Serre 予想の証明: 一般の場合

山内 卓也 (大阪府立大学)

0. 序文

本稿の目的は Khare と Wintenberger による Serre 予想の証明 [37], [38] を解説することである. 証明で使われる重要な結果は法 p Galois 表現のほとんど厳整合系への極小持ち上げ定理 (minimal lifting theorem. 以下, LT と略記する) と保型性持ち上げ定理[1] (modularity lifting theorem. 以下, MLT と略記する) の 2 つである. MLT と LT の証明は [38] で与えられているが, ページ数が多くなるため本稿では LT の証明の解説のみに留める. これらの結果は認めてしまえば, Serre 予想の証明をフォローすることは難しくはない.

証明の方法は Serre レベルの素因子の個数と Serre 重さに関する二重帰納法で証明される. 詳しい説明は後にして, どのように証明されるかを簡単に述べる. $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を Serre 型の Galois 表現とする. $\overline{\rho}$ に適当な LT を適用し Galois 表現の族 $(\rho_p)_p$ を構成する. ρ_p と $\overline{\rho}$ は $\rho_p \bmod p = \overline{\rho}$ という還元による操作で結ばれている. 先ず適当な素数 p_1 に対して, ρ_{p_1} の還元 $\overline{\rho}_1 := \rho_{p_1} \bmod p_1$ を考える. 再び, $\overline{\rho}_1$ に LT を適用し, 族 $(\rho_p^1)_p$ を構成する. 以下, これを繰り返して (途中で Tate 捻りなどをとる必要があるが) n 回目で族 $(\rho_p^n)_p$ に対し, ある素数 P が存在して, $\overline{\rho}_{n+1} := \rho_P^n \bmod P$ が保型的, すなわち, ある (楕円) 保型形式 f に付随する法 P Galois 表現 $\overline{\rho}_f$ と同値であったとする:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \ni \rho_{p_1} \arrow[dr] & & (\rho_p^1)_p \arrow[dr] & & & & (\rho_p^n)_p \arrow[dr] & \\
\overline{\rho} \arrow[ur, "\mathrm{LT}"] & & \overline{\rho}_1 \arrow[ur, "\mathrm{LT}"] & & \overline{\rho}_2 & \cdots & \overline{\rho}_n \arrow[ur, "\mathrm{LT}"] & & \overline{\rho}_{n+1} = \overline{\rho}_f
\end{tikzcd}
$$

次に, $\overline{\rho}_{n+1}$ が保型的であることがわかったなら, 今度は保型性を保ちながら矢印を逆向きにたどって, $\overline{\rho}$ に帰ることを考える. そこで用いるのが MLT である:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \ni \rho_{p_1} \arrow[dl] & & (\rho_p^1)_p \arrow[dl] & & & & (\rho_p^n)_p \arrow[dl] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_1 \arrow[ul, "\mathrm{MLT}"'] & & \overline{\rho}_2 \arrow[ul, "\mathrm{MLT}"'] & \cdots & \overline{\rho}_n & & \overline{\rho}_{n+1} = \overline{\rho}_f \arrow[ul, "\mathrm{MLT}"']
\end{tikzcd}
$$

右端の保型性が次々と伝播し, 最後は $\overline{\rho}$ の保型性を得るのである. ではどのようにして, $\overline{\rho}_{n+1}$ の保型性を示すかであるがそれは次のように行う. 先ず, 局所良二面体的 2 次元法 p Galois 表現の概念を導入し, この場合に対して, Serre 予想を証明する. 一般に上記のように, LT と還元を繰り返し経ていると $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ の満たす局所的な条件が既存の MLT に適合するかどうかは判断できない. しかし, 局所良二面体的 2 次元法 p Galois 表現に対しては, LT と還元を繰り替えしても, 局所良二面体的であるという性質が失われないため, MLT が適用しやすい状況が整っているわけである.

帰納法は次の様に行う. 上記の LT と還元の操作を巧みに用いることで, $\overline{\rho}_{n+1}$ の Serre レベルおよび Serre 重さは $\overline{\rho}$ のそれらよりも小さくなることが分かる. よって, Serre 重さおよび

[1] 主に 4 タイプあって, Taylor-Wiles, Skinner-Wiles, Kisin, Khare-Wintenberger による.

Serre レベルが小さい Galois 表現の保型性に帰着される (帰納法の第一段階). そして, 最後に一般の場合に帰着するのである.

帰納法の第一段階にあたる部分は田口氏 [66] によって解説されている. また, 萩原氏の論説 [32] ではレベル 1 の場合 [35] が解説されており, 帰納法に関する基本的アイデアはそこで初めて登場する. 本稿ではこれらの結果は認めることにする.

最後に本稿の構成について述べる. 論文 [37] は明快に書かれているので専門家はこの論文に直接目を通した方が良いのは言うまでもない. 証明の背景, アイデア等に関する含蓄のある見解を与えることは著者にはできない. 従って, 証明を丁寧に解説し, 飛躍した議論がなされている部分は詳細を埋めるか, または参考になる文献を指定するという形式にした.

さて, 本稿の最後に安田正大氏による Dickson の分類定理の別証明を掲載した. 歴史的な部分も含めて得られるものが多いと思われる. 是非とも参照されたい.

1. 主結果

まず, Serre 予想について復習しておく.

定義. p を素数. $\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大とする. このとき, 絶対既約かつ, 奇である[2] 2 次元連続法 p Galois 表現 $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ のことを Serre 型または, S 型と呼ぶ. 本稿では後者を用いることにする. 以下, 便宜上 p のことを $\overline{\rho}$ の標数と呼び, $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ と表すことにする.

Serre 予想. ([60]) S 型 Galois 表現 $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は保型的. つまり, ある (楕円的) 尖点形式 f が存在して f に付随する 2 次元連続法 p 表現 $\overline{\rho}_{f,b}$ と $\overline{\rho}$ は同値な表現である[3].

S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ が与えられると, Serre 重さ $k(\overline{\rho})$, Serre レベル $N(\overline{\rho})$ が定まるのであった (cf. [60], [25],[32]). 定義から, $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p^2 - 1$ であり, ある整数 j が存在して, $2 \leq k(\overline{\chi_p}^j \otimes \overline{\rho}) \leq p+1$, $(p > 2)$ とできる (cf. [54]). $p = 2$ の場合は定義から $k(\overline{\rho}) \in \{2, 4\}$ である. また, $N(\overline{\rho})$ は定義から $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ と素な正の整数である. Serre 重さの定義は複雑に見えるが 2 次元のクリスタリン表現から定まる法 p 表現分類や θ 作用素と法 p 保型形式の話から眺めると何故そのように定義するかその理由がわかる.

上記の不変量を用いて, Serre はさらに $\overline{\rho}$ がどのような保型形式からくるかも予想した.

Serre 予想の精密版. ([60]) S 型 Galois 表現 $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ に属する新形式 (newform)f に付随する Galois 表現 $\overline{\rho}_f$ と同値.

注意. $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ が奇数のとき, Serre 予想の精密版と Serre 予想は同値であることが知られている [19]. $p = 2$ のときは, Buzzard, Wiese によって, ある条件の下で同値性が示されている [9],[75].

Khare は論文 [35] において, レベル 1 ($N(\overline{\rho}) = 1$) の場合に Serre 予想の精密版を証明した.

定理 1.1. S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ が $N(\overline{\rho}) = 1$ を満たすとき, $\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ からくる.

---

[2] $\det\overline{\rho}(c) = -1$, c は複素共役. $p > 2$ のとき, $\overline{\rho}$ が奇であるとき, 既約であることと絶対既約であることは同値であることを注意しておく.

[3] 以下これを $\overline{\rho} \sim \overline{\rho}_{f,b}$ と表す.

その後, 局所良二面体的 (locally good dihedral) という概念を導入し, 定理 1.1 を拡張した [37].

定理 1.2. S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ の標数を p とする.

(i) p と $N(\overline{\rho})$ は共に奇数とする. このとき, $\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ からくる.

(ii) $p=2$ かつ $k(\overline{\rho})=2$ とする (定義からレベルは奇数になる). このとき, $\overline{\rho}$ は $S_2(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ からくる.

この結果と Kisin の 2 進 MLT ([44]) を使うことで, Serre 予想の精密版が従う ($p=2$ の場合にも Serre 予想の精密版が証明されていることに注意.):

定理 1.3. 任意の S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ からくる.

この結果の系として, 次の重要な結果が得られる:

系 1.4. 任意の既約で奇な Artin 表現 $\rho : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は $S_1(\Gamma_1(N(\rho)))$ に属する保型形式 f に付随する Galois 表現 ρ_f と同値.

系 1.5. 既約かつ奇な 2 次元整合系 (ρ_ι) は保型形式 f に付随する Galois 表現の成す整合系 $(\rho_{f,\iota})$ の適当な Tate 捻り $(\rho_{f,\iota}\otimes\chi_\iota^i)$ と同値. より詳しく, 2 次元整合系 (ρ_ι) の Hodge-Tate 重さが (a,b), $a\geq b$ であるとき, f の重さは $a-b+1$ であり, $i=-b$ である.

定理 1.2 の証明のアイデアは (i) "局所良二面体的" という概念の導入, (ii) 重さ 2 への帰着 (重さサイクル), (iii) 分岐消し (killing ramification, Kisin の MLT へ帰着と帰納法) の 3 つである.

(i) の概念は S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ の中である良いクラスを定め, $\overline{\rho}$ の像が大きい (非可解) など, いくつかの良い性質をもつ. 特に, 「$\overline{\rho}$ の勝手な厳整合系への持ち上げをとったとき, 別の素点で還元をとったものも同様の性質を満たす.」という事実は証明に頻繁に使われる. 一般に p 進 Galois 表現 ρ の還元 $\overline{\rho}$ の像が小さい場合, $\overline{\rho}$ に MLT を適用する際, ρ に強い制限がかかる. しかし, (i) の導入によって, このような ($\overline{\rho}$ の像が小さい場合の MLT を適用しなければならないという) 状況をできるだけ回避することができる.

これらの結果の証明は 8,9,10 節で与える.

2. 局所良二面体性

次の関数を考える: $Q:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N},\ Q(1)=1,\ Q(n)=\max\{p\text{ 素数}\mid p|n\}\ (n\geq 2)$.

定義 2.1. p を素数, $\overline{\rho}:\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$ を連続表現とする. 素数 $q\neq p$ が次の条件を満たすとき, q は $\overline{\rho}$ に対する良二面体的素数 (good dihedral prime) と呼ぶ:

(i) $\overline{\rho}|I_q$ は $\begin{pmatrix}\psi & 0\\ 0 & \psi^q\end{pmatrix}$ の形 (これより, $q^2|N(\overline{\rho})$ がわかる). ただし, ψ は惰性群 I_q の非自明な指標で, その位数は次の性質を満たす奇素数 t の冪: $t|q+1,\ t>\max\{Q(\frac{N(\overline{\rho})}{q^2}),5,p\}$.

(ii) $q\equiv 1 \bmod 8$ かつ $\max\{Q(\frac{N(\overline{\rho})}{q^2}),p\}$ 以下のすべての素数 r に対して, $q\equiv 1 \bmod r$.

$\overline{\rho}$ に対して, この条件を満たす素数 $q \neq p$ が存在するとき, $\overline{\rho}$ は**局所良二面体的**, 又は, q 二面体的であるという. 定義から, $\overline{\rho}|D_q$ は既約であり, $\overline{\rho}(D_q)$ の射影像 (projective image) は位数 $2t^a$, $(\mathrm{ord}(\psi) = t^a)$ の二面体群である.

3. 補助定理たち

整数 $r \geq 1$ に対して, 次の 2 つの仮定を考える.

(L_r) 次の 3 条件を満たす S 型 $\overline{\rho}$ は保型的: $\begin{cases} \text{(a) 局所良二面体的,} \\ \text{(b) もし } p = 2 \text{ ならば } k(\overline{\rho}) = 2 \text{ を満たす,} \\ \text{(c) } N(\overline{\rho}) \text{ は奇数で, その素因子の数は } r \text{ 以下.} \end{cases}$

(W_r) 次の 3 条件を満たす S 型 $\overline{\rho}$ は保型的: $\begin{cases} \text{(a) 局所良二面体的,} \\ \text{(b) } k(\overline{\rho}) = 2, \\ \text{(c) } N(\overline{\rho}) \text{ は奇数で, その素因子の数は } r \text{ 以下.} \end{cases}$

(L_r) と (W_r) の違いは重さ $k(\overline{\rho})$ の条件にのみ現れる.

定理 1.2 を証明するために, 次の主張を証明する. この部分が論文の大半を占めることになる.

定理 3.1. (1) (W_1) は成立する.

(2) (L_r) は (W_{r+1}) を導く.

(3) (W_r) は (L_r) を導く.

系 3.2. すべての $r \geq 1$ に対して, (W_r), (L_r) が成立.

次に, この系 3.2 を用いて, "局所良二面体的" の場合から一般の場合へ移行する.

定理 3.4. $r \geq 0$ を非負整数として, 次の仮定を置く.

(D_r) 次の 3 条件を満たす S 型 $\overline{\rho}$ は保型的: $\begin{cases} \text{(a) 局所良二面体的,} \\ \text{(b) } \mathrm{char}(\overline{\rho}) = p \text{ は奇数,} \\ \text{(c) } N(\overline{\rho}) \text{ は } 2^{r+1} \text{ で割れない.} \end{cases}$

このとき, 次の 2 条件を満たす S 型 $\overline{\rho}$ は保型的: $\begin{cases} \text{(i) } \mathrm{char}(\overline{\rho}) = 2 \text{ かつ,} \\ r = 0 \text{ ならば, } k(\overline{\rho}) = 2, \\ \text{(ii) } N(\overline{\rho}) \text{ は } 2^{r+1} \text{ で割れない.} \end{cases}$

注意. 系 3.2 は仮定 (D_0) を導き, さらに, 定理 3.4 から, 定理 1.2 が従う. また, 仮定 (D_1) から, $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = 2$ の S 型 $\overline{\rho}$ は保型的であることと ($\mathrm{char}(\overline{\rho}) = 2$ かつ $r \neq 0$ より, 仮定から重さの制限がなくなっているに注意), $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ が奇数の S 型 $\overline{\rho}$ で, $N(\overline{\rho})$ が 4 で割れないものは保型的であることが導かれる.

Kisin の 2 進 MLT を用いて, 仮定 (D_r) をすべての $r \geq 0$ に対して証明し, 定理 1.2 を完結させる.

この節の定理たちの証明は 8 節で与える.

4. 保型性持ち上げ定理 (MLT)

この節では, 3 節で説明した定理の証明に必要な結果を紹介する．ここで紹介する結果はSerre 予想の証明において大変重要な役割を果たすのだが, ここでは結果を紹介するに留める．

$\overline{\rho}: \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を S 型とし, 次の仮定を設ける:

(i) $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1,\ (p>2)$ かつ $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は絶対既約.

(ii) $p=2$ のとき, $\mathrm{Im}\ \overline{\rho}$ は非可解群.

ρ を $\overline{\rho}$ の p 進持ち上げとする．つまり, 剰余体が $\mathbb{F}$ となるような環 $\mathcal{O}=\mathcal{O}_K$($K$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) を係数にもつ連続表現 $\rho: \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ であって, 次の可換図式を満たすもの:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}"'] & \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \arrow[d, "\mathrm{mod}"] \\ & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \end{tikzcd}$$

ρ は $\det\rho(c)=-1$ を満たすとき,「ρ は奇である」といい, ρ が Hodge-Tate 表現であり, Hodge-Tate 重さ $(k-1,0),\ k\geq 2$ を持つとき, 「ρ は重さ k である」という．

定理 4.1 $\overline{\rho}$ を上記の仮定を満たすものとし, さらに, 保型的であると仮定する．このとき, 次が成立:

(1) ($p=2$ の場合) $\overline{\rho}$ の奇な 2 進持ち上げ ρ は有限個の素点以外で不分岐であって, 次のどちらか一方を満たせば ρ は保型的:

(i) ρ は $p=2$ において重さ 2 のクリスタリン表現 (Barsotti-Tate 表現であることと同値),

(ii) ρ は $p=2$ において重さ 2 の準安定表現 ($k(\overline{\rho})=4$ のときに限る).

(2) ($p>2$ の場合) $\overline{\rho}$ の奇な p 進持ち上げ ρ は有限個の素点以外で不分岐であって, 次のどちらか一方を満たせば ρ は保型的:

(i) ρ は p において重さ k $(2\leq k\leq p+1)$ のクリスタリン表現,

(ii) ρ は p において重さ 2 の潜在的準安定表現.

5. 極小持ち上げ定理 (LT)

この節では幾何学的 Galois 表現や Galois 表現のほとんど厳整合系について簡単に解説した後で, 「$\overline{\rho}$ はその局所的な条件によって, 様々な性質をもつほとんど厳整合系に持ち上がることができる」という定理を紹介する．その前に, 記号の準備をする．

p を素数とし, 埋め込み $\iota_p: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を固定. $\chi_p: \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^{\times}$ を p 進円分指標, $\omega_p: \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^{\times}$ を法 p 円分指標 $\overline{\chi}_p$ の Teichmüller 持ち上げとする．以下では, $\iota_\ell\iota_p^{-1}(\omega_p): \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_\ell^{\times}$ のことも同じ記号 ω_p で表すことにする．

同様に, レベル 2 の基本指標 $\omega_{p,2}: I_p \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^{\times}$ と $\iota_\ell\iota_p^{-1}(\omega_{p,2})$ とを同じ記号で表すことにする．

F を代数体, p を素数とする．連続な Galois 表現 $\rho: \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$ が**幾何的**(geometric) であるとは次の性質を満たすことをいう:

(i) ρ が分岐するような K の素点は有限個,

(ii) F のすべての素点で ρ は潜在的準安定 (cf. p を割る素点での定義は [30] を見よ).

注意.(i) p を割らない F の素点に対して, ρ は常に (ii) の仮定を満たす (Grothendieck のモノドロミー定理).
(ii) $F=\mathbb{Q},\ n=2$ のとき, 無限個の素点で分岐するような準安定表現が存在する [51].

上記の Galois 表現 $\rho : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$ が与えられたとき, F の素点 q に対して, Weil 群 $\mathrm{W}_q := \{\sigma \in D_q |$ ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して, $\sigma|_{F^{\mathrm{ur}}} = \mathrm{Frob}_q^n\}$ の表現 $r_q : \mathrm{W}_q \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_p})$ が得られる. ここで, 数論的フロベニウス元 $\mathrm{Frob}_q : x \mapsto x^{p^r},\ p^r = |\mathbb{F}_q|$ は $D_q/I_q \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の位相的生成元として 1 つ固定しておく. r_q は ρ の分解群 D_q への制限に付随して定まる表現である. r_q にモノドロミー作用素と呼ばれる $\mathrm{End}_{F_q[D_q]}(\rho|_{D_q})$ の冪単元 N を付加構造として持たせたものつまり, 組 (r_q, N) のことを Weil-Deligne 表現という. モノドロミー作用素は $q \nmid p$ のときは, I_q のある開部分群の副 p 部分の位相的生成元を γ としたとき, $N = \dfrac{\log_p \rho(\gamma)}{\log_p \chi_p(\gamma)}$ で与えられる. これは Grothendieck のモノドロミー定理の証明からわかる (p.515 [61]). フロベニウス元 Frob_q の D_q への持ち上げを 1 つ固定し, それも Frob_q で表すことにすると, $\mathrm{W}_q = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Frob}_q^m I_q$ と表せることがわかる. すると, r_q は W_q の元を $g = \mathrm{Frob}_q^m \cdot \sigma,\ m \in \mathbb{Z},\ \sigma \in I_q$ とあらわすとき, $r_q(g) = \rho_\iota(g)\exp(-t_p(\sigma)N)$ で与えられる (cf. [55]). ただし,

$$t_p : I_q \longrightarrow I_q/P_q \simeq \prod_{p\ \text{は}\ q\ \text{と素}} \mathbb{Z}_p(1) \overset{p\ \text{成分への射影}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_p(1) \overset{\log_p}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_p.$$

r_q はある I_q の開部分群上で自明となるので, $r_q|_{I_q}$ の像は有限である.
一方, $q|p$ のときは, Fontaine の定義した関手 $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}$ を用いて構成される ([29]).

定義 (厳整合系). E を代数体とする. このとき, 各埋め込み $\iota = \iota_\ell : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ によって, 添え字付けされた ℓ 進 Galois 表現の族 $(\rho_\iota) = (\rho_{\iota_\ell})_{\iota_\ell : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ で, 次の性質を満たすデータが与えられているとき, (ρ_ι) のことを E 有理的 2 次元幾何的表現の**厳整合系**(strictly compatible system) という:
(i) 各 ℓ と埋め込み $\iota = \iota_\ell : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ に対して, 2 次元半単純幾何的表現 $\rho_{\iota_\ell} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ が与えられている.
(ii) 各 F の素点 q に対して, (Frobenius) 半単純表現 $r_q : \mathrm{W}_q \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E)$ が与えられていて, 次を満たす:
a) 有限個の F の素点を除くすべての F の素点 q に対して, r_q は不分岐,
b) 各 ℓ と埋め込み $\iota = \iota_\ell : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ に対して, $\rho_{\iota_\ell}|D_q$ に付随する Weil-Deligne 表現は $r_q \otimes_{\iota_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ と共役.
(iii) ある整数 $a, b (a \geq b)$ が存在して, 任意の ℓ およびその上の F の (任意の) 素点 q に対して, $\rho_{\iota_\ell}|_{D_q}$ の Hodge-Tate 重さは (a, b).

r_q が F の素点 q で分岐するとき, q のことを厳整合系 (ρ_ι) の分岐素点と呼ぶことにする. また, $r_q|_{I_q}$ とモノドロミー作用素 N の組 $(r_q|_{I_q}, N)$ のことを**惰性 WD パラメータ**(inertia Weil Deligne parameter) という. 条件 (iii) の Hodge-Tate 重さが $a \neq b$ を満たすとき (ρ_ι) は**正則**(regular) であるといい, $a = b$ を満たすとき (ρ_ι) は**非正則**(irregular) であるという. $-b$ 回

Tate 捻りをとれば, (ρ_ι) の Hodge-Tate 重さは $(a-b,0)$ とできるので, 保型性を示すことだけを問題にしている場合は $b=0$ と仮定してよい.

定義 (整合系). E を代数体とする. このとき, 各 ℓ と埋め込み $\iota=\iota_\ell : E\hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ によって, 添え字付けされた ℓ 進 Galois 表現の族 $(\rho_\iota)=(\rho_{\iota_\ell})_{\iota_\ell:E\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ で[4], 次の性質を満たすデータが与えられているとき, (ρ_ι) のことを**整合系**(compatible) という:

(i) ρ_ι は有限個の素点で分岐する連続半単純表現

(ii) a) 厳整合系の条件 (ii)-a) が成立

b) 厳整合系の条件 (ii)-b) がすべての埋め込み $\iota=\iota_\ell$ と F のすべての素点 q で $q\not|\ell$ なるものに対して成立

(iii) 十分大きなすべての素数 ℓ と (すべての) 埋め込み $\iota=\iota_\ell$ に対して, $\rho_\iota|D_q$ は Hodge-Tate 重さが (a,b) であるクリスタリン表現.

定義 (ほとんど厳整合系). 各 ℓ と埋め込み $\iota=\iota_\ell : E\hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ によって, 添え字付けされた ℓ 進 Galois 表現の整合系 (ρ_ι) が**ほとんど厳整合系**(almost strictly compatible system) であるとは次の性質を満たすときをいう:

すべての F の素点 $q, q|\ell$ と埋め込み $\iota=\iota_\ell : E\hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ に対して次が成立:
(i) $\overline{\rho}_\iota$ が既約ならば, ρ_ι は幾何的かつ Hodge-Tate 重さが $(a,b), a\geq b$ であり, さらに, 厳整合系の条件 (ii)-b) が成立.

(ii) $\ell\neq 2$ かつ r_q が不分岐ならば, $\rho_\iota|_{D_q}$ は Hodge-Tate 重さが $(a,b), a\geq b$ であるクリスタリン表現.

定義. (1) E を代数体, $\overline{\rho}:\mathrm{G}_\mathbb{Q}\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を法 p Galois 表現とする. このとき, $\overline{\rho}$ が E 有理的 2 次元厳整合系 (ρ_ι) に持ち上がるとは, $\overline{\rho}\simeq\overline{\rho}_{\iota_p}$ となるときをいう.
(2) 各 ι に対して, ρ_ι が奇 (resp. 既約) な表現のとき, (ρ_ι) は奇 (resp. 既約) であるという.
(3) $\rho_p=\rho_{\iota_p}$ が極小であることの定義は [20]$(p>2)$, [38]$(p=2)$ を参照. $\overline{\rho}$ の極小持ち上げが ρ_p であるとき, それぞれの Artin 導手は一致する (一般には $N(\overline{\rho})|N(\rho_p)$).

定理 5.1. S 型 $\overline{\rho}$ の標数を p とし, 次を仮定:
(i) $2\leq k(\overline{\rho})\leq p+1$ $(p>2)$, かつ $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は絶対既約
(ii) $p=2$ のとき, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ は非可解群.

このとき, $\overline{\rho}$ はある有限次代数体 E に対する E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) で次の性質をみたすものに持ち上がる.
(1). もし $p=2$ ならば, $k(\overline{\rho})=2$ と仮定. このとき, p 進持ち上げ $\rho_p:=\rho_{\iota_p}$ は p を割らない素点では極小分岐かつ p で重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリン表現.

(2). p 進持ち上げ $\rho_p:=\rho_{\iota_p}$ は p を割らない素点では極小分岐かつ p で重さ 2. ρ_p の p での惰性 WD パラメータは $k(\overline{\rho})\neq p+1$ $(p>2)$, または, $k(\overline{\rho})\neq 4$ $(p=2)$ のとき, $(\omega_p^{k(\overline{\rho})-2}\oplus 1, 0)$, それ以外のときは (id_2, N). ただし, $N\in\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ は非自明な冪零行列.

[4]埋め込みはすべての埋め込みをわたる.

(3). 奇素数 q で $q||N(\overline{\rho})$ かつ $p|q-1$ を満たすものが存在すると仮定. このとき, q の満たす条件から, $\overline{\rho}|I_q$ は

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形になる (cf. [20]). ただし, $\overline{\chi}$ は I_q の指標で $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ を経由するもの.

いま, 指標 $\chi' := \omega_q^i : I_q \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ で, χ' の還元が $\overline{\chi}$ となるものとする. ただし, $p=2$ のときは i は偶数と仮定する.

このとき, p 進持ち上げ $\rho_p := \rho_{\iota_p}$ は p,q を割らない素点では極小分岐かつ p で重さ 2 で, ρ_p の惰性 WD パラメータは主張 (2) のそれと同じ. さらに, $\overline{\rho}|I_q$ は

$$\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形となる.

もし, $\overline{\rho}_q$ が既約ならば, $\overline{\chi}_q$ の適当な冪による捻りで $\overline{\rho_q}$ の Serre 重さは $i+2$ または $q+1-i$ のどちらかをとることができる.

(4). $q \neq p$ を $p|q+1$ を満たす素数. $\rho|D_q$ は (必要なら) 不分岐指標の捻りにより,

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi}_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしていると仮定. $\{\chi', \chi'^q\}$ を I_q の $\overline{\mathbb{Z}}_p^*$ に値を持つ, レベル 2 の基本指標で p 冪位数をもつものとする. 順番を入れ替えることで $\chi' = \omega_{q,2}^i \omega_{q,2}^{qj}$, $(0 \le j < i \le q-1)$ としてよい. さらに, $p=2$ のときは $i+j$ は偶数であると仮定.

このとき, p 進持ち上げ $\rho_p := \rho_{\iota_p}$ は p,q を割らない素点では極小分岐, p で重さ 2, かつ ρ_p の惰性 WD パラメータは主張 (2) のそれと同じ. さらに, $\rho_p|I_q$ は

$$\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & \chi'^q \end{pmatrix}$$

の形で, もし, q が奇素数ならば, $\overline{\rho_q}$ は $\overline{\chi}_q$ の適当な冪による捻りを施すことで $\overline{\rho_q}$ の Serre 重さを

$$\begin{cases} q+1-(j-i) \text{ または } (j-i) & j > i+1 \text{ のとき} \\ q & j = i+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

ととることができる.

注意. (i) 定理 5.1 の (1) は重さは変わらないが, クリスタリン持ち上げで分岐する素点の個数が変わらないというところが利点であり, 定理 5.1(2) は分岐する素点の個数が高々 1 つ増える可能性があるものの重さが 2 の持ち上げが構成されるところが利点である. 証明を読めばわかるが, (1) と (2) は多用する.
(ii) 定理 5.1(3), (4) の Serre 重さの計算は Savitt よる [58]. また, $p=2$ の偶奇条件は持ち上げが奇であることを保証している.

(iii) 定理 5.1-(2) について, 重さが 2 (つまり, Hodge-Tate 重さ (0,1)) なので, $N=0$ のときは, ρ は潜在的クリスタリン (この場合, 潜在的準安定性と同値) 表現となる (cf. $p \geq 5$ のときは [30], 一般の場合は [33]).

証明. **(定理 5.1 の証明の概要).** $\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}/\mathbb{F}_p$ は有限次拡大) を S 型表現とし, S を p と $\mathbb{Q}$ の無限素点 ∞, および, $\overline{\rho}$ の分岐する素点を含む $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合とする. $\overline{\rho}$ は定理の 4 つの主張 (1),(2),(3),(4) の条件のいずれかを満たしているとし, さらに, 各 $v \in S$ に対して課せられている p 進持ち上げに関する条件を X_v と表すことにする.

$E/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大, $\mathcal{O}$ をその整数環とし, $\mathcal{O}$ の剰余体は $\mathbb{F}$ に含まれているとする. $\psi: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}$ を数論的指標[5]で $\psi\chi_p$ が $\det\overline{\rho}$ の持ち上げになっているものとする.

$\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ を完備ネーター局所 $\mathcal{O}$ 代数でその剰余体と $\mathbb{F}$ との間の同型が 1 つ固定されているものを対象とする圏とする. $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象の間の射は局所射であって, それが誘導する剰余体の間の射は固定した $\mathbb{F}$ との同型と可換であるものとする.

$\overline{\rho}$ の表現空間を $\overline{V}$ とし, その基底 $\overline{\beta}$ を 1 つ固定しておく. このとき, $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象 A に対して, 集合

$$\overline{\mathcal{D}}_v^{\square,\psi}(A) := \left\{ \begin{array}{l} \text{条件 } X_v \text{ を満たす } \overline{\rho}|_{D_v} \text{ の } A \text{ 上の持ち上げ } V_A \text{ で,} \\ \det V_A = \chi_p\psi \text{ を満たすものと } V_A \text{ の } A\text{-基底 } \beta_v \text{ で } \overline{\beta} \text{ の} \\ A \text{ 上の持ち上げとなっているものとの組 } (V_A, \beta_v) \end{array} \right\} \Big/ \overset{\text{同型}}{\sim}$$

を対応させる関手を考えると, これは $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象で表現可能であり (cf. [38] の 2 章), それを $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ と書く: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\overline{R}_v^{\square,\psi}, A) = \overline{\mathcal{D}}_v^{\square,\psi}(A)$.

同様に, 条件 X_v を外した対応を考えるとこれも $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象で表現可能であり, それを $R_v^{\square,\psi}$ と書く. $\overline{\mathcal{D}}_v^{\square,\psi}(A)$ から $\mathcal{D}_v^{\square,\psi}(A)$ には条件 X_v を忘れるという射があるので, 射 $R_v^{\square,\psi} \longrightarrow \overline{R}_v^{\square,\psi}$ を得る. これによって, $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ を $R_v^{\square,\psi}$ 代数とみなす.

また, $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象 A に対して集合

$$\mathcal{D}_S^{\square,\psi}(A) := \left\{ \begin{array}{l} \overline{\rho}|_{G_S} \text{ の } A \text{ 上の持ち上げ } V_A \text{ で,} G_S \text{ 上で } \det V_A = \chi_p\psi \text{ を} \\ \text{満たすものと各 } v \in S \text{ に対して, } V_A \text{ の } A\text{-基底で } \overline{\beta} \text{ の} \\ A \text{ 上の持ち上げとなっているものとの組 } (V_A, \{\beta_v\}_{v\in S}) \end{array} \right\} \Big/ \overset{\text{同型}}{\sim}$$

を対応させる関手を考えると, これも $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象で表現可能であり, それを $R_S^{\square,\psi}$ と書く. 上記と同様に $R_S^{\square,\psi}$ は $R_v^{\square,\psi}$ 代数と思うことができる.

$$\overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi} := \hat{\otimes}_{v\in S}\overline{R}_v^{\square,\psi},\ R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi} := \hat{\otimes}_{v\in S}R_v^{\square,\psi}$$

とおく. ただし, $\hat{\otimes}$ は $\mathcal{O}$ 上の完備テンソル積 (completed tensor product) を意味する. このとき,

$$\overline{R}_S^{\square,\psi} := R_S^{\square,\psi}\hat{\otimes}_{R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}}\overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$$

を考える. R_S を $\overline{\rho}|_{G_S}$ の Mazur の意味での変形環とする (cf. [48]). これも, $\mathrm{CLN}_{\mathcal{O}}$ の対象である. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\overline{R}_S^{\square,\psi}, A)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R_S, A)$ には自然な全射があるので, 単射 $R_S \hookrightarrow \overline{R}_S^{\square,\psi}$ を得る.

$$\overline{R}_S^{\psi} := \mathrm{Im}(R_S \hookrightarrow \overline{R}_S^{\square,\psi})$$

[5]定義 (p.5,[38]) は省くが, $\chi_p^t,\ t \in \mathbb{Z}$ と有限指標の積はそのような指標の例を与える.

を考えると, これは $\overline{\rho}|_{G_S}$ の変形に局所条件付き変形を張り合わせたものとなっている. 局所条件付き変形のところで枠付き変形を用いることによって, R_S の解析は R_S より扱いやすい $\overline{R}_S^{\psi}$ のそれに帰着できる.

$\overline{R}_S^{\psi}$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の有限生成加群であることは次のように証明される (詳細は定理 6.1, 定理 10.1 [38] を見よ). Taylor の潜保型性の議論を用いることにより, ある総実代数体 $F/\mathbb{Q}$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の正則尖点保型表現 π' で p を割る F の素点以外で不分岐なものが存在して, π' に付随するガロア表現と $\overline{\rho}|_{G_F}$ が同値 ([38], 定理6.1). 上記 $\overline{R}_S^{\psi}$ の構成を $\overline{\rho}|_{G_F}$, $\det = \chi_p\psi|_F$, $S_F = \{\forall v|p\} \cup \{\forall\infty : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\}$, および, $\rho_{\pi',v}$ の満たす v での局所条件 $X_v,\ v \in S_F$ に対して適用することで得られる $\mathcal{O}$ 代数を $\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}$ と表すことにする[6]. このとき, Taylor-Wiles 系の議論により, $\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成加群であることがわかる ([38], 命題 9.2, 9.3).

関手性より, 射 $\gamma : \overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F} \longrightarrow \overline{R}_S^{\psi}$ を得る. また $(\overline{\rho}|_{G_F})^{\mathrm{univ}}$ の普遍性より, 次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
G_F \arrow[r, "(\overline{\rho}|_{G_F})^{\mathrm{univ}}"] \arrow[d, "\text{包含射}"] & \mathrm{GL}_2(\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}) \arrow[r, "\bmod p"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{GL}_2(\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}/(p)) \arrow[d, "\overline{\gamma}=\gamma \bmod (p)"] \\
G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}"] & \mathrm{GL}_2(\overline{R}_S^{\psi}) \arrow[r, "\bmod p"] & \mathrm{GL}_2(\overline{R}_S^{\psi}/(p))
\end{tikzcd}$$

普遍性から $\overline{\gamma}$ は全射である. 上段の射の合成を τ', 下段の射の合成を τ とかくことにすると, $\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成加群であるので, $\mathrm{Im}\tau'$ は有限群. これと, $F/\mathbb{Q}$ が有限次拡大であることを合わせると, $\mathrm{Im}\tau$ も有限群であることがわかる.

一方, $\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$ は絶対既約なので, この表現はそのトレースの値で一意に決まる. よって, $\overline{R}_S^{\psi}$ は $\mathcal{O}$ 加群として, $\mathrm{tr}\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}(g), g \in G_{\mathbb{Q}}$ の値で生成されていることがわかる. $\overline{R}_S^{\psi}$ の p の上の素イデアル $\mathcal{P}$ をとると, $\mathrm{Im}\ \tau$ は有限群なので, $\mathrm{tr}\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}(g) \in \overline{R}_S^{\psi}/\mathcal{P}, g \in G_{\mathbb{Q}}$ の取り得る値は高々有限個. よって, $\overline{R}_S^{\psi}/\mathcal{P}$ は $\mathbb{F}$ 上有限生成なので, これは有限体に他ならない. 特に, $\overline{R}_S^{\psi}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成である[7].

$\overline{R}_S^{\psi}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成であることから, これは $\mathcal{O}$ 上有限生成でもある. さらに, 萩原氏の原稿にもあるように, Böckle の結果より, $\overline{R}_S^{\psi} = \mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_r]]/(f_1, \ldots, f_s), s \leq r$ と表現されることがわかる (i.e. Krull-dim $\overline{R}_S^{\psi} \geq 1$). これと $\overline{R}_S^{\psi}/\mathcal{P}$ が有限体 (というよりは次元 0) であることを使うと簡単な環論の議論で $s = r$ がわかる. これより, $\overline{R}_S^{\psi}[\frac{1}{p}] \neq 0$ は有限個の $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大の直積環であることがわかる. 従って, 適当に E の有限次拡大 E' をとると, $\mathrm{Spec}\overline{R}_S^{\psi}$ は $\mathcal{O}'$ 点をもつ ($\mathcal{O}'$ は E' の整数環). つまり, 定理 5.1 の条件をみたす p 進持ち上げ $\rho = \rho_p : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}')$ の存在が示されたことになる.

次に ρ を整合系に埋め込むことができることを証明する. [38] の定理 10.1 の証明から, ある総実 Galois 拡大 $F/\mathbb{Q}$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の正則尖点的保型表現 π' で, $\overline{\rho}|_{G_F} \sim \overline{\rho}_{\pi',\iota}$ ($\iota : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$) となるものが存在する. ここに, MLT(定理 9.7[38]) を用いることで, $\rho|_{G_F}$ も保型的であることがわかる. つまり, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の正則尖点的保型表現 π で, $\rho|_{G_F} \sim \rho_{\pi,\iota_p}$ ($\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$) となるも

---

[6]係数 $\mathcal{O}$ は必要に応じて大きくしておく.

[7]$\overline{R}_S^{\psi}$ の有限生成性を $\overline{R}_{F,S_F}^{\psi_F}$ のそれから導いたときに行った議論は関数体の時に de Jong が行った議論 [17] がもとになっている.

のが存在する. π から整合系 $(\rho_{\pi,\iota})_\iota$ が構成されることは知られている (cf. [74]). また, 尖点的であることから, $\rho_{\pi,\iota}$ の既約性がわかる.

$G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ とおく. このとき, Brauer の定理より, F の部分体 F_i(i は有限集合 I をわたる) であって, $G_i = \mathrm{Gal}(F/F_i)$ が可解群であるもの, 指標 $\chi_i : G_i \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ で固定した $\overline{\mathbb{Q}}$ に値をとるもの (ι_p を通して, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ にも値をとる), および, $n_i \in \mathbb{Z}$ が存在して, $G_\mathbb{Q}$ の有限次元表現の成す Grothendieck 群 $K_0(G_\mathbb{Q})$ の中で

$$1_{G_\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I} n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} \chi_i$$

を得る (cf. [59] の 10 章, 定理 20). ただし, ここでは χ_i は G_{F_i} の指標と考える.

Langlands の底変換の議論により, ある $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_i})$ 上の正則尖点的保型表現 π_i で, $\rho|_{G_{F_i}} \sim \rho_{\pi_i,\iota_p}$ が各埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ に対して成立するようなものが存在する. これと上で議論した $1_{G_\mathbb{Q}}$ の分解を用いると,

$$\rho = \rho \cdot 1_{G_\mathbb{Q}} = \sum_{i \in I} n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota_p}$$

をえる. これを基にして, $K_0(G_\mathbb{Q})$ の中で仮想的な $G_\mathbb{Q}$ の表現

$$\rho_\iota := \sum_{i \in I} n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_\mathbb{Q}} \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota}$$

を各 $\iota = \iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に対して考える. ここで, χ_i は ι_ℓ を通して, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に値をとる指標とみる.

$K_0(G_\mathbb{Q})$ の元 $V = \sum_i n_i V_i,\ W = \sum_j m_j W_j$ に対して, 内積

$$\langle V, W \rangle_{G_\mathbb{Q}} := \sum_{i,j} n_i m_j \dim \mathrm{Hom}_{G_\mathbb{Q}}(V_i, W_j)$$

を定める. 同様に, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 K に対して, $K_0(G_K)$ に内積 $\langle *, * \rangle_{G_K}$ を定める. V が既約な $G_\mathbb{Q}$ の表現であることと $\langle V, V \rangle_{G_\mathbb{Q}} = 1$ は同値である. よって, 仮想的な表現 ρ_ι が $\langle \rho_\iota, \rho_\iota \rangle_{G_\mathbb{Q}} = 1$ を満たせば, ρ_ι は既約なので, 真の表現であることもわかる. 以下ではこの等式を示す.

$i, j \in I$ に対して, 両側剰余類 $G_{F_i} \backslash G_\mathbb{Q} / G_{F_j}$ の代表系を $\{\tau_k\}_k,\ \tau_k \in G_\mathbb{Q}$ とかく. 添え字 $k = k_{ij}$ は i, j に依存している. F_{ijk} を F_i と $\tau_k(F_j)$ の合併体とする. τ_k^{-1} の内部自己準同型を $\mathrm{int}(\tau_k^{-1})$ と書くことにする. このとき, 各 $i, j \in I$ に対して,

$$\left(\mathrm{Ind}_{G_{F_j}}^{G_\mathbb{Q}} \chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota}\right)\Big|_{G_{F_i}} = \sum_k \mathrm{Ind}_{G_{F_{ijk}}}^{G_{F_i}} \left(\chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \circ \mathrm{int}(\tau_k^{-1})\right)\Big|_{G_{F_{ijk}}}$$

をえる. この分解を用いて,

$$
\begin{aligned}
\langle \rho_\iota, \rho_\iota \rangle_{G_{\mathbb{Q}}} &= \sum_{i,j\in I} n_i n_j \Big\langle \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota}, \mathrm{Ind}_{G_{F_j}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \Big\rangle_{G_{\mathbb{Q}}} \\
&= \sum_{i,j\in I} n_i n_j \Big\langle \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota}, \Big(\mathrm{Ind}_{G_{F_j}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \Big)\Big|_{G_{F_i}} \Big\rangle_{G_{F_i}} \quad (\text{Frobenius 相互律}) \\
&= \sum_{i,j\in I} n_i n_j \Big\langle \Big(\mathrm{Ind}_{G_{F_j}}^{G_{\mathbb{Q}}} \chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \Big)\Big|_{G_{F_i}}, \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota} \Big\rangle_{G_{F_i}} \\
&= \sum_{i,j\in I,k} n_i n_j \Big\langle \mathrm{Ind}_{G_{F_{ijk}}}^{G_{F_i}} \Big(\chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \circ \mathrm{int}(\tau_k^{-1}) \Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}, \chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota} \Big\rangle_{G_{F_i}} \\
&= \sum_{i,j\in I,k} n_i n_j \Big\langle \Big(\chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \circ \mathrm{int}(\tau_k^{-1}) \Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}, \Big(\chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota} \Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}} \Big\rangle_{G_{F_{ijk}}} \quad (\text{Frobenius 相互律}) \\
&= \sum_{i,j\in I,k} n_i n_j t_{ijk}
\end{aligned}
$$

をえる. ただし, $t_{ijk} = \Big\langle \Big(\chi_j\otimes\rho_{\pi_j,\iota}\circ\mathrm{int}(\tau_k^{-1})\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}, \Big(\chi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}} \Big\rangle_{G_{F_{ijk}}}$ であり, $\mathrm{Gal}(F_i/F_{ijk})$ は可解群なので, Langlands の底変換議論により, $\Big(\chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}$ は正則尖点的保型形式に付随する Galois 表現であることがわかるので既約 (これは正則尖点的という性質と $\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p(\mu_p)}}$ の絶対既約性および, $(\rho_{\pi_i,\iota})$ の整合性から導かれる). よって, $t_{ijk} \in \{0, 1\}$ がわかり,

$$
\Big(\chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota} \circ \mathrm{int}(\tau_k^{-1})\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}} \sim \Big(\chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}
$$

ならば $t_{ijk} = 1$ であり, そうでなければ $t_{ijk} = 0$ である.

同様の計算を $\langle \rho, \rho \rangle_{G_{\mathbb{Q}}}$ に対しても行い, 得られた結果を $\langle \rho, \rho \rangle_{G_{\mathbb{Q}}} = \sum_{i,j\in I,k} n_i n_j t'_{ijk}$ とかく. ここで, t'_{ijk} は

$$
\Big(\chi_j \otimes \rho_{\pi_j,\iota_p} \circ \mathrm{int}(\tau_k^{-1})\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}} \sim \Big(\chi_i \otimes \rho_{\pi_i,\iota_p}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}
$$

ならば $t'_{ijk} = 1$ であり, そうでなければ $t'_{ijk} = 0$ である.

$\Big(\chi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}$ と $\Big(\chi_i\otimes\rho_{\pi_i,\iota_p}\Big)\Big|_{G_{F_{ijk}}}$ の既約性, $(\rho_{\pi_i,\iota})$ が整合系であることおよび Chebotarev の密度定理から, $t_{ijk} = t'_{ijk}$ がわかる. 従って, $\langle \rho_\iota, \rho_\iota \rangle_{G_{\mathbb{Q}}} = \langle \rho, \rho \rangle_{G_{\mathbb{Q}}}$ である.

一方, $\rho = \rho_p$ は既約なので, $\langle \rho, \rho \rangle_{G_{\mathbb{Q}}} = 1$. 従って, $\langle \rho_\iota, \rho_\iota \rangle_{G_{\mathbb{Q}}} = 1$ を得る. よって, ρ_ι $(\iota = \iota_\ell)$ は真の ℓ 進表現であり, それらが構成する族 (ρ_ι) は各成分が保型表現の Galois 表現を成分とする仮想的な表現と同値なものとなっている.

これがほとんど厳整合系であることは上でみた保型表現 π_i に付随する Galois 表現の局所・大域整合性[8]を示すことによって導かれる. 局所・大域整合性の証明は, Carayol[12], Taylor[70], Breuil[4], Berger[3], Kisin[45], および斎藤 (毅)[57] によってなされている.

定理 5.1-(3),(4) の主張における Serre 重さの計算は Savitt によってなされている [58]. 以上で証明の概略を終える. □

注意. Khare と Wintenberger は当初, (ρ_ι) が厳整合系となることを主張していたが, $\overline{\rho}_\iota$ が絶対既約でない場合は Kisin の結果 (系, p.2 [45]) が適用できないため, ρ_ι と別の $\rho_{\iota'}$ との整合性

[8] [49] を参照

がわかっていない (彼らは Kisin の結果の誤用をしていた). しかし, 保型性を示すことに限れば, 局所良二面体的 Galois 表現の概念の導入により, $\overline{\rho}$ がほとんど厳整合系に持ち上がることさえ証明すれば十分であることが, 8 章以降の証明を見ればわかる.

6. 有益な補題

この節ではいくつかの補題を紹介する. 内容は群論に関するものと Galois 表現の簡単にわかる (が重要な) 性質に関するものである. 群論に関する部分の結果は Dickson によるものだが, $p=2$ の場合はより精密な結果が得られる.

$\overline{\mathbb{F}}_p^{\oplus 2}$ に既約に作用する $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の有限部分群の射影像 (即ち, 自然な射影 $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) := \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)/\overline{\mathbb{F}}_p^*$ による像) は

$$\text{二面体群},\ A_4,\ S_4,\ A_5$$

のいずれかと同型, または

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}'),\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}'),\ (\mathbb{F}' \text{は} \mathbb{F}_p \text{の有限次拡大})$$

のいずれかと共役. ここで, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}')$ が単純群となるためには $|\mathbb{F}'| \geq 4$ という条件が必要十分であることを注意しておく. また,

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3,\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4,\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$$

であることが簡単にわかる.

次の補題は上記の分類を $p=2$ の場合に精密化している.

補題 6.1. $\overline{\mathbb{F}}_2^{\oplus 2}$ に既約に作用する $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ の有限かつ可解な部分群の射影像 H は二面体群である.

証明. Dickson の分類より, H は 二面体群, A_4, S_4 のいずれかと一致するので, 後ろの 2 つの場合を締め出せばよい.

$A \in \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ が 2 冪位数であるとき, A の位数は 1 か 2 であることが簡単な計算でわかる ($A^{2^m} = 1_2 \iff (A-1)^{2^m} = 0 \iff (A-1)^2 = 0$). よって, H に位数 4 の元は存在しない. 従って, $H = S_4$ となることはない.

$H = A_4$ のとき, A_4 の自明でない唯一の真の正規部分群を K_4 (Klein の四元群) とする. 上で見たように, $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ の 2 冪位数の元は位数 1 か 2 なので, 標数が 2 であることから冪単行列であることがわかる. よって, Lie-Kolchin の定理 (cf. p.135, 定理 7 [65]) より, 2 冪位数の元の成す群は上三角行列の成す群のある部分群と共役である. $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ でも同様で, 特に, K_4 は $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしている. K_4 は A_4 の正規部分群なので, $H = A_4$ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしていなければならないことが直接計算からわかる. H の $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ への引き戻しに G は含まれるのだから, G は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形をしており, G は $\overline{\mathbb{F}}_2^{\oplus 2}$ に既約に作用するという仮定に矛盾. □

次の補題は有用で, 特に (ii) は Serre 重さが 2 の Galois 表現を円分体の絶対 Galois 群に制限したときに, 既約であることを保証するために使われる.

補題 6.2. (i) S 型 Galois 表現 $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ でその射影像が二面体群のとき, $\overline{\rho}$ は保型的. さらに, $\overline{\rho}$ は $S_{k(\overline{\rho})}(\Gamma_1(N(\overline{\rho})))$ からくる.
(ii) $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を S 型 Galois 表現, $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ は奇素数, $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq p+1$ とし, $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は可約であると仮定する. このとき, $k(\overline{\rho}) = \dfrac{p+1}{2}$ かまたは $\dfrac{p+3}{2}$ である.

証明. (i) $p > 2$ のときは保型的であることはよく知られており, Serre 予想の精密版との同値性も知られている (cf. [50]). $p = 2$ のときは補題 6.1 より射影像が二面体群だから保型的であることはよく知られた事実である (cf. [60] の 5 節). 精密版は [75] の結果から従う.

(ii) (実際の証明では飛躍した議論をしているので注意.) 仮定より, $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は可約なので, $\begin{pmatrix} * & *' \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形をしている. $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ の半単純化は暴分岐ではないので, もし, $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ が暴分岐であれば, $*' \neq 0$. 特に, $\begin{pmatrix} 1 & *' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の元を含む. これより, $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ は正規部分群なので, $\overline{\rho}$ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形をしてなければならないので, $\overline{\rho}$ の既約性に反する. よって, $\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は p で馴分岐 (tamely ramified). 特に, $\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}$ は p で馴分岐なので, $\overline{\rho}$ も p で馴分岐.

$\overline{\rho}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ は可約なので, 像は可解群. 特に, $\overline{\rho}$ の像も可解群である. Dickson の分類から, Im $\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}$ は二面体群, A_4, S_4 のいずれかと一致. $\overline{\rho}(I_p)$ は馴分岐なので, Abel 群である. これらの条件から, S_4 の正規部分群が非 Abel であることを考えるとこの場合は起こらない. A_4 のときは正規部分群は Klein の四元群 K_4 で補題 6.1 と同様の議論から, $\overline{\rho}$ が可約となり矛盾. よって, 二面体群の場合しかない (実は A_4, S_4 にあたる場合は $\overline{\rho}$ が絶対既約になること知られているので二面体群になることはすぐにわかる). この群の対合 (involution) には $\mathbb{Q}(\mu_p)$ に含まれる $\mathbb{Q}$ の 2 次体 ($p \neq 2$ より必ず存在) が対応しているので, $\sharp\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}(I_p) = 2$.

あとは Serre 重さの定義から $k(\overline{\rho})$ が容易に計算できる. □

補題 6.3. 連続 Galois 表現 $\overline{\rho} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ はある素数 q に関して局所良二面体的であるとする. このとき, 次が成立:
(i) Im $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}})$ は可解でもない. さらに, A_5 と同型でもない.
(ii) (ρ_ι) を $\overline{\rho}$ の勝手な整合系への持ち上げで分岐する素数はすべて $N(\overline{\rho})p$ を割り, $\rho_p|D_q$ は $\overline{\rho}|D_q$ の極小持ち上げであるとする. このとき, $\max(Q(\frac{N(\overline{\rho})}{q^2}), p)$ 以下のすべての素数 r に対して, $\overline{\rho}_r$ は q において局所良二面体的. とくに, Im $\overline{\rho}_r$ は可解ではない. さらにその射影像は A_5 と同型ではない.

証明. (i) 定義より, $\overline{\rho}(I_q)$ は $\begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi^q \end{pmatrix}$ の形. ただし, ψ は惰性群 I_q の非自明な指標で, その位数は次の性質を満たす奇素数 t の冪: $t|q+1$, $t > \max\{Q(\dfrac{N(\overline{\rho})}{q^2}), 5, p\}$.

ここで, もし, $\overline{\rho}|D_q$ が可約なら, $\begin{pmatrix} \varphi & * \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}$ の形で, $\varphi|I_q = \psi$ をみたす. $\varphi : D_q \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^*$ を考えると, その導手は, $q^a,\ a \in \mathbb{N}$ であり, 像は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q^a\mathbb{Z})^*$ を経由する. ψ の位数は奇素数 t の冪より, $t|p-1$ または, $t|q-1$ だが, t のとり方から $t|q+1$ かつ $t > p$ なので矛盾. よって, $\overline{\rho}|D_q$ は既約. 特に, $\overline{\rho}$ も既約.

ここで, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ が可解であるとして矛盾を導く. もしそうなら, Dickson の定理より, $\overline{\rho}$ の射影像は二面体群, $A_4,\ S_4$ のいずれかと一致. $t > 5$ は射影像の位数を割るのだから, $A_4,\ S_4$ ではない. 当然, A_5 でもないこともここからわかる. よって, 二面体群であるとすると, ある 2 次体 $K/\mathbb{Q}$ と 1 次元表現 $\overline{\tau} : G_K \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^*$ が存在して, $\overline{\rho} \simeq \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}}}^{G_K}\overline{\tau}$ となる. K の分岐する素数 s は $N(\overline{\rho})$ を割り, 局所良二面体性の定義から, $s \neq q$ ならば, $q \equiv 1 \bmod s (s \neq 2)$, $q \equiv 1 \bmod 8$ $(s = 2)$ である.

これより, q は K で分岐するか, 分解するかのどちらかである. q が K で分岐する場合は, ψ の位数 t^a は 2 で割れなければならないが, t は奇数なので矛盾. q が分解するときは, $\overline{\rho}$ は可約になるので既約性に反する.

(ii) 二面体群 $D_{2t^a} \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{Z}})$ を固定しておく. まず, $\rho_p|D_q$ は $\overline{\rho}|D_q$ の極小持ち上げなので, $\rho|I_q$ は $\begin{pmatrix} \widetilde{\psi} & 0 \\ 0 & \widetilde{\psi}^q \end{pmatrix}$ の形をしている. ただし, $\widetilde{\psi}$ は ψ の Teichmüller 持ち上げ. したがって, $\rho(D_q)$ の射影像は $D_{2t^a} \otimes_{\iota_p} \overline{\mathbb{Z}}_p$ と同型. ここで, (整合系を添え字付けしている埋め込み) $\iota_p : E \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ にまで一旦延長し $\overline{\mathbb{Z}}$ に制限したものとして考える. このとき, 整合系の定義から, $r_q \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ の射影像 は D_{2t^a} と同型なので, 素数 r に対して, $\rho_r(D_q)$ の射影像 は $D_{2t^a} \otimes_{\iota_r} \overline{\mathbb{Z}}_r$ と同型となる. ここで, $\max(Q(\frac{N(\overline{\rho})}{q^2}), p)$ 以下の素数 r に対して, 定義から $t \neq r$ だから, 還元射 $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{Z}}_r) \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_r)$ により, $D_{2t^a} \otimes_{\iota_r} \overline{\mathbb{Z}}_r$ は $D_{2t^a} \otimes_{\iota_r} \overline{\mathbb{F}}_r$ へ同型に写る. よって, $\overline{\rho}_r$ は q に関して局所良二面体的であることがわかる. □

7. ある素数の評価

この節では帰納法をうまく機能させるある素数の系列の存在を示す. 詳細については萩原氏の原稿または [35] を参照されたい.

定理 7.1. 素数 $p \geq 5$ に対して, ある素数 $P > p$ が存在して次のどちらかを満たす:
(i) 奇素数 ℓ と整数 $r \geq 1$ で $\ell^r || (P-1)$ かつ

$$\frac{P}{p} \leq \frac{2m+1}{m+1} - \Big(\frac{m}{m+1}\Big)\frac{1}{p}, \ \Big(m = \frac{\ell^r - 1}{2}\Big) \tag{1}$$

なるものが存在する.
(ii) 整数 $r \geq 4$ で $2^r || (P-1)$ かつ

$$\frac{P}{p} \leq \frac{2^r}{2^{r-1}+2} - \Big(\frac{2^{r-1}-2}{2^{r-1}+2}\Big)\frac{1}{p}, \ \Big(m = \frac{\ell^r - 1}{2}\Big) \tag{2}$$

なるものが存在する.

(i) の場合, (1) の評価から,

$$p + 1 \geq \frac{m+1}{2m+1}(P-1) + 2 = (P+1) - \frac{m}{2m+1}(P-1) \tag{3}$$

を得る.

(ii) の場合, (2) の評価から,

$$p+1 \geq \frac{2^{r-1}+2}{2^r}(P-1)+2=(P+1)-\frac{1}{2}(P-1) \tag{4}$$

を得る.

8. 定理 3.1-3.4 の証明

証明. (定理 3.1 (分岐消し: $(\mathrm{L}_r) \Longrightarrow (\mathrm{W}_{r+1})$)) 整数 $r \geq 1$ に対して, 仮定 (L_r) が成り立つとする. (W_{r+1}) の条件を満たす S 型 Galois 表現 $\overline{\rho}$ をとる. $\overline{\rho}$ はある素数 q に関して, 局所良二面体的であり, $k(\overline{\rho})=2$ かつ $N(\overline{\rho})$ は奇数でその素因子は $r+1$ 個以下である. $N(\overline{\rho})$ の素因子 s で q と異なるものを取る (取れない場合は (L_r) の条件が満たされるので示すことはない). $\mathrm{char}(\overline{\rho})=2$ のときは, 補題 6.1 と補題 6.2-(1) より, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ が可解ならば保型的なので, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ は可解ではないと仮定してよい. このとき, 定理 5.1 (1) より, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) で $\rho_p := \rho_{\iota_p}$ は p を割らない素点では極小分岐かつ p で重さ $k(\overline{\rho})$ のクリスタリン表現となるようなものに持ち上がる. 前に選んでおいた素数 s に対して, ρ_s を考える. 補題 6.3 (ii) より, その還元 $\overline{\rho}_s$ は q 二面体的で特に, 非可解な像をもち, 特に, $\overline{\rho}_s$ は既約である. 持ち上げが奇なので ρ_s も奇. よって, $\overline{\rho}_s$ は S 型 Galois 表現. さらに, ρ_p は極小持ち上げであること, および, 整合系の定義から, $N(\overline{\rho}_s)$ の素因子は $N(\overline{\rho})p$ の素因子でもあるので,

$$\sharp\{N(\overline{\rho}_s)\text{ の素因子 }\} \leq \sharp\{N(\overline{\rho})p\text{ の素因子で }s\text{ ではないもの }\} \leq r+1-1=r$$

がなりたつ. よって, 仮定 (L_r) から $\overline{\rho}_s$ は保型的. 定理 4.1 より, ρ_s は保型的なので, (ρ_ι) も保型的. 従って, $\overline{\rho}=\overline{\rho}_p$ も保型的. □

証明. (定理 3.2 (重さ 2 への帰着: $(\mathrm{W}_r) \Longrightarrow (\mathrm{L}_r)$)) $\overline{\rho}$ を (L_r) の条件を満たす S 型 Galois 表現とし, その標数を p とする. $\overline{\rho}$ は局所良二面体的であり, $p=2$ ならば $k(\overline{\rho})=2$. また, $N(\overline{\rho})$ は奇数でその素因子は r 個以下である.

$p=2$ のときには証明することはない. 以下, $p=3$, $p=5$, $p>5$ の 3 つの場合に分けて証明する. 前の二つの場合の証明は一般の場合のそれとはやや異なる.

<u>$p=3$ の場合.</u>

定理 5.1-(2) を用いると, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) で $\rho_p := \rho_{\iota_p}$ は p を割らない素点では極小分岐かつ p で重さ 2 となるようなものに持ち上がる. 今, ρ_2 を考える. 補題 6.3 より, $\overline{\rho}_2$ は非可解な像をもつ. また, $N(\overline{\rho})$ は奇数なので, ρ_2 は 2 でクリスタリンで重さ 2 (ほとんど厳整合系の性質から従う) なので, ρ_2 は Barsotti-Tate 表現となる. これより, $\overline{\rho}_2$ は有限平坦群スキームからくるので, $k(\overline{\rho}_2)=2$. 極小持ち上げの定義から, $N(\overline{\rho}_2)$ の素因子は $N(\overline{\rho})3$ を割るので, その個数は $r+1$ 以下である.

いま, $\overline{\rho}_2$ が 3 で不分岐ならば, (W_r) より $\overline{\rho}_2$ は保型的. 定理 4.1 より, (ρ_ι) も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的. $\overline{\rho}_2$ が 3 で分岐するならば, ρ_3 の惰性 WD パラメータの形から, ($\overline{\chi}_3$ が位数 2 であることに注意すると) $\overline{\rho}_2|I_3$ は $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしている. これより, $\overline{\rho}_2|D_3$ は $\begin{pmatrix} \overline{\chi}_2 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の

形をしていることがわかる．よって, $p=2,\ q=3,\ \chi'=\omega_{3,2}^2, (i=2,\ j=0)$ として, $\overline{\rho}_2$ に定理 5.1 (4) を適用すると, $\overline{\rho}_2$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ'_ι) に持ち上げられる．ρ'_3 について考える．定理 5.1 (4) の結果より, $\overline{\rho}'_3$ の χ_3 の冪による捻り $\overline{\rho}''_3$ の重さは 2 となる ($j=2>1=i+1$ だから)．$N(\overline{\rho}''_3)$ の素因子は $N(\overline{\rho}_3)$ のそれと同じなので, その個数は r 以下．よって, (W_r) より $\overline{\rho}''_3$ は保型的なので, $\overline{\rho}'_3$ も保型的．後は定理 4.1 から (ρ'_ι) は保型的．(ρ_ι) と (ρ'_ι) は $\overline{\rho}_3$ で繋がっているので, (再び定理 4.1 より) (ρ_ι) も保型的．よって, $\overline{\rho}$ も保型的.

$p=5$ の場合 (やや複雑).

この場合, $N(\overline{\rho})$ は奇数で素因子の個数は r 以下, $k(\overline{\rho})\le 5+1=6$ である．定理 5.1(2) より, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上げられる．ρ_2 を考える．$p=3$ の場合と同様にして, $\overline{\rho}_2$ は局所良二面体的なので, 像は非可解．また, $k(\overline{\rho}_2)=2$ で $N(\overline{\rho}_2)$ の素因子は $N(\overline{\rho})5$ を割るので, それらの個数は $r+1$ 以下．$\overline{\rho}_2$ が 5 で不分岐なら (W_r) より $\overline{\rho}_2$ は保型的．定理 4.1 より, (ρ_ι) も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的．$\overline{\rho}_2$ が 5 で分岐するならば, ρ_5 は 5 で準安定なので, ρ_2 も 5 で準安定 (ほとんど厳整合系の性質)．これより, $5||N(\overline{\rho}_2)$ が従う．よって, $p=2,\ q=5,\ \chi'=\omega_5^2, (i=2)$ として, $\overline{\rho}_2$ に定理 5.1 (3) を適用すると, $\overline{\rho}_2$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ'_ι) に持ち上げられる．ρ'_5 を考える．$\overline{\rho}'_5$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解．定理 5.1 (3) を用いたので, ($\overline{\rho}'_5$ を $\overline{\chi}_5$ の適当な冪による捻りにより) $k(\overline{\rho}''_5)=i+2=q+1-i=4$ となる．また, $N(\overline{\rho}'_5)$ は奇数でその素因子の個数は r 以下であることがわかる (極小持ち上げの定義より).

次の二つ場合に分ける:

(i) $3|N(\overline{\rho}'_5)$.

この場合, 定理 5.1-(2) より, E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ''_ι) に持ち上げられる．ρ''_3 を考える．$\overline{\rho}''_3$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解．$N(\overline{\rho}''_3)$ は奇数で,

$$\sharp\{N(\overline{\rho}''_3)\text{ の素因子 }\}\le\sharp\{N(\overline{\rho}''_3)5\text{ の素因子で }3\text{ ではないもの }\}\le r+1-1=r$$

が成り立つので, (W_r) より $\overline{\rho}''_3$ は保型的．定理 4.1 より, (ρ''_ι) は保型的, よって, (ρ_ι) であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的.

(ii) $3\nmid N(\overline{\rho}'_5)$.

この場合, 定理 5.1-(1) より, E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ''_ι) に持ち上げられる．ρ_5 は 5 で重さ 4 のクリスタリン表現であるので, ρ''_3 は 5 で不分岐．特に, $N(\overline{\rho}''_3)$ は 5 で割れない．また, $\overline{\rho}''_3$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解．一方, $N(\overline{\rho}''_3)$ の素因子は $N(\overline{\rho}'_5)$ を割り, さらに, これは仮定から 3 で割りきれないのだから, $N(\overline{\rho}''_3)$ の素因子の個数は $N(\overline{\rho}'_5)$ と一致するのでその個数は r 以下．よって, 先に扱った $p=3$ の場合の証明から $\overline{\rho}''_3$ は保型的 ($k(\overline{\rho}''_3)=4\le 3+1$ より重さに関する条件をクリアしていることに注意)．定理 4.1 より, (ρ''_ι) は保型的, よって, (ρ_ι) も保型的であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的.

$p>5$ の場合.

p に対して, 定理 7.1 を適用することで得られる素数 $P\ (>p)$ をとる．このとき, (W_r) の下で次の主張を示す:

「S 型 $\overline{\rho}$ が 3 条件 $\begin{cases} \text{(a) 局所良二面体的} \\ \text{(b) } \mathrm{char}(\overline{\rho}) \le P \\ \text{(c) } N(\overline{\rho}) \text{ は奇数でその素因子の個数は } r \text{ 以下} \end{cases}$ を満たすなら, $\overline{\rho}$ は保型的」

今まで見たとおり, $P=5$ のときにはこの主張は正しいので, $p=5$ からスタートして, この操作を繰り返すことで, 一般の場合の主張を得る.

$\overline{\rho}$ を上の主張の条件を満たす $\mathrm{char}(\overline{\rho}) = P$ なる S 型 Galois 表現とし, $\mathrm{char}(\overline{\rho}) < P$ なる同様の性質を満たす S 型 Galois 表現は保型的と仮定する. 定理 7.1 によって得られた素数 ℓ で $\ell^r || P-1$ と評価式 (1), (2) を満たすものをとる. $\ell > 2$ のときは $m = \dfrac{\ell^r - 1}{2}$ とおく.

定理 5.1-(2) より, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上がる. ρ_ℓ を考えると, $\overline{\rho}_\ell$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解, $N(\overline{\rho}_\ell)$ は奇数でその素因子は $N(\overline{\rho})P$ を割るのでそれらの個数は $r+1$ 以下.

$N(\overline{\rho}_\ell)$ が P と素であるとき, $N(\overline{\rho}_\ell)$ の素因子の個数は r. ℓ の取り方から, $2\ell^r \le P-1 < 2P-1$ より, $\ell < P$ が成り立つ. よって, 帰納法の仮定より, $\overline{\rho}_\ell$ は保型的. 定理 4.1 より, (ρ_ι) は保型的, よって, $\overline{\rho}$ も保型的.

$N(\overline{\rho}_\ell)$ が P と素でないとき, ρ_ℓ は P で準安定だから, $P||N(\overline{\rho}_\ell)$. よって, $p=\ell,\ q=P,\ \chi' = \omega_P^i,\ i \in \begin{cases} \left[\dfrac{m}{2m+1}(P-1), \dfrac{m+1}{2m+1}(P-1)\right] & (\ell > 2 \text{ のとき}) \\ \left[\dfrac{1}{2}(P-1), \dfrac{2^{r-1}+2}{2^r}(P-1)\right] & (\ell = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$ として, $\overline{\rho}_\ell$ に定理 5.1 (3) を適用すると, $\overline{\rho}_\ell$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ'_ι) に持ち上げられる. ρ'_P を考える. $\overline{\rho}'_P$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解. 定理 5.1-(3) を用いたので, ($\overline{\rho}'_P$ を $\overline{\chi}_P$ の適当な冪による捻りにより) $\ell > 2$ のとき, 定理 7.1(3) の評価式を用いると,

$$k(\overline{\rho}'_P) = \begin{cases} i+2 \le \dfrac{m+1}{2m+1}(P-1)+2 \le p+1, \text{ または,} \\ P+1-i \le P+1-\frac{m}{2m+1}(P-1) \le p+1 \end{cases}$$

$\ell = 2$ のとき, 定理 7.1-(4) の評価式を用いると,

$$k(\overline{\rho}'_P) = \begin{cases} i+2 \le \dfrac{2^{r-1}+2}{2^r}(P-1)+2 \le p+1, \text{ または,} \\ P+1-i \le P+1-\frac{1}{2}(P-1) \le p+1 \end{cases}$$

となる. また, $N(\overline{\rho}'_P)$ は奇数でその素因子は $N(\overline{\rho}_\ell)P$ を割るのでそれらの個数は r 以下であることがわかる (極小持ち上げの定義より). よって, もし $\overline{\rho}'_P$ が保型的であれば, 定理 4.1 より, (ρ'_ι) は保型的. (ρ_ι) も保型的であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的.

よって, $\overline{\rho}'_P$ が保型的であることを示す. 次の二つ場合に分ける:

<u>(i) $p|N(\overline{\rho}'_P)$.</u>

この場合, 定理 5.1-(2) より, E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ''_ι) に持ち上げられる. ρ''_p を考える. $\overline{\rho}''_p$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解. $N(\overline{\rho}''_p)$ は奇数で,

$$\sharp\{N(\overline{\rho}''_p) \text{ の素因子 }\} \le \sharp\{N(\overline{\rho}''_p)P \text{ の素因子で } p \text{ ではないもの }\} \le r+1-1 = r$$

が成り立つので, (W_r) より $\overline{\rho}''_p$ は保型的. 定理 4.1 より, (ρ''_ι) は保型的, よって, (ρ_ι) であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的.

(ii) $p \nmid N(\overline{\rho}'_P)$.

この場合, 定理 5.1-(1) より, E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ''_ι) に持ち上げられる. ρ''_p は p で重さ $k(\overline{\rho}'_P) \leq p+1$ のクリスタリン表現である. ρ''_p は P で不分岐. 特に, $N(\overline{\rho}''_p)$ は P で割れない. また, $\overline{\rho}''_p$ は補題 6.3 より局所良二面体的であり, その像は非可解. 一方, $N(\overline{\rho}''_p)$ の素因子は $N(\overline{\rho}'_P)$ を割り, さらに, これは仮定から p で割りきれないのだから, $N(\overline{\rho}''_p)$ の素因子の個数は $N(\overline{\rho}'_P)$ と一致するのでその個数は r 以下よって, 帰納法の仮定より $\overline{\rho}''_p$ は保型的. $k(\overline{\rho}'_P) \leq p+1$ より, 定理 4.1 の仮定が満たされてることに注意して, (ρ''_ι) の保型性がわかる. よって, (ρ_ι) も保型的であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的. □

証明. **(定理 3.3 ((W_1)))** 定理 3.3 は次の系 8.1 から従う: □

系 8.1 (i) $\overline{\rho}$ は既約, 奇な連続法 p Galois 表現で, $k(\overline{\rho}) = 2$, $N(\overline{\rho}) = q$ は素数とする. このとき, $\overline{\rho}$ は $S_2(\Gamma_1(q))$ からくる.
(ii) $\overline{\rho}$ は既約, 奇な連続法 p Galois 表現で, $k(\overline{\rho}) = 2$, $\overline{\rho}$ は奇素数 $q \neq p$ と p 以外では不分岐で q では馴分岐とし, さらに, $\overline{\rho}(I_q)$ の位数はある奇素数 $t > 5$ の冪と仮定する. このとき, $\overline{\rho}$ は (必ずしも新形式とはかぎらない)$S_2(\Gamma_1(q^2))$ からくる.

証明. (i) $q = 2$ のときは [36] で扱われているのでこの場合は省略. 補題 6.2-(i) より, $\overline{\rho}$ の射影像が二面体群である場合は保型的なので, 以下, $\overline{\rho}$ の射影像は二面体群ではないと仮定する. すると, $p = 2$ のときは補題 6.1 より, $\mathrm{Im}\overline{\rho}$ は非可解群. $p > 2$ のときは, $\mathrm{Im}\overline{\rho}$ が可解群なら [50] の定理 4 より, $\overline{\rho}$ は保型的なので, $\mathrm{Im}\overline{\rho}$ は非可解と仮定して良い. 特にこのことから, $\overline{\rho}|_{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_p)}}$ は絶対既約であることがわかる. このような設定のもとでは定理 5.1-(1) の仮定が満たされているので, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) で, ρ_p が p で重さ $k(\overline{\rho}) = 2$ のクリスタリン表現, q の外不分岐かつ, ρ_p は q で極小持ち上げ, となっているものに持ち上がる. ρ_p の q での Weil-Deligne パラメータ r_q は $N(\overline{\rho}) = q$ かつ q で極小持ち上げということから, 半安定もしくは $\mathbb{Q}_q(\mu_q)$ 上で不分岐であることがわかる. 一方, (ρ_ι) の構成および局所・大域整合性 [57] より, $\rho_q|G_{\mathbb{Q}_q}$ に付随する Weil-Deligne パラメータは r_q と同値なので ρ_q および $\overline{\rho}_q$ は [35] の定理 6.1-(3) の条件を満たすので ρ_q は保型的. よって, $\overline{\rho}$ もそう.

(ii) (i) に帰着する. $t = p$ のとき, $\overline{\rho}$ は q で馴分岐なので, $\overline{\rho}|I_q$ は $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしているので, $\overline{\rho}$ の表現空間の I_q による固定部分の次元は 1 かつ馴分岐であることから, $N(\overline{\rho}) = q$ より, (i) から従う.

$t \neq p$ と仮定する. $\overline{\rho}$ は q で馴分岐 ($\overline{\rho}(I_q)$ の位数と q は素) なので, $q \neq t$ である. $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ が可解なら, [50] の定理 4 より $\overline{\rho}$ は保型的なので, そうではないと仮定してよい. すると, 定理 5.1-(1) が適用できるので, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上げられる. ρ_t を考える. (ρ_ι) は $\{p, q\}$ の外で不分岐かつ ρ_t の重さは 2. $\overline{\rho}_t$ が可約ならば, ρ_t は t で重さ 2 の

クリタリン表現なので, Skinner-Wiles の MLT, [63], [1] より, ρ_t は保型的[9]. とくに, (ρ_ι) も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的. $\overline{\rho}_t$ が q で不分岐のときは, $k(\overline{\rho}_t)=2$, $N(\overline{\rho}_t)=1$ となり, この場合は可約となることが知られている (cf. [66]) ので, 先ほどの場合と同様にして $\overline{\rho}$ は保型的.

$\overline{\rho}_t$ が既約かつ q で分岐するときは, q で馴分岐なので, $N(\overline{\rho})=q$ だから (i) より $\overline{\rho}_t$ は保型的. ここで, $\overline{\rho}_t|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_t)}$ が可約であると仮定すると, 補題 6.2-(2) より, $k(\overline{\rho}_t)=2$ (Fontaine-Laffaille 理論から従う) であることから矛盾が生じる. よって, $\overline{\rho}_t|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_t)}$ は既約. また, ρ_t は t で重さ 2 のクリスタリン表現なので Barsotti-Tate (p 可除群からくる) であることと同値 ([5],[42]). よって, [76] の定理 0.2 より, ρ_t は保型的. とくに, (ρ_ι) も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的[10] □

証明. **(定理 3.4 (レベル上げ))** $\overline{\rho}$ を S 型 Galois 表現とし, $2^{r+1} \nmid N(\overline{\rho})$ かつ $p=2$ なら $k(\overline{\rho})=2$ を満たすものとする. $\mathrm{char}(\overline{\rho})=p$, $S=\{\ell\neq p:$ 素数 $\mid \overline{\rho}$ は ℓ で不分岐$\}$ とおく. $\overline{\rho}$ の像が可解なら保型的 (cf. [50] の定理 4) なので, 非可解としてよい. すると, 定理 5.1 (2) (Skinne-Wiles, Wiles の MLT 使うために重さ 2 という条件が必要) が適用できるので, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上げられる. $p'\notin S\cup\{p\}, p'>5$ を満たす素数 p' をとり, $\rho_{p'}$ を考える. $\overline{\rho}_{p'}$ が可解なら保型的である.

$\overline{\rho}_{p'}$ が可約ならば, $\rho_{p'}$ は p' で重さ 2 のクリスタリン表現なので, p' で通常だから, Skinner-Wiles の結果 [63] より, $\rho_{p'}$ は保型的. (ρ_ι) は保型的より, $\overline{\rho}$ も保型的.

$\overline{\rho}_{p'}$ が既約ならば, $\overline{\rho}_{p'}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p'^*})}$, $(p'^*:=(-1)^{\frac{p'-1}{2}}p')$ が可約ならば, $\overline{\rho}_{p'}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\mu_{p'})}$ も可約. しかし, 補題 6.2-(2) と $\overline{\rho}_{p'}$ の重さは 2 (Fontaine-Laffaille 理論から従う) であることから矛盾. よって, $\overline{\rho}_{p'}|\mathrm{G}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p'^*})}$ は既約. また, $\rho_{p'}$ は p' で重さ 2 のクリスタリン表現なので Barsotti-Tate (p 可除群からくる) であることと同値 [5]) よって, [76] の定理 0.2 より, $\rho_{p'}$ は保型的. とくに, (ρ_ι) も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的.

以上の議論から, $p'>5$, $p'\equiv 1 \bmod 4$ かつ $p'\notin S\cup\{p\}$ で $\overline{\rho}_{p'}$ が非可解な像をもつものに対して, $\overline{\rho}_{p'}$ が保型的であることが示せればよい. これを証明するために次の補題を使う:

補題 8.2. $\overline{\rho}$ を S 型 Galois 表現とし, $\mathrm{char}(\overline{\rho})=p$, $p\equiv 1 \bmod 4$, かつ, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ は非可解と仮定する. $\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}$ を $\overline{\rho}$ の射影化とする. このとき, 次の性質を満たす素数 q で $\overline{\rho}$ が不分岐となるものの集合は正の (自然) 密度をもつ:

(i) $\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}(\mathrm{Frob}_q)\sim\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}(c)$, ($c$ は複素共役)

(ii) すべての素数 $r\leq p-1$ に対して, $q\equiv 1 \bmod r$ かつ, $q\equiv 1 \bmod 8$

(iii) $q\equiv -1 \bmod p$

証明. Dickson の分類より, $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}\subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ の像は A_5 と同型または, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}'')$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}'')$, $(\mathbb{F}''\subset\mathbb{F}, |\mathbb{F}''|\geq 4)$ のいずれかと共役. 前の 2 つは単純群である. $p\equiv 1 \pmod 4$ なので, -1 は

[9] この場合, $\overline{\rho}_t$ が可約なら, ρ_t は t-通常である. よって, Skinner-Wiles の MLT の条件を満たしていることに注意. 萩原氏の原稿 p.11 の定理 3.7 を参照.

[10] この証明中に [63] と [76] を用いたのは, $\overline{\rho}_t$ の像が非可解であるということが保証されないためである. もし非可解であれば定理 4.1 が使える. 局所良二面体的という性質は勝手な整合系への持ち上げを考えたとき, 別の成分の還元の像も非可解になるという非常に優れた性質を備えているため, MLT が使えるかどうかということに頭を悩ませなくてもよいという利点がある. また, 定理 5.1-(1) と (3) を組み合わせれば, (W_1) を示すだけなら, [63] と [76] は用いる必要はない.

$\mathbb{F}$ の中で平方元だから, $\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}(c) = \sqrt{-1}\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}(c) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}'')$. $M = \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ker}\overline{\rho}_{\mathrm{proj}}}$ とおく. $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ に Chebotarev の密度定理を適用することで, (i) の条件を満たす q が正の密度の分だけ取れる. よって, Dirichlet の算術級数定理より, さらに, (ii),(iii) の条件を満たす q がとれる. 補題の条件が整合的であることを示す. つまり, (i),(ii),(iii) 条件を q に課しても q の存在が空でないことを示す. 円分体 $K = \mathbb{Q}(\mu_8, \mu_p, \mu_\ell,\ \ell : \mathrm{odd},\ \ell < p)$ と, M との共通部分を $L = M \cap K$ とする. $L/\mathbb{Q}$ は巡回的 Galois 拡大である. $\mathrm{Im}\ \overline{\rho}_{\mathrm{proj}}$ が A_5, または, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}'')$ のときは, これは単純群なので, $L = \mathbb{Q}$ である. この場合は L は条件 (i),(ii),(iii) に影響しないので示すことはない. $\mathrm{Im}\ \overline{\rho}_{\mathrm{proj}}$ が $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}'')$ のとき, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}'')$ の非自明な正規部分群は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}'')$ なので, $L/\mathbb{Q}$ の次数は高々2. $L/\mathbb{Q}$ の次数が 2 のとき, つまり L が K に含まれる 2 次拡大であるときは, 条件 (ii),(iii) みたす素数 q は L で完全分解するように選ばれているので, このような q は確かに存在するので問題はない. □

この補題 8.2 を $\overline{\rho}_{p'}$ に適用すると, 十分大きな素数 q で上の性質を満たすものが取れる. $\overline{\rho}_{p'}$ は q で不分岐, 特に, I_q の作用は自明なので, ρ'_p は重さ 2 かつ q で不分岐なので $\overline{\rho}_{p'}|D_q$ は $\begin{pmatrix} \overline{\chi}_q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という形をしている. また補題 8.2-(iii) より, $p'|q+1$ なので, 定理 5.1-(4) が適用できる. すると, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ'_λ) に持ち上げられる. $\rho'_{p'}$ を考えると, ある I_q の p' 進指標 χ' でレベル 2 かつ, 位数が p' の冪のものがあって, $\rho'_{p'}|I_q$ は $\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & \chi'^q \end{pmatrix}$ という形をしている.

s を p' より小さい最大の素数とし, $\overline{\rho}'_s$ を考える. $p' > 5$ より, $s > 2$ であることに注意する. ほとんど厳整合系の性質から, $\overline{\rho}'_s|I_q$ は $\begin{pmatrix} \overline{\chi}' & * \\ 0 & \overline{\chi}'^q \end{pmatrix}$ という形をしている. もし $* \neq 0$ ならば, $\overline{\rho}'_s|I_q$ の射影像は非巡回的 で $\overline{\rho}'_s|I_q$ は既約となってしまうので矛盾 (cf. [20] の命題 2.4). よって, $* = 0$. これと, 補題 8.2 の条件 (i) より, $\overline{\rho}'_s(\mathrm{Frob}_q)$ の射影像の位数が 2 であることを使うと, $\overline{\rho}'_s$ が q 二面体的であることがわかり, $2^{r+1} \nmid N(\overline{\rho}'_s)$ なので, 仮定 (D_r) より, $\overline{\rho}'_s$ は保型的. 補題 6.3 より, $\overline{\rho}'_s$ は非可解な像をもつので, 定理 4.1 から, (ρ'_ι) も保型的. これより, (ρ_ι) も保型的であることがわかるので, $\overline{\rho}$ も保型的. □

9. 定理 1.2 と定理 1.3 の証明

証明. **(定理 1.2)** (D_0) は系 3.2 から従い, 定理 3.4 より, 仮定 (D_0) から, 定理 1.2 は従う. □

証明. **(定理 1.3)**

次の仮定 (H) を認める. (H) は Kisin によって証明されているので, 定理である [43],[44]:

(H) p を素数, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環とする. $\rho : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ を連続, 既約, 奇な Galois 表現とする. このとき, ρ および $\overline{\rho}$ が次の条件を満たせば, ρ は保型的:

(i) $\mathrm{Im}\ \overline{\rho}$ は非可解かつ $\overline{\rho}$ は保型的

(ii) ρ の分岐する素点は有限個で, ρ は p で重さ 2 かつ潜在的クリスタリン (潜在的 Barsotti-Tate)

では定理 1.3 の証明に移る. すべての非負整数 r に対して, (D_r) を示せばよい.

先ず, (D_1) を示す ((D_0) は既に証明されている). $\overline{\rho}$ を S 型 Galois 表現で (D_1) の条件を満たすものとする. すなわち, $\mathrm{char}(\overline{\rho})$ は奇素数, $\overline{\rho}$ は局所良二面体的, $4 \nmid N(\overline{\rho})$ である. 定理 5.1-(2) より, $\overline{\rho}$ は E 有理的, 2 次元, 既約, 奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上げられる. ρ_3 を考えると, 補題 6.3 より, $\overline{\rho}_3$ の像は非可解. $N(\overline{\rho})$ が奇数のときはすでに証明されているので, $2||N(\overline{\rho})$ としてよい. すると, $\overline{\rho}_3$ は 2 で準安定かつ, ρ_3 の重さは 2 なので, $\overline{\rho}_3|D_2$ は $\begin{pmatrix} \overline{\chi}_3 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形をしていることがわかる. よって, $p = 3,\ q = 2,\ \chi'$ は位数 3 の指標, として $\overline{\rho}_3$ に定理 5.1 (4) を適用すると, $\overline{\rho}_3$ は E 有理的 2 次元既約奇なほとんど厳整合系 (ρ'_ι) に持ち上げられ, $\rho'_3|I_2$ は $\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & \chi'^2 \end{pmatrix}$ の形をしている. とくに, $\overline{\rho}'_3|I_2$ は $\begin{pmatrix} \chi' & 0 \\ 0 & \chi'^2 \end{pmatrix}$ の形をしていることがわかる (cf. [20] の命題 2.2, 2.4).

ρ'_2 について考える. $k(\overline{\rho}'_2) = 2$ ならば, 定理 5.1-(2) の主張から, ρ'_2 に付随する Weil-Deligne 表現のモノドロミー作用素 0 なので, ρ'_2 は 2 で潜在的クリスタリン. よって, 定理 1.2-(ii) と (H) から主張は従う. 他方, $k(\overline{\rho}'_2) \neq 2$ ならば, $p = 2$ の場合の Serre 重さの定義から, $k(\overline{\rho}'_2) = 4$ である. この場合は, très ramifié の場合なので, 分岐指数が奇数であるようないかなる拡大 $K/\mathbb{Q}_p$ に対しても, $\overline{\rho}_2|\mathrm{G}_K$ は有限平坦群スキームからはこない.

一方, χ' は位数 3 なので, 対応する $\mathbb{Q}_p$ の不分岐 2 次拡大の 3 次拡大を K とすると, $\rho'_2|\mathrm{G}_K$ は 2 で重さ 2 のクリスタリンとなる (定理 5.1-(2) の惰性 WD パラメータに関する条件からわかる) ので, 2 で Barsotti-Tate. よって, $\overline{\rho}'_2|\mathrm{G}_K$ は K 上の有限平坦群スキームからくるので矛盾.

次に $(\mathrm{D}_r),\ r > 1$ を示す. $\overline{\rho}$ を S 型 Galois 表現で (D_1) の条件を満たすものとする. すなわち, $\overline{\rho}$ は $\mathrm{char}(\overline{\rho})$ は奇素数, 局所良二面体的, $2^{r+1} \nmid N(\overline{\rho})$ である. $r = 1$ の場合は示してあるので, $\overline{\rho}|I_2$ は捻りのズレを除いても冪単ではないと仮定してよい (つまり, モノドロミー作用素 $N = 0$). 定理 5.1-(2) より, $\overline{\rho}$ は E 有理的 2 次元既約で奇なほとんど厳整合系 (ρ_ι) に持ち上げられる. 定理から ρ_2 の重さは 2 である. $\overline{\rho}_2$ を考えると, 補題 6.3 より, $\overline{\rho}_2$ は局所良二面体的でその像は非可解. よって, (D_1) から, $\overline{\rho}_2$ は保型的.

よって, 定理 5.1-(2) の惰性 WD パラメータに関する条件から, ρ は 2 で重さ 2 の潜在的クリスタリン表現. よって, (H) より, ρ_2 は保型的. よって, $\overline{\rho}$ も保型的. □

10. $(\mathrm{G}_\mathbb{Q},\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ に関する奇な場合の Artin 予想の証明 (系 1.4)

証明. **(系 1.4)** 各素数 p に対して, 埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ を固定する.

$\rho : \mathrm{G}_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を奇な Artin 型の表現とする. すなわち, $\det\rho(c) = -1$ を満たす (絶対) 既約な連続表現.

$\mathrm{Im}\ \rho$ が定義される代数体 $K/\mathbb{Q}$ をとる. $\mathrm{Im}\ \rho$ は K の整数環 $\mathcal{O}$ 上定義されているとしてよい. p が十分大きい時, K の素点 $v|p$ に対して, $\mathrm{Im}\rho \simeq \mathrm{Im}\overline{\rho}_v,\ A \mapsto A \bmod v$ となる. ただし, $\overline{\rho}_v$ は ρ の還元である:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_\mathbb{Q} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\overline{\rho}_v"'] & \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \arrow[d, "\mathrm{mod}\ v"] \\ & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_v) \end{tikzcd}$$

このような, v に対して, $\overline{\rho}_v$ は絶対既約であり, p で不分岐かつ, 奇な表現である. $\overline{\rho}_v$ に対して, Serre 予想を適用すると, Ribet(et al.) のレベル下げと Gross, Coleman-Voloch の重さ 1 の保型形式からくる法 p 保型形式の分類から, ある自然数 $N(v \nmid N)$ が存在して, $\overline{\rho}_v = \overline{\rho}_{f_v,p}$ をみたす (Katz の意味での) 保型形式 $f_v \in S_1(\Gamma_1(N))_{\mathbb{F}_v}$ が存在する. 記号の説明をする. $N > 5$ をとり, モジュラー曲線のスムースな整モデル $X_1(N)/\mathcal{O}[\frac{1}{N}]$ を考える. このとき, $v \nmid N$ に対して, $S_1(\Gamma_1(N))_{\mathbb{F}_v} := H^0(X_1(N)/\mathcal{O}[\frac{1}{N}], \underline{\omega}^{\otimes k}_{\mathcal{O}[\frac{1}{N}]} \otimes \mathbb{F}_v)$ のことを重さ k, 係数を $\mathbb{F}_v$ にもつ (Katz の意味での) 保型形式の成す空間という. ただし, $X_1(N)/\mathcal{O}[\frac{1}{N}]$ の一般化された楕円曲線の普遍族 $\mathcal{E} \xrightarrow{f} X_1(N)$ の Hodge 束を $\underline{\omega} = f_*\Omega^1_{\mathcal{E}/X_1(N)}$ とおいた.

$\underline{\omega}_{\mathcal{O}_v} = \underline{\omega} \otimes_{\mathcal{O}[\frac{1}{N}]} \mathcal{O}_v$, $\underline{\omega}_{\mathbb{F}_v} = \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v} \otimes \mathbb{F}_v$ とおく. π を $\mathcal{O}_v$ の素元し, 次の完全列を考える:

$$0 \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v} \xrightarrow{\pi} \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v} \longrightarrow \underline{\omega}_{\mathbb{F}_v} \longrightarrow 0.$$

よって, 長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^0(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v}) \xrightarrow{\phi} H^0(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathbb{F}_v}) \longrightarrow H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathbb{F}_v})[\pi] \longrightarrow 0$$

を得る. $N(\overline{\rho}_v)$ は $N(\rho)$ を割るため, (v を動かしたとき) 一様に抑えられているから, p が十分大きいとき, スキームの底変換に関する議論から $H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v})$ は p-捻じれ元を持たない[11]. よって, $H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathbb{F}_v})[\pi] = 0$ だから, ϕ は全射.

以下では, 上記 ϕ が全射となるような素数 p を考える. 上で見たように有限個を除く p に対して, その条件は満たされる.

このとき, [18] の補題 6.11 より, T_n, $(n, pN) = 1$ に関する Hecke 固有形式

$$\widetilde{f}_v \in H^0(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}'_v}),\ (\mathcal{O}'_v \text{ は } K_v \text{ の有限次拡大の整数環})$$

が存在して, $T_n\widetilde{f}_v = \widetilde{\alpha_n}\widetilde{f}_v$ とするとき, $\widetilde{\alpha_n} \in \mathcal{O}'_v$ の還元は f_v の T_n に関する固有値 $\alpha_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$ と一致する.

$H^0(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}'_v}) \otimes \mathbb{C}$ は古典的な保型形式の空間 $S_1(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ と同型なので, $\widetilde{f}_v$ は Hecke 固有形式となり, さらに, T_p に関する固有形式にもなっている. 従って, $\rho_v = \overline{\rho}_{f_v}$ はある $S_1(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ の新形式 $\widetilde{f}_v$ からくる. $S_1(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ は有限次元なので, 上記の主張は十分大きな p に対しても成立するとしてよい. よって, $\mathrm{Im}\,\rho$ が $\mathrm{Im}\,\overline{\rho}$ が同型になるまで p を大きくしてやれば, ρ は保型的であることがわかる. □

11. 2 次元整合系の保型性 (系 1.5)

証明. **(系 1.5)** (ρ_λ) を正則整合系として, その Hodge-Tate 重さを (a, b), $a > b$ とする. 整合系の $-b$ 回 Tate 捻りを考えることにより, $a > 0$, $b = 0$ としてよい.

λ を E の素点とし, その $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\lambda | p$ への埋め込みも λ で表す. まず, 有限個を除く λ に対して, $\overline{\rho}_\lambda$ は絶対既約であることを示す. $\overline{\rho}_\lambda$ は奇なので, 既約であることさえ示せば十分.

整合系 (ρ_λ) の導手は有界なので, それを N とし, N を割る有理素数の集合に $\lambda | p$ なる素数 p を付け加えた集合を $S = S_\lambda$ とおく. $\overline{\rho}_\lambda$ が可約となるような λ が無限個あるとする. そのような λ に対して, $\overline{\rho}_\lambda$ の $G_{\mathbb{Q}}$ 不変 1 次元部分空間を $\overline{L}_\lambda$ とすると, $\overline{\rho}_\lambda|_{\overline{L}_\lambda}$ は有限指標 $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$

[11] 次の議論からわかる. $H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}[\frac{1}{N}]})$ は有限生成 $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 加群. 従って, 底変換により, $H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}_v}) = H^1(X_1(N), \underline{\omega}_{\mathcal{O}[\frac{1}{N}]}) \otimes \mathcal{O}_v$ だから, 捩れ元は有限個.

と法 p 円分指標 χ の冪 χ_p^t, $t \in \mathbb{N}$ との積でかける. N を割らない λ に対して, ε の λ 進持ち上げを ε_λ とかく (λ で不分岐な指標なのでいつでも持ち上がる). N と λ と素な有理素数 ℓ に対して, $\overline{\rho}_\lambda|_{\overline{L}}(\mathrm{Frob}_\ell) = \varepsilon_\lambda(\ell)\ell^t \pmod{\lambda}$ が成り立つ. $\overline{L}_\lambda$ の $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}}_\lambda)$ への引き戻しを L_λ と書くことにする. L_λ 上で, $\rho_\lambda(\mathrm{Frob}_\ell) \pmod{\lambda} = \varepsilon(\ell)\ell^t \pmod{\lambda}$ が成り立つ. ρ_λ は $G_{\mathbb{Q},S}$ を経由するので, Chebotarev の密度定理から, すべての, G_S の元 g に対して, $\rho_\lambda(g) \pmod{\lambda} = \varepsilon_\lambda(g)\chi_p^t \pmod{\lambda}$ が L 上で成り立つ. $\overline{\rho}_\lambda|_{\overline{L}}$ は $G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}}$ を経由し, $G_{\mathbb{Q},S}^{\mathrm{ab}} \simeq \prod_{p\in S}\mathbb{Z}_p^\times$ は位相的に有限生成なので, λ のノルムが十分大きいとき, L_λ は $G_{\mathbb{Q},S}$ 不変となるので, ρ_λ の既約性に矛盾.

よって, 有限個を除くすべての λ に対して, $\overline{\rho}_\lambda$ は既約. このような λ で導手 N を割らないものに対しては, 整合系の定義から $\rho|_{D_\lambda}$ は Hodge-Tate 表現である. よって, $\det\rho|_{D_\lambda}$ は局所代数的な表現なので, 有限指標 $\varepsilon_\lambda : D_\lambda \longrightarrow E_\lambda^\times$ と $\chi_p^a|_{D_\lambda}$, $\lambda|p$ の積となる. よって, 整合系の定義から, $\det\rho$ はある有限指標 $\varepsilon : G_\mathbb{Q} \longrightarrow E^\times$ と χ_p^a の積となる.

λ を割る素数 p が $a < p-1$ かつ $p \nmid N$ を満たすとき, Fontain-Messing の結果より, $\overline{\rho}_\lambda^{\mathrm{ss}}|_{I_\lambda}$ の一次元既約成分[12]には $\omega_{2,p}^{d_1+d_2p}$, $0 \le d_1, d_2 \le a$ の形で作用することがわかる ($\omega_{2,p}^{1+p} = \omega_p$ に注意). さらに, Fontaine-Laffaille 理論 [27] により, $\rho_\lambda|_{D_\lambda}$ は弱許容加群から生ずる Galois 表現となることがわかるので, [27] の定理 5.3 から $d_1, d_2 \in \{0, a\}$ となる. これと $\det\overline{\rho}_\lambda|_{I_\lambda} = \omega_1^a$ となることを合わせると, $\overline{\rho}_\lambda|_{I_\lambda}$ の形は $\begin{pmatrix} \omega_1^a & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, または, $\begin{pmatrix} \omega_{2,p}^a & 0 \\ 0 & \omega_{2,p}^{ap} \end{pmatrix}$ のどちらかとなる. あとは Serre 重さの定義から, $k(\overline{\rho}_\lambda) = a-1$ がわかり, λ によらないことがわかる. 一方, Serre レベルの方も $N(\overline{\rho}_\lambda)|N$ がなりたつので λ によらず N によって一様に抑えられていることがわかる.

よって, 定理 1.3 より, 上記の λ に対しては $\overline{\rho}_\lambda$ は $S_{a-1}(\Gamma_1(N))$ からくる. $S_{a-1}(\Gamma_1(N))$ は有限次元なので, この空間に含まれるある新形式 f と無限個の λ が存在して, $\overline{\rho}_\lambda \sim \overline{\rho}_{f,\lambda}$ となる. 整合系の定義から各有理素数 ℓ で N と λ と素なものに対しては, $\mathrm{tr}\rho_\lambda(\mathrm{Frob}_\ell)$ と $\mathrm{tr}\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_\ell)$ は λ によらないので, λ を十分大きくとれば, $\mathrm{tr}\rho_\lambda(\mathrm{Frob}_\ell) = \mathrm{tr}\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_\ell)$ となる. ρ_λ は既約なので, $\rho_\lambda \sim \rho_{f,\lambda}$. 再び整合系の定義から, (ρ_λ) と $(\rho_{f,\lambda})$ とは同値であることがわかる.

(ρ_λ) が非正則の場合は同様の理由で Hodge-Tate 重さは (0,0) としてよい. このとき, Sen と Fontaine の結果より (どのような結果をどのように使うかは [46] の命題 2.3 の証明をみよ.), ρ_λ の像は有限群. よって, $\overline{E}_\lambda \simeq \mathbb{C}$ を固定することで, 奇な Artin 表現 $\rho_\lambda : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を得る. (ρ_λ) は整合系なので, λ のノルムが十分大きいとき, ρ_λ は λ で不分岐である. 後は系 1.4 の証明と同様である.

□

12. 理解度チェック

勉強会の最初に配布された理解度チェックシートの内容で [35], [37], [38] および [44] に関連する部分を載せておく. それらの一部にはコメントを与える.

ほとんど厳整合系の存在と Serre 予想の証明についてのチェック項目.

[12] $\overline{\rho}_\lambda^{\mathrm{ss}}|_{I_\lambda}$ は従順惰性群 I_λ^{t} を経由することがわかり, さらに, I_λ^{t} は Abel 群なので, 半単純化は一次元因子に分解する.

10-1. Langlands-Tunnell の定理と Ribet のレベル下げ (レベルが平方因子を持たない場合の Serre 予想の精密版の証明) を用いずにフェルマーの最終定理を証明せよ (定理 5.1 を使う).

証明. $x^p + y^p + z^p = 0$ が非自明な整数解 (a, b, c) をもつと仮定して, それに対応する Frey の楕円曲線 $E = E_{a,b,c} : y^2 = x(x - a^p)(x - b^p)$ を考える. 素数 $p \geq 5$ ならば, $\overline{\rho}_p : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}(E[p]) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ は既約である. 実際, もし可約ならば, E は準安定であることと E の 2 等分点がすべて $\mathbb{Q}$-有理的であることから $E(\mathbb{Q})$ の捩れ部分群は $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を含むことがわかる ([56] の命題 4.3-(2)). Mazur による捩れ点の分類からそのようなことは起こらないので矛盾. よって, $\overline{\rho}_p$ は S 型であり, Serre レベルは 2, Serre 重さは 2 であることがわかる (ここで, Langlands-Tunnell の定理と Ribet のレベル下げを使うと, $\overline{\rho}_p$ は $S_2(\Gamma_0(2))$ から来ることになり, この空間の次元は 0 なので矛盾を得るが, ここではこれらの方法は使わない). ここで, $\overline{\rho}_p$ に定理 5.1-(1) を適用すると, $\overline{\rho}_p$ の p 進持ち上げ ρ_p は 2 以外で良還元を持つ準安定 Abel 多様体 $A/\mathbb{Q}$ の p 進 Tate 加群からくる. しかし, Brumer-Kramer の結果 [7] より, そのような Abel 多様体は存在しないので矛盾. よって, $x^p + y^p + z^p = 0$ は自明な解しかもたない. □

10-2. ほとんど厳整合系の存在の証明に潜保型性がどのように使われているか説明せよ.

10-3. ほとんど厳整合系の存在の証明で登場する変形環に関して,
(a) 次元の下限
(b) 平坦性
がどのように証明されているか説明せよ.

10-4. ほとんど厳整合系の変種は幾つあるか?

10-5. レベル 1 の Serre 予想の, Fermat 素数の分布を用いない Dieulefait による証明を説明せよ ([24]).

この場合, Serre 重さが 2 のときは, 既に [67] によって, 証明されているが, Dieulefait によって, 潜保型性を用いた別証明が [23] で与えられた. この手法と Schoof の導手の小さい ($\mathbb{Q}$ 上定義された非自明な) 半安定 Abel 多様体の保型性 (又は非存在) の結果を合わせることで, Serre レベル 1, Serre 重さ $k = 4, 6, 8, 12, 14$ に対しては Serre 予想は証明されている. これらの結果を既知として, Serre 重さに関する帰納法で一般の場合を証明する方法を解説する (詳細は [24] を見よ).

$\overline{\rho}$ を S 型表現とし, Serre レベルは 1, Serre 重さは $k = 10$ または $k > 14$ と仮定する. このとき, 定理 5.1 の証明で用いた潜保型性の議論により, $\overline{\rho}$ は重さ 2 の整合系 (ρ_ι) に持ち上がり, 素数 p' を $p' > k(\overline{\rho}_{p'}) - 1$ が成り立つように選ぶことができるので, 以下, $p > k$ と仮定する (レベル 1 なので k が偶数であることに注意).

再び, 潜保型性の議論により, $\overline{\rho}$ は p 進持ち上げ ρ で, $\det\rho = \omega_p^{k-2}\chi_p$, p の外不分岐, p で潜 Barsotti-Tate が成り立つものが取れる. ρ は保型的な Galois 表現達が成す仮想表現なので, $\mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_\ell))$, $\forall \ell \neq p, \ell \gg 0$ で生成される $\mathbb{Q}$ の拡大体を K とおくと, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ の元 γ による

ρ の捻り ρ^γ が定義できる．たとえば, 新形式 $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ に対して, その捻りは ${}^\gamma f = \sum_{n\geq 1} a_n^\gamma q^n$ で定義される．$K \supset C := \mathbb{Q}(\iota_p^{-1}(\omega_p^{k-2}))$ が簡単な考察からわかる．

このとき, C に非自明に作用する $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ の元をうまく選ぶと (適当な指標による捻りの差を除いて), $\overline{\rho}_p^\gamma$ の Serre 重さを k よりも小さくすることができる．よって, 帰納法により, $\overline{\rho}_p^\gamma$ は保型的, MLT より, ρ_p^γ も保型的．当然, ρ_p も保型的なので, $\overline{\rho}$ も保型的である．この証明のアイデアは重さ 2 の持ち上げで, 行列式が Nebentype になるようなもの, つまり, $\det\rho = \omega_p^{k-2}\chi_p \neq \chi_p$ を満たすものの構成を用いたことにある (構成自体は Taylor の潜保型性の結果以降は良く知られている方法となっている)．これによって, ρ の (内部) 捻りを考えることができ, さらには, Serre 重さを小さくすることができるのである．Khare の Serre レベル 1 の証明 [35] では Serre 重さを小さくするために, ある非 Fermat 素数の系列の存在を用いるのであった．

10-6. 帰納法を用いてどのように Serre 予想を証明するか説明せよ．

10-7. 次を説明せよ．
(a) 一般の場合から良二面体的の場合への移行
(b) “分岐消し”
(c) “低い重さへの帰着”
10-8. Serre 予想の応用
(a) Fermat 型 Diophantine 方程式の解 ([52],[28], [16], [26], [2], [21], [22])

自然数 p, q, r で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$, $(p, q, r) \neq (1, 3, 2), (5, 2, 4), (3, 2, 9), (5, 4, 2), (7, 3, 2), (3.2.7), (8, 3, 2), (8, 2, 3)$ を満たすものに対しては

$$x^p + y^q = z^r,\ \gcd(x, y, z) = 1, xyz \neq 0$$

を満たす整数解 (x, y, z) は存在しないと予想されている (cf.[15])．Serre 予想はこの問題の特別な場合に対して次のように応用される．上記の方程式が非自明な解をもつと仮定すると, 方程式の形に依存して, ある代数体上の楕円曲線 E を対応させることができる場合がある．そのような場合, E は $\mathbb{Q}$ 曲線と呼ばれるものになっている．$\mathbb{Q}$ 曲線とは代数体上定義された楕円曲線であって, 自身とその Galois 共役との間に同種射が存在するもののことで, 楕円保型形式 f に付随する志村の Abel 多様体 A_f の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の分解因子として得られることが (Serre 予想の帰結として) 知られている．得られた楕円曲線に付随する 2 次元法 ℓ Galois 表現 (ℓ は楕円曲線によって決まる素数) に Serre 予想を適用することで, そのような楕円曲線に対応する新形式 f を得る．この新形式やそれに付随する Galois 表現の性質を調べることで, 矛盾を導くというのが方針ではある．しかし, この方法が必ずしもうまく機能するわけではないことを注意しておく．

$p = q = r$ のときには, Frey の楕円曲線が対応する (上記 10-1 参照)．また, $x^4 + y^4 = z^p$ ($p > 4$ は素数) の場合には, それが非自明な解 (a, b, c) をもつと仮定すると, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上の $\mathbb{Q}$-曲線

$$E : y^2 = x^3 + 4(1 + \sqrt{-1})bx^2 + 4\sqrt{-1}(b^2 + \sqrt{-1}a^2)x$$

を対応させることができる. 2 次元 Abel 多様体 $A = \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と同型になるような GL_2 型 Abel 多様体 (下記 (d) 参照) である. p の上の E の素点を v とすると, $G_{\mathbb{Q}}$ 加群 $T_p(A)$ は $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_p$ 加群として階数 2 なので, その 2 次元因子を T とすると, Galois 表現 $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{A,p} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathcal{O}_v/m_v}(T/m_vT) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_v)$ をえる. $p > 13$ なら既約であることは Ellenberg [26] によってわかっているので, $p > 13$ と仮定すると, $\overline{\rho}$ は S 型表現となる. $\overline{\rho}$ の Serre レベル $N(\overline{\rho})$ は 2^{14} を割り, $k(\overline{\rho}) = 2$ かつ $\det(\overline{\rho}) = \chi_p$ なので, $S_2(\Gamma_0(2^{14}))$ のある元に対応することがわかる. さらに GL_2 型の Abel 多様体に付随する Galois 表現の Swan 導手の解析 (cf. 定理 5.5 [6]) により, $N(\overline{\rho})|2^8 = 256$ まで落とせる. $S_2(\Gamma_0(256))$ の Hecke 固有形式 f で $\overline{\rho} \sim \overline{\rho}_{f,p}$ となるものを探すと, そのようなものは $S_2(\Gamma_0(32))$ と $S_2(\Gamma_0(256))$ の新形式の中にそれぞれ 1 つ存在することがわかる. そのような新形式 f の性質を詳しくみると, $p \neq -1 \pmod 8$, $p > 13$ の場合 $x^4 + y^4 = z^p$ は非自明な解 $(xy \neq 0)$ は存在しないことがわかる [22].

(b) ある有限平坦群スキームの非存在 ([60] の 4 節)

(c) $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の法 p 2 次元表現 $\overline{\rho}$ で分岐がおさえられているものの同型類の有限性

素数 p と自然数 N を与え, $N(\overline{\rho}) \leq N$ をみたす S 型 $\overline{\rho}, \mathrm{char}(\overline{\rho}) = p$ の同型類の有限性を問うている. 素数 p は固定してあるので, Serre 重さの定義から, $k(\overline{\rho}) \leq p^2 - 1 (p > 2)$, $k(\overline{\rho}) = 2$ または $4 (p = 2)$. よって, これは, $\displaystyle\bigoplus_{k \leq \max\{p^2-1,4\}, M \leq N} S_k(\Gamma_1(M))$ の次元の有限性から従う.

(d) GL_2 型 Abel 多様体の保型性 (GL_2 型モチーフの保型性)

$A/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 単純な Abel 多様体とし, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された A の自己準同型射全体の成す環とする. このとき, 次数 $\dim A$ の代数体 $E/\mathbb{Q}$ と埋め込み $E \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在するとき (実は同型になる), A のことを GL_2 型の Abel 多様体という. Ribet の結果 [53] より, Serre 予想を仮定するとある新形式 f が存在して, $A \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_f$ となることが知られている. ただし, A_f は f に付随する志村の Abel 多様体 ([64] の定理 7.14). これは Galois 表現の保型性よりも強い主張である (Abel 多様体の場合は Tate 予想が成立するため). GL_2 型のモチーフについては [34],[41],[73] 等を参照.

(e) Artin 予想 ($\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$)

Khare によって, Serre 予想から Artin 予想 (($\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$) の場合) が導かれたわけあるが (系 1.4), 今までにどのようなアプローチが成されてきたかを概観する.

$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を Artin 表現とすると, $\mathrm{Im}\ \rho_{\mathrm{proj}}$ は巡回群, 二面体群, A_4, S_4, および, A_5 のいずれかと一致する. 前の 4 つの場合は可解群でこれは, Hecke (巡回群, 二面体群の場合), Langlands (A_4 場合. S_4 の場合も一部), Tunnell (S_4 の場合) により解決されている [47], [72]. 最後の A_5 の場合は (Serre 予想が解決されるまでは) 未解決であり, [8], [39], [62], [10], [11], [68], [31], [69] 等の研究がある.

(f) 次数 2 の Fontaine-Mazur 予想

Fontaine-Mazur 予想とは「連続な Galois 表現 $\rho : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ が幾何的 (5 節参照) なら, それは $\mathbb{Q}$ 上定義された滑らかな射影的代数多様体のエタールコホモロジーの ($\mathbb{Q}_p[\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}]$ 加群としての) 直和因子として得られるであろう」という予想である. Serre 予想が証明されて

いるので, 多々ある MLT の条件を満たす ρ に対しては, Fontaine-Mazur 予想は解かれたことになる. しかし, 一般の解決からは遠い.

最近, Kisin は p が奇数のときに, Breuil-Mézard 予想と次数 2 の Fontaine-Mazur 予想 [40] が同値であることを p 進 Langlands 対応 (Colmez の Montréal 関手と呼ばれている) と法 p Langlands 対応との整合性から導いた. p 進 Langlands 対応の構成およびその対応と法 p Langlands 対応との整合性は最近 Colmez が ($\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}_p$ の場合に) 証明したと報告している [14].

また, 条件付きではあるが, Emerton がまったく異なるアプローチで整合性を示している. Emerton はより強く, すべての三角表現は有限傾斜 (finite slope) を持つ過収束尖点固有形式 (overconvergent cuspidal eigenform) からくることを示した.

$p = 2$ **のときの保型性持ち上げ定理と潜保型性に関するチェック項目** ([35],[37],[44]):
11-1. $p = 2$ のとき, $(k \cdot \mathrm{id}) \subset \mathrm{ad}^0\overline{\rho}$ である. よって, $(\mathrm{ad}^0\overline{\rho})^* \simeq \mathrm{ad}^0\overline{\rho}$ を得ることができない. このような場合, Galois コホモロジーの計算をどのように修正すればよいか?

11-2. $p = 2, 3$ のとき, 双対 Selmer 群を消す議論をどのように修正すればよいか? $p = 2$ のときは [35]. $p = 2, 3$ のときは [38]. (注意: [71] における議論では $p = 2, 3$ の場合は除外されている.)

11-3. $p = 2, 3$ のとき, "neatness 問題" をどのように処理すればよいか? $p = 3$ のときは [35]. $p = 2, 3$ のときは [38].

11-4. $p = 2$ のとき, 奇素数を割る F の素点 v で

$$(1 - Nv)((1 + Nv)^2 \mathrm{det}\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_v) - Nv(\mathrm{tr}\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_v))^2) \in \mathbb{F}^{\times}$$

を満たすものはとることができない ($\mathbb{F}$ は $\mathbb{F}_2$ の有限次拡大). [38],[44] において, この困難をどのように克服しているか?

11-5. $p = 2$ のときは Breuil の理論 [5] が使えない. そのため, [44] では Zink の display と window の理論を用いている. $p = 2$ のときの困難を克服するためにこれらの理論をどのように用いるか説明せよ.

13. 謝辞

この原稿を書く機会を与えてくださいました山下剛さん, 安田正大さん, 斎藤毅先生に感謝致します. 山下剛さんと安田正大さんは原稿を丁寧に読んでくださり, 数々のアドバイスをしてくださいました. お二人のお力添えに感謝致します. また, 田口雄一郎先生には像が可解となる場合の Galois 表現の性質について詳しく教えて頂きました. 特に記して感謝致します.

References

[1] 新井啓介, 剰余可約表現の保型性について, 報告集「R=T の最近の発展–佐藤・Tate 予想と Serre 予想–」の上巻.

[2] M. A. Bennett and C. Skinner, Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms. Canad. J. Math. 56 (2004), no. 1, 23–54.

[3] L. Berger, Limites de representations cristallines, Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473–1498.

[4] C. Breuil, Une remarque sur les representations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert, Bull. Soc. Math. France 127 (1999), no. 3, 459–472.

[5] C. Breuil, Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtres, Annals of Math 151, 2000, 489-549.

[6] A. Brumer, The rank of $J_0(N)$. Asterisque No. 228 (1995), 3, 41–68.

[7] A. Brumer and Kramer, Non-existence of certain semistable abelian varieties. Manuscripta Math. 106 (2001), no. 3, 291–304.

[8] J. Buhler, Icosahedral Galois representations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 654. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[9] K. Buzzard, On level-Lowering for mod 2 representations, Math. Res. Lett. 7 (2000), no. 1, 95–110.

[10] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron, and R. Taylor, On icosahedral Artin representations. Duke Math. J. 109 (2001), no. 2, 283–318.

[11] K. Buzzard and W. Stein, A mod five approach to modularity of icosahedral Galois representations. Pacific J. Math. 203 (2002), no. 2, 265–282.

[12] H. Carayol, Sur les representations galoisiennes modulo l attachees aux formes modulaires, Duke Math. J. 59 (1989), no. 3, 785–801.

[13] R. Coleman and J. Voloch, Companion forms and Kodaira-Spencer theory. Invent. Math. 110 (1992), no. 2, 263–281.

[14] P. Colmez, Representations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules (version provisoire, moins partielle) (2008). (http://people.math.jussieu.fr/ colmez/publications.html から入手可能).

[15] H. Darmon, Serre conjecture, CMS conference proceedings Volume 17, pp. 135-155.

[16] H. Darmon and G. Granville, On the equations $z^m = f(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$, Bull. London. Math. Soc., no 129, 27 part 6, (1995), pp. 513-544.

[17] A.J. de Jong, A conjecture on arithmetic fundamental groups. Israel J. Math. 121 (2001), 61–84.

[18] P. Deligne and J-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 7 (1974), 507–530 (1975).

[19] F. Diamond, The refined conjecture of Serre, Elliptic curves, modular forms, and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 22–37, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[20] F. Diamond, An extension of Wiles's results, Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 475–489, Springer, New York, 1997.

[21] L. Dieulefait, Solving Diophantine equations $x^4 + y^4 = qz^p$. Acta Arith. 117 (2005), no. 3, 207–211.

[22] L. Dieulefait, Modular congruences, $\mathbf{Q}$-curves and the Diophantine equation $x^4 + y^4 = z^p$. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 12 (2005), no. 3, 363–369.

[23] L. Dieulefait, The level 1 weight 2 case of Serre's, Rev.Mat. Iberoamericana 23 (2007), no.3,1115-1124.

[24] L. Dieulefait, The level 1 Serre's conjecture revisited, preprint, arXiv:0705,0457v3 (26 Feb 2008).

[25] B. Edixhoven, Serre's conjecture. Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 209–242.

[26] J. Ellenberg, Galois representations attached to $\mathbb{Q}$-curves and the generalized Fermat equation $A^4 + B^2 = C^p$. Amer. J. Math. 126 (2004), no. 4, 763–787.

[27] J-M. Fontaine and G. Laffaille, Construction de représentations p-adiques, Ann. Sc. ENS. 15 (1982),. 547-608.

[28] G. Frey, On ternary equations of Fermat type and relations with elliptic curves. Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 527–548, Springer, New York, 1997.

[29] J-M. Fontaine, Representations p-adiques semi-stables. With an appendix by Pierre Colmez. Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Asterisque No. 223 (1994), 113–184.

[30] J-M. Fontaine and B. Mazur, Geometric Galois representations. Elliptic curves, modular forms, and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[31] A. Jehanne and M. Muller, Modularity of an odd icosahedral representation. J. Theor. Nombres Bordeaux 12 (2000), no. 2, 475–482.

[32] 萩原 啓, レベル 1 の Serre 予想, 本報告集.

[33] K. Joshi and M. Kim, A remark on potentially semi-stable representations of Hodge-Tate type $(0,1)$. Math. Z. 241 (2002), no. 3, 479–483.

[34] H. Hida, Control Theorems and Applications, Lectures at Tata institute of fundamental research (Version of 2/15/00).

[35] C. Khare, Serre's modularity conjecture: the level one case. Duke Math. J. 134 (2006), no. 3, 557–589.

[36] C. Khare and J-P. Wintenberger, On Serre's conjecture for 2-dimensional mod p representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Ann. Math. 169 (1), 229-253 (2009).

[37] C. Khare and J-P. Wintenberger, Serre's modularity conjecture (I), Inventiones math to appear.

[38] C. Khare and J-P. Wintenberger, Serre's modularity conjecture (II), Inventiones math to appear.

[39] I. Kiming and X. Wang, Examples of 2-dimensional, odd Galois representations of A_5-type over Q satisfying the Artin conjecture. On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations, 109–121, Lecture Notes in Math., 1585, Springer, Berlin, 1994.

[40] M. Kisin, Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 641-690.

[41] M. Kisin, Modularity for some geometric Galois representations. With an appendix by Ofer Gabber. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 320, L-functions and Galois representations, 438–470.

[42] Crystalline representations and F-crystals – Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459-496.

[43] M. Kisin, Moduli of finite flat group schemes and modularity, Ann of Math. to appear.

[44] M. Kisin, Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations, Inventiones math to appear.

[45] M. Kisin, Potentially semi-stable deformation rings J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 2, 513–546.

[46] M. Kisin and S. Wortmann, A note on Artin motives, Math. Res. Lett. 10 (2003) no. 2-3, 375-389.

[47] R-P. Langlands, Base change for GL(2), Annals of Mathematics Studies, 96. Princeton University Press.

[48] B. Mazur, An introduction to the deformation theory of Galois representations. Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995), 243–311.

[49] 三枝洋一, 局所・大域整合性, 報告集「R=T の最近の発展–佐藤・Tate 予想と Serre 予想–」の上巻.

[50] H. Moon and Y. Taguchi, Refinement of Tate's discriminant bound and non-existence theorems for mod p Galois representations. Doc. Math. 2003, Extra Vol., 641–654.

[51] R. Ramakrishna, Infinitely ramified Galois representations. Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 793–815.

[52] K. Ribet, On the equation $a^p + 2^\alpha b^p + c^p = 0$. Acta Arith. 79 (1997), no. 1, 7–16.

[53] K. Ribet, Abelian varieties over $\overline{\mathbb{Q}}$ and modular forms. Modular curves and abelian varieties, 241–261, Progr. Math., 224, Birkhauser, Basel, 2004.

[54] K. Ribet and W. Stein, Lectures on Serre's conjectures. Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999), 143–232, IAS/Park City Math. Ser., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[55] D. Rohrlich, Elliptic curves and the Weil-Deligne group. Elliptic curves and related topics, 125–157, CRM Proc. Lecture Notes, 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[56] 斎藤 毅, Fermat 予想 1, 岩波講座 現代数学の展開 (2000).

[57] T. Saito, Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory, to appear in Compositio. math.

[58] D. Savitt, On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor. Duke Math. J., 128(2005),no .1,141-197.

[59] J-P. Serre, Linear Representations of Finite Groups, Springer-Verlag, 1977.

[60] J-P. Serre, Sur les representations modulaires de degre 2 de Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$). Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 179–230.

[61] J-P. Serre and J. Tate, Good reduction of abelian varieties. Ann. of Math. (2) 88 1968 492–517.

[62] N. Shepherd-Barron and R. Taylor, mod2 and mod5 icosahedral representations. J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no. 2, 283–298.

[63] C. Skinner and A. Wiles, Residually reducible representations and modular forms. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 89 (1999), 5–126 (2000).

[64] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kano Memorial Lectures, No. 1. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[65] D. A. Suprunenko, Matrix groups. Translated from the Russian. Translation edited by K. A. Hirsch. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 45. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

[66] 田口雄一郎, Serre 予想の証明: 帰納法の第一段階. 本報告集.

[67] J. Tate, The non-Existence of Certain Galois Extensions of $\mathbb{Q}$ Unramified Outside 2, contemporary math vol.174 (1994), 154-156.

[68] R. Taylor, Icosahedral Galois representations. Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. 1997, Special Issue, 337–347.

[69] R. Taylor, On icosahedral Artin representations. II. Amer. J. Math. 125 (2003), no. 3, 549–566.

[70] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms. Invent. Math. 98 (1989), no. 2, 265–280.

[71] R. Taylor, On the meromorphic continuation of degree two L-functions, Documenta Math.Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday(2006), 726-779.

[72] J. Tunnell, Artin's conjecture for representations of octahedral type. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 5 (1981), no. 2, 173–175.

[73] T. Yamauchi, $\mathbb{Q}$-motives and modular forms, Journal of Number Theory, Vol.128(2008),p. 1485-1505.

[74] 山上敦士, Taylor による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について, 報告集「R=T の最近の発展–佐藤・Tate 予想と Serre 予想–」の上巻.

[75] G. Wiese, Dihedral Galois representations and Katz modular forms, Doc. Math. 9 (2004), 123–133.

[76] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.