潜在的準安定変形環

阿部 知行

序文

このノートは M. Kisin 氏による論文 [Kis] の解説である. この文章の目的は潜在的準安定変形環の存在定理を示すことにある. 詳しい主張をしよう. $\mathbb{F}$ を有限体として K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし, $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とする. $V_{\mathbb{F}}$ を $\mathbb{F}$ 上有限次元な線形空間で連続な G_K-作用が与えられているものとする. このとき Mazur によって次の定理が示されている:

定理. — $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}, V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ と仮定する. すると普遍変形環 $R_{V_{\mathbb{F}}}$ が存在する. つまり A を $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上有限な局所代数で剰余体が $\mathbb{F}$ となるものとすると

$$\{R_{V_{\mathbb{F}}} \to A \text{ という準同型の集合 }\} \leftrightarrow \{A \text{ 上の表現 } V_A \text{でその還元が } V_{\mathbb{F}} \text{となるもの }\}$$

という *1:1* 対応がある.

問題は出てきた表現がもっと強い性質, つまり準安定表現や, もっと詳しく, 与えられた Hodge-Tate 重さなどを持つものをどう見分けるかである. そこでこの文章の主定理としてこれらの性質を持つ $V_{\mathbb{F}}$ の変形に対して変形環が存在し $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の商になっているということを証明する. つまり:

定理. — $a \leq b$ を整数として L/K を有限次拡大とする. このとき $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{[a,b],L}$ が存在して次の性質を持つ*:*

> A を上の定理のものとする. すると $x : R_{V_{\mathbb{F}}} \to A$ が $R_{V_{\mathbb{F}}}^{[a,b],L}$ を経由する必要十分条件は x に対応する表現 V_x の *Hodge-Tate* 重さが $[a,b]$ の範囲に含まれていて $V_x|_{G_L}$ が準安定表現になることである.

証明の方針は以下のとおりである. 一般的な表現を扱うのは大変困難である. そこで問題を線形データによる問題と置き換えることを考える. つまり, 例えば準安定表現ならばフィルター付き (φ, N)-加群という線形データを考えることで扱いが非常に楽になる. 今回ははじめに与えてある表現 $V_{\mathbb{F}}$ が一般の表現なのでこれを線形データにすることは難しい. そこで $K_\infty := \bigcup_n K(\pi^{1/p^n})$ (π は K の素元とする) として $V_{\mathbb{F}}|_{G_{K_\infty}}$ という表現に制限すれば Fontaine の理論があり線形データとして扱うことができるのである. この線形データは $\mathcal{E}$-加群 (詳しい定義は 1.1 を参照すること) と φ-作用の組である. 準安定表現からきているものであれば E-高さが h 以下の格子というものを持つことが知られている. つまり対応する $\mathcal{E}$-加群が E-高さが h 以下の格子 $\mathfrak{M}$ を持つのは必要条件であるので, 1 ステップ目としてこのような格子を持つような条件を表現している環を構成する. これが第 1 節の目標である.

当然のことながらこのような格子を持つからといって準安定表現からきているとは限らない. これは表現を K_∞ に制限しているところからも明らかである. そこではじめの節で構成した環に手を加え, 初めの目標の環を構成しなくてはならない. まず第 2 節の初めに格子 $\mathfrak{M}$ から K_0 (k を K の剰余体とした時 $K_0 := W(k)[1/p]$ としている) 上の線形空間で φ の作用を持った D を構成する. 先ほどの格子 $\mathfrak{M}$ が準安定表現から来ているものだったと仮定しよう. すると準安定表現に Fontaine の D_{st} を施してできるフィルター付き (φ, N)-加群からフィルトレーションと N を忘れたものが実はこの D なのである. そこで反対に D に "適切な" N の作用を入れることを考える. これが入るような条件を線形代数の言葉で書けば表現環を構成するのは比較的容易である. そしてこの条件が実は必要十分条件であることを Kisin の別の結果を用いて (この結果には

Kedlaya による傾斜フィルトレーション (slope filtration) 定理を用いることを注意しておく) 示すのである. ここで D にフィルトレーションは入れなかったが N さえいれれば実はフィルトレーションも復元できるのである. あとはこの環を精密化することで主定理を示すことができる. この稿の残りの部分は変形環の局所的性質を示すことに当てている.

最後に, 筆者の実力不足から構成その他が原論分とほとんど同じになってしまったことをお詫びしたい. この小論は解説論文であるという性格上, 本来であれば証明よりはその心を中心に書くのが理想だと思うが証明が中心になってしまった. また応用についても私の理解不足から書くことができなかった. 応用については本報告集の三枝氏による「大域・局所整合性」や, 安田氏による「Breuil-Mezard 予想とモジュラー性持ち上げ」を参照していただきたい. 今回は, 私が原論文を読んで読みづらいと思ったところを重点的に書いたつもりである. 反対に比較的読みやすいと思った技術的な部分は証明を端折っている所が多々ある. 主定理の主張自体は非常に分かりやすいので原論文の補助として考えていただけるとありがたいと思う.

1 E-高さが有限な表現

1.1 まず記号を固定する. k を有限体で標数が $p>0$ として, $W:=W(k)$ を k の Witt ベクトルのなす環とする. $K_0:=W[1/p]=\mathrm{Fr}(W)$ (ここで Fr は分数体を表す) を絶対不分岐な体とし K/K_0 を K_0 の完全分岐拡大で拡大次数が $0<e<\infty$ なものとする. K の代数的閉体 $\overline{K}$ を固定して $G_K:=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とする. v を $v(p)=1$ として正規化された $\overline{K}$ の付置として, $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ を $\overline{K}$ の整数環とする.

次に, p 進周期環を導入する. まず最も基本的な環として $R:=\varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p$ と定める. ここで逆極限は

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}/p \xleftarrow{\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p \xleftarrow{\mathrm{Frob}} \dots$$

という射影系でとっていて, Frob は p 乗写像である. 環 R の元 $x:=(x_n)_{n\geq 0}\in R$ に対して $v_R(x):=v(x_0)$ とおくとこれは環 R の付置を与えている. さらに, R は付置 v_R に関して完備であることがわかる. $R\to\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\cong\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}/p$ という第一項への射影があるので $\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ が完全 (つまり p 乗写像が同型である) で完備であることから Witt 環の普遍性を用いることにより全射 $\theta: W(R)\to\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ が導かれる. 今後 $W(R)$ には R から誘導される積位相を入れて考える. R が完備だったので $W(R)$ も完備である.

次に u を不定元として, $\mathfrak{S}:=W[[u]]$ と定める. $\mathfrak{S}$ に Frobenius 作用 φ を, W には自然な Frobenius 作用として作用し, $\varphi(u):=u^p$ を満たすような, (u) 進位相で連続な唯一の準同型として定める. また, 素元 $\pi\in K$ と, $n\in\mathbb{N}$ に対し $\pi_{n+1}^p=\pi_n$ で $\pi_0:=\pi$ となる $\pi_n\in\overline{K}$ を固定する. また, $E(u)\in K_0[u]$ を π の Eisenstein 多項式とする. π_n は R の元 $\underline{\pi}:=(\pi_n)_{n\geq 0}$ を定義することがわかる. また $[\underline{\pi}]\in W(R)$ を $\underline{\pi}$ の Teichmüller 代表元とする. さて, $W[u]$ の $W(R)$ への埋め込みを $u\mapsto[\underline{\pi}]$ で定める. $v([\underline{\pi}])=1>0$ であり, $W(R)$ は完備なのでこの写像は連続写像 $\mathfrak{S}\hookrightarrow W(R)$ に一意に延長されることがわかる. 今後はこの埋め込みによって $\mathfrak{S}$ は $W(R)$ の部分環とみなす. この埋め込みに対して Frobenius 自己準同型を保つことに注意する. 先ほど導入した準同型 θ の $\mathfrak{S}$ への制限 $\theta|_{\mathfrak{S}}:\mathfrak{S}\to\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ は u を π に送る準同型であり, とくに $\theta|_{\mathfrak{S}}$ の像は $\mathcal{O}_K$ に一致する.

$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を $\mathfrak{S}[1/u]$ の p 進完備化とする. すると $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ は素元が p の完備離散付置環になり剰余体は $k((u))$ であることがわかる. そこでその分数体 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]=\mathrm{Fr}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ を $\mathcal{E}$ とおく. すると $\mathfrak{S}\hookrightarrow W(R)$ という包含写像は $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hookrightarrow W(\mathrm{Fr}(R))$ という包含写像に延長される. $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}\subset W(\mathrm{Fr}(R))[1/p]$ を $\mathcal{E}$ の $W(\mathrm{Fr}(R))[1/p]$ のなかでの最大不分岐拡大とする. Fontaine の結果から $\mathrm{Fr}(R)$ は代数的閉体なので $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ は $k((u))$ の分離閉包であることがわかる. ここで $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ は $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ の整数環とした. $\bar{\mathbb{Q}}_p$ が完備でないのと同様に一般に $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ は完備でない. そこで $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の p 進完備化とし, $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ をその商体とする. 最後に $\mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}:=\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}\cap W(R)\subset W(\mathrm{Fr}(R))$ として定義する. ここで定義した環はすべて $W(\mathrm{Fr}(R))[1/p]$ の部分環とみなし, $W(\mathrm{Fr}(R))[1/p]$ の Frobenius 自己準同型と両立する Frobenius 自己準同型 φ を持ち合わせていることに注意する.

$n\geq 0$ に対して $K_n:=K(\pi_n)$ として定義し, $K_\infty:=\bigcup_{n\geq 0}K_n$, $G_{K_\infty}:=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ とおく. G_{K_∞} は $\mathfrak{S}$ を固定するので $\mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}$ や $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ に作用することがわかる.

1.2 次にこの章で最も重要となってくる概念である E-高さが有限な表現を定義する.

1.2.1 定義. — (i) V を階数 d の有限自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で G_{K_∞} の連続作用が与えられているものとする. このとき $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-加群 M を $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V^*)^{G_{K_\infty}}$ とおく. M には $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ から誘導された φ-作用があることに注意する. ここで V^* は V の $\mathbb{Z}_p$ 双対を表している. このときある整数 $h \geq 0$ に対して V (resp. M) の E-高さが h 以下であるとは $\mathfrak{M} \subset M$ が存在して

1. $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{S}$ 上階数 d の有限自由加群で φ の作用で安定である.
2. $\mathfrak{M}$ は $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 上 M を生成する.
3. 1. によって $\varphi^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ が誘導されるが, これの余核は $E(u)^h$ で消される.

という条件が満たされることをいう. このような $\mathfrak{M} \subset M$ を, M の E-高さが h 以下の $\mathfrak{S}$-格子という.

(ii) V を有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間とし, G_{K_∞} の連続作用が与えられたものとする. V の E-高さが h 以下であるとは V の G_{K_∞}-作用で安定な $\mathbb{Z}_p$-格子で E-高さが h 以下であるものが存在することである.

注. — (i) $\mathbb{Z}_p$ 上の表現については Fontaine による次の定理 [Fon] が知られている.

定理. — $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty})$ を有限 $\mathbb{Z}_p$-加群で連続な G_{K_∞}-作用が与えられているものの成す圏とし, $\Phi\mathrm{M}^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ を有限 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-加群 M で $\varphi^* M \xrightarrow{\sim} M$ という同型が与えられているものの成す圏とする. すると

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}) &\to \Phi\mathrm{M}^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} & \qquad \mathbb{V} : \Phi\mathrm{M}^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} &\to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}) \\ V &\mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{K_\infty}} & M &\mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} M)^{\varphi=1} \end{aligned}$$

によって圏の同値が与えられる. この対応において, V が階数 d の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群であれば M は階数 d の自由加群 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-加群となり, またその逆も成り立つ.

これによって上の定義に出てきた M は階数 d の自由 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-加群であることが分かる.

(ii) $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ を有限自由 $\mathfrak{S}$-加群 $\mathfrak{M}$ と, $\varphi^*\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ という $\mathfrak{S}$-線形写像で $E(u)$ の何乗かで消されるものの組の成す圏とする. また, $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ を有限自由 $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-加群 M と, $\varphi^* M \to M$ という $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-線形写像の組の成す圏とする. このとき $\mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \to \mathrm{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ という $\otimes_\mathfrak{S} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ とする関手は充満忠実であることが知られている ([Kis2]). したがって, V を階数 d の有限自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で G_{K_∞} の連続作用が与えられているものとすると, E-高さが h 以下の M の $\mathfrak{S}$-格子は存在するとすれば一意である.

(iii) V を有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間であって, 群 G_{K_∞} の連続作用が与えられたものとする. このとき V の $\mathbb{Z}_p$-格子で E-高さが h 以下であるものが存在したとすると, 任意の G_{K_∞}-作用で安定な $\mathbb{Z}_p$-格子に対して E-高さは h 以下であることが知られている.

1.3 この節の目標は次の命題を示すことである:

命題. — A を完備局所環で剰余体 $\mathbb{F}$ が $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大であるものとし, V_A を自由有限 A 加群で G_{K_∞} の連続作用が与えられているものとする. このとき A の商 $A^{\leqslant h}$ と有限 $\mathfrak{S}_{A^{\leqslant h}} := \mathfrak{S}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} A^{\leqslant h}$-加群 $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ が存在して次の条件を満たす. ここで $\widehat{\otimes}$ は完備テンソル積を表し, $\mathfrak{S}_{A^{\leqslant h}}$ は $\mathfrak{S}\otimes_{\mathbb{Z}_p} A^{\leqslant h}$ を完備化したものである.

1. $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ は $\varphi^*(\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}) \to \mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ という準同型が与えられていてその余核は $E(u)^h$ で消される.

2. $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は自由 $\mathfrak{S}_{A^{\leqslant h}}[1/p]$-加群である.

3. B を有限 $W(\mathbb{F})[1/p]$-代数としてさらに A-代数でもあるとする. このとき構造準同型 $A \to B$ が $A^{\leqslant h}$ を経由する必要十分条件は $V_B := V_A \otimes_A B$ の E-高さが有限であることである. さらに, $C \subset B$ を有限部分 $\mathbb{Z}_p$-代数として, $A^{\leqslant h} \to B$ が C を経由するとする. このとき $M_C := M \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$ の唯一の E-高さが有限な $\mathfrak{S}$-格子を $\mathfrak{M}_C$ とすると

$$\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}} \otimes_{A^{\leqslant h}} B \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_C \otimes_C B$$

という φ-作用と両立する $\mathfrak{S}_B$-加群の標準同型がある.

4. 次の標準同型が存在する:

$$V_{A^{\leqslant h}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{A^{\leqslant h}},\varphi}(\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_{A^{\leqslant h}}[1/p]).$$

この節の残りはこの命題の証明の概要を述べたいと思う.

1.4 この命題を示すために 1.2.1 で扱った $\mathbb{Z}_p$-表現より広いクラスの表現に関しても E-高さが有限という概念を拡張する. つまり:

定義. — (i) A を局所 Artin 環で剰余体が $\mathbb{F}$ とし, V_A を階数 d の自由 A 加群で連続 G_{K_∞}-作用が与えられているものとする. ここで A は $\mathbb{Z}_p$ 上有限であることに注意する. V_A^* を V_A の A-双対であるとする. $M_A := (\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_A^*)^{G_{K_\infty}}$ とおく. これは自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E},A} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$-加群で階数が d であり, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の Frobenius 自己準同型から導かれる標準写像 $\varphi^* M_A \to M_A$ は同型であることが知られている.

B を A-代数とする. このとき $M_B := M_A \otimes_A B$ とおく. すると φ は B-線形に M_B に延長される. $\mathfrak{S}_B := \mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} B$ とおく. $\mathfrak{M}_B \subset M_B$ が E-高さが h 以下の $\mathfrak{S}_B$-格子であるとは

1. $\mathfrak{M}_B$ は階数が d な**射影的**$\mathfrak{S}_B$-加群で, $\mathcal{O}_{\mathcal{E},B}$-加群として M_B を生成する.
2. $\mathfrak{M}_B$ は φ の作用で安定で, 誘導される準同型 $\varphi^*(\mathfrak{M}_B) \to \mathfrak{M}_B$ の余核は $E(u)^h$ で消される.

という条件を満たしていることである.

(ii) A-加群 B に対して $L^{\leqslant h}_{V_A}(B)$ を E-高さが h 以下の $\mathfrak{S}_B$-格子の成す集合とする. すると

$$L^{\leqslant h}_{V_A} : (A\text{-加群の成す圏}) \to (\text{集合の成す圏})$$

が関手であることが容易に確かめられる.

このように広いクラスの表現にも拡張した理由は次の表現定理を示せるためである:

1.4.1 命題. — 今までと同じ記号を用いる. このとき $L^{\leqslant h}_{V_A}$ は射影的 A-スキーム $\mathscr{L}^{\leqslant h}_{V_A}$ によって表現される. さらに, 標準的な非常に豊富な可逆層を伴っている.

証明の概略. 証明には Beauville-Lazlo の結果 [BL] を用いる. それによると $L^{\leqslant h}_{V_A}$ という関手は A 上のアファイングラスマン多様体 $\mathrm{Res}_{W(k)/\mathbb{Z}_p}\mathrm{GL}_d$ の閉 Ind-スキーム $\mathscr{L}^{\leqslant h}_{V_A}$ によって表現されることがわかる. これが実際にスキームになっていることは E-高さを抑えていることの帰結である. 非常に豊富な可逆層はアファイングラスマン多様体の標準線束の制限によって得られる. ■

このとき, $\Theta_A : L^{\leqslant h}_{V_A} \to \mathrm{Spec}(A)$ を射影的な構造射として $\underline{\mathfrak{M}}$ を $\Theta_A^*(\mathfrak{S}_A)$-加群の普遍層とする. すると V_A との関係は次のようになっている:

1.4.2 補題. — $\tilde{A} := \Theta_{A*}(\mathcal{O}_{\mathscr{L}^{\leqslant h}_{V_A}})$ とする. すると次の標準的な G_∞-同変な $\tilde{A}$-加群の同型がある:

$$V_{\tilde{A}} := V_A \otimes_A \tilde{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\tilde{A}},\varphi}(\Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}), \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_{\tilde{A}}).$$

証明. 1.2 の注 (i) によって G_{K_∞}-同変な同型 $V_{\tilde{A}}^* \xrightarrow{\sim} (M_{\tilde{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},\tilde{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}})^{\varphi=1}$ があるので双対をとって

$$V_{\tilde{A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},\tilde{A}},\varphi}(M_{\tilde{A}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}}). \tag{1.4.2.1}$$

さらに別の Fontaine の結果を用いることにより

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\tilde{A}},\varphi}(\Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}), \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_{\tilde{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\tilde{A}},\varphi}(\Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}), \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}}). \tag{1.4.2.2}$$

という同型も示すことができる. さて, $\underline{\mathfrak{M}}$ は普遍層なので $\underline{\mathfrak{M}} \otimes_{\mathfrak{S}_A} \mathcal{O}_{\mathcal{E},A} \xrightarrow{\sim} \Theta_A^*(M_A)$ となる. よって射影公式を用いることにより $\Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \xrightarrow{\sim} M_A \otimes_A \tilde{A} =: M_{\tilde{A}}$ となることが分かる. よって,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\tilde{A}},\varphi}(\Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}), \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},\tilde{A}},\varphi}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \Theta_{A*}(\underline{\mathfrak{M}}), \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},\tilde{A}},\varphi}(M_{\tilde{A}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}},\tilde{A}}). \tag{1.4.2.3}$$

(1.4.2.1), (1.4.2.2), (1.4.2.3) をあわせて補題を得る. ■

1.5　次に A を Noether 完備局所環で剰余体が $\mathbb{F}$, 極大イデアルが $\mathfrak{m}_A$ という状況を考える. V_A を階数 d の有限自由 A-加群とし G_∞ の連続作用があるものとする. V_A^* として V_A の A-双対とする. すると次の同型があることが知られている:

$$M_A := (\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}V_A^*)^{G_{K_\infty}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim(\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}V_A^*\otimes_A A/\mathfrak{m}_A^i)^{G_{K_\infty}}.$$

特に M_A は自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E},A}$-加群で階数は d であることが分かる. B を A-代数で $i>0$ が存在して $\mathfrak{m}_A^i\cdot B=0$ であったと仮定する. このとき $L_{V_A}^{\leqslant h}(B) := L_{V_{A/\mathfrak{m}_A^i}}^{\leqslant h}(B)$ として定義する. この定義が i によらないことは容易に確かめられる.

系. — 今定義した関手 $L_{V_A}^{\leqslant h}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ 上の射影スキーム $\mathscr{L}_{V_A}^{\leqslant h}$ で表現される.

証明. 1.4.1 によって A 上の非常に豊富な可逆層を伴った**形式的**スキームによって表現されていることが分かる. よって EGA III の代数化定理からこの形式的スキームは代数化ができ, それが求めるものである. ■

1.6　次に一般ファイバー上の $\Theta_A:\mathscr{L}_A^{\leqslant h}\to\mathrm{Spec}(A)$ の像を記述する次の命題を示す:

命題. — A と V_A を *1.5* と同じようにする. このとき

1. $\Theta_A:\mathscr{L}_A^{\leqslant h}\to\mathrm{Spec}(A)$ は $\times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)}\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ をすると閉移入になる.
2. $A^{\leqslant h}$ を Θ_A のスキームの意味での像に対応する A の商とする. このとき任意の有限 $W(\mathbb{F})[1/p]$-代数 B で A-代数構造が与えられているもの対して, $A\to B$ が $A^{\leqslant h}$ を経由することと $V_B := V_A\otimes_{\mathbb{Z}_p}B$ が E-高さが h 以下であることとは同値である.

証明の概略. B を有限局所 $W(\mathbb{F})[1/p]$-代数として, 剰余体を E, 極大イデアルを $\mathfrak{m}_B$ とする. B は Artin 環になっていて, E は $\mathbb{Q}_p$ のの有限分離拡大となっているので特にエタールである. よってエタール射の特徴付けにより B には自然な E-代数の構造が入る. $B\to E$ を自然な準同型とするときこの準同型による E の整数環 $\mathcal{O}_E$ の逆像を B° と書く. B° には $\mathcal{O}_E$-代数構造が入っている. Int_B を B° の有限生成部分 $\mathcal{O}_E$-代数の成す集合とする. $\mathfrak{m}_B$ は冪零になっているので任意の Int_B の元は $\mathcal{O}_E$ 上有限であり, Int_B のすべての元の合併は B° になることに注意する.

$A\to B$ が与えられたと仮定する. すると $A\to B^\circ$ と分解することが分かるので, $C\in\mathrm{Int}_B$ が存在して $A\to C$ を誘導することがわかる. 固有性の付置判定を用いることによって同じように $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ の B 値点はある $C\in\mathrm{Int}_B$ があって C 値点から誘導されていることがいえる.

C を有限平坦 $W(\mathbb{F})$-代数とする. すると, $\mathbb{Z}_p$ 上の表現の E-高さ有限な格子の唯一性から $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}(C)\to(\mathrm{Spec}A)(C)$ は単射であることが分かる. よって前述の対応によって任意の $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上の有限局所代数 B に対して $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}(B)\to(\mathrm{Spec}A)(B)$ が単射であることが分かる. A は完備で剰余体が $\mathbb{F}$ であったことから $s\in\mathrm{Spec}(A[1/p])$ を閉点とするとその剰余体 $\kappa(s)$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である. よって B として $\kappa(s)$ の有限次拡大を考えることによって $\Theta_A^{-1}(s)$ は有限集合であることが分かり全て $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ の閉点である. A は Hensel 環であることから $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}=\mathscr{L}'\amalg\coprod_x\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{x,\mathscr{L}})$ (x は $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ の閉点をわたっている. $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ は準コンパクトなので有限集合であることに注意する.) となる連結成分 $\mathscr{L}'\subset\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ がある. $\mathscr{L}'\to\mathrm{Spec}(A[1/p])$ は固有射であり像は $\mathrm{Spec}(A[1/p])\setminus\{$ 閉点 $\}$ となるが $\mathrm{Spec}(A[1/p])$ は連結なので $\mathscr{L}'=\emptyset$ であることが分かる. よって $\Theta_A[1/p]$ は準有限射であることが分かる. また固有射でもあるので有限射であることが分かる. 次に上の単射で $B=E[\epsilon]/(\epsilon^2)$ を考えることにより $\Theta_A[1/p]$ は閉移入であることが分かる. 実際 $R\to R'$ を環の準同型で R' が R 上有限として $\mathrm{Spec}(R')\to\mathrm{Spec}(R)$ が閉点において単射とする. 任意のの $\mathrm{Spec}(R)$ の閉点の剰余体の有限次拡大体 K に対して $\mathrm{Spec}(R')(K[\epsilon]/(\epsilon^2))\to\mathrm{Spec}(R)(K[\epsilon]/(\epsilon^2))$ が単射なら $R\to R'$ は全射である. (証明は容易に $R'=R[y]/(f(y))$ ($f(y)$ は R 上モニックな多項式) と書ける場合に帰着できこの場合は f が一次元にならなければならないことが示せ, $R=R'$ となることが分かる.) よって命題の 1. が示された.

次に 2. を示す. B は Artin 環なので局所環の直積と同型なため B は局所環と仮定して証明すれば十分である. $A\to B$ が $A^{\leqslant h}$ を経由していたとする. このとき V_B の E-高さが有限で h 以下であることは二段落目

の付置判定を用いた方法を用いることにより容易に示すことができる. 反対を示す. そのため V_B を E-高さが有限であると仮定する. 示すべきことは $A \to C' \to B$ (都合により C でなく C' とした) という分解があって, $V_{C'}$ が E-高さが有限な ($\mathfrak{S}$-格子ではなく)$\underline{\mathfrak{S}_{C'}\text{-格子}}$ を持つことである. まず $C \in \mathrm{Int}_B$ を $A \to C \to B$ と経由しているものとする. すると唯一の E-高さが有限な $\mathfrak{S}$-格子 $\mathfrak{M}_C \subset M_C$ は $\mathfrak{S}_C$-加群で $\mathfrak{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は $\mathfrak{S}_C[1/p]$ 上有限で射影的であることを示すことができる (この事実を示すのは議論が必要である).

次に, $C \to \mathcal{O}_E$ という射影があるので, $M_C \to M_{\mathcal{O}_E}$ が考えられ $\mathfrak{M}'_{\mathcal{O}_E}$ を $\mathfrak{M}_C$ の像として定義し,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}'_{\mathcal{O}_E} \cap M'_{\mathcal{O}_E}[1/p] \subset \mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$$

として定義する. すると $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ は E-高さが有限な $\mathfrak{S}$-格子であり, $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ は $\mathfrak{S}_{\mathcal{O}_E}$ 上有限自由であることが分かる. そこで $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ の基底をひとつ取りそれを $\mathfrak{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の $\mathfrak{S}_C[1/p]$ 上の基底 $\mathbf{b}$ に持ち上げる. この基底における φ の行列の成分は $B^\circ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{S}$ に入っていることが分かるので $C' \in \mathrm{Int}_B$ を C を含みそれらの成分が $\mathfrak{S}_{C'}$ に含まれるものとしてとってくる. このとき $\mathfrak{M}_{C'}$ を $\mathbf{b}$ で張られる $\mathfrak{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の $\mathfrak{S}_{C'}$-加群とすればこれが題意を満たすことを示すことができ証明が終了する. ■

命題 *1.3* の証明の概略. 前の命題によって $A^{\leqslant h}$ は構成されたのであとは $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ を構成すればよい. $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ の構成はまず A が Artin 環のときに表現するスキームを構成して, A が完備のときはその極限をとり形式的スキームにし, それを代数化した. この $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ の構成にはまず $\mathscr{L}_A^{\leqslant h}$ の上に $\Theta_A^*(\mathfrak{S}_A)$-加群の層 $\underline{\mathfrak{M}}$ があったのでこれの極限をとり形式的スキーム上に対応する層ができる. これを適当に代数化したものが求めるものである. あとはここで構成したものが (1) から (4) の性質を満たすことを示さなくてはならないが (1), (2) は難しくはなく (3) は直前の命題と同じ議論を用いることで示すことができる. (4) は本質的に補題 1.4.2 である. ■

2 潜在的準安定表現

2.1 まず記号を固定する. $(A^\circ, \mathfrak{m}_{A^\circ})$ を剰余体が $\mathbb{F}$ の完備局所環とその極大イデアルの組とする. ここで A° は p-捩れ部分がないと仮定し, $A := A^\circ[1/p]$ とおく. また完備局所 Noether $\mathbb{Z}_p$-代数 R に対して R_{A° を $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^\circ$ の $\mathfrak{m}_{A^\circ}$-進完備化とし, $R_A := R_{A^\circ}[1/p]$ とおく. この記号を用いると $\mathfrak{S}_A$ には自然に A-線形な自己準同型 φ が引き起こされ, また $\mathfrak{S}_A/u\mathfrak{S}_A \xrightarrow{\sim} W_A$ という同型がある.

次にこの節で必要な記号を導入する. $\mathcal{O}$ を K_0 上の半径 1 のリジッド解析的な開円盤上の解析関数の成す環とする. つまり $\mathcal{O} = \varprojlim_n (W[[u, u^n/p]][1/p])$ である. ここも u を u^p に移す Frobenius 自己準同型 φ がある. u を u に移すことによって埋め込み $\mathfrak{S} \hookrightarrow \mathcal{O}$ が定義され, 両辺の Frobenius 自己準同型 φ は両立していることが分かる. $c_0 := E(0)$ (E は π の Eisenstein 多項式であった) とおき, $\lambda := \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n(E(u)/c_0) \in \mathcal{O}$ とおく. これが $\mathcal{O}$ に入っていることは $E(u)$ が Eisenstein 多項式であることから $|\cdot|_r$ を半径 $r > 0$ でのノルムとしたとき (つまり $|x^n|_r := r^n$), 任意の $0 < r < 1$ に対して $|\varphi^n(E(u)/c_0) - 1|_r < 1$ が成立することから分かる. また, $K_0[u]$ のイデアル $(E(u))$ による完備化を $\widehat{\mathfrak{S}}_0$ を書き, $\mathcal{O}_A := \varprojlim_n W[[u, u^n/p]]_A$ とし, $\widehat{\mathfrak{S}}_{0,A}$ を $K_0[u] \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ のイデアル $(E(u))$ での完備化とする.

次に $\mathfrak{M}_A$ という有限で階数が一定で r の射影的な $\mathfrak{S}_A$-加群と準同型 $\varphi^*\mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_A$ でその余核が $E(u)^h$ で消されるものの組が与えられたと仮定する. ここでの $\mathfrak{M}_A$ は前節で出てきた $\mathfrak{M}_{A^{\leqslant h}}$ を念頭にしている. また $\mathcal{M}_A := \mathfrak{M}_A \otimes_{\mathfrak{S}_A} \mathcal{O}$ とおき, $D_A := \mathcal{M}_A/u\mathcal{M}_A$ とおく. D_A には自然に φ という自己準同型が $\mathcal{M}_A$ の φ から誘導される. さらにこの自己準同型は同型になっている. 実際, W_A 上の φ は同型なので $\varphi^*D_A \to D_A$ が同型であることを示せばよいが, $D_A = \mathfrak{M}_A/u$ であるので $\mathrm{Coker}(\varphi^*D_A \to D_A)$ は $E(u)^h$ でも u でも消されることが分かり, よって $E(u)^h \equiv p^h \bmod u$ であることから p^h でも消されることが分かる. つまり $p^h D_A \subset \varphi^* D_A$ であるが D_A は $\mathbb{Q}_p$ 上の加群であることから $\varphi^* D_A \twoheadrightarrow D_A$ が分かる. D_A は W_A 上有限階な射影加群であることから単射性は全射性から導かれる.

2.2 補題. — φ と両立する W_A-線形な準同型 $\xi : D_A \to \mathcal{M}_A$ が唯一存在して u で還元すると恒等射になっている. さらに次が成立する*:*

(i) 誘導される写像 $D_A \otimes_A \mathcal{O} \to \mathcal{M}_A$ の余核は λ^h で消される.

(ii) $D_A \otimes_{W_A} \widehat{\mathfrak{S}}_{0,A} \to \mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} \widehat{\mathfrak{S}}_{0,A}$ の像は $\varphi^*(\mathcal{M}_A) \otimes_{\mathcal{O}_A} \widehat{\mathfrak{S}}_{0,A} \to \mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} \widehat{\mathfrak{S}}_{0,A}$ の像と一致する.

証明の概略. s_0 を射影 $\mathcal{M}_A \to D_A$ の任意の W_A-線形な切断とする. これは D_A が W_A 上射影的であることから存在することが分かる. ここで和

$$s := s_0 + \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi^{i+1} \circ s_0 \circ \varphi^{-i-1} - \varphi^i \circ s_0 \circ \varphi^{-i})$$

を考える. s が収束したとするとすぐに s が φ と両立し還元が恒等射になることが分かる. 収束性の証明は難しくないが略す. 唯一性は s' が題意を満たす射だったとすると $(s-s')(D_A)$ の u 倍写像は全射であるので 0 であることが分かる.

後半を示す. まず十分大きい n に対して以下の自然な写像が同型であるものをとってくる.

$$D_A \otimes_{W_A} W[[u/p^n]]_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} W[[u/p^n]]_A$$

両辺に φ^* をとり帰納的に定義される次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\varphi^*(D_A \otimes_{W_A} W[[u^{p^s}/p^n]]_A) \arrow[r, "\varphi^*(\xi_s)"] \arrow[d, "\sim"] & \varphi^*(\mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} W[[u^{p^s}/p^n]]_A) \arrow[d] \\
D_A \otimes_{W_A} W[[u^{p^{s+1}}/p^n]]_A \arrow[r, "\xi_{s+1}"] & \mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} W[[u^{p^{s+1}}/p^n]]_A.
\end{tikzcd}$$

すると ξ_s は $s = 0, \dots, r-1$ (r は $e < p^r/n$ となる最小の整数) に対して同型になり, $s = r$ では余核が $E(u)^h$ で消され像が $\varphi^*(\mathcal{M}_A) \to \mathcal{M}_A$ に $\otimes_{\mathcal{O}_A} W[[u, u^{p^r}/p^n]]_A$ をしたものの像と一致することが分かる. これによって (ii) が出る. また同様の議論を繰り返すことにより任意の $s \geq 0$ に対して ξ_s の余核は λ^h で消されることが分かる. ■

2.3 次に p 進表現を扱うときに出てくる p 進周期環を記号の固定もかねて復習する. R, θ などは 1.1 の記号を用いている. 定義だけでは言っていることが分かりにくいが日本語の解説 [Tsu] などもあるので詳しくはそちらを参照されたい. まず A_{cris} を $W(R)$ の $\mathrm{Ker}(\theta)$ に関する PD-包絡環 (PD-envelope) の p-進完備化として $B^+_{\mathrm{cris}} := A_{\mathrm{cris}}[1/p]$ とする. また B^+_{dR} を $W(R)[1/p]$ の $\mathrm{Ker}(\theta)$-進完備化とする. $\mathfrak{S} \hookrightarrow W(R)$ は連続的に $\mathcal{O} \hookrightarrow B^+_{\mathrm{cris}}$ に伸びることが分かる. また

$$\ell_u := \log[\underline{\pi}] := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Big(\frac{[\underline{\pi}] - \pi}{\pi} \Big)^i \in B^+_{\mathrm{dR}}$$

として定義する. $K_0[\ell_u] \subset B^+_{\mathrm{dR}}$ であることが知られていて, $K_0[\lambda_u]$ 上の作用素 N を変数 ℓ_u に関する微分として定義して, $\varphi : K_0[\ell_u] \to K_0[\ell_u]$ を $\varphi(\ell_u) = p\ell_u$ として定義する. $\sigma \in G_K$ に対して $\sigma(\ell_u) - \ell_u =: \beta(\sigma) \in B^+_{\mathrm{cris}}$ であることが分かる. $\beta(\sigma) \neq 0$ なら $\beta(\sigma)$ は B^+_{dR} の極大イデアルを生成している. さらに $B^+_{\mathrm{st}} := B^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} K_0[\ell_u]$ として定義する. この環には φ-作用 ($\varphi \otimes \varphi$ で定義) と N-作用 ($1 \otimes N$ で定義) があることが分かる.

これらの環の係数を拡張した環 $A_{\mathrm{cris},A^\circ}$, $B^+_{\mathrm{cris},A} = A_{\mathrm{cris},A}$ 等を 2.1 の約束で定義する. A_{cris} には B^+_{cris} から誘導される減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}}$ がある. $A_{\mathrm{cris},A^\circ}$ の減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris},A^\circ}$ を $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A^\circ$ の $\mathfrak{m}_{A^\circ}$- 進完備化によって定義する. また A-代数 B に対しては $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris},B} := B \otimes_{A^\circ} \mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris},A^\circ}$ として定義する. 次の補題は環論の議論なので省略する.

2.3.1 補題. — M を A°-加群として $x \in A_{\mathrm{cris},A^\circ} \otimes_{A^\circ} M$ を任意に取る. すると M の部分 A°-加群 N で $x \in A_{\mathrm{cris},A^\circ} \otimes_{A^\circ} N$ となっているものの集合は最小元 $N(x)$ を持つ.

2.4 さて,V_{A° を有限自由 A°-加群で階数を r として G_K の連続作用が与えられているとする. すると前節の結果より V_{A° に対して $(A^\circ)^{\leqslant h}$ が定義される. ここでは $(A^\circ)^{\leqslant h}=A^\circ$ と仮定する. このとき $\mathfrak{M}_{A^\circ}$ という有限 $\mathfrak{S}_{A^\circ}$-加群が定義されるが $\mathfrak{M}_A:=\mathfrak{M}_{A^\circ}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ とおく. すると 2 より $\mathfrak{M}_A$ は $\mathfrak{S}_A$ 上自由であることが分かる. また $V_A:=V_{A^\circ}\otimes_{A^\circ}A$ とおく. すると 4 により G_{K_∞}-同変 (G_K-同変ではない) な同型

$$V_A \xrightarrow[\iota]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_A,\varphi}(\mathfrak{M}_A,\mathfrak{S}_A^{\mathrm{ur}})$$

が存在することが分かる. 双対をとることによって

$$\iota^\vee:\mathfrak{M}_A\to\mathrm{Hom}_A(V_A,\mathfrak{S}_A^{\mathrm{ur}})$$

という φ と両立する G_{K_∞}-同変な $\mathfrak{S}_A$-準同型を得る. これを用いて

$$D_A\xrightarrow{\xi}\mathcal{M}_A\xrightarrow{\iota^\vee\otimes\mathrm{id}}\mathrm{Hom}_A(V_A,\mathfrak{S}_A^{\mathrm{ur}})\otimes_{\mathfrak{S}_A}\mathcal{O}_A\to\mathrm{Hom}_A(V_A,B^+_{\mathrm{cris},A}) \tag{2.4.0.1}$$

という φ と両立する G_{K_∞}-同変な準同型を得る. ここで二番目の準同型は $\iota^\vee$ に $\mathcal{O}_A$ をテンソルしたもので, 三番目は $\mathfrak{S}_A^{\mathrm{ur}}\hookrightarrow W(R)\to B^+_{\mathrm{cris}}$ と $\mathcal{O}\hookrightarrow B^+_{\mathrm{cris}}$ によって得られる準同型であって, 左辺に $G_{K\infty}$ は自明に作用し, 右辺に $\sigma\in G_{K_\infty}$ は $f\mapsto\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$ と作用する. B を A-代数とすると (2.4.0.1) に $B^+_{\mathrm{cris},B}$ をテンソルすることによって G_{K_∞}-同変な $B^+_{\mathrm{cris},B}$-線形な写像

$$\xi_1:D_B\otimes_{W_B}B^+_{\mathrm{cris},B}\to\mathrm{Hom}_A(V_A,B^+_{\mathrm{cris},A})\otimes_A B=\mathrm{Hom}_B(V_B,B^+_{\mathrm{cris},B})$$

を得る. ここで右辺に関して $\sigma\in G_K$ に対しても $f\mapsto\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$ と定義しても意味を持つので, このようにして G_K-作用に拡張する. 左辺では $\mathfrak{M}_A$ を経由してしまっているので G_K-作用の情報は失っていることに注意する. そこで W_B-線形写像 $N:D_B\to D_B$ で $p\varphi N=N\varphi$ を満たすものが与えられたと仮定する. すると N は冪零である. そのとき $\sigma\in G_K$, $d\otimes b\in D_B\otimes_{W_B}B^+_{\mathrm{cris},B}$ に対して

$$\sigma(d\otimes b):=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{N^i(d)}{i!}\otimes\beta(\sigma)^i\Big)\sigma(b)=\exp(N\otimes\beta(\sigma))\cdot d\otimes\sigma(b) \tag{2.4.0.2}$$

として $D_B\otimes_{W_B}B^+_{\mathrm{cris},B}$ への作用を定義する. $\varphi(\beta(\sigma))=p\beta(\sigma)$ となっていることからこの G_K-作用と φ は可換であることが分かる. ここでの G_K-作用の定義は一見何をやっているかわからないが V_B が安定表現のとき上の写像によく似た写像を別の方法で構成することができ, その写像が G_K-作用で両立するための G_K-作用の定義のやり方なのである.

さて, $D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]$ を考える. この上には $N\otimes1+1\otimes N$ という作用があるが記号の乱用でこれも N と表記する.

$$\zeta:(D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u])^{N=0}\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]\to D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]$$

という自然な写像がある. 左辺に N の作用を $1\otimes N$ として定めるとこれは N の作用で両立する写像であることが分かる. $\zeta(x)=0$ で $N^{n-1}(x)\neq0$ かつ $N^n(x)=0$ $(n>0)$ だったとすると $N^{n-1}(\zeta(x))=\zeta(N^{n-1}(x))=0$ となる. $N(y)=0$ なら $y=y'\otimes1$ となる $y'\in(D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u])^{N=0}$ が存在するのでこれはありえないことが分かり, ζ は単射であることが分かる. さらに ζ は全射でもある. 実際 $d\in D_B$ に対して $N^{n-1}(d)\neq0$ で $N^n(d)=0$ という n をとると $n=1$ の場合は $d\otimes1\in\mathrm{Im}(\zeta)$ は自明である. また一般の場合は $N(\exp(-N\otimes\ell_u)\cdot d)=0$ であり, $d-\exp(-N\otimes\ell_u)d\in\ell_u\cdot(D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u])^{N^{n-1}=0}$ となることが確かめられるので帰納法を用いて全射であることが示される. また写像

$$\zeta':(D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u])^{N=0}\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]\xrightarrow{(\ell_u\mapsto0)\otimes1}D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]$$

を考えると逆写像が $d\mapsto\exp(-N\otimes\ell_u)\cdot d$ と与えられ, 同型である. そこでこの二つの同型を合成して同型

$$\xi_2:D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]\xleftarrow[\sim]{\zeta}(D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u])^{N=0}\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]\xrightarrow[\sim]{\zeta'}D_B\otimes_{K_0}K_0[\ell_u]$$

を定義する. さらに, ξ_2 に $\otimes_{W_B} B^+_{\mathrm{cris},B}$ したものと ξ_1 に $\otimes_{K_0} K_0[\ell_u]$ したものを合成して

$$\xi_3 : D_B \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \xrightarrow{\xi_2} D_B \otimes_{W_B} B^+_{\mathrm{st},B} \xrightarrow{\xi_1} \mathrm{Hom}_B(V_B, B) \otimes_B B^+_{\mathrm{st},B}$$

と定義する. ξ_3 の左辺に $\sigma \in G_K$ の作用を $\mathrm{id} \otimes \sigma$ として定めると ξ_1 が G_K-同変であることと ξ_3 が G_K-同変であることが同値であることが分かる. まず次の補題を示す.

2.4.1 補題. — ξ_1 と ξ_3 は単射でその余核は B 上平坦である.

証明の概略. $B = A$ の時に示せば余核が平坦になることから一般の B に関しても従う. よって $B = A$ として ξ_1 に関する主張を示せば十分である. A_{cris} の環論的性質を用いることによって A° が $\mathbb{Z}_p$ 上有限平坦の時に還元することができる. $\iota^\vee$ から導かれる次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_A \otimes_{\mathfrak{S}_A} \mathfrak{M}_A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(V_A, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur},A^\circ}}[1/p] \otimes_{\mathfrak{S}_A} \mathfrak{M}_A & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_A(V_A, \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur},A^\circ}}[1/p]). \end{array}$$

ここで下の水平射の同型は 1.5 から分かり, また左の垂直な射は A° が $\mathbb{Z}_p$ 上平坦であることから単射である事が分かる. よって上の垂直な射は単射であり, 二つの加群は $\mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_A$ 上有限自由であることが分かり, $\otimes_{\mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}} B^+_{\mathrm{cris}}$ をしても単射性が保たれることから

$$\mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} B^+_{\mathrm{cris},A} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(V_A, B^+_{\mathrm{cris},A})$$

が分かる. さて,

$$D_A \otimes_{W_A} B^+_{\mathrm{cris},A} \xrightarrow{\xi \otimes 1} \mathcal{M}_A \otimes_{\mathcal{O}_A} B^+_{\mathrm{cris},A}$$

を考える. 両辺とも $B^+_{\mathrm{cris},A}$ 上自由で同じ階数なので任意に基底を固定することで行列式が考えられる. すると補題 2.2 からこの行列式は $E([\underline{\pi}])^s$ を割ることが分かる. 一方 $E([\underline{\pi}])$ は B^+_{cris} の中で零因子ではないことが示せるので補題の単射性が従う. 平坦性はこの単射性と A_{cris} の環論を用いて示される. ■

2.4.2 命題. — A-代数 B に対して W_B-線形写像 $N : D_B \to D_B$ で $p\varphi N = N\varphi$ を満たし, さらにこの N から定まる G_K-作用に対して ξ_1 が G_K-同変なものを対応付ける関手は A の商環 A^{st} で表現される.

証明の概略. A-代数 B に対しててて W_B-線形写像 $N : D_B \to D_B$ で $p\varphi N = N\varphi$ を満たすものを対応させる関手は A 上有限生成な代数 A^N で表現される. 実際 $A^N := \mathrm{Ker}(p\varphi N - N\varphi : \mathrm{End}_A(D_A) \to \mathrm{End}_A(D_A))$ とすればこれが $\mathrm{End}_A(D_A)$ の部分環になっていることがすぐ分かりこれで表現されていることが分かる.

$d \in D_{A^N}$ と $\sigma \in G_K$ に対して

$$\delta_\sigma(d) := \xi_{1,A^N}(\sigma(d)) - \sigma(\xi_{1,A^N}(d))$$

として定義する. $\mathrm{Hom}_{A^N}(V_{A^N}, B^+_{\mathrm{cris},A^N})$ の B^+_{cris,A^N}-加群としての基底を固定して $\delta_\sigma(d)$ のこの基底に関する表示を $(x_1, \ldots, x_r)$ とする. 補題 2.3.1 を $M = A^N$ として適用することにより部分 A°-加群 $N(x_i) \subset A^N$ が定義される. $I_{\sigma,d}$ を $N(x_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ で生成される A^N のイデアルとする. そこで $A^{\mathrm{st}} := A^N / \sum_{\sigma \in G_K, d \in D_{A^N}} I_{\sigma,d}$ とおく. これが命題の条件を満たすことを示す.

まず, 定義より A^{st} が命題の関手を表現していることは容易に確かめられるのでここでは A^{st} が A の商になっていることのみを示す. そのためにはスキームの射として $\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{st}}) \to \mathrm{Spec}(A)$ が単射であることと固有射であることを示せばよい.

単射性を示すためには A-加群 B をとって $N, N' : D_B \to D_B$ で条件を満たすものをとると $N = N'$ であることを示せばよい. 補題 2.4.1 より ξ_1 は単射なので $D_B \otimes_{W_B} B^+_{\mathrm{cris},B}$ の N と N' から誘導される G_K-作用は一致していることが分かる. よって作用の定義から任意の $d \in D_B$ と $\sigma \in G_k$ に対して

$$d = \exp((N - N')\beta(\sigma))d \in D_B \otimes_{W_B} B^+_{\mathrm{cris},B}$$

であることが分かる. $\beta(\sigma) \in \mathrm{Fil}^1 B^+_{\mathrm{cris}}$ となっているので exp の定義より $(N-N')(d)\beta(\sigma) \equiv 0 \bmod \mathrm{Fil}^2 B^+_{\mathrm{cris},B}$ となることが分かる. $\sigma \notin G_{K_\infty}$ なら $\beta(\sigma) \notin \mathrm{Fil}^2 B^+_{\mathrm{cris},B}$ であることが示せるので $N = N'$ が従う.

固有射であることを示すためには付置判定法を用いればよい. この場合は環論を用いた議論が単射性を示すときより難しくなるが方針は明確なので省略する. ■

2.5 次に進む前に簡単に p 進表現の言葉の復習をしておく. V を $\mathbb{Q}_p$ 上有限な線形空間で G_K の連続作用が与えられているものとする. このとき V が (Hodge-Tate 重さが ≥ 0 の) de Rham 表現とは

$$\dim_K(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{dR}})^{G_K} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が成立していることである. 左辺を $\dim_{K_0}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{cris}})^{G_K}$ (resp. $\dim_{K_0}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{st}})^{G_K}$) に変えたとき等号が成立している場合 V は (Hodge-Tate 重さが ≥ 0 の) crystalline 表現 (resp. 準安定表現) という. 一般の表現に対して

$$\dim_{K_0}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{cris}})^{G_K} \leq \dim_{K_0}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{st}})^{G_K} \leq \dim_K(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{dR}})^{G_K} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

が成立することが知られているので cristalline 表現なら準安定表現であり, 準安定表現なら de Rham 表現であることが分かる.

V を de Rham 表現としたとき V の Hodge-Tate 重さとは $\mathrm{gr}^i((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{\mathrm{dR}})^{G_K})$ が 0 でない i のことである. この場合 Hodge-Tate 重さは 0 以上となっている. Hodge-Tate 重さが正とはは限らない時もこれらの表現を定義することはできるが, この論文の主定理の証明では使わないのでここでは復習をしない.

次に, V に対してフィルター付き (φ, N)-加群 $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{st})^{G_K}$ を対応させる関手を D_{st} と書く. このときフィルター付き (φ, N)-加群が許容的であるとは, このフィルター付き (φ, N)-加群が準安定表現に D_{st} を施したときの像に同型であることをいう. また, 弱許容フィルター付き (φ, N)-加群も定義したいが比較的大変なので詳しくは省略する. ただ, 許容的ということと同値であることが知られているので許容的なものだと思っておいて差し支えない. 実際の同値性の証明はいくつかあるが [Kis2], または本報告集の望月氏による「整 p 進 Hodge 理論入門」を参照するとよい. これらには次の小節 2.5.1 の詳しい解説も書かれている.

2.5.1 まず $A^\circ = (A^\circ)^{\leqslant h}$ を仮定して, A^{st} が V_A が Hodge-Tate 重さ $[0, h]$ の準安定表現となっているものを対応づける関手を表現していることを示す. そのために弱許容フィルター付き (φ, N)-加群の理論と有限 E-高さの $\mathfrak{S}$-格子の理論の関係を復習する.

D として弱許容フィルター付き (φ, N)-加群で $\mathrm{Fil}^0 D = D$ で $\mathrm{Fil}^{h+1} D = 0$ となるものをとる. すると有限自由 $\mathfrak{S}[1/p]$-加群 $\mathfrak{M}$ で $\varphi^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ が与えられてその余核が $E(u)^h$ で消されるもので以下の性質を満たすものを関手的に構成できる.

1. $\mathfrak{M}/u\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} D$ という標準的な φ と両立する同型がある.

2. $\mathfrak{M}$ の φ で安定な部分 $\mathfrak{S}$-加群 $\mathfrak{M}^\circ$ で $\mathfrak{M}$ を張るものがあって $1 \otimes \varphi : \varphi^*(\mathfrak{M}^\circ) \to \mathfrak{M}^\circ$ の余核は $E(u)^h$ で消される.

このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}[1/p],\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}[1/p]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B^+_{\mathrm{st}}) \tag{2.5.1.1}$$

という同型が存在する. この同型写像の構成を軽く復習する. まず $g : D \to B^+_{\mathrm{cris}}$ が与えられると,

$$g' : D \hookrightarrow D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \xrightarrow{\xi_2} D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \xrightarrow{g \otimes 1} B^+_{\mathrm{st}}$$

ができる. これは φ と N で両立していることがすぐ分かる. g に対して g' を対応させることにより

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi}(D, B^+_{\mathrm{cris}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B^+_{\mathrm{st}}) \tag{2.5.1.2}$$

という写像が構成される. このとき $\sigma \in G_K$ と $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi}(D, B^+_{\mathrm{cris}})$ に対して

$$\sigma(g) := \sigma \circ g \circ \exp^{-1}(N \otimes (\beta(\sigma)))$$

と定めれば次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \arrow[r, "\xi_2"] \arrow[d, "\ell_u \mapsto \sigma(\ell_u)"] & D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \arrow[r, "g\otimes 1"] \arrow[d, "d\otimes\ell_u \mapsto \exp(N\otimes(\sigma(\ell_u)-\ell_u))\otimes\sigma(\ell_u)"] & B^+_{\mathrm{st}} \arrow[d, "\sigma"] \\ D \arrow[r] & D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \arrow[r, "\xi_2"] & D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u] \arrow[r, "\sigma(g)\otimes 1"'] & B^+_{\mathrm{st}}. \end{tikzcd}$$

つまり (2.5.1.2) は左辺に対して先ほどのように定めた G_K-作用に関して両立していることが分かる. さらにこの写像は同型である. 実際 g' が与えられたとき

$$D \xrightarrow{\sim} (D \otimes_{K_0} K_0[\ell_u])^{N=0} \xrightarrow{g'\otimes 1} (B^+_{\mathrm{st}})^{N=0} = B^+_{\mathrm{cris}}$$

がを考えればこれが g を与えることが分かりこの対応が逆写像であることがすぐ分かる.

さて, $\mathfrak{M} \to \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}[1/p]$ が与えられたとき $\otimes_{\mathfrak{S}[1/p]}\mathcal{O}$ をして左から ξ を, 右から包含写像 $\mathcal{O} \to B^+_{\mathrm{cris}}$ を合成することによって

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}[1/p],\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}[1/p]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi}(D, B^+_{\mathrm{cris}})$$

が構成される. 実はこれは同型になっていることが示せる. この写像と (2.5.1.2) を合成することによって (2.5.1.1) を構成することができる.

2.5.2 命題. — $A^\circ = (A^\circ)^{\leqslant h}$ を仮定する. B を有限 $\mathbb{Q}_p$-代数として $\zeta : A \to B$ を $\mathbb{Q}_p$-代数の準同型とし, $V_B := V_A \otimes_A B$ とおく. すると ζ が A^{st} を経由することと V_B が $\mathbb{Q}_p$-表現としてみたとき準安定表現であることとは同値である.

証明. ζ が A^{st} を経由していたとする. すると ξ_3 は G_K-作用で両立しているて補題 2.4.1 より単射である. よって

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V_B = \dim_{K_0}(D_B) = \dim_{K_0}(D_B \otimes_{K_0} K_0[\ell_u]) \leq \dim_{K_0}(V_B^* \otimes_B B^+_{\mathrm{st},B})^{G_K}$$

であることが分かる. ここで V_B^* は双対を表す. よって V_B が準安定表現であることが分かる.

反対に V_B が準安定表現だったとする. このとき

$$\tilde{D}_B := (\mathrm{Hom}_B(V_B, B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B))^{G_K}$$

とおく. V_B が準安定表現なのでこれは弱許容フィルター付き (φ, N)-加群になっていることが分かる. $\tilde{\mathfrak{M}}_B$ を 2.1 で構成した $\tilde{D}_B$ に付随する $\mathfrak{S}[1/p]$-加群とする. 一方 $\mathfrak{M}_B := \mathfrak{M}_A \otimes_A B$ と置く. 実はこの二つの加群には自然な同型がある. それを見るために次の G_{K_∞}-同変な同型を考える:

$$\kappa : V_B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{B,\mathrm{Fil},\varphi,N}(\tilde{D}_B, B^+_{\mathrm{st},B}) \xrightarrow[(2.5.1.1)]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_B,\varphi}(\tilde{\mathfrak{M}}_B, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_B).$$

$\tilde{M}_B := \tilde{\mathfrak{M}}_B \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{E}$ と置く. すると

$$V_B \underset{\kappa}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_B,\varphi}(\tilde{\mathfrak{M}}_B, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}_B) \xrightarrow[(1.4.2.2)]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_B,\varphi}(\tilde{\mathfrak{M}}_B, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}},B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_B,\varphi}(\tilde{M}_B, \widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}_B})$$

よって $\tilde{M}_B \cong (\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_B^*)^{G_{K_\infty}} \cong M_B$ となることが分かる. $\tilde{\mathfrak{M}}_B \hookrightarrow \tilde{M}_B$ となっているのでこの同型を通じて $\mathfrak{M}_B$ も $\tilde{\mathfrak{M}}_B$ も M_B の部分 $\mathfrak{S}_B$-加群と思うことができる. さて, 命題 1.3(3) と 2.5.1(2) より両者とも有限 E-高さの格子を持つことが分かる. よって注 1.2 の充満忠実性により $\mathfrak{M}_B = \tilde{\mathfrak{M}}_B$ が M_B のなかで成立し

ていることが分かる. よって 2.5.1(1) により $D_B := \mathfrak{M}_B/u\mathfrak{M}_B$ と $\tilde{D}_B$ を同一視することができ, この同一視によって D_B に N の作用を $\tilde{D}_B$ の N より定義することができる. ここで次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
V_B \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_B,\varphi}(\tilde{\mathfrak{M}}_B, \mathfrak{S}_B^{\mathrm{ur}}[1/p]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris},B},\mathrm{Fil},\varphi}(\tilde{D}_B \otimes_B B^+_{\mathrm{cris},B}, B^+_{\mathrm{cris},B}) \arrow[d] \\
V_B \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_B,\varphi}(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{S}_B^{\mathrm{ur}}[1/p]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{B^+_{\mathrm{cris},B}}(D_B \otimes_B B^+_{\mathrm{cris},B}, B^+_{\mathrm{cris},B})
\end{tikzcd}$$

上の行の真ん中には G_{K_∞}-作用しかないが左右には G_K-作用がある. ただし左辺の G_K-作用は (2.4.0.2) によって定めている. 定義より上の行の写像の合成は標準写像 $V_B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{B,\mathrm{Fil},\varphi,N}(\tilde{D}_B, B^+_{\mathrm{st},B})$ と (2.5.1.2) の合成に $\otimes_B B^+_{\mathrm{cris},B}$ をしたものであるから (2.5.1.2) の直後の計算により上の行の写像の合成は G_K-作用で両立していることが分かる. よって下の行の N の決め方により G_K-作用を (2.4.0.2) で定めれば G_K-作用で両立していることが分かる. 下の行の随伴を取ることにより ξ_1 が定まり G_K-作用で両立していることが分かる. よって A^{st} の定義により ζ は A^{st} を経由することが分かる. ■

2.5.3 定理. — A° を完備局所 *Noether* $W(\mathbb{F})$-代数とし, V_{A° を階数 r の有限自由 A°-加群で連続な G_K-作用が与えられているものとする. $h \geq 0$ を整数とすると $A^{\mathrm{st},h}$ という $A := A^\circ[1/p]$ の商があって次の性質を満たす*:*

1. B を有限 $\mathbb{Q}_p$-代数として $\zeta : A \to B$ を $\mathbb{Q}_p$-代数の準同型とする. すると ζ が $A^{\mathrm{st},h}$ を経由する必要十分条件は $V_B := V_A \otimes_A B$ が $\mathbb{Q}_p$-表現として *Hodge-Tate* 重さが $[0,h]$ に入っている準安定表現であることである.
2. 階数 r の射影的 $W_{A^{\mathrm{st},h}}$-加群 $D_{A^{\mathrm{st},h}}$ があって *Frobenius* 同型 φ と $W_{A^{\mathrm{st},h}}$-線形の自己準同型 N が与えられていて, ζ が $A^{\mathrm{st},h}$ を経由していれば次の φ と N の作用で両立している同型がある.

$$D_B := D_{A^{\mathrm{st},h}} \otimes_{A^{\mathrm{st},h}} B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(V_B, B^+_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K}.$$

Proof. $A^{\mathrm{st},h} := ((A^\circ)^{\leqslant h}[1/p])^{\mathrm{st}}$ として $D_{A^{\mathrm{st},h}} := \mathfrak{M}_{(A^\circ)^{\leqslant h}[1/p]}/u\mathfrak{M}_{(A^\circ)^{\leqslant h}[1/p]} \otimes A^{\mathrm{st},h}$ とする. あとはこれが条件を満たすことを見ればよい. V_B が準安定表現で Hodge-Tate 重さが $[0,h]$ に入っていたとすると V_B の E-高さが h 以下であることが知られている. このことから容易に ζ が $A^{\mathrm{st},h}$ を経由することが分かる. 反対に関しても Hodge-Tate 重さと E-高さの関係から導くことができる. (2) も難しくはない. ■

2.6 次にもう少し詳しい情報が入った $A^{\mathrm{st},h}$ の章を構成する. ここでいう詳しい情報とは準安定表現の p 進 Hodge 型のことである. つまり V_B の $\mathrm{gr}^i V_B \otimes B_{\mathrm{dR}}$ がどうなるかも考慮に入れるのである. まずこれを定義する.

2.6.1 定義. — E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大として A は E-代数の構造があると仮定する.

(1) D_E を E の有限次ベクトル空間として, $\mathrm{Fil}^i D_{E,K}$ を $D_{E,K} := D_E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ を $E \otimes_{\mathbb{Q}_p}$-加群と考えたときの減少フィルトレーションとして $[0,h]$ に入っているものとする. このとき $\mathbf{v}$ を $\{D_E, \mathrm{Fil}^i D_{E,K}\}$ という組とする.

(2) B を有限 E-代数として V_B を階数 r の有限自由 B-加群として G_K の連続作用が与えられているものとして, その表現が de Rham 表現になっていると仮定する. このとき V が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であるとは, V の Hodge-Tate 重さが $[0,h]$ のなかに入っていて $i = 0, \ldots, h$ に対して次の $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-加群の同型があることである:

$$\mathrm{gr}^i \mathrm{Hom}_B(V_B, B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^i D_{E,K} \otimes_E B.$$

この定義の下次の命題を示す:

2.6.2 命題. — $\mathbf{v}$ を上で定義したものとする. すると $A^{\mathrm{st},h}$ の商で $\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{st},h})$ の連結成分の合成に対応する環 $A^{\mathrm{st},\mathbf{v}}$ が存在して, 有限 E-代数 B で $\zeta : A \to B$ という準同型が与えられているものに対して, ζ が $A^{\mathrm{st},\mathbf{v}}$ を経由する必要十分条件は V_B が準安定表現で *Hodge* 型が $\mathbf{v}$ となることである.

証明の概略. まず $\mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A) := (1\otimes\varphi)^{-1}(E(u)^i\mathfrak{M}_A) \subset \varphi^*(\mathfrak{M}_A)$ と定める. 環論の議論をすることによって $\mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A)/(E(u)\varphi^*(\mathfrak{M}_A)\cap \mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A))$ が $K_A := W_A \otimes_{K_0} K$ 上有限で射影的であることが分かる. そこで $\mathrm{Spec}(A)$ の点 $\mathfrak{p}$ で $K_{A_\mathfrak{p}} := K_A \otimes_A A_\mathfrak{p}$-加群の同型

$$(\mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A)/(E(u)\varphi^*(\mathfrak{M}_A)\cap \mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A)))\otimes_A A_\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^i D_{E,K}\otimes_E A_\mathfrak{p} \qquad (2.6.2.1)$$

が $i = 0, 1, \ldots, h$ で成立するようにとってくる. するとこのような点の集合は $\mathrm{Spec}(A)$ の連結成分の和集合になっていることが分かる. これに対応する A の商を $A^{\mathbf{v}}$ として定め, $A^{\mathrm{st},\mathbf{v}} := A^{\mathrm{st},h}\otimes_A A^{\mathbf{v}}$ として定義する. これが求める環であることを示す. まず, B は E 上有限なので Artin 環となり局所環の積で書けることが分かる. よって B は局所環であると仮定してよい. このとき $D_B \otimes_{K_0} K$ と $\varphi^*(\mathfrak{M}_B)/E(u)\varphi^*(\mathfrak{M}_B)$ が同一視できることが分かる (補題 2.2). そこで $D_B \otimes_{K_0} K$ に

$$\mathrm{Fil}^i(D_B\otimes_{K_0} K) := (\mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A)/(E(u)\varphi^*(\mathfrak{M}_A)\cap \mathrm{Fil}^i\varphi^*(\mathfrak{M}_A)))\otimes_A B$$

として定義すると 2.5.3(2) の右辺から得られるフィルトレーションと一致していることを示すことができるので命題が示される. ここで (2.6.2.1) の同型は任意に取ってきているためこの同型は A 全体に伸びないが, B は Artin 環となっているのでこの構成で十分であることに注意する. ■

2.7 次に潜在的準安定表現に対して付加される別の情報を加えた表現環を構成する. V を $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次線形空間として G_K の連続作用が与えられているとする. このとき V が潜在的準安定表現であるとは K の有限次 Galois 拡大 L が存在して V を G_L の表現と思ったときに準安定表現であることを言う. このように定義してしまうと $\mathrm{Gal}(L/K)$ の情報はまったく無視されてしまう. それどころか L がどのように与えられるかも分からない. そこで潜在的準安定表現に対してその型を定義することによって切られてしまうはずの部分の情報を加えるのである.

まず, いつものように B を局所 $\mathbb{Q}_p$-代数として, V_B を有限自由 B-加群で G_K の連続作用があるものとする. V_B は潜在的準安定表現であると仮定する. また

$$D^*_{\mathrm{pst}}(V_B) := \varinjlim_{K'} \mathrm{Hom}_B(V_B, B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_{K'}}$$

として定める. ここで K' は K の有限次 Galois 拡大をわたっている. $\overline{K}_0$ を $\overline{K}$ の中の最大不分岐拡大として, $I_K \subset G_K$ を惰性群とする. このとき, K'_0 を K_0 上の K' に含まれる最大不分岐拡大とすると, $\mathrm{Hom}_B(V_B, B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} B)^{G_{K'}}$ は K'_0-加群で連続な $\mathrm{Gal}(K'/K)$-作用がある. よって $D^*_{\mathrm{pst}}(V_B)$ は $B\otimes_{\mathbb{Q}_p}\overline{K}_0$-加群で Frobenius 同型 φ と冪零作用 N が作用していて $p\varphi N = N\varphi$ が成立していることが分かり, さらに φ と N と可換で核が開部分群になる連続な I_K-作用があることが分かる. また K' を十分大きくすると準安定表現になることから $\dim_{\bar{K}_0} D^*_{\mathrm{pst}}(V_B) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_B$ となっていることも分かる.

このとき, まず φ が同型であることを用いると $D^*_{\mathrm{pst}}(V_B)$ が $B\otimes_{\mathbb{Q}_p}\overline{K}_0$ 上有限自由になることを示すことができる. $(B\otimes_{\mathbb{Q}_p}\overline{K}_0)^{\varphi=1} = B$ であり, I_K-作用と φ-作用が可換なことから I_K の元の跡は B に入っていることがわかる. よって, I_K の連続作用がある自由 B-加群 $\tilde{P}_B$ が存在して $D^*_{\mathrm{pst}}(V_B)$ が誘導されることが分かる. 最後に E を B の剰余体とすると核が開部分群になっている B 上の表現は E 上の表現からきているので, この場合も I_K の連続作用がある E-加群 P_B があって $\tilde{P}_B$ はこれから誘導されることが分かる.

2.7.1 定義. — $\tau : I_K \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉体 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の核が開部分群となる連続表現とする. V_B が型が τ の潜在的準安定表現であるとは上で得られた P_B が τ と同値であることをいう.

p 進 Hodge 型のときと同様に潜在的準安定表現の型 τ を固定してそれに対応する潜在的準安定表現を表現する環を構成する. そのためにまず次の命題を示す.

2.7.2 命題. — $h \geq 0$ として $A = A^{\mathrm{st},h}$ と仮定する. このとき ξ_3 は同型

$$D_A \otimes_{W_A} B_{\mathrm{st,A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(V_A, B_{\mathrm{st},A})$$

を誘導する. よって

$$D_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(V_A, B^+_{\mathrm{st},A})^{G_K}$$

となることが分かる.

2.7.3 注. — この命題の二番目の同型は 2.5.3 と同じように見えるが 2.5.3 では B が $\mathbb{Q}_p$ 上有限代数であることを仮定しているのでこの命題を出すことはできない.

証明の概略. これらの同型が $A^\circ \to A'^\circ$ という底変換に対して閉じていることは容易に分かる. また V_{A° が不分岐表現, つまり I_K の作用が自明だったときは 2.4.0.1 が同型 $D_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(V_A, W(\overline{k})_A)$ から誘導されることから示せる. ここで $\overline{k}$ は $\overline{K}$ の剰余体である.

はじめの同型を示すためには両辺が同じ階数の有限自由 $B_{\mathrm{st},A}$-加群であることから最高次の外積を取って同型であることをいえばよい (つまり行列式が可逆であることをいえばよい). V_{A° が $\bigwedge V_{A^\circ}$ となると D_A も $\bigwedge D_A$ になることは容易に分かるので V_{A° が階数 1 であると仮定してよい. すると $V_A|_{I_K}$ が局所的に Lubin-Tate 指標の I_K への制限と同値であるということが分かる. よって V_A が Lubin-Tate 指標の時と不分岐表現の時を示せばいいことが分かるが, 不分岐はもう示した. よって V_A が Lubin-Tate 指標と仮定して示せばよいがこの場合は簡単である. 二番目の同型は一番目から簡単に示すことができる. ■

2.7.4 E を $\mathbb{Q}_p$ の有限時拡大として v を p 進 Hodge 型とする. A° を Noether な完備局所 $\mathcal{O}_E$-代数として V_A を階数 r の有限自由 A°-加群で連続な G_K-作用があるものとする. また潜在的準安定表現の型

$$\tau : I_K \to \mathrm{End}_E(D_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_r(E)$$

を固定する (潜在的準安定表現の型なので核は開部分群であると仮定している). 本小論の主定理は以下である.

2.7.5 定理. — *次の性質を持つ A の商 $A^{\tau,\mathrm{v}}$ が存在する: B を有限 E-代数する. E-代数の準同型 $\zeta : A \to B$ が $A^{\tau,\mathrm{v}}$ を経由している必要十分条件は V_B が型が τ の潜在的準安定表現で p 進 Hodge 型が v であることである.*

証明. L を K の有限次 Galois 拡大として, $I_L \subset I_K$ が $\mathrm{Ker}(\tau)$ に入っていると仮定する. V_{A° を G_L に制限した表現と考えることによって, 命題 2.6.2.1 を用いて, A の商 $A^{\mathrm{pst},\mathbf{v}}$ で ζ が $A^{\mathrm{pst},\mathbf{v}}$ を経由する必要十分条件は $V_B|_{G_L}$ が準安定表現で p 進 Hodge 型が $\mathbf{v}$ であるというものが存在することが分かる. $A = A^{\mathrm{pst},\mathbf{v}}$ と仮定してよい.

L_0 を L に含まれる K_0 上の最大不分岐拡大として W_L をその整数環とする. また $W_{L,A} := (W_L)_A$ と定める. すると命題 2.7.2 により有限自由 $W_{L,A}$-加群の同型 $D_A \to \mathrm{Hom}(V_A, B^+_{\mathrm{st}})^{G_L}$ が存在していて φ の作用と両立していることが分かる. $\mathrm{Gal}(L/K)$ の $\mathrm{Hom}(V_A, B^+_{\mathrm{st}})^{G_L}$ への作用は L_0-半線形, つまり $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ と $x \in L$ に対して $\sigma(x\cdot) = \sigma(x)\sigma(\cdot)$ となるため $I_{L/K}$ の作用は L_0 線形である. さらに $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用と φ の作用は可換であるため $\sigma \in I_{L/K}$ に対して $\mathrm{tr}(\sigma) \in (W_{L,A})^{\varphi=1} = A$ となることが分かる. ここで $\mathrm{tr}(\sigma)$ は A 上の局所定数関数であったので, A の商 $A^{\tau,\mathbf{v}}$ を $\mathrm{Spec}(A)$ の $\mathrm{tr}(\sigma) = \mathrm{tr}(\tau(\sigma))$ となっている連結成分に対応する環として定義すれば, 有限群の線形表現の理論から線形表現は跡によって決まるのでこれが定理の性質を満たしていることが分かる. ■

2.8 これによって目標だった変形環が構成されたことが分かる. つまり, $V_{\mathbb{F}}$ を G_K の $\mathbb{F}$ 上の有限次元連続表現とする. $V_{\mathbb{F}}$ の自己準同型が自明なものしかなかったと仮定する. このとき $V_{\mathbb{F}}$ の変形環 $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の存在が Mazur によって示されていることを序文で述べた. これを用いることで序文でも書いた次の定理が成立する:

定理. — $a \leq b$ を整数として L/K を有限次拡大とする. このとき $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{[a,b],L}$ が存在して次の性質を持つ:

> A を上の定理のものとする. すると $x : R_{V_{\mathbb{F}}} \to A$ が $R_{V_{\mathbb{F}}}^{[a,b],L}$ を経由する必要十分条件は x に対応する表現 V_x の *Hodge-Tate* 重さが $[a,b]$ の範囲に含まれていて $V_x|_{G_L}$ が準安定表現になることである.

Proof. 実はこの定理は 2.7 の直前までで証明はできている. まず捻りを加えることによって $a \geq 0$ と仮定してもよい. $A := R_{V_{\mathbb{F}}}$ として V_A として $R_{V_{\mathbb{F}}}$ 上の普遍表現を G_L に制限したものを考える. $\mathbf{v}$ を p 進 Hodge の型とした時, 命題 2.6.2 を用いればこれに対応する商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v},L}$ が構成できる. また同じ命題によると, これは $R_{V_{\mathbb{F}}}$ のスキームとして考えた時, 連結成分の直和に対応する環であった. $\mathbf{v}$ を Hodge-Tate 重さが $[a,b]$ にはいるようなもの全部をわたらせて直積をとれば求める環ができることがわかる. ■

3 潜在的準安定変形環の局所的性質

この節では前節で構成された潜在的準安定変形環の形式的滑らか性や次元などの性質について考察する. 前節までは証明を比較的きちんと書いてきたが, この節は証明のアイディアのみ書くことにする.

3.1 まずこの節の主定理を述べる. そのためにいくつか記号を導入する. まず $V_{\mathbb{F}} := V_{A^\circ} \otimes_{A^\circ} \mathbb{F}$ として $\mathbb{F}$-基底を固定する. このとき $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ を完備局所 $\mathcal{O}_E$-代数で剰余体が $\mathbb{F}$ の成す圏上の亜群 (groupoid) で代数 B 上のファイバーは $V_{\mathbb{F}}$ の B 上の表現への変形全体とその基底の組の成す圏とする. ここで変形とは B 上有限自由な加群 V_B で G_K の連続作用が与えられていてその特殊ファイバーが作用も含めて $V_{\mathbb{F}}$ となることである. さらに $|D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}|$ を B に対して $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}(B)$ の同型類を対応させる関手とする. するとこれは局所完備 $\mathcal{O}_E$-代数 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ で表現されることが知られている. また $\mathrm{ad}D_{E,K} := \mathrm{Hom}_{E\otimes_{\mathbb{Q}_p}K}(D_{E,K}, D_{E,K})$ として定義する. ただし $D_{E,K}$ 等は 2.7 の記号を用いる. $\mathbf{v}$ は $D_{E,K}$ のフィルトレーションを定めていたので $\mathrm{ad}D_{E,K}$ にもフィルトレーションが入ることに注意する.

定理. — $\mathrm{Spec}(R_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}[1/p])^{\tau,\mathbf{v}}$ は一定次元 *(equi-dimensional)* で次元は

$$d^2 + \dim_E \mathrm{ad}D_{E,K}/\mathrm{Fil}^0\mathrm{ad}D_{E,K}$$

となり形式的滑らかな稠密な開部分スキームを持つ.

3.2 まず記号を固定する. L を K の Galois 拡大として L_0 を L の極大不分岐部分体とする. すると φ が自然に L_0 に延長されることが分かる. ここで $\mathfrak{Mod}_N$ を $\mathbb{Q}_p$-代数の圏上の亜群で $\mathbb{Q}_p$-代数 A 上のファイバーは階数が d の有限射影的 $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-加群 D_A で $G_{L/K}$ の半線形作用と冪零作用 N が与えられていて次の条件を満たすものの成す圏になるものとする. ここで条件とは $G_{L/K}$ の作用と N の作用は互いに可換で $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spce}(A)$ に対して $D_A \otimes_{(L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A)} (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A_{\mathfrak{p}})$ が $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A_{\mathfrak{p}}$ 上自由であるというものである. また $\mathfrak{Mod}_{\varphi,N}$ を同じ圏上の亜群でファイバーが $\mathfrak{Mod}_N$ の対象でさらに半線形同型 φ で $p\varphi N = N\varphi$ となるものの成す圏となっているものである. 容易に $\mathfrak{Mod}_{\varphi,N} \to \mathfrak{Mod}_N$ という自然な射があることが分かる.

次に $\mathrm{ad}D_A$ を $\mathfrak{Mod}_{\varphi,N}$ からとり, $\mathrm{ad}D_A := \mathrm{Hom}_{L_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}A}(D_A, D_A)$ として定義する. $f \in \mathrm{ad}D_A$ に対して,

$$\varphi(f) := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \qquad N(f) := N \circ f - f \circ N \qquad \gamma(f) := \gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$$

として定める. 次の反可換 (anti-commutative) 図式を考える:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} & \xrightarrow{1-\varphi} & (\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} \\
\downarrow{\scriptstyle N} & & \downarrow{\scriptstyle N} \\
(\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} & \xrightarrow[p\varphi-1]{} & (\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}}.
\end{array}$$

この図式のコホモロジーをとる. コホモロジーは次数が $0, 1, 2$ に集中するようにとる. するとこのコホモロジーが変形の障害を制御していることを示すことができる. つまり次の命題が成立する. 証明はコホモロジーが具体的にかけているので元をとって具体的に計算するものである.

3.2.1 命題. — A を局所 $\mathbb{Q}_p$-代数で極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ として $I \subset A$ をイデアルで $I\mathfrak{m}_A = 0$ となるものとする. $D_{A/I} \in \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A/I)$ として $D_{A/\mathfrak{m}_A} := D_{A/I} \otimes_{A/I} A/\mathfrak{m}_A$ とおく.

(i) もし $H^2(D_{A/\mathfrak{m}_A}) = 0$ なら $D_A \in \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ で I で還元すると $D_{A/I}$ となるものが存在する.

(ii) $D_{A/I}$ の持ち上げ D_A の $\mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ の中での同型類は空かもしくは $H^1(D_{A/\mathfrak{m}_A}) \otimes_{A/\mathfrak{m}_A} I$ 上の捻子 *(torsor)* となる.

A を $\mathbb{Q}_p$-代数として $D_A \in \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ を定める. するとこれに対応して $\mathcal{A} \to \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ という射ができる. ここで $\mathcal{A}$ は A で表現される亜群と考えている. 上の命題 (i) からすぐに次の系が出る:

系. — 今定義した $\mathcal{A} \to \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ が形式的滑らかで, $H^2(D_A) = 0$ と仮定する. すると A は $\mathbb{Q}_p$ 上形式的滑らかである.

さらに次が成り立つ:

3.2.2 命題. — A を *Noether* $\mathbb{Q}_p$-代数として $D_A \in D_A \in \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ とする. $\mathcal{A} \to \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ が形式的滑らかとして, U を $\mathrm{Spce}(A)$ の $H^2(D_A)$ の台の補集合とすると, U は稠密で $\mathbb{Q}_p$ 上形式的滑らかである.

証明の概略. まず, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 E と $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 上有限自由な加群 D_E で $G_{L/K}$ の反線形作用が与えられているもので, A は E-代数になっていて $D_A \cong D_E \otimes_E A$ という $G_{L/K}$-同変な同型を構成することができる.

さて, E-代数 B に対して $D_B := D_E \otimes_E B$ の半線形自己準同型と線形自己準同型 (φ, N) の組でこれらの組が $\mathfrak{Mod}_{\varphi,N}(A)$ の元になるような集合を対応させる関手を考える. するとこの関手は E-代数 $B_{\varphi,N}$ で表現されていることが分かる. $X_{\varphi,N} := \mathrm{Spec}(B_{\varphi,N})$ とする. 同様に $\mathfrak{Mod}_N(A)$ に対しても対応するものを考え B_N, X_N として定義する. すると定義より $B_{\varphi,N} \to \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}$ は形式的に滑らかであることが分かる. さらに $H^2(D_{B_{\varphi,N}})|_U = 0$ となる $X_{\varphi,N}$ の開部分集合 U は稠密になることが分かる. 稠密になることを見るためには $X_{\varphi,N} \to X_N$ の各ファイバーにおいて U が稠密であることを見ればよい. そこで $y \in X_N$ を取り D_y を D_E の引き戻しとする. するとファイバー $(X_{\varphi,N})_y$ は $\varphi : D_y \to D_y$ という φ-半線形同型な写像の集合で $G_{L/K}$ と可換で $N\varphi = p\varphi N$ が成立するものである. この解釈により $(X_{\varphi,N})_y$ は連結であることが分かるので, $(X_{\varphi,N})_y$ が空でなければ $H^2(D_{B_{\varphi,N}}) = 0$ となる $(X_{\varphi,N})_y$ の点がひとつはあることを示せばよい. この点は具体的に構成することで稠密性が示される.

さて, D_A は $B_{\varphi,N} \to A$ という準同型から誘導されるがあとは $B_{\varphi,N}$ と A の関係を調べることによって命題が示される. ■

3.3 次にフィルトレーションも含んだ亜群 $\mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}$ を考える. 具体的には $\mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}(A)$ の対象は $D_A \in \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}$ でさらに $D_{A,L} := D_A \otimes_{L_0} L$ の $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-部分加群によるフィルトレーションが入っていて $G_{L/K}$ と可換など適当は条件を満たしものである. $D_{A,L}$ 上のフィルトレーションは $(\mathrm{ad}D_A) \otimes_{L_0} L$ 上にフィルトレーションを定める. 次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} \arrow[r, "(1-\varphi,N)"] \arrow[d] & (\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} \oplus (\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} \arrow[r, "(N,p\varphi-1)"] \arrow[d] & (\mathrm{ad}D_A)^{G_{L/K}} \arrow[d] \\
(\mathrm{ad}D_{A,L}/\mathrm{Fil}^0\mathrm{ad}D_{A,L})^{G_{L/K}} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

これのコホモロジーを $H^\bullet_F(D_A)$ とかく. 次元は $0, 1, 2$ に集中しているものとする. すると前と同様に変形の障害をこれで測ることができる. 具体的には:

3.3.1 補題. — $\mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N} \to \mathfrak{Mod}_{\varphi,N}$ というフィルトレーションを忘れる射は形式的滑らかである. また A を局所 *Artin* 環として $\mathfrak{m}_A$ をその極大イデアル, $I \subset A$ をイデアルで $I\mathfrak{m}_A = 0$ となるものとする. $D_{A/I} \in \mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}(A/I)$ をとり $D_{A/\mathfrak{m}_A} := D_{A/I} \otimes_{A/I} A/\mathfrak{m}_A$ とおく.

(i) $H^2_F(D_{A/\mathfrak{m}_A}) = 0$ なら $D_{A/I}$ を A 上に伸ばすことができる.

(ii) $D_{A/I}$ の $\mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}$ の中での A 上への延長の同型類は空か $H^1_F(D_{A/\mathfrak{m}_A}) \otimes_{A/\mathfrak{m}_A} I$ 上の捻子になっている.

3.4 次に定理の状況を考える. A は今までどおりとして $\mathfrak{m}$ を $A^{\tau,\mathbf{v}}$ の極大イデアルとして E' をその剰余体とする. すると $V_{A^\circ} \otimes_{A^\circ} A^{\tau,\mathbf{v}}/\mathfrak{m}^i A^{\tau,\mathbf{v}}$ は $i > 0$ 対して型が τ の潜在的準安定で p 進 Hodge 型が $\mathbf{v}$ となることが分かり, $\mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}(A^{\tau,\mathbf{v}}/\mathfrak{m}^i A^{\tau,\mathbf{v}})$ の対象を定めることが分かる. 極限をとることによって関手

$$\hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to \mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}$$

を得る.

3.4.1 命題. — $A^\circ \to D_{V_{\mathbb{F}}}$ が形式的滑らかであると仮定する. すると $\hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to \mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}$ は形式的滑らかである.

証明の概略. B を E-代数として $I \subset B$ をイデアルで $I^2 = 0$ となるものとする. $h : \hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to B/I$ が与えられたと仮定し, $D_{B/I}$ を上の射に対応する対象として $D_B \in \mathfrak{Mod}_{F,\varphi,N}(B)$ で同型 $D_B \otimes_B B/I \xrightarrow{\sim} D_{B/I}$ が与えられているものがあるとする. このとき示すべきことは D_B が $\hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to B$ から来ていることである. まず, 簡単な議論によって B が Noether で局所完備 E'-代数で剰余体が E' あると仮定できる. $D_B \otimes_B B/\mathfrak{m}^i_B$ は弱許容加群なので連続な G_K- 作用を伴った階数 d の自由 $B/\mathfrak{m}^i B$-加群 $V_{B/\mathfrak{m}^i B}$ を対応させることができ, 潜在的準安定表現の型は τ で p 進 Hodge 型は $\mathbf{v}$ となることが分かる. さて, $\tilde{h}_i : \hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to B/\mathfrak{m}^i_B$ で適当な両立条件を満たすものを帰納法を用いて構成すれば命題は示される. $i = 1$ の場合は h の還元として, $\tilde{h}_{i-1}$ が構成された場合

$$\hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to B/(\mathfrak{m}^{i-1}_B \cap I) \to B/(\mathfrak{m}^{i-1}_B \cap (\mathfrak{m}^i_B + I))$$

という写像を考える. $A^\circ \to D_{V_{\mathbb{F}}}$ の形式的滑らかさによって合成 $\tilde{A}_{\mathfrak{m}} \to \hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}} \to B/(\mathfrak{m}^{i-1}_B \cap (\mathfrak{m}^i_B + I))$ が $\tilde{A}_{\mathfrak{m}} \to B/\mathfrak{m}^i_B$ に持ち上がり $V_{B/\mathfrak{m}^i_B}$ を導くことを示すことができる. あとは $V_{B/\mathfrak{m}^i_B}$ が潜在的準安定表現の型は τ で p 進 Hodge 型は $\mathbf{v}$ となっていたので $\hat{A}^{\tau,\mathbf{v}}_{\mathfrak{m}}$ を経由することが分かり $\tilde{h}_i$ が構成される. ■

定理の証明の概略. 今までの命題と補題をあわせれば稠密な開集合が取れて形式的滑らかという主張は容易である. 一方, 次元を求める公式は形式的滑らかな点をとってきてその点での接空間の次元を求めればよい. 手法は標準的なので詳しい証明は省略する. ■

参考文献

[BL] A. Beauville, Y. Lazlo, *Un lemme de descente*, C.R. Acad. Sci. Paris 320, pp. 335–340, 1995.

[Fon] J. M. Fontaine, *Représentations p-adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, Prog. Math. 87, Birkhauser, pp. 249–309, 1991.

[Kis2] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory, Prog. Math. 253, Birkhoauser, pp. 459–496, 2006.

[Kis] M. Kisin, *Potentially semi-stable deformation rings*, JAMS 21 no. 2, pp. 513–546, 2008.

[Maz] B. Mazur, *Deforming Galois representation, Galois groups over* $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 16, Springer, pp. 395–437, 1989.

[Tsu] T. Tsuji, *Introduction to the theory of Fontaine on p-adic Galois representations*, 数理解析研究所講究録 no. 1097, pp. 1–26, 1998.