,p)$ を仮定する。レベル 1、重さ k の S 型法 q 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_q})$ を一つ取り、これが保型的であることを示す。Hecke の定理 (2.17) より、$\overline{\rho}$ は二面体群的でないとしてよい。また、補題 2.11 より k は偶数である。

$\overline{\rho}$ に定理 4.10 (1) を適用して得られる E 有理的狭義両立系を $\boldsymbol{\rho}=(\rho_\iota)$ とする。このとき ρ_p は奇かつ既約、p の外不分岐で、p に於いて重さ $k\,(\leq p+1)$ のクリスタリンである。従って $\overline{\rho_p}$ も奇で、定理 3.7(1-c) よりその重さは k または 2 である。定理 5.4 と仮定 (予想 $\mathrm{S}(k,p)$) より $\overline{\rho_p}$ の保型性が分かる。

すると、保型性持ち上げ定理 (系 5.5) により ρ_p も保型的であることが分かり、これより $\boldsymbol{\rho}$ の、従って $\overline{\rho}$ の保型性も分かる。

系 5.8. 任意の素数 p に対し、予想 $\mathrm{S}(4,p)$ は正しい。また、予想 S(5) は正しい。

証明．前半は、定理 5.1 より予想 S(4, 2)、S(4, 3) が成り立つことに注意して定理 5.7 を適用すればよい。後半を示すには、定理 5.4 の前の注意より予想 S(2, 5)、S(4, 5)、S(6, 5) を確かめればよいが、これらはそれぞれ定理 5.4、前半の結果、定理 5.6 より示されている。

系 5.9.
(1) p を奇素数とする。このとき予想 $\mathrm{S}(p)$ が正しければ任意の素数 q 及び $k \leq p+1$ を満たす任意の k に対し予想 $\mathrm{S}(k,q)$ も正しい。
(2) 無限個の素数 p に対し予想 $\mathrm{S}(p)$ が正しければ、定理 *1.5*、即ちレベル 1 の *Serre* 予想は正しい。

証明．(2) は (1) より明らかなので (1) を示す。$q=2$ のときは Tate の定理 (定理 5.1) より、$q \geq p$ のときは定理 5.7 より従うので、以下 $3 \leq q < p$ とし、$\overline{\rho}$ をレベル 1、重さ $k \leq p+1$ の S 型法 q 表現とする。

すると、補題 2.10 (2) よりある $i \in \mathbb{Z}$ を取れば $k' = k(\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_q}^i) \leq q+1$ となり、このとき $k' \leq p+1$ でもあるので仮定 (予想 S(k',p)) と定理 5.7 より $\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_q}^i$ の保型性が従う。ゆえに補題 2.16 より $\overline{\rho}$ の保型性も従う。

以上より無限個の素数に対して予想 S(p) を示せば十分となった。以下、全ての非 Fermat 素数 p に対し予想 S(p) が成り立つことを帰納法で示す。まず、非 Fermat 素数の定義について思い出しておく。

定義. $2^{2^m}+1$ の形の素数を **Fermat 素数** (a Fermat prime) と呼ぶ。それ以外の素数を**非 Fermat 素数** (a non-Fermat prime) と呼ぶ。

帰納法に際して鍵となるのは素数分布に関する次の命題である。これは後で証明する。

命題 5.10. *p を 5 以上の素数、P を $P > p$ なる最小の非 Fermat 素数 P とする。このとき、$l^r || (P-1)$ を満たす奇素数 l 及び整数 $r \geq 1$ で*

$$\frac{P}{p} \leq \frac{2m+1}{m+1} - \frac{m}{m+1}\frac{1}{p}$$

を満たすものが存在する。ここで、$m = \frac{l^r-1}{2}$ である。特に、

$$p+1 \geq \frac{m+1}{2m+1}(P-1)+2 = (P+1) - \frac{m}{2m+1}(P-1)$$

及び

$$P < 2p-1$$

が成り立つ。

練習 5.11. 前半から後半を導け。

5.3. **一般の場合.** さて、$p \geq 5$ を素数、P を $P > p$ なる最小の非 Fermat 素数とし、予想 S(p) が正しいと仮定する。系 5.9 (2) により、この仮定の下で予想 S(P) を示せばよい。そこで、重さが $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq P+1$ であるようなレベル 1 の S 型法 P 表現 $\overline{\rho}$ を任意に取り、これが保型的であることを示す。Hecke の定理により $\overline{\rho}$ は二面体群的でないとしてよく、帰納法の仮定及び系 5.9 (1) により、$k(\overline{\rho}) > p+1$ としてよい。

また、$\overline{\rho}|_{D_P}$ が既約ならば、補題 2.10 (4) 及び命題 5.10 の第 3 式より

$$k(\overline{\rho} \otimes \overline{\chi_P}^{2-k(\overline{\rho})}) = P+3-k(\overline{\rho}) < P+3-(p+1) < p+1$$

が成り立ち、従って帰納法の仮定と系 5.9(1)、補題 2.16 より $\overline{\rho}$ の保型性が分かる。

そこで $\overline{\rho}|_{D_P}$ は可約であるとする。このとき補題 2.16 より、必要ならば $\overline{\chi_P}$ の冪で捻る事で $\overline{\rho}$ は P で通常として良い (補題 2.11(3))。そこで、定理 4.10 (2) を用いて $\overline{\rho}$ を E 有理的狭義両立系 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ に持ち上げ、命題 5.10 によって得られる $l^r || P-1$ なる奇素数 l 及び $r \geq 1$ を 1 組取り、$\overline{\rho_l}$ に着目する。ρ_l が l で Barsotti-Tate なので、定理 3.7(1) より $k(\overline{\rho_l}) = 2$ である。

もし $\overline{\rho_l}$ が保型的であれば、定理 4.3 (4) より ρ_l も保型的、従って $\boldsymbol{\rho}$ も保型的となり、$\overline{\rho}$ の保型性が得られる。特に、ρ_l 従って $\overline{\rho_l}$ が奇であることに注意すると、$\overline{\rho_l}$ が可約又は二面体群的であれば $\overline{\rho}$ は保型的となる。また、$\overline{\rho_l}$ が既約且つ P で不分岐であると仮定すると、$\overline{\rho_l}$ はレベル 1、重さ 2 の S 型表現となり定理 5.4 に反するのでこのようなことは起こり得ない。

そこで以下、$\overline{\rho_l}$ は既約で、二面体群的でなく、P で分岐しているとする。狭義両立系の取り方より、$\overline{\rho_l}|_{I_P}$ は

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega_{P,l}}^{k(\overline{\rho})-2} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である。さて、$\overline{\omega_{P,l}}^{\frac{P-1}{l^r}} = 1$ に注意すると、

$$\omega_{P,l}^{k(\overline{\rho})-2} \equiv \omega_{P,l}^{i} \mod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}} \quad 且つ \quad i \in [\frac{m}{2m+1}(P-1), \frac{m+1}{2m+1}(P-1)]$$

なる整数 i が取れることが分かる (ここで $l^r = 2m+1$)。

そこで、この i について定理 4.10 (3) を用いて $\overline{\rho_l}$ を既約 E' 有理的狭義両立系 $\boldsymbol{\rho}' = (\rho'_\iota)$ に持ち上げ、$\overline{\rho'_P}$ に着目する。

これが保型的であれば定理 4.3 (3) より ρ'_P も保型的、従って $\boldsymbol{\rho}'$ も保型的となり $\overline{\rho_l}$ の保型性が得られる (よって、$\overline{\rho}$ の保型性も得られる)。

ところが狭義両立系の取り方より $k(\overline{\rho'_P}) = i+2$ または $k(\overline{\rho'_P} \otimes \overline{\chi_P}^{-i}) = P+1-i$ が成り立ち、命題 5.10 の第 2 式より $i+2 \le p+1$ かつ $P+1-i \le p+1$ であるので、再び帰納法の仮定と系 5.9(1)、補題 2.16 より $\overline{\rho'_P}$ の保型性が分かる。

よって $\overline{\rho}$ の保型性が示された。

5.4. **まとめ.** ここまでの議論で、定理 4.3、4.6、4.10 及び命題 5.10 を認めた上での主定理 1.5 の証明は完成した。以下の章ではこれらの解説を行う。まず次章で命題 5.10 を片付け、その次の章で定理 4.3 の証明を行う。最後に定理 4.6 及び定理 4.10 を第 8 章及び第 9 章に於いて解説する。

6. 非 Fermat 素数の分布 (命題 5.10 の証明)

実数 x に対し $\pi(x)$ で x 以下の素数の個数を、また自然数 n に対し p_n で n 番目の素数を表すことにする ($p_1 = 2$、$p_2 = 3$、$p_3 = 5\ldots$ である)。まず、次の事実に注意する。

補題 6.1. x_0、A、B、C、a を正の実数とし、$a > C = \frac{B}{A}$ とする。このとき、

$$任意の\ x > x_0\ に対して\ A\frac{x}{\log x} < \pi(x) < B\frac{x}{\log x}が成り立つ$$

ならば、

$$任意の自然数\ n\ に対し、p_n > \max(x_0, a^{\frac{C}{a-C}})\ ならば\ p_{n+1} \le ap_n$$

が成り立つ。

証明 . $p_n > \max(x_0, a^{\frac{C}{a-C}})$ と仮定して $\pi(ap_n) > n$ を示せばよい。

$$\pi(ap_n) > A\frac{ap_n}{\log(ap_n)} = A\frac{ap_n}{\log p_n}\frac{\log p_n}{\log a + \log p_n}$$

であるが、仮定より $\log p_n > (C\log a)/(a-C)$ であるので

$$\pi(ap_n) > A\frac{ap_n}{\log p_n}\frac{\frac{C}{a-C}\log a}{\log a(1+\frac{C}{a-C})} = B\frac{p_n}{\log p_n} > \pi(p_n) = n$$

より良い。

次に、Rosser-Schoenfeld による以下の定理を引用しておく ([RS62]、定理 2 の系 1 及び定理 1 参照):

定理 6.2. $x \geq 17$ に対し、

$$\begin{aligned} \frac{x}{\log x} < & \quad \pi(x) & < 1.25506\,\frac{x}{\log x} \\ \frac{x}{\log x} < & \quad \pi(x) & < \frac{x}{\log x}(1+\frac{3}{2\log x}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

さて、命題 5.10(前半) の証明に入る。$5 \leq p < 31$ のときは直接確かめられるので、$p \geq 31$ の場合を考察する。以下、素数 p に対し p' でその次の素数を、$\tilde{p}$ で p より大きい最小の非 Fermat 素数を表すことにする。$p \geq 31$ という仮定より、

$$\frac{\tilde{p}}{p} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{30} = \frac{44}{30} = 1.4\dot{6}$$

を示せば十分である。

(a) $31 \leq p \leq 100000$ の場合。このとき、定理 6.2 の第 1 式及び補題 6.1 より、

$$p > \max(17, (1.4\dot{6})^{1.25506/(1.4\dot{6}-1.25506)}) \text{ ならば } p' \leq (1.4\dot{6})p$$

が成り立つ。特に、$p \geq 31$ ならば $p' \leq (1.4\dot{6})p$ であることが分かる。$31 \leq p < 200000$ なる Fermat 素数は 257 と 65537 のみなので、Bertrand の仮説より一般に $p' \leq 2p$ である (例えば、[HW08]) ことに注意すると

$$31 \leq p < 100000 \text{ かつ } p' \neq 257、65537 \text{ ならば} \frac{\tilde{p}}{p} \leq 1.4\dot{6}$$

であることが分かる。$p' = 257$、65537 となるのはそれぞれ $p = 251$、65521 のときであるが、このとき $\tilde{p} = 263$、65539 であり、これらの場合にも $\tilde{p} \leq 1.4\dot{6}p$ は成り立つ。

(b) $p \geq 100000$ の場合。一般に定理 6.2 の第 2 式より、$x > 100000$ ならば

$$\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \frac{x}{\log x}(1+\frac{3}{2\log x}) \leq 1.130289\,\frac{x}{\log x}$$

であるので、補題 6.1 より

$$p > \max(100000, (1.2)^{1.130289/(1.2-1.130289)}) \text{ ならば } p' \leq 1.2p$$

が成り立つ。特に、$p > 100000$ ならば $p' \leq 1.2p$ であることが分かり、従って次の次の素数 p'' について $p'' \leq (1.2)^2 p < 1.4\dot{6}p$ も分かる。3、5 以外に Fermat 素数が連続することはないので、この場合も命題 5.10 は示された。

練習 6.3. *3, 5 以外に Fermat 素数は連続しないことを示せ。*

7. 保型性持ち上げ定理 (定理 4.3 の証明)

この章では定理 4.3 の証明を行う。基本的にはこれまでに得られていた p 進及び法 p 表現の理論及び保型性持ち上げ定理の焼き直しである。

$\overline{\rho}$ を定理 4.3 の通りとし、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約か否かによって場合分けして証明する。

7.1. $\overline{\rho}|_{D_p}$ **が既約のとき．** まず、以下の事実に注意する:

補題 7.1. $\mathbb{F}$ を標数 $p>2$ の有限体、$\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を法 p 表現とする。また、$F=\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p})$ とする。

(1) $\overline{\rho}$ が p の外で不分岐で $\overline{\rho}|_{G_F}$ が可約ならば、$\overline{\rho}|_{D_p}$ は絶対可約である。

(2) $\overline{\rho}$ が G_F のある指標から誘導され、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約で *Serre* 重さが $p+1$ 以下ならば、$\overline{\rho}$ の *Serre* 重さは $\frac{p+3}{2}$ である。

証明．まず (2) を示す。$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(I_p)$ の位数が 2 以下であることを示せば、Serre 重さの定義より主張は従う。さて、$\overline{\rho} \cong \mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}}\psi$ ($\psi: G_F \to \mathbb{F}^\times$) であるとする。$p$ が奇数であることに注意すると暴分岐群 P_p が G_F に含まれることが分かり、$\mathbb{F}^\times$ の位数が p と素であることから $\psi(P_p)=1$ 従って $\psi([I_p,I_p])=1$ が分かる (ψ は I_p 上は定義されていないことに注意)。

また、F は p で分岐する 2 次拡大であることから、誘導表現の一般論より、$c \in I_p \backslash G_F$ なる元が存在し、$\overline{\rho}|_{G_F} \cong \psi \oplus \psi^c$ (但し $\psi^c(\sigma)=\psi(c^{-1}\sigma c)$) であるが、上で述べたことより $\psi|_{I_p \cap G_F} = \psi^c|_{I_p \cap G_F}$ が成り立つ。よって $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(I_p \cap G_F) = 1$、これより主張が従う。

次に (1) を示す。$\overline{\rho}$ は絶対既約としてよく、このとき命題 2.14 より $H = \mathrm{Image}\,(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}})$ は二面体群である。この群の位数を $2t$ とおくと t は奇数である。何となれば、もし t が偶数であるとすると全射準同型 $H \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ があり、先と同様に $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(I_p)$ の位数が 2 であることに注意すると、全射準同型 $\sigma: G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で $\sigma(I_p)=1$ であるようなものが存在するが、このとき $\mathrm{Ker}\,\sigma$ の固定体は、全ての素数で不分岐であるような $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大となり矛盾する。

さて、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が絶対既約であるとすると、H の部分群 $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(D_p)$ もまた二面体群であり、その位数はある奇数の 2 倍である。ところが、$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(I_p)$ は位数 2 の $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(D_p)$ の正規部分群であるので、これは不合理である。よって、$\overline{\rho}|_{D_p}$ は絶対可約である。

系 7.2. $\mathbb{F}$、$\overline{\rho}$、F は補題 *7.1* の通りとする。このとき、以下のそれぞれの仮定の下で $\overline{\rho}|_{D_p}$ の絶対既約性から $\overline{\rho}|_{G_F}$ の絶対既約性が従う*:*

(1) $\overline{\rho}$ は p の外で不分岐である。

(2) $\overline{\rho}$ の *Serre* 重さが $p+1$ 以下かつ $\frac{p+3}{2}$ と異なる *(*例えば、$k(\overline{\rho})=2$*)*。

証明．命題 2.14 及び補題 7.1 より明らかである。

さて、以下「条件 (m)」で定理 4.3 内の各仮定を表すことにし、各条件の下で ρ の保型性を確かめていく。なお、下の補題 7.3 より、条件 (5) は $\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約という仮定の下では起こりえないこと、条件 (1)-(4) のどの場合も $\overline{\rho}$ は系 7.2 の仮定を満たしている ((1)-(3) は明らか、(4) は定理 3.7(1)) ことに注意する。

補題 7.3. L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし、V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の *2* 次元表現とする。また、W を $I_{\mathbb{Q}_p}$ 安定な *1* 次元部分 L ベクトル空間 W で、

(1) V/W は $I_{\mathbb{Q}_p}$ が自明に作用し、

(2) W へは $I_{\mathbb{Q}_p}$ が χ_p^a*(*a は *0* でない整数*)* として作用する

とする。このとき W は $G_{\mathbb{Q}_p}$ 安定でもある。

練習 7.4. これを証明せよ。

まず、条件 (4) が成り立っているとする。このとき、Diamond-Flach-Guo の定理 (12.5) より定理 4.3 が従う。

次に、条件 (1) を仮定する。このとき、k が偶数である (補題 2.11) ことを考慮すると $2 \leq k \leq p-1$ であることが分かり、この場合も Diamond-Flach-Guo の定理より従う。

条件 (2) のときは次の補題により条件 (1) の場合に帰着する:

補題 7.5. 重さ *2* の既約半安定表現はクリスタリン表現である。

証明．潜在的クリスタリン且つ半安定な表現はクリスタリン表現であることに注意すると、例えば [JK02] Theorem 2.1 から従う。

最後に条件 (3) が成り立つときは、系 3.3 に注意すると Kisin の定理 (12.4) より定理 4.3 が従う。

7.2. $\overline{\rho}|_{D_p}$ **が可約のとき．** まず、以下の命題に注意する。

命題 7.6. p を奇素数とし、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ は有限個の素数の外で不分岐であるような既約表現で、ある有限位数の指標 ψ と *1* 以上の整数 μ によって $\det \rho = \chi_p^{\mu} \psi$ と書けるものとする。このとき、以下の条件下で $\overline{\rho}$ の保型性から ρ の保型性が従う*:*

ある D_p の p 進指標 ψ_1、ψ_2 で、$\psi_1|_{I_p} = \omega_p^i \chi_p^j$ (但し $i+j$ は奇数)、$\psi_2|_{I_p} = \mathbf{1}$ なるものが存在して、$\rho|_{D_p}$ は、

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & * \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である。

これは Skinner-Wiles の定理 (12.6)(1) と (2) を組み合わせれば従う ((2) の適用の際、$\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ となるときは、χ_1 と χ_2 の内、D_p への制限が $\overline{\psi_2}$ になる方を選び、その Teichmüller 持ち上げの逆で捻って補題 4.2 を使う)。

以下、各条件について ρ の保型性を示す。

条件 (5) の場合は上の補題 7.3 より $\rho|_{D_p}$ の可約性が従うので上の命題が適用できる。

条件 (1)、(2) 及び (4) の場合は次の補題より条件 (5) に帰着される:

補題 7.7. p を奇素数、ρ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の *2* 次元表現とする。また、ρ のある還元 $\overline{\rho}$ は可約であると仮定する。このとき、ρ が重さ *2* の半安定表現であるか、または重さ k が $2 \leq k \leq p+1$ なるクリスタリン表現であれば、ρ は通常である。

証明．ρ がクリスタリンであれば定理 3.7 及び系 3.2 より従う。半安定且つ非クリスタリンの場合は補題 7.5 及び系 3.2 より従う。

条件 (3) の場合は、補題 4.2 に注意して必要なら ρ を ω_p の冪で捻る事で、定理 3.7、系 3.2 及び系 3.3 を用いて上の命題が適用できることが容易に確かめられる。

以上で定理 4.3 の証明は完結する。

8. 法 p 表現の p 進表現への持ち上げ

8.1. **はじめに．** この章及び次章で定理 4.6、4.10 の証明を与えるが、予めその大まかな流れについてここで述べておく。

まず、8.2 節、8.3 節及び 8.4 節では、ある種の法 p 表現が適当な p 進表現に持ち上げられることを証明する。正確な定式化を 8.2 節で行い、その証明

の方針について定理 8.5 を認めた上で 8.3 節で解説する。定理 8.5 については 8.4 節で行う。

ここでは $R_{\mathbb{Q}}$ という変形環についてその構造を調べることになるが、その為に補助的に R_F というもう 1 種類の変形環を導入しその構造をも調べる。

具体的には、まず $R_{\mathbb{Q}}$ の生成元と関係式の個数の関係、R_F に関するある種の有限性を調べ、これらを組み合わせて $R_{\mathbb{Q}}$ のある種の有限性及び平坦性を示し (de Jong の議論)、その結果として p 進表現への持ち上げが得られる。

$R_{\mathbb{Q}}$ の生成元と関係式の個数の関係については Böckle の局所大域原理及び Ramakrishna や Taylor 等による局所変形環の具体的な計算が、R_F の有限性については Taylor の潜在的保型性定理、Skinner-Wiles、Taylor による総実体上の "$R = T$" 定理及び肥田理論が用いられる。

その後、この結果を使って 9.1 節 - 9.3 節で定理 4.10 が、9.4 節で定理 4.6 が証明される。ここでは Taylor の潜在的保型性定理、Hilbert 保型形式に伴うモチーフ及び Galois 表現の構成、Langlands-Arthur-Clozel の底変換定理、及び表現論に於ける Brauer の定理が重要な役割を果たす。

Taylor の潜在的保型性定理が 3 箇所 (R_F の有限性、狭義両立系の構成、Abel 多様体の構成) で使われていることに注意されたい。

8.2. **定式化.** 以下の 3 節では、ある種の法 p 表現が、様々な条件下でいつ p 進表現に持上げることができるかについて論ずる。まずこの節ではどのような法 p 表現及び p 進表現について考察するかについて正確に定式化する。まず、Galois 表現の変形に関する用語を思い出しておく。これらの基本事項については [Maz89] や [Maz97] を参照されたい。

p を奇素数、K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし、$\mathscr{O} = \mathscr{O}_K$、$\mathbb{F} = \mathbb{F}_K$ とおく。

定義. $\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ で完備 Noether 局所 $\mathscr{O}$ 代数及びその剰余体と $\mathbb{F}$ との $\mathscr{O}$ 同型の組 $(A, \iota : A/\mathfrak{m}_A \cong \mathbb{F})$ のなす圏 (射は $\mathbb{F}$ との同型を保つ $\mathscr{O}$ 代数の局所準同型) を表す。

次に、副有限群 Π の法 p 表現 $\overline{\rho} : \Pi \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ 及び p 進指標 $\eta : \Pi \to \mathscr{O}^\times$ を $\det \rho = \overline{\eta}$ となるように 1 組固定する。

定義. $A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ とする。

(1) $\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_2(A)$ が $\overline{\rho}$ の (A への) **持ち上げ** (lifting) であるとは、$\rho \bmod \mathfrak{m}_A = \overline{\rho}$ が成り立つことである。ここで $\rho \bmod \mathfrak{m}_A$ とは CNL の各対象に付与されている同型 $A/\mathfrak{m}_A \cong \mathbb{F}$ が誘導する全射 $\pi : A \to \mathbb{F}$ を用いた合成写像 $\mathrm{GL}_2(\pi) \circ \rho$ のことを表す。A への $\overline{\rho}$ の持上げ全体から成る集合を $\mathrm{Lift}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}(A)$ で表す。

(2) 2 つの持ち上げ ρ、ρ' が**強同値** (strict equivalence) であるとは、ある $g \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{GL}_2(A) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}))$ を取ると、任意の $\sigma \in \Pi$ に対して

$$\rho(\sigma) = g\rho'(\sigma)g^{-1}$$

が成り立つことである。$\overline{\rho}$ の A への持ち上げの強同値類を $\overline{\rho}$ の A への**変形** (deformation) と呼ぶ。

(3) 圏 $\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ から集合の圏への共変関手 $\mathrm{Def}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}$ 及びその部分関手 $\mathrm{Def}^{\eta}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}$ を各 $A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}(A) &= \mathrm{Lift}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}(A)/\text{強同値}\\ \mathrm{Def}^{\eta}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}(A) &= \{\rho \in \mathrm{Lift}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}(A) |\ \det \rho = \eta\}/\text{強同値}\end{aligned}$$

とおくことで定める (η と自然な群準同型 $\mathscr{O}^\times \to A^\times$ との合成を再び η と書いている)。

さて、本節の主定理の定式化に移る。

定義. K を $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大、A を完備 Noether 局所 $\mathbb{Z}_p$ 代数、L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。

(1) V を G_K が線型に作用する A 上の階数 2 の自由加群とするとき、V が**通常** (ordinary) とは、I_K 安定な階数 1 の自由部分 A 加群 $W \subset V$ で、W も V/W も I_K が自明に作用するようなものが存在することを言う。

(2) G_K の L 上の表現 V が**通常**とは、ある G_K 安定な $\mathcal{O}_L$ 格子で通常であるようなものが存在することを言う。

定義. $2 \leq k < p$ を整数、K を $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大とする。

(1) G_K の作用付きの長さ有限の $\mathbb{Z}_p$ 加群が**重さ k のクリスタリン** (crystalline of weight k) であるとは、フィルトレーションの長さが k の Fontaine-Laffaille 加群から来ることをいう (ここで、Fontaine-Laffaille 加群から来る、とは [FL82] に於ける圏 $\mathrm{MF}^f_{\mathrm{tor}}$ の対象の、関手 U_S による像と同型であることを表す。Ramakrishna の論文 [Ram93] の Section 2 も参照せよ)。

(2) A を完備 Noether 局所 $\mathbb{Z}_p$ 代数とする。このとき、$\rho : G_K \to \mathrm{GL}_2(A)$ が重さ k のクリスタリンであるとは、任意の Artin 商 A/I に対し、ρ の $A \to A/I$ に関する係数拡大が上の意味で重さ k のクリスタリンであることをいう。

(3) 重さ 2 のクリスタリンのことを Barsotti-Tate という。

定義. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を S 型の法 p 表現とし、$\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ の対象 A に対し、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(A)$ を $\overline{\rho}$ の持ち上げとする。

(1) (a) $\overline{\rho}$ が p の外で不分岐又は通常で、$2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$、$k(\overline{\rho}) \neq p$ のとき、$\overline{\rho}$ を $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型の法 p 表現と呼ぶ。

(b) $\overline{\rho}$ が $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型のとき、ρ が $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型の持ち上げであるとは以下の 3 条件を満たすことである:

(i) $\overline{\rho}$ が $l \neq p$ で不分岐 (通常) なら ρ も l で不分岐 (通常) で、

(ii) $k(\overline{\rho}) < p$ ならば ρ は重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリンで、

(iii) $k(\overline{\rho}) = p+1$ ならば $\rho|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \chi_p^p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である。

(2) (a) $\overline{\rho}$ が p の外で不分岐又は通常で、$\overline{\rho}|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値、但し $2 \leq k \leq p-1$、であるとき、$\overline{\rho}$ を $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型の法 p 表現と呼ぶ (このとき $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$ 且つ $k(\overline{\rho}) \neq p$ であって、$k(\overline{\rho}) = 2$ 又は $p+1$ なら $k=2$、それ以外なら $k = k(\overline{\rho})$ であることに注意)。

(b) $\overline{\rho}$ が $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型のとき、ρ が $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型の持ち上げであるとは以下の 3 条件を満たすことである:

(i) $\overline{\rho}$ が $l \neq p$ で不分岐 (通常) なら ρ も l で不分岐 (通常) で、

(ii) $\rho|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\chi_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であり、

(iii) $k(\overline{\rho})=2$ なら ρ は p で Barsotti-Tate である。

(3) ここでは整数 i を 1 つ固定しておく。また $q\neq p$ は素数とし、$\mathscr{O}$ は 1 の $q-1$ 乗根を含むと仮定する。

(a) $\overline{\rho}$ が p 及び q の外で不分岐、$k(\overline{\rho})=2$ で、$\overline{\rho}|_{I_q}$ は非自明且つ

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega_{q,p}}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であるとき、$\overline{\rho}$ を $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の法 p 表現と呼ぶ。

(b) $\overline{\rho}$ が $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型のとき、ρ が $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の持ち上げであるとは以下の 3 条件を満たすことである:

(i) ρ は p と q の外で不分岐で、

(ii) ρ は p で Barsotti-Tate であり、

(iii) $\rho|_{I_q}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_{q,p}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である。

また、$\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型の法 p 表現又は持上げの内、p の外で不分岐であるようなものをそれぞれ $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型と呼ぶ。

練習 8.1. (1) 定理 *4.10* の *(1)*、*(2)*、*(3)* において、$\overline{\rho}$ はそれぞれ $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の法 p 表現であることであることを確認せよ。

(2) ρ が $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の持ち上げのとき、$\det\rho$ はそれぞれ $\chi_p^{k(\overline{\rho})-1}$、$\omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\chi_p$、$\omega_{q,p}^i\chi_p$ であることを示せ。

注意 8.2. $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ という記号は [Kha06] で考察されている $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型という変形のちょっとした一般化であることを表している。

注意 8.3. K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、$\mathscr{O}=\mathscr{O}_K$ とし、$\rho\colon G_{\mathbb{Q}_p}\to\mathrm{GL}_2(\mathscr{O})$ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現とする。

Fontaine-Laffaille 理論によると、ρ が重さ $k<p$ のクリスタリンであれば $\rho\otimes_{\mathscr{O}}K$ も重さ k のクリスタリン表現である ([FL82])。

また、$\rho|_{I_p}$ が

$$\begin{pmatrix} \chi_p^p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値ならば、ρ は重さ $p+1$ のクリスタリンであることも知られている ([BK90] Example 3.9 参照)。

特に、ρ がそれぞれ $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の $\mathscr{O}$ への持ち上げであれば、$\rho\otimes_{\mathscr{O}}\overline{\mathbb{Q}_p}$ はそれぞれ定理 4.10 の (1)(b)、(2)(b)、(3)(b) の ρ_p に関する条件を満たすことが分かる。

さて、$\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の変形については、それに属する 1 つの (又は任意の) 持ち上げが $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型であることとして定義する。これらが誘導する、圏 $\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ から集合の圏への関手は $\overline{\rho}$ の絶対既約性により表現可能であることが分かる。

8.3 節、8.4 節においては以下の定理を証明する。

定理 8.4. p は奇素数、$\overline{\rho}$ は $\mathbb{F}$ 上の S 型法 p 表現で二面体群的でないとする。このとき $\overline{\rho}$ が $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型又は $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型であれば、その普遍変形環 $R_{\mathbb{Q}}$ から、ある $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環 $\mathscr{O}'$ への準同型が存在する。

特に、$\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の二面体群的でない S 型法 p 表現に対し、それぞれ $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型のある p 進整数環への持ち上げが存在する。

8.3. **定理 8.4 の証明.** 記号は 8.2 節の通りとし、$\overline{\rho}$ は $\mathbb{F}$ 上の S 型法 p 表現で $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型のいずれかであるとし、さらに二面体群的でないと仮定する。

まず、変形環 $R_{\mathbb{Q}}$ の生成元及び関係式に関して次が成り立つ。これが定理 8.4 の証明の第 1 の鍵である。この定理の解説は次節 8.4 で行う。

定理 8.5. $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ いずれかの変形問題に対応する普遍変形環 $R_{\mathbb{Q}}$ に対し、

$$R_{\mathbb{Q}} \cong \mathscr{O}[[T_1, \ldots, T_r]]/(f_1, \ldots, f_s)、$$

但し $s \leq r$、が成り立つ。

次に、以下の事実に注意する:

命題 8.6. $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型いずれかの変形問題を固定して考える。普遍変形環を $R_{\mathbb{Q}}$、普遍表現を $\rho_{\mathrm{univ}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(R_{\mathbb{Q}})$ とし、その法 p 表現を $\overline{\rho_{\mathrm{univ}}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(R_{\mathbb{Q}}/(p))$ とおく。このとき、総実体 F を、定理 *12.9* の条件 *(1)-(4)* に加え、$\overline{\rho_{\mathrm{univ}}}|_{G_F}$ は p の上にない全ての F の有限素点で不分岐になるように取れる。

証明．次の補題と練習、及び定理 12.9 の後半より容易に従う。補題の証明については [Kha06] Lemma 4.2 を見られたい。

補題 8.7. p 及び q を相異なる素数とし、K を $\mathbb{Q}_q$ の有限次拡大、$\mathscr{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環、R を $pR = 0$ なる完備 *Noether* 局所 $\mathscr{O}$ 代数とする。このとき、連続表現 $\rho : G_K \to \mathrm{GL}_2(R)$ に対し、惰性群の像 $\rho(I_K)$ は有限である。

練習 8.8. $I_{\mathbb{Q}_p}$ の指数有限の部分群 J に対し、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の指数有限の部分群 H で $H \cap I_{\mathbb{Q}_p} \subset J$ となるものが存在することを示せ。

さて、このような F を 1 つ取って固定し、以下のような $\overline{\rho}|_{G_F}$ の変形を考える。

定義. A を $\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ の対象とし、$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(A)$ を $\overline{\rho}|_{G_F}$ の持ち上げとする。

(1) $\overline{\rho}$ は $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 型であるとする。このとき、ρ が A_F 型の持ち上げであるとは以下の 4 条件を満たすことである:
   (a) ρ は p の上にない全ての F の有限素点で不分岐で、
   (b) $k(\overline{\rho}) < p$ ならば ρ は p の上の F の素点全てに於いて重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリンで、
   (c) $k(\overline{\rho}) = p + 1$ ならば p の上の F の任意の素点 $\mathfrak{p}$ に対し $\rho|_{I_{\mathfrak{p}}}$ は

$$\begin{pmatrix} \chi_p^p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   の形の表現と同値であり、
   (d) 行列式は $\det \rho = \chi_p^{k(\overline{\rho})-1}|_{G_F}$ を満たす。

(2) $\overline{\rho}$ は $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ 型であるとする。このとき、ρ が B_F 型の持ち上げであるとは以下の 4 条件を満たすことである:

(a) ρ は p の上にない全ての F の有限素点で不分岐で、
(b) p の上の任意の F の素点 $\mathfrak{p}$ に於いて $\rho|_{I_\mathfrak{p}}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\chi_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であり、
(c) $k(\overline{\rho})=2$ なら各 $\rho|_{I_\mathfrak{p}}$ は Barsotti-Tate であり、
(d) 行列式は $\det\rho=\omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\chi_p|_{G_F}$ を満たす。

(3) $\overline{\rho}$ は $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型であるとする。このとき ρ が $\mathrm{C}_F(i)$ 型の持ち上げであるとは以下の 3 条件を満たすことである:
(a) ρ は p の上にない全ての F の有限素点で不分岐で、
(b) ρ は p の上の任意の F の素点で Barsotti-Tate であり、
(c) 行列式は $\det\rho=\omega_{q,p}^i\chi_p|_{G_F}$ を満たす。

注意 8.9. 「A'_F 型」や「B'_F 型」の変形は考えていないことに注意されたい。

次の定理が定理 8.4 の証明の第 2 の鍵である。

定理 8.10. A_F、B_F、$\mathrm{C}_F(i)$ いずれかの変形問題に対応する普遍変形環 R_F に対し $R_F/(p)$ は有限である。

証明．方針のみ示す。$\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約のときは Taylor の "$R=T$" 定理 ([Tay06] Theorem 2.6、及び $p=3$ の場合の Khare による修正 ([Kha06] Section 2)) より R_F はある種の Hecke 環 $\mathbb{T}_F$ と同型であることが分かり、後者は $\mathscr{O}$ 加群として有限生成であるのでよい。

$\overline{\rho}|_{D_p}$ が通常のときは Skinner-Wiles の "$R=T$" 定理 ([SW01b]) を用いる。ここで R_F は [SW01b] で考察されている変形環 $R_{\mathscr{D}_0}$ の商であることがポイントである。より具体的には、$R_{\mathscr{D}_0}$ はある種の多変数岩澤代数 Λ 上の代数であるが、R_F は Λ/I が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であるような Λ のあるイデアル I を用いて $R_F\cong R_{\mathscr{D}_0}/IR_{\mathscr{D}_0}$ と書けている。

さて、[SW01b] Proposition 4.1 によるとある種の Hecke 環への自然な準同型 $r_{\mathscr{D}_0}: R_{\mathscr{D}_0}\to\mathbb{T}_{\mathscr{D}_0}$ において、任意の $R_{\mathscr{D}_0}$ の素イデアルは promodular である、即ちある $\mathbb{T}_{\mathscr{D}_0}$ の素イデアルの $r_{\mathscr{D}_0}$ に関する引き戻しになっていることが分かっている。

このことから $\operatorname{Ker} r_{\mathscr{D}_0}$ は冪零元イデアルであることが分かり、これと $\mathbb{T}_{\mathscr{D}_0}$ が有限生成 Λ 加群であるという肥田理論からの事実を合わせて $R_{\mathscr{D}_0}$ の Λ 加群としての有限生成性がわかり、先に述べたことから R_F の $\mathbb{Z}_p$ 加群としての有限生成性、従って $R_F/(p)$ の有限性も従う。

さて、普遍性より環準同型 $\phi: R_F/(p)\to R_{\mathbb{Q}}/(p)$ で可換図式

$$\begin{array}{ccc} G_F & \xrightarrow{\overline{\rho_{\mathrm{univ},F}}} & \mathrm{GL}_2(R_F/(p)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{GL}_2(\phi)} \\ G_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\overline{\rho_{\mathrm{univ}}}} & \mathrm{GL}_2(R_{\mathbb{Q}}/(p)) \end{array}$$

を可換にするようなものが存在する ($\overline{\rho_{\mathrm{univ},F}}$ は普遍表現を $\bmod p$ したもの)。

この図式を用いれば、あとは初等的な抽象代数の議論によって $R_F/(p)$ の有限性から $R_{\mathbb{Q}}/(p)$ のそれを導出し、持ち上げの存在 (定理 8.4) を示すことができる。まず、次の補題を示す。

補題 8.11. p を素数、N を自然数、R を完備局所 *Noether* $\mathbb{F}_p$ 代数、Π を副有限群、$\rho : \Pi \to \mathrm{GL}_N(R)$ を連続表現とする。このとき、R が有限環であれば $\mathrm{Image}\,\rho$ は有限である。また、R が $\mathrm{tr}\,\rho(g)$ $(g \in \Pi)$ で位相的に生成されるならば逆も成り立つ。

証明．前半は明らか。後半を示す。$\mathrm{Image}\,\rho$ が有限であるとする。このとき、任意の R の素イデアル P に対し、$\{\mathrm{tr}\,\rho(g) \bmod P \mid g \in \Pi\}$ は有限集合であり、また各 $\mathrm{tr}\,\rho(g) \bmod P$ は $(\overline{\mathrm{Frac}(R/P)}$ において$)$ 1 の冪根の和で書けるので $\mathbb{F}_p$ 上代数的である。R/P はこの有限集合で生成されるので $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大であり、従って有限環である。P は任意であるので R は 0 次元であることが分かり、これより有限環であることも分かる。

次の定理の (3) で (定理 8.5 を認めた上での) 定理 8.4 の証明は完結する:

定理 8.12. $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$、$\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ いずれかの変形問題に対応する普遍変形環 $R_{\mathbb{Q}}$ に対し、

(1) $R_{\mathbb{Q}}/(p)$ は有限である。
(2) $R_{\mathbb{Q}}$ は $\mathscr{O}$ 上有限平坦で完全交叉である。
(3) $R_{\mathbb{Q}}$ から、ある $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環への環準同型が存在する。

証明．(1) を示す。定理 8.10 と補題 8.11 より $\mathrm{Image}\,(\overline{\rho_{\mathrm{univ},F}})$ は有限であり、上の可換図式によって $\mathrm{Image}\,(\overline{\rho_{\mathrm{univ}}}|_{G_F})$ も有限である。F は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大なので $\mathrm{Image}\,(\overline{\rho_{\mathrm{univ}}})$ の有限性も分かり、再び補題 8.11 より $R_{\mathbb{Q}}/(p)$ の有限性が従う ($R_{\mathbb{Q}}/(p)$ が $\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ で位相的に生成されることは Carayol によって示されている ([Car94]))。

次に (2) を示す。定理 8.5 より、$R_{\mathbb{Q}} \cong \mathscr{O}[[x_1,\ldots,x_r]]/(f_1,\ldots,f_s)$ $(s \le r)$ と書ける。また、$\pi \in \mathscr{O}$ を $\mathscr{O}$ の極大イデアルの生成元、$\mathbb{F} = \mathscr{O}/(\pi)$ とする。

(1) より $\mathscr{O}[[x_1,\ldots,x_r]]/(f_1,\ldots,f_s,\pi)$ は 0 次元なので $h = \mathrm{ht}(f_1,\ldots,f_s,\pi)$ は $r+1$ に等しく ([松 80] 定理 17.4(i))、特に $h \ge s+1$ である。一方、$h \le s+1$ でもあるので ([松 80] 定理 13.5)、$h = r+1 = s+1$ 特に $r = s$ を得る。すると、$f_1,\cdots,f_s,\pi$ は $\mathscr{O}[[x_1,\ldots,x_r]]$ の正則列であることが分かり ([松 80] 定理 17.4 (iii))、$\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_s$ が $\mathbb{F}[[x_1,\ldots,x_r]]$ の正則列であることも分かる。そこで [松 80] 定理 22.5 の系を用いて $R_{\mathbb{Q}}$ が $\mathscr{O}$ 上平坦であることが分かる。$\mathscr{O}$ 上有限であることは中山の補題より明らか。

(3) は $R_{\mathbb{Q}}$ の極小素イデアルによる剰余環の分数体が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大になることから分かる。

8.4. **変形環の表示 - 定理 8.5 の証明.** p、K、$\mathscr{O}$、$\mathbb{F}$ は 8.2 節の通りとする。この節では、定理 8.5 の証明について解説する。まず、Böckle の局所大域原理の紹介、局所変形環の計算に関する結果の紹介をし、それらを組み合わせて定理 8.5 を示す。

8.4.1. **変形環の局所大域原理**. ここでは Böckle の局所大域原理を述べる。まず、記号を 2 つ用意する。

定義. (1) 副有限群 Π の表現 $\overline{\rho} : \Pi \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ の表現空間を V とするとき、$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ に Π を

$$(\sigma\varphi)(v) = \sigma\varphi(\sigma^{-1}(v)) \ \ (\sigma \in \Pi、\varphi \in \mathrm{End}(V)、v \in V)$$

で作用させたものを $\mathrm{ad}\overline{\rho}$ と書き、そのトレース 0 の部分を $\mathrm{ad}^0\overline{\rho}$ と書く。

(2) 完備 Noether 局所 $\mathscr{O}$ 代数 R に対し、その法 $\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}$ 接空間を

$$\mathfrak{t}_R = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\left(R, \mathbb{F}[\epsilon]/(\epsilon^2)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(\mathfrak{m}_R/(\mathfrak{m}_R^2 + \mathfrak{m}_{\mathscr{O}}R), \mathbb{F}\right)$$

で定義する。

さて、S を $\mathbb{Q}$ の素点から成る有限集合で p 及び ∞ を含むものとする。$\mathbb{Q}$ の代数閉包の 1 つ $\overline{\mathbb{Q}}$ を固定し、$\mathbb{Q}_S$ を S の外で不分岐な $\overline{\mathbb{Q}}$ 内の最大拡大、$G_{\mathbb{Q},S} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ とする。

次に、$\mathbb{Q}$ の各素点 ν に対し ν に関する完備化 $\mathbb{Q}_\nu$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_\nu}$ を 1 つずつ固定し、その絶対 Galois 群及び惰性群をそれぞれ $G_\nu \supset I_\nu$ とおく。さらに各 ν に対し体の埋め込み $\mathbb{Q}_S \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\nu}$ を (従って、群準同型 $G_\nu \to G_{\mathbb{Q},S}$ も) 選ぶ。

そこで、絶対既約な法 p 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$、指標 $\eta : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathscr{O}^\times$ を、$\det \overline{\rho} = \overline{\eta}$ を満たすように取り、$\mathrm{Def}^\eta_{S,\mathscr{O}} = \mathrm{Def}^\eta_{G_{\mathbb{Q},S},\overline{\rho},\mathscr{O}}$ とおき、各 $\nu \in S$ に対し、$\mathrm{Def}^\eta_{\nu,\mathscr{O}} = \mathrm{Def}^\eta_{G_\nu,\overline{\rho}|_{G_\nu},\mathscr{O}}$ とおく。

すると、これらは圏 $\mathrm{CNL}_\mathscr{O}$ から集合の圏への共変関手であり、$\mathrm{Def}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ は普遍変形環 $R^\eta_{S,\mathscr{O}}$ を、$\mathrm{Def}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$ は半普遍 (versal) 変形環 $R^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$ を持つ。

また、S に属する各素点 ν に対し、相対的表現可能な部分関手 $\widetilde{\mathrm{Def}}^\eta_{\nu,\mathscr{O}} \subset \mathrm{Def}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$ を取り、その半普遍変形環を $\widetilde{R}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$ とし、自然な全射環準同型 $R^\eta_{\nu,\mathscr{O}} \to \widetilde{R}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$ が法 $\mathfrak{m}_\mathscr{O}$ 接空間に誘導する単射 $\mathfrak{t}_{\widetilde{R}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}} \hookrightarrow \mathfrak{t}_{R^\eta_{\nu,\mathscr{O}}}$ と標準的な同型 $\mathrm{H}^1(G_\nu, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}) \cong \mathfrak{t}_{R^\eta_{\nu,\mathscr{O}}}$ によって定まる $\mathrm{H}^1(G_\nu, \mathrm{ad}^0\overline{\rho})$ の部分空間を L^η_ν、その次元を $\widetilde{h}^\eta_\nu$ とする。$\widetilde{h}^\eta_\nu$ の定義より、あるイデアル $\widetilde{J_\nu}^\eta$ を用いて $\mathscr{O}$ 代数同型

$$\mathscr{O}[[T_1, \cdots, T_{\widetilde{h}^\eta_\nu}]]/\widetilde{J}^\eta_\nu \cong \widetilde{R}^\eta_{\nu,\mathscr{O}}$$

ができる。そこで、$\widetilde{J_\nu}^\eta$ の $\mathscr{O}[[T_1, \cdots, T_{\widetilde{h}^\eta_\nu}]]$ 加群としての生成元の個数の最小値を $\mathrm{gen}(\widetilde{J}^\eta_\nu)$ とおく。

一方、$\mathrm{Def}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ の部分関手 $\widetilde{\mathrm{Def}}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ を以下の図式における引き戻しとして定義する:

$$\begin{array}{ccc} & & \prod_{\nu\in S} \widetilde{\mathrm{Def}}^\eta_{\nu,\mathscr{O}} \\ & & \downarrow \\ \mathrm{Def}^\eta_{S,\mathscr{O}} & \longrightarrow & \prod_{\nu\in S} \mathrm{Def}^\eta_{\nu,\mathscr{O}} \end{array}$$

$\widetilde{\mathrm{Def}}^\eta_{S,\mathscr{O}} \subset \mathrm{Def}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ の相対的表現可能性から $\widetilde{\mathrm{Def}}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ の表現可能性が従うことに注意して、この普遍変形環を $\widetilde{R}^\eta_{S,\mathscr{O}}$ とする。このとき、$\mathbb{F}$ ベクトル空間

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{H}^1(G_{\mathbb{Q},S}, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}) \to \bigoplus_{\nu\in S} \mathrm{H}^1(G_\nu, \mathrm{ad}^0\overline{\rho})/L^\eta_\nu)$$

の次元を $\widetilde{h}^\eta$ とすると、$\widetilde{h^\eta}$ は $\mathfrak{t}_{\widetilde{R}^\eta_{S,\mathscr{O}}}$ の次元と等しくなり、あるイデアル $\widetilde{J}^\eta$ を用いて $\mathscr{O}$ 代数同型

$$\mathscr{O}[[T_1, \cdots, T_{\widetilde{h}^\eta}]]/\widetilde{J}^\eta \cong \widetilde{R}^\eta_{S,\mathscr{O}}$$

ができる。そこで、$\widetilde{J}^\eta$ の $\mathscr{O}[[T_1, \cdots, T_{\widetilde{h}^\eta}]]$ 加群としての生成元の個数の最小値を $\mathrm{gen}(\widetilde{J}^\eta)$ とおく。

このような状況の下、局所変形環の生成元及び関係式の個数と大域変形環のそれらとを比較する定理が以下に述べる Böckle の局所大域原理である:

定理 8.13. *(Böckle)*

$$\widetilde{h}^\eta - \mathrm{gen}(\widetilde{J}^\eta) \geq \sum_{\nu \in S} (\widetilde{h}^\eta_\nu - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^0(G_\nu, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}) - \mathrm{gen}(\widetilde{J}^\eta_\nu))$$

これは [Böc07] の Corollary 4.3 の書き換えである (Remark 1.5 及び Example 4.1 も考慮する)。

この定理によって、定理 8.5 は完全に局所変形環の計算に帰着される。

8.4.2. **局所変形環の計算** $(l \neq p)$. この小節では、$l \neq p$ の場合の、$G_{\mathbb{Q}_l}$ の p 進表現の変形環に関する結果について紹介する。

$\Pi = G_{\mathbb{Q}_l}$ (但し $l \neq p$) とし、法 p 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_l} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ 及び p 進指標 $\eta : G_{\mathbb{Q}_l} \to \mathscr{O}^\times$ を $\det \rho = \overline{\eta}$ となるように 1 組固定する。$\mathrm{Def}_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}$ 及び $\mathrm{Def}^\eta_{\Pi,\overline{\rho},\mathscr{O}}$ を単に $\mathrm{Def}_{\overline{\rho}}$ 及び $\mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}$ と書く。

定義. $\overline{\rho}$ 及び η は上の通りとし、$\overline{\rho}$ は通常であるとする。このとき、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ への変形に対し、それに属する 1 つの (又は任意の) 持ち上げが通常であるとき、その変形を通常であると呼ぶ。さらに、$\mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}$ の部分関手 $\mathscr{G}^\eta_{\mathrm{ord},l,\overline{\rho}}$ を、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し、

$$\mathscr{G}^\eta_{\mathrm{ord},l,\overline{\rho}}(A) = \{\rho \in \mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}(A) |\ \rho \text{ は通常 }\}$$

で定める。

定理 8.14. $\mathscr{G}^\eta_{\mathrm{ord},l,\overline{\rho}}$ は $\mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}$ の部分関手として相対的表現可能であり、よって、半普遍変形環 R を持つ。さらに、$\mathscr{O}$ 代数として

$$R \cong \mathscr{O}[[T_1, \cdots, T_d]]、$$

但し $d = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^0(G_{\mathbb{Q}_l}, \mathrm{ad}^0\overline{\rho})$、が成り立つ。

この定理の証明については例えば [Ram02] などを参照されたい。

次に、$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の持ち上げの局所版を導入する。ここでは先の結果との関係上、l の代わりに q を使うことにする。

定義. p と q を相異なる素数、$p^r || q-1 (r>0)$ とし、i を整数とする。$\mathscr{O}$ は 1 の全ての $q-1$ 乗根を含むとする。さらに、$\overline{\rho}|_{I_q}$ は非自明且つ

$$\begin{pmatrix} \overline{\omega_{q,p}}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であり、p 進指標 $\eta : G_{\mathbb{Q}_q} \to \mathscr{O}^\times$ は $\det \overline{\rho} = \overline{\eta}$ 且つ $\eta|_{I_q} = \omega^i_{q,p}$ となっているとする。

このとき、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し $\mathscr{G}^\eta_{\overline{\rho}}(A)$ を

(1) $\rho|_{I_q}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega^i_{q,p} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であり、

(2) $\det \rho = \eta$

なる $\overline{\rho}$ の持ち上げ $\rho : G_{\mathbb{Q}_q} \to \mathrm{GL}_2(A)$ の強同値類全体からなる集合とすることで、$\mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}$ の部分関手 $\mathscr{G}^\eta_{\overline{\rho}}$ を定める。

定理 8.15. (1) $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^0(G_{\mathbb{Q}_q}, \mathrm{ad}^0\overline{\rho}) = 1$ である。

(2) $\mathscr{G}^\eta_{\overline{\rho}}$ は $\mathrm{Def}^\eta_{\overline{\rho}}$ の部分関手として相対的表現可能であり、よって、半普遍変形環 R を持つ。更に、$\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ の対象として $R \cong \mathscr{O}[[T]]$ が成り立つ。

証明．概略のみ述べる。詳細は [Kha06] p.568-p.570 を参照されたい。

(1) は容易に計算できる。(2) については [Tay03] (E3) の場合と同様にして半普遍変形環の存在が分かり、その法 $\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}$ 接空間の次元が 1 であることも [Wil95] Section 1 の計算から分かる。これより全射環準同型 $\mathscr{O}[[T]] \to R$ が得られるので後はこれが同型であることを示す。

$i \equiv 0 \bmod q-1$ の場合 (即ち $\omega_{q,p}^i = \mathbf{1}$ の場合) は [Tay03] (E3) より $\mathscr{G}^\eta$ が障害を持たないことが分かり、そのことから $R \cong \mathscr{O}[[T]]$ が分かる。

これ以外の場合は、$\overline{\rho}$ の $\mathscr{O}$ への互いに強同値でない持ち上げが無限個あることを実際に構成することで示し、そこから R が $\mathscr{O}$ 上 0 次元でないこと、よって同型 $\mathscr{O}[[T]] \cong R$ を示す。

$i \not\equiv 0 \bmod (q-1)/p^r$ の場合 (即ち $\overline{\omega_{q,p}}^i \neq \mathbf{1}$ の場合) は $\overline{\rho}$ が直和分解することから容易に構成できる。

$i \not\equiv 0 \bmod q-1$ 且つ $i \equiv 0 \bmod (q-1)/p^r$ の場合 (即ち $\omega_{q,p}^i \neq \mathbf{1}$ 且つ $\overline{\omega_{q,p}}^i = \mathbf{1}$ の場合) はもう少し行列の計算が必要となる。[Kha06] p.569-p.570 を参照されたい。

8.4.3. **局所変形環の計算** ($l = p$). この小節では、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現の変形環に関する結果について紹介する。$\Pi = G_{\mathbb{Q}_p}$ とし、法 p 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ 及び p 進指標 $\eta : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{O}^\times$ を $\det \rho = \overline{\eta}$ となるように 1 組固定する。

$\mathrm{Def}_{\overline{\rho}}$ 及び $\mathrm{Def}_{\overline{\rho}}^\eta$ の記号は前小節と同様に用いる。

定義. $\overline{\rho}$ 及び η は上の通りとし、$\overline{\rho}|_{I_p}$ は $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$ 且つ $k(\overline{\rho}) \neq p$ を満たすとする ($k(\overline{\rho}) = p+1$ のとき、$\overline{\rho}|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_p} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であることに注意)。このとき、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し、$\overline{\rho}$ の A への持ち上げ $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(A)$ が**クリスタリン** (crystalline) であるとは、

(1) $k(\overline{\rho}) < p$ ならば ρ は重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリン表現であり、

(2) $k(\overline{\rho}) = p+1$ ならば $\rho|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \chi_p^p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である、

を満たすことである。また、ある変形に対し、それに属する 1 つの (又は任意の) 持上げがクリスタリンであるとき、その変形をクリスタリンであると呼ぶ。さらに、$\mathrm{Def}_{\overline{\rho}}^\eta$ の部分関手 $\mathscr{G}_{\mathrm{crys},\overline{\rho}}^\eta$ を、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し、

$$\mathscr{G}_{\mathrm{crys},\overline{\rho}}^\eta(A) = \{\rho \in \mathrm{Def}_{\overline{\rho}}^\eta(A) |\ \rho \text{ はクリスタリン }\}$$

で定める。

定義. $\overline{\rho}$ 及び η は上の通りとし、$\overline{\rho}|_{I_p}$ は $2 \leq k \leq p-1$ なるある整数 k に対して

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi_p}^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であると仮定する。このとき、$A \in \mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し、$\overline{\rho}$ の A への持ち上げ $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(A)$ が**ウエイト 2 型** (of weight 2) であるとは、

(1) $\rho|_{I_p}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_p^{k-2}\chi_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値であり、

(2) $k(\overline{\rho})=2$ ならば $\rho|_{I_p}$ は Barsotti-Tate である

を満たすことである。また、ある変形に対し、それに属する 1 つの (又は任意の) 持上げがウエイト 2 型であるとき、その変形をウエイト 2 型であると呼ぶ。さらに、$\mathrm{Def}^{\eta}_{\overline{\rho}}$ の部分関手 $\mathscr{G}^{\eta}_{\mathrm{wt2},\overline{\rho}}$ を、$A\in\mathrm{CNL}_{\mathscr{O}}$ に対し、

$$\mathscr{G}^{\eta}_{\mathrm{wt2},\overline{\rho}}(A)=\{\rho\in\mathrm{Def}^{\eta}_{\overline{\rho}}(A)|\ \rho\text{ はウエイト 2 型 }\}$$

で定める。

定理 8.16. $\mathscr{G}^{\eta}_{\mathrm{wt2},\overline{\rho}}$ 及び $\mathscr{G}^{\eta}_{\mathrm{crys},\overline{\rho}}$ は $\mathrm{Def}^{\eta}_{\overline{\rho}}$ の部分関手として相対的表現可能であり、よって、半普遍変形環 R を持つ。更に、$\mathscr{O}$ 代数として

$$R\cong\mathscr{O}[[T_1,\cdots,T_d]]、$$

但し $d=\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{H}^0(G_{\mathbb{Q}_p},\mathrm{ad}^0\overline{\rho})+1$、が成り立つ。

クリスタリンな変形については、$k(\overline{\rho})<p$ のときは Ramakrishna の論文 [Ram93] ([Ram02] や [Tay03] も参考にされたい) を、$k(\overline{\rho})=p+1$ のときは Khare-Wintenberger のプレプリント [KW] の Proposition 3.5 を参照せよ。

ウエイト 2 型の変形については、$k(\overline{\rho})=2$ のときは Ramakrishna の論文 [Ram93] を、それ以外の場合は Taylor の論文 [Tay03] を参照せよ。

8.4.4. **定理 *8.5* の証明**. $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ 及び $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$ の場合は、Böckle の局所大域原理 (定理 8.13) 及び局所変形環の計算 (定理 8.14 ($l\neq p$)、定理 8.16 ($l=p$)) から直ちに従う (無限素点での計算に $\overline{\rho}$ が奇であることを使う)。$\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ の場合は、Böckle の局所大域原理、定理 8.16 ($l=p$) 及び定理 8.15 ($l\neq p$) より従う。

9. 狭義両立系・Abel 多様体の構成

9.1. **狭義両立系の構成 - $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型の場合.** 最初の 3 節では定理 4.10 を示す。ここではまず (1) の場合を示す (後で述べるように他の場合もほぼ同じ流れで示される)。

$\overline{\rho}$ を $\mathrm{A}_{\mathbb{Q}}$ 型の S 型法 p 表現で二面体群的でないものとする。このとき定理 8.4 より、$\overline{\rho}\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}_p}$ の持ち上げ $\rho:G_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ で p の外で不分岐かつ p で重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリンであるようなものが得られる。

一方、$\overline{\rho}$ に定理 12.9 を使うと、定理 12.9 (1)-(4) を満たす総実体 F、及び全ての有限素点で不分岐で重さ $k(\overline{\rho})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π' で、$\overline{\rho}|_{G_F}\cong\overline{\rho_{\pi',\iota_p}}$ なるものが得られる。

すると、Taylor の保型性持ち上げ定理 (定理 12.7、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約のとき) 及び Skinner-Wiles の保型性持ち上げ定理 (定理 12.8、$\overline{\rho}|_{D_p}$ が可約のとき) より、全ての有限素点で不分岐で重さ $k(\overline{\rho})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π で $\rho|_{G_F}\cong\rho_{\pi,\iota_p}$ なるものの存在が分かる ($\overline{\rho}|_{D_p}$ が可約のときは補題 7.7 にも注意せよ)。

この π から $G_{\mathbb{Q}}$ の両立系を構成する為、以下の 2 つの定理を用いる:

定理 9.1. *(Brauer)* ρ を有限群 G の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の表現とすると、ある自然数 r と、ある冪零部分群 $H_i\subset G$、H_i の *1* 次元表現 ψ_i、整数 n_i *(*$i=1,\cdots,r$*)* で、仮想表現 (表現の同値類の集合 $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}}(G)$ に伴う *Grothendieck* 群の元) として、

$$\rho=\sum_i n_i\mathrm{Ind}^G_{H_i}\psi_i$$

なるものが存在する。

定理 9.2. p を素数、F'/F を代数体の可解拡大とし、$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を p 進表現、$\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を埋め込みとする。

(1) 重さ $k \geq 2$ のある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π に対して $\rho \cong \rho_{\pi,\iota}$ ならば、重さ k のある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F'})$ の尖点的保型表現 π' が存在して $\rho|_{G_{F'}} \cong \rho_{\pi',\iota}$ である。

(2) 逆に、重さ $k \geq 2$ のある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F'})$ の尖点的保型表現 π' に対して $\rho|_{G_{F'}} \cong \rho_{\pi',\iota}$ ならば、重さ k のある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π が存在して $\rho \cong \rho_{\pi,\iota}$ である。

定理 9.1 については例えば [Ser77] にある。定理 9.2 は Langlands、Arthur-Clozel の底変換定理を用いて示される。詳しくは [Tay03] の Theorem2.4 の証明内の議論 (p.563-p.564) を参照されたい。

さて、Brauer の定理より、F/F_i が可解であるような $F/\mathbb{Q}$ の中間体 F_i、指標 $\psi_i : \mathrm{Gal}(F/F_i) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$、整数 n_i で、仮想表現として

$$\mathbf{1}_{\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(F/F_i)}^{\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})} \psi_i$$

となるようなものが取れる。

また、定理 9.2 より、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_i})$ の尖点的保型表現 π_i で、$\rho|_{G_{F_i}} \cong \rho_{\pi_i,\iota_p}$ なるものが存在する。

よって、射影公式より

$$\rho = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} (\psi_i \otimes \rho|_{G_{F_i}}) = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} (\psi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota_p})$$

(ここで、ι_p によって ψ_i を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 値の指標と思っている) を得る。これを踏まえて、任意の素数 l 及び任意の埋め込み $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}$ に対して、$\overline{\mathbb{Q}_l}$ 上の $G_\mathbb{Q}$ の仮想表現 ρ_ι を

$$\rho_\iota = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} (\psi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota})$$

(ここでは、ι によって ψ_i を $\overline{\mathbb{Q}_l}$ 値の指標と思っている) で定める。

このとき、関手 WD と誘導表現との可換性より (仮想表現として)$\rho_\iota|_{G_F} = \rho_{\pi,\iota}$ であることが従う。

命題 9.3. ρ_ι は $G_\mathbb{Q}$ の $\overline{\mathbb{Q}_l}$ 上の奇の既約表現 (に伴う仮想表現) である。

証明．各 $\mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} (\psi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota})$ が半単純であることに注意すると

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}} \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_l}[G_\mathbb{Q}]}(\rho_\iota, \rho_\iota) = 1、\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}} \rho_\iota = 2$$

を示せば十分である (各等式の左辺は仮想表現に対しても線型に拡張することで定義可能である)。

第 2 式は $\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}} \rho_\iota$ も $\dim_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rho$ も共に $\sum_i 2n_i[G_\mathbb{Q} : G_{F_i}]$ に等しいことから従う。

第 1 式を示すため記号を導入する。G を群、K を G の正規部分群、$f : K \to \mathrm{GL}_N(\Omega)$ を群準同型 (K の Ω 上の表現) とする。このとき、$g \in G$ に対して準同型 f^g を $f^g(h) = f(g^{-1}hg)(h \in K)$ と定める。

さて、各組 (i,j) に対して、商集合 $G_{F_i} \backslash G_\mathbb{Q} / G_{F_j}$ の代表系 $\{\tau_k\}$ を 1 つ取り、F_i と $\tau_k(F_j)$ の合成体を F_{ijk} とおく。このとき、

$$(\mathrm{Ind}_{G_{F_j}}^{G_\mathbb{Q}} \psi_j)|_{G_{F_i}} \cong \bigoplus_k \mathrm{Ind}_{G_{F_{ijk}}}^{G_{F_i}} (\psi_j^{\tau_k})$$

が成り立ち ([Ser77] Chapter 7、Proposition 22)、従って誘導表現の一般論より

$$\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_l}[G_{\mathbb{Q}}]}(\rho_\iota,\rho_\iota)=\sum_{ijk} n_i n_j t_{ijk}、$$

但し $t_{ijk}=\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_l}[G_{F_{ijk}}]}((\psi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota})|_{G_{F_{ijk}}},(\psi_j\otimes\rho_{\pi_j,\iota})^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}})$、が成り立つ。ここで、$\rho_{\pi_i,\iota}|_{G_F}$ 及び $\rho_{\pi_j,\iota}|_{G_F}$ が既約であることに注意すると、t_{ijk} は $(\psi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota})|_{G_{F_{ijk}}}$ と $(\psi_j\otimes\rho_{\pi_j,\iota})^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}}$ とが同型であるか否かに従って 1 又は 0 となる。

然るに一方、同様の計算により

$$\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_p}[G_{\mathbb{Q}}]}(\rho,\rho)=\sum_{ijk} n_i n_j {t'}_{ijk}、$$

但し ${t'}_{ijk}=\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_p}[G_{F_{ijk}}]}((\psi_i\otimes\rho)|_{G_{F_{ijk}}},(\psi_j\otimes\rho)^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}})$、が成り立ち、$t'_{ijk}$ は $(\psi_i\otimes\rho)|_{G_{F_{ijk}}}$ と $(\psi_j\otimes\rho)^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}}$ とが同型であるか否かに従って 1 又は 0 となる。

さて、$\rho|_{G_{F_i}}$、$\rho_{\pi_i,\iota}$ は共に既約であって、有限個の素点を除き Frobenius の固有多項式が一致するので、各 3 つ組 (i,j,k) に対し $(\psi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota})|_{G_{F_{ijk}}}$ と $(\psi_j\otimes\rho_{\pi_j,\iota})^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}}$ とが同型であることと $(\psi_i\otimes\rho)|_{G_{F_{ijk}}}$ と $(\psi_j\otimes\rho)^{\tau_k}|_{G_{F_{ijk}}}$ とが同型であることとは同値であり、従って $t_{ijk}=t'_{ijk}$ が成り立つ。

よって ρ の既約性より、$\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_l}[G_{\mathbb{Q}}]}(\rho_\iota,\rho_\iota)=\dim \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_p}[G_{\mathbb{Q}}]}(\rho,\rho)=1$ を得る。

ρ_ι が奇であることは、$\rho_{\pi,\iota}$ が総奇であることと $\rho_\iota|_{G_F}\cong\rho_{\pi,\iota}$ より従う。

この $\{\rho_\iota\}$ より (ある代数体 E に対して) $G_{\mathbb{Q}}$ の E 有理的狭義両立系が構成できる。具体的には、π_i の定義体及び ψ_i の像を含む代数体 E を取り、このとき $\rho_\iota(\iota:\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_l})$ は $\iota|_E$ のみに依ることに注意して、各 $\iota: E\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_l}$ に対しその拡張 $\tilde{\iota}:\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_p}$ を 1 つ取り $\rho_\iota=\rho_{\tilde{\iota}}$ とおく。Weil-Deligne 群の表現 r_q (q は素数) の定義はやや繁雑だが容易であり、以後使わないので省略する。

以下、これが求める性質を持つことを見る。$\rho=\rho_p$ が条件を満たしていることは作り方より明らかなので、以下 ρ_l ($l\neq p$ は奇素数) について考察する。$q\neq l$、p で不分岐であることは狭義両立系の定義より明らかであり、ρ_l が p で不分岐であることは $\rho_l|_{G_F}\cong\rho_{\pi,\iota_l}$ 及び F が p で不分岐であることから従うので以下を示せば十分である。

補題 9.4. $l\neq p$ を奇素数とする。このとき $\rho_l|_{D_l}$ は重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリン表現である。

証明．(ι_l に関する) $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の l の分解群に対応する $F/\mathbb{Q}$ の中間体を F_D、l の上の F_D の素点を λ とする。

このとき、一般に F/F_D は可解拡大であるので定理 9.2 より重さ $k(\overline{\rho})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_D})$ の尖点的保型表現 π_D で $\rho_l|_{G_{F_D}}\cong\rho_{\pi_D,\iota_l}$ なるものが存在する。このとき、$\rho_p|_{G_{F_D}}\cong\rho_{\pi_D,\iota_p}$ であることも容易に分かる。

さて、$\rho_p|_{G_{F_D}}$ が λ で不分岐であるので、局所大域両立性 (定理 12.3 (4)) より π_D が λ で不分岐であることが従い、再び定理 12.3 (6) より $\rho_l|_{G_{F_D}}\cong\rho_{\pi_D,\iota_l}$ が λ でクリスタリンであることが従う。λ が F_D で完全分解することから ρ_l が l で重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリンであることが従う。

9.2. **狭義両立系の構成 - $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型の場合.** この節では、定理 4.10 の (2) を示す。まず、$\overline{\rho}$ が $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ 型の法 p 表現で二面体群的でないものであるとき、前節と同様に定理 8.4 より、$\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}_p}$ の持ち上げ $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を見つけ、潜在的保型性定理及び保型性持ち上げ定理より、総実体 F 及び $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π で

(1) p を割らない全ての F の素点で不分岐であり、
(2) $v|p$ なる素点に対し、π_v の導手は v を割り、さらに $k(\overline{\rho}) = 2$ ならば π_v は不分岐であり、
(3) 重さ 2 であり、
(4) $\rho|_{G_F} \cong \rho_{\pi,\iota_p}$ である

ようなものの存在が分かる。そこで前節と同様にしてこの π から $G_{\mathbb{Q}}$ の狭義両立系 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\iota)$ を作れば、π の性質から定理 4.10(2)(b) の条件が確かめられる。

9.3. **狭義両立系の構成 - $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の場合.** $\overline{\rho}$ が $\mathrm{C}_{\mathbb{Q}}(i)$ 型の法 p 表現で二面体群的でないものであるときも $G_{\mathbb{Q}}$ の狭義両立系を作る所までは同様である。但し、ここでは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π として重さ 2 で全ての有限素点で不分岐であるようなものを取る。

さて、$\boldsymbol{\rho}$ が定理 4.10(3)(b) の条件を満たすことを確認する。以下の補題を示せば十分である。

補題 9.5. (1) $\rho_q|_{D_q}$ は $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ 上 *Barsotti-Tate* である。
(2) $k(\overline{\rho_q}) = i + 2$ または $k(\overline{\rho_q} \otimes \overline{\chi_q}^{-i}) = q + 1 - i$ である。

証明．まず (1) を示す。(ι_q に関する) $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の q の分解群に対応する $F/\mathbb{Q}$ の中間体を F_D、q の上の F_D の素点を Q とする。

一方、[Tay03] の Lemma 2.2 を用いて、$\mathbb{Q}$ 上可解の総実体 F' で、q の上の任意の素点に於ける完備化が $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ であるようなものを取り、F'_D を F_D と F' の合成体とする。このとき F'_D/F_D も可解である。

よって、底変換定理 (9.2(1) 及び (2)) により、$\rho_p|_{G_{F_D}} \cong \rho_{\pi_D,\iota_p}$ なる重さ 2 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_D})$ の尖点的保型表現 π_D、及び $\rho_p|_{G_{F'_D}} \cong \rho_{\pi'_D,\iota_p}$ なる重さ 2 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F'_D})$ の尖点的保型表現 π'_D の存在が相次いで分かる。

このとき、$\rho_q|_{G_{F'_D}} \cong \rho_{\pi'_D,\iota_q}$ でもあるので、$\rho_p|_{G_{F'_D}}$ が Q の上にある F'_D の素点で不分岐であることに注意すると、補題 9.4 と同様に局所大域両立性を 2 回用いることで、q の上の任意の F'_D の素点 Q' に対して、$\rho_q|_{G_{F'_D}} \mod (Q')^n$ が有限平坦であることが分かり、Raynaud の定理 ([Ray74] Proposition 2.3.1) より $\rho_q|_{G_{F'_D}}$ もそれらの素点で Barsotti-Tate であることが分かる。

そこで、q の上の素点による F'_D の完備化が $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ であることに注意すれば、$\rho_q|_{D_q}$ が $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ 上 Barsotti-Tate であることが分かる。

次に (2) を示す。Taylor のレベル上昇の手法 ([Tay89] 又は [BDJ] の Lemma 2.9 を参照) を用いると、重さ 2 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_D})$ の尖点的保型表現 π' で

(1) π'_Q に対応する惰性的 Weil-Deligne パラメータは $(\omega_q^i \oplus \mathbf{1}, 0)$ であり、
(2) F_D のある有限素点で二乗可積分であり、
(3) $\overline{\rho_{\pi',\iota_q}} \cong \overline{\rho_q}|_{G_{F_D}} (\cong \overline{\rho_{\pi_D,\iota_q}})$ である

ようなものが存在することが分かる。そこで、この π' に局所大域両立性 (定理 12.3(5)) と定理 3.7 (2) を用いれば良い。

9.4. **Abel 多様体の構成.** 概略のみ述べるが、証明の流れは狭義両立系の構成の場合とほぼ同様である。$\overline{\rho}$ を定理 4.6 の通りとすると、定理 8.4 ($k(\overline{\rho}) = p+1$ のときは $\mathrm{B}'_{\mathbb{Q}}$、$k(\overline{\rho}) = 2$ のときは $\mathrm{A}'_{\mathbb{Q}}$ の場合) を適用することで、$\overline{\rho}$ の持ち上げ $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(K)$ (K は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) で、

(1) ρ は全ての $l \neq p$ で不分岐または通常で、有限個の素数を除いて不分岐であり、
(2) p において重さ 2 の半安定であり、
(3) 少なくとも 1 つの素数 l において通常である (l は p でも $\neq p$ でもあり得る)

ようなものが存在する。この結果に Taylor の潜在的保型性定理 (12.9) 及び保型性持ち上げ定理を用いることで総実体 F 及び $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π で $\rho|_{G_F} \cong \rho_{\pi,\iota_p}$ なるものを見つけ、これに Jacquet-Langlands 対応を適用することで、志村曲線の Jacobi 多様体の商として F 上の Abel 多様体で $\rho|_{G_F}$ を生じるものを構成することが出来る。

ここから、Weil 制限を利用して $\mathbb{Q}$ 上の Abel 多様体で ρ を生じるものを構成する ([Tay02] Corollary 2.4 の議論を参照せよ)。

10. 演習問題

以下の小問に従って、本稿で紹介した定理を用いて Fermat 予想を証明せよ。

(1) Fermat 予想を示すには

$$a^p + b^p + c^p = 0、abc \neq 0、b \text{ は偶数、} a \equiv -1 (\mathrm{mod} 4)$$

なる互いに素な整数 a、b、c 及び素数 $p \geq 5$ がないことを示せば十分であることを証明せよ (Hint: [斎 00] 第 0 章を参照せよ)。
(2) (1) のような (a, b, c) があったとして Frey 曲線 $y^2 = x(x - a^p)(x - b^p)$ の p 等分点から法 p 表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を作ったとき、$k(\overline{\rho}) = N(\overline{\rho}) = 2$ が成り立つことを示せ (Hint: [斎 00] 第 1 章、第 3 章を参照し、レベル、Serre 重さの定義を思い出してみよ)。
(3) $\overline{\rho}$ が既約であること (Mazur) と Image $(\overline{\rho})$ は非可解であること ([Ser72] Proposition 21 及び [Rib97] を参照) を認めた上で、定理 4.6 及び定理 5.2 を用いて (1) のような (a, b, c) の存在から矛盾を導け (Hint: Frey 曲線の半安定性については [斎 00] 第 1 章参照)。

注意 10.1. ここでの手法と Wiles の手法とは以下の点が大きく異なる:

- Wiles の手法と異なり、$\overline{\rho}$ の像が可解の場合の保型性に関する Langlands-Tunnell の定理 ([斎 00] の定理 3.28 参照) が不要である。
- Wiles の手法ではレベル低下に関する Ribet の結果 ([斎 00] の定理 3.55 参照) が必要であったがそれが不要である。その代わり、底変換を許したレベル低下に関する Skinner-Wiles の結果 ([SW01a]) が必要となる。

11. 付録 1: Dieulefait による Serre 予想の別証明

ここでは Dieulefait によるレベル 1 の Serre 予想の別証明について、その概略を述べる。詳しくは [Die] を参照されたい。基本方針は重さ $k = k(\overline{\rho})$ に関する帰納法である。

11.1. **最初の帰着.** まず、$k=2$ のときは、予想 $\mathrm{S}(2,p)$ (p は任意の素数) を Khare-Wintenberger の方法で示す (定理 5.4)。

次に、以下の補題が成り立つことに注意する (定理 5.7):

補題 11.1. 偶数 k に対し、少なくとも *1* つの素数 $p_0 \geq k-1$ に対して予想 $\mathrm{S}(k,p_0)$ が成り立てば、任意の素数 $p \geq k-1$ に対して予想 $\mathrm{S}(k,p)$ も成り立つ。

すると、$k=4$、6、8、12 及び 14 のときは、まず予想 $\mathrm{S}(k,k-1)$ が定理 4.6 と Schoof の定理 (5.2) より従うので、補題 11.1 よりこれらの k 及び任意の素数 $p \geq k-1$ に対して予想 $\mathrm{S}(k,p)$ も従う。よって、補題 2.10(2) と数学的帰納法も用いると、以下の主張を示すことに帰着される:

主張 11.2. k を $k>14$ 又は $k=10$ なる偶数とする。k 未満の全ての k' 及び全ての素数 q に対しては予想 $\mathrm{S}(k',q)$ が成り立っていると仮定する。このとき、$p>k$ なる素数で予想 $\mathrm{S}(k,p)$ が成り立つようなものが少なくとも *1* つ存在する。

11.2. **Galois 共役の存在定理.** そこで以下、この主張を確かめていくわけであるが、まずその為の準備として、「持ち上げの存在」及び「Galois 共役の存在」を保証する 2 つの定理を紹介する。

まず、法 p 表現の p 進表現への持ち上げに関して、第 8 章に於けるのとは別の、次の定理が成り立つ:

定理 11.3. 法 p 表現 $\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ が p の外で不分岐で $2<k(\overline{\rho})<p$ のとき、持ち上げ $\rho: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ で、p の外で不分岐、p で潜在的 *Barsotti-Tate* で、$\tau(\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) = \omega_p^{k(\overline{\rho})-2} \oplus \mathbf{1}$ であるようなものが存在する

証明は、定理 8.4 と同様に Böckle の局所大域原理 (定理 8.13) によって Savitt による局所変形環の計算 ([Sav05]) に帰着して示す。

一方、p 進表現に対しては以下の「Galois 共役」の存在を示すことが出来る (これを用いることが、Khare、Wintenberger の手法と大きく異なる点である)。

定理 11.4. p 進表現 $\rho: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ は p の外で不分岐、p で潜在的 *Barsotti-Tate* で $\tau(\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) = \omega_p^{k-2} \oplus \mathbf{1}$ $(2<k<p)$ とする。

このとき、素数 $l \neq p$ に対し (ι_p に関して) $\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_l) \in \overline{\mathbb{Q}}$ であり、任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し、p の外で不分岐かつ p で潜在的 *Barsotti-Tate* な p 進表現 ${}^{\sigma}\rho: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ で

(1) $\mathrm{tr}\,{}^{\sigma}\rho(\mathrm{Frob}_l) = \sigma(\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_l))$ $(l \neq p)$

(2) $\tau({}^{\sigma}\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) = \sigma \circ (\omega_p^{k-2} \oplus \mathbf{1}) (= (\sigma \circ \omega_p^{k-2}) \oplus \mathbf{1})$

であるようなものが存在する。

証明．Galois 共役の構成についての方針のみ示す。狭義両立系の構成と同様に、潜在的保型性定理、保型性持ち上げ定理、Brauer の定理、底変換定理によって、総実体 F 及びその中間体 F_i、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_i})$ の尖点的保型表現 π_i、整数 n_i、$\mathrm{Gal}(F/F_i)$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ 値指標 ψ_i を適当に取ると、仮想表現として、

$$\rho = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} (\iota_p \psi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota_p})$$

と書ける。そこで、仮想表現 ${}^{\sigma}\rho$ を

$${}^{\sigma}\rho = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} (\iota_p \sigma \psi_i \otimes \rho_{{}^{\sigma}\pi_i,\iota_p})$$

($\rho_{^\sigma\pi_i,\iota_p}$ は $^\sigma\pi_i$ に伴う Galois 表現) とおき、これが実際に表現になっていることを確かめる。

さて、上の 2 つの定理と、保型性持ち上げ定理 (4.3(3))、さらに ρ の保型性 (既約性) と $^\sigma\rho$ の保型性 (既約性) とが同値であることを使うと、次の主張に帰着される:

主張 11.5. $k > 14$ 又は $k = 10$ なる任意の偶数 k に対し、

「任意の S 型法 p 表現 $\overline{\rho}$ に対し、$\overline{^\sigma\rho}$ の *Serre* 重さが k 未満であるような $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ が存在する」

ような素数 $p > k$ が存在する。

ここで $\overline{^\sigma\rho}$ とは、最初に与えられた $\overline{\rho}$ から定理 *11.3* によって持上げ ρ *(*の *1* つ*)* を取り、それから定理 *11.4* で *Galois* 共役 $^\sigma\rho$ を作った後それを還元したものである。

さて、次の事実に注意する:

補題 11.6. 整数 k と素数 p は $2 < k < p$ を満たすとし、$d = \gcd(p-1, k-2)$、m は $dm = p-1$ なる整数とする。

(1) ω_p^{k-2} の位数は m である。
(2) m と素な任意の整数 t に対し、σ を $\sigma \circ \omega_p^{k-2} = \omega_p^{dt}$ となるようにとることが出来る。

そこで、定理 3.7(2-c)、補題 2.16 と下の練習を考慮すると次の「数論的」主張を示すことに帰着される:

主張 11.7. k を $k = 10$ 又は $k > 14$ なる偶数とする。このとき、

(1) 素数 p を $k = 32$ なら $p = 43$、$k \neq 32$ なら k 以上の最小の素数と取り、
(2) $d = \gcd(p-1, k-2)$、m を $dm = p-1$ なる整数とおき、
(3) t を

$$t = \begin{cases} (m+1)/2 & m \equiv 1 \bmod 2 \text{ のとき} \\ m/2+2 & m \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき} \\ m/2+1 & m \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。

このとき、$dt + 2 < k$ が成り立つ。

練習 11.8. 以下を証明せよ

(1) $dt < p - 1$ 且つ $\gcd(t, m) = 1$ である。
(2) $\max(dt+2, p+1-dt) = dt+2$ である。

11.3. **素数の分布.** ここでは主張 11.7 を証明する。

$k \leq 36$ のときは直接計算すれば十分であるから、以下 $k > 36$ とする。まず、素数分布に関する次の事実を示す:

命題 11.9. p_n を n 番目の素数とする。このとき、$p_{n+1} > 37$ なら

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1.144$$

が成り立つ。特に、

$$\frac{p_{n+1}-1}{p_n-1} < 1.15$$

が成り立つ。

証明．$37 < p_{n+1} < 100000$ のときは計算機を使って確かめればよいので、$p_{n+1} > 100000$ とする。定理 6.2 の第 2 式より、$x > 100000$ ならば

$$\frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1.130289\,\frac{x}{\log x}$$

が成り立ち、補題 6.1 より

$$p > \max(100000, (1.144)^{1.130289/(1.144-1.130289)}) \text{ ならば } p' \leq 1.144p$$

が成り立つので、$(1.144)^{1.130289/(1.144-1.130289)} = 65530.89\ldots < 100000$ に注意すると命題が従う。後半は前半より明らかである。

さて、$k > 36$ とし、$p_n < k < p_{n+1}$ とする (p_{n+1} が主張 11.7 の p である)。d、m、t は主張 11.7 の通りとする。このとき、上の命題から

$$1 > \frac{k-2}{p_{n+1}-1} \geq \frac{p_n-1}{p_{n+1}-1} > \frac{1}{1.15} > \frac{5}{6}$$

であるので、$m \geq 7$ が分かる。よって、以下の補題より $p_{n+1}/(dt+2) > 1.144$ が従い、主張 11.7 が示される。

補題 11.10. 一般に、自然数 $m \geq 7$ に対し、主張 *11.7(3)* と同様に t を定めると、任意の $x \geq 1$ に対して

$$\frac{mx+1}{tx+2} > 1.144$$

が成り立つ。

12. 付録 2: 定理集

この章では、本稿中で使った用語・定理のうち特に重要と思われるものについて、その参照先を含めて引用しておく。

12.1. **代数的保型表現.** 総実体 F に対し、$\mathbb{A}_F$ を F のアデール環、$\mathbb{A}_{F,f}$ をその有限部分とする。また、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π を制限テンソル積分解したときの有限部分を π_f、素点 v に対応する部分を π_v で表す。

定義. $I = \mathrm{Hom}\,(F, \mathbb{R})$ とし、$\mathbf{k} = (k_\tau)_\tau \in \mathbb{Z}^I_{\geq 2}$ を I の元で添え字付けられた 2 以上の整数の集合で、任意の I の元 τ、τ' に対し $k_\tau \equiv k_{\tau'} \pmod 2$ であるようなものとする。また、$k = \max\{k_\tau\}$ とおく。

各実素点 $\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ に対し π_τ が、重さ k_τ、中心指標 $(t \mapsto t^{k-2})$ の離散系列 (に伴う $(\mathfrak{gl}_2, O(2))$ 加群) であるとき、π は重さ $\mathbf{k}$ であるという。k を 2 以上の整数、$\mathbf{k} = (k, \ldots, k)$ とするとき、重さ $\mathbf{k}$ のことを単に重さ k という。

このとき π は Clozel の意味で正則代数的 (regular algebraic) になっている。従って正則代数的保型表現に関する Clozel の理論により次が成り立つ ([Clo90]):

定理 12.1. π を重さ $k \geq 2$ とし、V を π_f の表現空間とする。また、$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ に対し、${}^\sigma\pi_f$ を $\mathbb{C} \otimes_{\sigma,\mathbb{C}} V$ の定める表現とする ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$ は $\mathrm{id} \otimes \pi_f$ と作用)。このとき、

(1) 代数体 M で、任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/M)$ に対し ${}^\sigma\pi_f \cong \pi_f$ であるようなものが存在する。

(2) π_f は M 上実現される、即ちある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$ 安定な M 部分ベクトル空間 $V_M \subset V$ で、同型 $\mathbb{C} \otimes_M V_M \cong V$ を ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$ の作用もこめて) 誘導するようなものが存在する。さらにこのような V_M はスカラー ($\mathbb{C}^\times$ の元) 倍による違いを除いて一意に定まる。
(3) 重さ k の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現で、その有限部分が ${}^\sigma\pi_f$ であるようなものが同型を除いて一意に存在する。これを ${}^\sigma\pi$ と表す。

尚、このような M の内で最小のものを π の**定義体**という。

注意 12.2. より一般に、重さ $\mathbf{k}$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π に対しても同様の性質が知られているが、本稿では使わないので省略する。

12.2. **保型表現に伴う Galois 表現 (局所大域両立性)**. まず、ここで使う局所 Langlands 対応を明確にする。

定義. K を局所体、W_K をその Weil 群とする。このとき、局所類体論の同型 $K^\times \cong W_K^{\mathrm{ab}}$ として、K の素元が W_K^{ab} の**算術的**Frobenius の逆像と対応するものを使う。以下、これによって両者をしばしば同一視する。例えば、$|-|_K : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ と $\chi_l^{-1}|_{W_K}$ とが (同型 $\overline{\mathbb{Q}_l} \cong \mathbb{C}$ が固定されているとき) 同一視される。

また、$\mathrm{GL}_2(K)$ の保型表現 π に対し、

$$\sigma(\pi) = \mathrm{rec}_K(\pi\,|\det|_K^{\frac{1}{2}})^\vee$$

とおく。即ち、π の $\mathrm{GL}_2(K) \overset{\det}{\to} K^\times \xrightarrow{|-|_K^{1/2}} \mathbb{C}^\times$ による捻りと (Langlands 流の) 局所 Langlands 対応によって対応する Weil-Deligne 群の表現を取り、その反傾表現を $\sigma(\pi)$ とおいている (Carayol の論文 ([Car86]) で使われているものと同じである)。

例. π が不分岐主系列表現 $\mathrm{Ind}(\mu_1, \mu_2)$ (Ind は正規化された誘導表現を表す) のとき、$\sigma(\pi) = \mu_1^{-1}|-|_K^{-\frac{1}{2}} \oplus \mu_2^{-1}|-|_K^{-\frac{1}{2}}$ である。

さて、$GL_2(\mathbb{A}_F)$ のある種の保型表現 π に対して次のような Galois 表現の存在が知られている:

定理 12.3. π を重さ $\mathbf{k} = (k_\tau)$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現、M をその定義体とし、$k = \max\{k_\tau\}$ とおく。また、$\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を埋め込みとする。

このとき、G_F の p 進表現 $\rho_{\pi,\iota} : G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ で次を満たすものが存在する*:*

(1) $\rho_{\pi,\iota}$ は既約である。
(2) $\rho_{\pi,\iota}$ は**総奇** *(totally odd)*、即ち任意の体の埋め込み $\sigma : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して $\det \rho_{\pi,\iota}(\sigma^{-1} c \sigma) = -1$ である。
(3) $\det \rho_{\pi,\iota}$ は $\chi_p^{k-1}|_{G_F}$ と有限位数の指標との積である。
(4) p を割らない任意の F の有限素点 v に対し、$\sigma(\pi_v)$ は M 上定義され (これも $\sigma(\pi_v)$ と表す)、

$$\mathrm{WD}(\rho_{\pi,\iota}|_{D_v})^{F-\mathrm{ss}} \cong (\iota \circ i)_* \sigma(\pi_v)$$

が成り立つ。ここで $(\iota \circ i)_*$ は自然な埋め込み $i : M \subset \overline{\mathbb{Q}}$ と ι との合成による係数拡大を表す。
(5) $[F : \mathbb{Q}]$ が奇数であるか、少なくとも *1* つの F の素点 w に対し π_w が二乗可積分であれば、*(4)* の同型が $v|p$ なる任意の有限素点に対しても成り立つ。

(6) $\rho_{\pi,\iota}$ を誘導する G_F の $\mathscr{O}_L$ 上の表現 ($L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) を *1* つ取り、これも再び $\rho_{\pi,\iota}$ と書く。

　このとき、p が奇素数、v が p の上の F の有限素点で、π_v が不分岐であれば、任意の自然数 n に対し $\rho_{\pi,\iota}|_{D_v} \mod \mathfrak{m}_L^n$ は *Hodge-Tate* 重さを 0 から $k-1$ の間にもつクリスタリン表現の部分商である。

　さらに、v が F で不分岐であれば、$\rho_{\pi,\iota}|_{D_v}$ は *Hodge-Tate* 重さを 0 から $k-1$ の間に持つクリスタリン表現である。

(4) までは [Tay89]、[Tay95] 及びその参考文献を参照されたい。(5) は斎藤毅氏による ([Sai])。(6) は Breuil の定理 ([Bre99] Théorème 1(1)) と Berger の定理 ([Ber04] Théorème 1) を組み合わせると従う。

12.3. **保型性持ち上げ定理 ($F = \mathbb{Q}$ の場合).** この節では p を奇素数、K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし、$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(K)$ を連続表現、$\overline{\rho}$ をその還元とする。

定理 12.4. *(Kisin)* ρ を上の通りとすると、以下の条件下で $\overline{\rho}$ の保型性から ρ の保型性が従う:

(1) ρ は有限個の素数の外で不分岐で、
(2) p において潜在的 *Barsotti-Tate* であり、
(3) ある有限位数の指標 $\psi : G_{\mathbb{Q}} \to K^\times$ によって $\det\rho = \chi_p\psi$ と書け、
(4) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は絶対既約、但し $F = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p})$、である。

定理 12.5. *(Diamond-Flach-Guo)* ρ を上の通りとすると、以下の条件下で $\overline{\rho}$ の保型性から ρ の保型性が従う:

(1) ρ が有限個の素数の外で不分岐で、
(2) p で分岐かつクリスタリン、且つ $\rho|_{D_p}$ に伴う *Dieudonné* 加群の長さが $p-1$ 未満であり、
(3) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は絶対既約、但し $F = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}))$、である。

定理 12.6. *(Skinner-Wiles)* ρ は有限個の素数の外で不分岐であるような奇の既約連続表現で、ある有限位数の指標 ψ と *1* 以上の整数 μ によって $\det\rho = \chi_p^\mu\psi$ と書けるものとする。このとき、以下の *(1)*、*(2)* いずれかの条件が成り立てば ρ は保型的である:

(1) (a) $\rho|_{D_p}$ は $\begin{pmatrix} \psi_1 & * \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}$、但し $\psi_2|_{I_p}$ は有限位数、の形の表現と同値であり、
　(b) $\overline{\rho}|_{D_p}$ は $\begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$、但し $\chi_1 \neq \chi_2$、の形の表現と同値であり、
　(c) $\overline{\rho}$ は既約且つ保型的である。
(2) (a) $\rho|_{I_p}$ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の表現と同値であり、
　(b) $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong \boldsymbol{1} \oplus \chi$ (但し $\chi|_{D_p} \neq 1$) と書ける。

定理 12.4 は [Kis] の主定理、定理 12.5 は [DFG04] の Theorem 0.3 であり、定理 12.6 は (1) が [SW01b] の Theorem 5.2、(2) が [SW99] の主定理である。

12.4. **保型性持ち上げ定理 (F:総実体の場合).**

定理 12.7. *(Taylor)* p を奇素数、k を $2 \le k \le p-1$ なる整数とし、総実体 F を $\mathbb{Q}$ 上偶数次拡大で、p が F で完全分解するようなものとする。また、$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ を有限個の素数の外で不分岐であるような既約連続表現で、

(1) 任意の $v|p$ に対して $\rho|_{G_{F_v}}$ は重さ k のクリスタリンで、
(2) $\overline{\rho}|_{G_{F'}}$ は既約である (ここで、$F' = F(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p})$)

ようなものとする。

このとき、ある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π で

(1) π_w は F の全ての有限素点 w で不分岐で、
(2) 重さ k である

ようなものが存在して $\overline{\rho} \cong \overline{\rho_{\pi,\iota_p}}$ となるとすると、ある重さ k の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π' が存在して、$\rho \cong \rho_{\pi',\iota_p}$ となる。

定理 12.8. *(Skinner-Wiles)* p を奇素数、F を総実体とする。p の上の素点を $v_i\,(i = 1, \ldots, t)$ とし、対応する分解群及び惰性群を D_i 及び I_i で表す。

また、$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ は有限個の素数の外で不分岐であるような総奇かつ既約な連続表現で、ある有限位数の指標 ψ と *1* 以上の整数 μ によって $\det \rho = \chi_p^{\mu}\psi$ と書けるようなものとし、$\overline{\rho}$ は既約であると仮定する。さて、

(1) 任意の i に対して $\rho|_{D_i}$ は

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{(i)} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

但し $\psi_2^{(i)}|_{I_i}$ は有限位数、の形の表現と同値であり、

(2) 任意の i に対して $\overline{\rho}|_{D_i}$ は

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(i)} & * \\ 0 & \chi_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

但し $\chi_1^{(i)} \neq \chi_2^{(i)}$、$\chi_2^{(i)} = \psi_2^{(i)} \bmod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$、の形の表現と同値である

と仮定する。

このとき、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π で、任意の i に対して $\rho_{\pi,\iota_p}|_{D_i}$ は

$$\begin{pmatrix} \phi_1^{(i)} & * \\ 0 & \phi_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値 (ここに $\phi_2^{(i)}|_{I_i}$ は有限位数で、$\chi_2^{(i)} = \phi_2^{(i)} \bmod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$) であるようなものが存在して $\overline{\rho} \cong \overline{\rho_{\pi,\iota_p}}$ となるとすると、ある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π' が存在して $\rho \cong \rho_{\pi',\iota_p}$ となる。

定理 12.7 は [Tay06] の Theorem 3.3 (定理 12.1 も用いる)、定理 12.8 は [SW01b] の Theorem 5.1 である。

12.5. **Taylor の潜在的保型性定理.**

定理 12.9. *(Taylor)* $\mathbb{F}$ は標数 $p > 2$ の有限体、$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は S 型の表現であって、二面体群的でなく、その重さ $k(\overline{\rho})$ は $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$、$k(\overline{\rho}) \neq p$ を満たすとする。このとき、総実体 F で次を満たすものが存在する*:*

(1) F は $\mathbb{Q}$ 上偶数次数の *Galois* 拡大。
(2) F は p で不分岐であり、さらに、もし $\overline{\rho}|_{D_p}$ が既約であれば p は完全分解する。
(3) $\mathrm{Image}\,(\overline{\rho}) = \mathrm{Image}\,(\overline{\rho}|_{G_F})$ が成り立つ。
(4) $\overline{\rho}|_{G_{F(\mu_p)}}$ は絶対既約である。

(5) 次の *(a)(b)* が成り立つ。

(a) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は、ある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π で

(i) 全ての有限素点で不分岐であり、

(ii) 重さ $k(\overline{\rho})$ であり、

(iii) $\overline{\rho}$ が p で通常であれば p の上の全ての素点 v に対して π_v は通常である

ようなものが存在して $\overline{\rho} \cong \overline{\rho_{\pi,\iota_p}}$ である。

(b) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は、ある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 π で

(i) p の上にない全ての有限素点、及び $\overline{\rho}|_{D_v}$ が有限平坦であるような p の上の全ての F の素点 v で不分岐で、

(ii) 重さ *2* であり、

(iii) p の上の F の素点 v に対しては π_v の導手は v を割り、

(iv) $\overline{\rho}$ が p で通常であれば p の上の全ての素点 v に対して π_v は通常である

ようなものが存在して $\overline{\rho} \cong \overline{\rho_{\pi,\iota_p}}$ である。

さらに、p と異なる有限個の素数 l_i 及び $\mathbb{Q}_{l_i}$ の ($\overline{\mathbb{Q}_{l_i}}$ 内の) 有限次拡大 F_{l_i} が与えられたとき、上記の条件に加え F を

(5) $\overline{\mathbb{Q}_{l_i}}$ における $\iota_{l_i}(F)$ ($\subset \iota_{l_i}(\overline{\mathbb{Q}})$) の閉包が F_{l_i} を含む

ように取れる。

ここに、π が $v|p$ で通常であるとは、対応する Hecke 作用素 (T_v または U_v) の固有値が (ι_p に関して)p 進単数であることをいう。

注意 12.10. 定理 12.9 において、π が v で通常なら $\rho_{\pi,\iota_p}|_{D_v}$ も通常である。

この定理については Taylor の論文 ([Tay06] の Theorem 5.7、[Tay02] の Theorem 1.6) 及び Khare と Wintenberger による修正 ([KW] Section 2 及び [Kha06] Section 2) を参照されたい。

References

[BDJ] Kevin Buzzard, Fred Diamond, and Frazer Jarvis, *On serre's conjecture for mod l Galois representations over totally real fields*, preprint.

[Ber04] Laurent Berger, *Limites de représentations cristallines*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1473–1498. MR MR2098398 (2006c:11138)

[BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 333–400. MR MR1086888 (92g:11063)

[BLZ04] Laurent Berger, Hanfeng Li, and Hui June Zhu, *Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations*, Math. Ann. **329** (2004), no. 2, 365–377. MR MR2060368 (2005k:11104)

[BM02] Christophe Breuil and Ariane Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *en* $l = p$, Duke Math. J. **115** (2002), no. 2, 205–310, With an appendix by Guy Henniart. MR MR1944572 (2004i:11052)

[Böc07] Gebhard Böckle, *Presentations of universal deformation rings*, L-functions and Galois representations, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 320, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 24–58. MR MR2392352 (2009e:11102)

[Bre99] Christophe Breuil, *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), no. 3, 459–472. MR MR1724405 (2000h:11054)

[Car86] Henri Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 409–468. MR MR870690 (89c:11083)

[Car94] ———, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 213–237. MR MR1279611 (95i:11059)

[Clo90] Laurent Clozel, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 77–159. MR MR1044819 (91k:11042)

[Del73] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349. MR MR0349635 (50 #2128)

[DFG04] Fred Diamond, Matthias Flach, and Li Guo, *The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 5, 663–727. MR MR2103471 (2006e:11089)

[Die] L. V. Dieulefait, *The level 1 case of serre's conjecture revisited*, preprint.

[Edi97] Bas Edixhoven, *Serre's conjecture*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), Springer, New York, 1997, pp. 209–242. MR MR1638480

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 4, 547–608 (1983). MR MR707328 (85c:14028)

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine, *Représentations l-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque (1994), no. 223, 321–347, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR MR1293977 (95k:14031)

[Fon94b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque (1994), no. 223, 113–184, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR MR1293972 (95g:14024)

[HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, sixth ed., Oxford University Press, Oxford, 2008, Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman. MR MR2445243

[JK02] Kirti Joshi and Minhyong Kim, *A remark on potentially semi-stable representations of Hodge-Tate type* $(0,1)$, Math. Z. **241** (2002), no. 3, 479–483. MR MR1938700 (2004b:11071)

[Kha06] Chandrashekhar Khare, *Serre's modularity conjecture: the level one case*, Duke Math. J. **134** (2006), no. 3, 557–589. MR MR2254626 (2007e:11060)

[Kis] Mark Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, preprint.

[KW] C. Khare and J. P. Wintenberger, *On serre's conjecture for 2-dimensional mod p representations of the absolute galois group of the rationals*, preprint.

[Maz89] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over $\mathbf{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, pp. 385–437. MR MR1012172 (90k:11057)

[Maz97] Barry Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), Springer, New York, 1997, pp. 243–311. MR MR1638481

[MR194] *Périodes p-adiques*, Société Mathématique de France, Paris, 1994, Papers from the seminar held in Bures-sur-Yvette, 1988, Astérisque No. 223 (1994). MR MR1293969 (95e:11004)

[Ram93] Ravi Ramakrishna, *On a variation of Mazur's deformation functor*, Compositio Math. **87** (1993), no. 3, 269–286. MR MR1227448 (94h:11054)

[Ram02] ———, *Deforming Galois representations and the conjectures of Serre and Fontaine-Mazur*, Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 1, 115–154. MR MR1935843 (2003k:11092)

[Ray74] Michel Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p,\ldots,p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280. MR MR0419467 (54 #7488)

[Rib97] Kenneth A. Ribet, *Images of semistable Galois representations*, Pacific J. Math. (1997), no. Special Issue, 277–297, Olga Taussky-Todd: in memoriam. MR MR1610883 (99a:11065)

[RS62] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94. MR MR0137689 (25 #1139)

[Sai] T. Saito, *Hilbert modular forms and and p-adic Hodge theory*, preprint.

[Sav04] David Savitt, *Modularity of some potentially Barsotti-Tate Galois representations*, Compos. Math. **140** (2004), no. 1, 31–63. MR MR2004122 (2004h:11051)

[Sav05] ______, *On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor*, Duke Math. J. **128** (2005), no. 1, 141–197. MR MR2137952 (2006c:11060)

[Ser68] Jean-Pierre Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. MR MR0354618 (50 #7096)

[Ser72] ______, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), no. 4, 259–331. MR MR0387283 (52 #8126)

[Ser77] ______, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. MR MR0450380 (56 #8675)

[Ser87] ______, *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 179–230. MR MR885783 (88g:11022)

[SW99] C. M. Skinner and A. J. Wiles, *Residually reducible representations and modular forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 89, 5–126 (2000). MR MR1793414 (2002b:11072)

[SW01a] ______, *Base change and a problem of Serre*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 1, 15–25. MR MR1815248 (2002c:11058)

[SW01b] C. M. Skinner and Andrew J. Wiles, *Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **10** (2001), no. 1, 185–215. MR MR1928993 (2004b:11073)

[Tat79] J. Tate, *Number theoretic background*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 3–26. MR MR546607 (80m:12009)

[Tay89] Richard Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 265–280. MR MR1016264 (90m:11176)

[Tay95] ______, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms. II*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 185–191. MR MR1363502 (96j:11073)

[Tay02] ______, *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 1, 125–143. MR MR1954941 (2004c:11082)

[Tay03] ______, *On icosahedral Artin representations. II*, Amer. J. Math. **125** (2003), no. 3, 549–566. MR MR1981033 (2004e:11057)

[Tay06] ______, *On the meromorphic continuation of degree two L-functions*, Doc. Math. (2006), no. Extra Vol., 729–779 (electronic). MR MR2290604 (2008c:11154)

[Wil95] Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551. MR MR1333035 (96d:11071)

[Win] J. P. Wintenberger, *Sur les représentations p-adiques géométriques de conducteur 1 et de dimension 2 de* $G_{\mathbf{Q}}$, preprint.

[斎 00] 斎藤毅, *Fermat* **予想** *1*, 岩波書店, 2000.

[松 80] 松村英之, **可換環論**, 共立出版, 1980.

[土三 76] 土井公二、三宅敏恒, **保型形式と整数論**, 紀伊國屋書店, 1976.

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan

E-mail address: keihagi@ms.u-tokyo.ac.jp