Kisinの修正Taylor-Wiles系

山下　剛*

平成20年11月21日

目 次

0　序.

本稿は「$R = T$ の最近の発展についての勉強会」(2008年3月17〜21日, 八ヶ岳) における講演「Modularity lifting for potentially Barsotti-Tate deformations after Kisin I.」の報告書である. 本稿では, Kisinによる修正Taylor-Wiles系 (あるいは, Kisin-Taylor-Wiles系とでも言ったようがよいであろうか) と [K1] におけるその具体的な適用を紹介する. 本稿の初稿にコメントを下さった加塩朋和さんに感謝する.

修正Taylor-Wilesの基本的なアイデアは,

*2008/9/30版を少し改訂. EPSRC grant EP/E049109/1の補助を受けています.

- 代数体の Galois 表現の普遍 (枠付) 変形環 (以下, 大域普遍変形環という) を局所体の Galois 表現の普遍 (枠付) 変形環 (以下, 局所普遍変形環という) の有限個の完備テンソル積上で考える

というものである. そのメリットは以下のとおり.

1. p で暴分岐 (wildly ramified) な法 p Galois 表現を考える場合, (Skinner-Wiles の底変換議論をした後) 普遍変形環と Hecke 環はもはや局所完全交叉であることが望めないが, そのような場合でも修正 Taylor-Wiles 系は機能する.

2. 極小でない場合でも, "増分" の計算なしに直接修正 Taylor-Wiles 系から同型 $R^{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} T$ が示せる. 特に, 伊原の補題とその一般化 ([Y, 命題 4.9] 参照) という代数幾何的 (かつ群論的) 命題が不要になった.

1. について. [BCDT] において志村・谷山予想は証明されたが, そこでは最後に残された場合として 3 で暴分岐拡大に制限すると準安定還元をもつ (つまり, 3 での導手が 27, 81, 243 である) ような楕円曲線が扱われた. その証明は Breuil 加群のケース・バイ・ケースの計算によってなされた. 今回の Kisin の方法を用いると, ケース・バイ・ケースの計算ではなくより見通しのよい証明が得られる.

2. について. ユニタリ群では伊原の補題に対応する命題はまだ証明されておらず難しい予想と思われている ([CHT] 参照) ので, 上記 2. はユニタリ群での $R = T$ の証明 ([T4] 参照) 及び佐藤-Tate 予想への応用 ([HSBT], 本報告集津嶋氏・原氏の記事参照) では決定的な役割を果たす ([T4] で使われる修正 Taylor-Wiles 系は Kisin の Taylor-Wiles 系とは厳密には同じものではないが, 大域普遍変形環を局所普遍変形環上で考えるというアイデアは同じである. [T4] では Kisin が [K1] で扱ったような有限平坦モデルのモジュライや [K3] で扱ったような Wach 加群のモジュライを考えることはしない. "同型 $R^{\mathrm{red}} \xrightarrow{\sim} T$ を示したい R, T" を "同型を示しやすい別の R', T'" と関係付けるという議論を使っている. 本報告集千田氏・安田氏の記事参照).

修正 Taylor-Wiles 系を適用する時に必要な事項は大雑把に言うと以下のとおり.

1. 大域普遍変形環の位相的生成元の個数の計算,

2. 局所普遍変形環の次元の計算,

3. 局所普遍変形環の一般ファイバーの形式的滑らか性 (formally smoothness),

4. **局所普遍変形環の整域性**,

5. Hecke 加群の $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 自由性.

上記 1. は [Y] の 2 章とほぼ同じ計算でなされる. 2. と 3. は比較的容易に示される. 5. は正定値四元数代数 (positive definite quaternion algebra) 上の保型形式 (Taylor によってそれ

に付随する Galois 表現が構成されている [T1] のでそのような保型形式で考えてよい. 本報告集の山上氏の記事参照) を用いることで ([Y] の 3 章で扱ったよりも) 容易に示される. 上記 4. が最も難しく, 整 p 進 Hodge 理論の強力な応用により証明される (本報告集今井氏・望月氏の記事参照). [K1] ではこの 4. の証明にページの大部分があてられている. **この 4. が [K1] の鍵であり, この分野の新しいアイデアである.**

本稿の構成は以下の通り. 1 章では修正 Taylor-Wiles 系の純粋に可換環論の部分を示す. 2 章では 1 章の可換環論の命題を適用する時の登場人物たちを定義し, 大域的な性質である上記 1. と 5. を示す. 3 章では局所理論を扱う. 3.1 節で $v \nmid p$ の時, 3.2 節で $v \mid p$ の時を扱う. 3.1 節 ($v \nmid p$ の時) では "Galois 安定な 1 次元部分空間のモジュライ" を導入し $v \nmid p$ の時の上記 2. と 3. と 4. を示す. 3.2 節 ($v \mid p$ の時) では本報告集の今井氏の記事で導入される "有限平坦モデルのモジュライ" (本報告集望月氏の記事で解説される整 p 進 Hodge 理論により定義される) を用いて $v \mid p$ の時の上記 2. と 3. と 4. を示す. $v \nmid p$ の場合も $v \mid p$ の場合も局所普遍変形環の一般ファイバーの連結成分のなす集合が局所普遍変形環の上にあるモジュライの特殊ファイバーの連結成分のなす集合と標準的に全単射対応をもつことにより, 局所普遍変形環の整域性は, モジュライの特殊ファイバーの連結性に帰着される. $v \nmid p$ の場合は容易であるが, $v \mid p$ の場合, このモジュライは整 p 進 Hodge 理論により半線型代数的データで記述されるので, 具体的な行列計算により連結性を確かめる, というのが証明の大雑把な方針である. ただし, "有限平坦モデルのモジュライ" の定義とその特殊ファイバーの連結性及び他の必要な性質の証明は今井氏の記事で扱うので本稿ではそれ以外を解説する. 4 章では, 応用として潜在的 Barsotti-Tate 表現の保型性持ち上げ定理を証明する.

1 可換環論.

E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathcal{O} = O_E$ をその付値環, λ を極大イデアル, $\mathbb{F}$ を剰余体とする. E の代数閉包 $\overline{E}$ を固定する. 次の可換環論的命題が鍵である (適用する時は, B は局所普遍変形環, R は大域普遍変形環, T は局所化された Hecke 環, H は局所化された保型形式の空間で各々適当なものをとる).

命題 1.1 (Kisin の修正 Taylor-Wiles 系) B を Noether 完備局所平坦 $\mathcal{O}$ 代数で, **整域**とする. $B[\frac{1}{p}]$ は E は形式的滑らかであるとする. $B[\frac{1}{p}]$ の Krull 次元を d とする. $R \twoheadrightarrow T$ を完備 Noether 局所 B 代数の全射とする. T は平坦 $\mathcal{O}$ 代数であるとする. H を 0 でない忠実 T 加群で $\mathcal{O}$ 上平坦とする. ある自然数 r と j が存在して, 任意の自然数 n に対して以下の可換図式が存在すると仮定する.

$$
\begin{tikzcd}
 & B[[X_1,\dots,X_{r+j-d}]] \arrow[d] & \\
\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]] \arrow[r] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}(H_n) \arrow[d] \\
 & R \arrow[r] & \mathrm{End}(H).
\end{tikzcd} \tag{1}
$$

ここで, $R_n \twoheadrightarrow R$ は完備 Noether 局所 B 代数の全射, H_n は R_n 加群で以下を満たすもの.

1. $R_n/(S_1,\dots,S_r) \xrightarrow{\sim} R,\ H_n/(S_1,\dots,S_r) \xrightarrow{\sim} H$,
2. $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]]}(H_n) \subset ((S_1+1)^{p^n}-1,\dots,(S_r+1)^{p^n}-1) =: \mathfrak{a}_n$,
3. H_n は $\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]]/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]]}(H_n)$ 上有限自由.

この時, 次が成立.

1. $R/(p\text{-tor}) \xrightarrow{\sim} T$,
2. R は有限 $\mathcal{O}[[Y_1,\dots,Y_j]]$ 代数,
3. $H \otimes_{\mathcal{O}} E$ は有限射影的 $R[\frac{1}{p}]$ 加群. □

注意 1.1.1 変数の個数について r, j, $r+j-d$ とあるが, r は “Taylor-Wiles 型” の変形で膨らませるパラメータの数であり, $r+j-d$ というのは $\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]]$ の次元と $B[[X_1,\dots,X_{r+j-d}]]$ の次元が一致するようにとったパラメータの数である. そして, j はあまり重要ではない. 修正 Taylor-Wiles 系を適用する際, Galois 表現を局所体の Galois 群に制限すると絶対既約でないことも起こり, その時には普遍変形環は存在しないので普遍枠付変形 (framed deformation) 環を使う. その時に余分な変数として $Y_1,\dots,Y_j$ が出てくるのであり, この変数は議論に本質的な困難を与えたることはない. 特に, 考えたいすべての局所体についての Galois 群への制限が絶対既約の時にはこれらの変数は現れない. □

注意 1.1.2 条件で, 以下の 3 点が重要である.

1. r と j は n に依存しない.
2. $B[[X_1,\dots,X_{r+j-d}]]$ と $\mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]]$ の次元が一致している.
3. 各 n に対して可換図式 (1) が存在することのみ仮定しており, n **についての整合性は仮定しない**. 特に, $R_{n+1} \to R_n$ などの射の存在は仮定しない. $B[[X_1,\dots,X_{r+j-d}]]$ についての条件も R_n の B 上の位相的生成元の個数が $r+j-d$ 個以下であることを言っているだけである. □

証明 以下, $\mathcal{O}[[S,Y]] := \mathcal{O}[[S_1,\dots,S_r,Y_1,\dots,Y_j]], \mathcal{O}[[Y]] := \mathcal{O}[[Y_1,\dots,Y_j]]$, 及び $B[[X]] := B[[X_1,\dots,X_{r+j-d}]]$ とおく. イデアル $(S_1,\dots,S_r)$ も (S) と略記する. [Y, 命題 1.1] の証明で用いた貼り合せの議論 (patching argument) と同様にして可換図式

$$\begin{tikzcd} & B[[X]] \arrow[d] \\ \mathcal{O}[[S,Y]] \arrow[r] \arrow[dr, hook] & R_\infty \arrow[d] \\ & \mathrm{End}(H_\infty) \end{tikzcd}$$

が得られる. ここで, $\cap_m \mathfrak{a}_m$=0 と仮定 2., 3. より, H_∞ は有限自由 $\mathcal{O}[[S,Y]]$ 加群であり, 斜めの射が単射であることに注意. 従って, $\mathcal{O}[[S,Y]] \to R_\infty$ も単射であり, R_∞ の Krull 次元は $r+j+1$ 以上. もし全射 $B[[X]] \twoheadrightarrow R_\infty$ の核が 0 でなければ, R_∞ の Krull 次元は $r+j+1$ 未満になるので, この全射は同型 (ここで $B[[X]]$ と $\mathcal{O}[[S,Y]]$ の次元が一致することと B が整域であることを使った. B が整域でなければ, ある既約成分が核に入っても最大次元をもつ既約成分が核に入らなければ次元は下がらない). 同様に, $B[[X]]$ は $\mathrm{End}(M_\infty)$ での像 $\mathrm{Im}(B[[X]])$ と同型. 同型 $B[[X]] \xrightarrow{\sim} R_\infty$ により $B[[X]]$ を $\mathcal{O}[[S,Y]]$ 代数とみる. H_∞ は $\mathcal{O}[[S,Y]]$ 上有限なので, $B[[X]] \cong \mathrm{Im}(B[[X]])$ も $\mathcal{O}[[S,Y]]$ 上有限. よって, 仮定 1. を使うと $B[[X]]/(S) \xrightarrow{\sim} R_\infty/(S) \xrightarrow{\sim} R$ は有限 $\mathcal{O}[[S,Y]]/(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[[Y]]$ 加群と分かる.

$B[[X]]$ の勝手な極大イデアル $\mathfrak{q}$ をとる. B が整域であることから局所化 $(H_\infty)_\mathfrak{q}$ の $B[[X]]_\mathfrak{q}$ 上の階数は一定. ここで Auslander-Buchsbaum 公式より

$$\mathrm{depth}_{B[[X]][1/p]_\mathfrak{q}}(H_\infty \otimes E)_\mathfrak{q} + \mathrm{proj.dim}_{B[[X]][1/p]_\mathfrak{q}}(H_\infty \otimes E)_\mathfrak{q} = \mathrm{depth}\ B[[X]][1/p]_\mathfrak{q}$$

が成立. $\mathcal{O}[[S,Y]] \subset \mathrm{End}(H_\infty)$ より $\mathrm{depth}_{B[[X]][1/p]_\mathfrak{q}}(H_\infty \otimes E)_\mathfrak{q} \geq r+j$ であり, $B[1/p]$ は E 上形式的滑らかなので, $\mathrm{depth}\ B[[X]][1/p]_\mathfrak{q} = r+j$ である. あわせると, $(H_\infty \otimes E)_\mathfrak{q}$ は $B[[X]][1/p]_\mathfrak{q}$ 上自由であり, 従って $H_\infty \otimes E$ は $B[[X]][1/p]$ 上射影的であることが分かる. 仮定 1. を使うと, $M_\infty \otimes E/(S) \xrightarrow{\sim} M \otimes E$ は $B[[X]][1/p]/(S) \xrightarrow{\sim} R_\infty[1/p]/(S) \xrightarrow{\sim} R[1/p]$ 上有限射影忠実加群と分かる. よって合成

$$R[1/p] \twoheadrightarrow T[1/p] \hookrightarrow \mathrm{End}(M \otimes E)$$

は単射なので同型 $R/(p\text{-tor}) \xrightarrow{\sim} T$ が分かる. □

上の可換環論の命題を以下で

$$B := \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{\Sigma,p}, \quad R := \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S}, \quad R_n := \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S_{Q_n}},$$

$$T := \mathbb{T}^\square, \quad H := S_{2,\psi}(U,\mathcal{O})_\mathfrak{m} \otimes_\mathbb{T} \mathbb{T}^\square, \quad H_n := S_{2,\psi}(U_{Q_n},\mathcal{O})_{\mathfrak{m}_{Q_n}} \otimes_{\mathbb{T}_{Q_n}} \mathbb{T}^\square_{Q_n},$$

$$r := \# Q_n, \quad d := \dim \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{\Sigma,p}[1/p] (= [F:\mathbb{Q}] + 3\#\Sigma_p), \quad j := \mathrm{rel.dim}_{\tilde{R}^{\sigma,\psi}_{F,S}} \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S} (= 4\#\Sigma_p - 1)$$

に対して適応する.

次章ではこれらの記号の定義をし, それに対して命題 1.1 の仮定 1. と 3. が満たされることを証明する. また, j の計算と局所普遍変形環上の大域普遍変形環の位相的生成元の個数の計算をし, その個数が $r+j-d$ に一致するための d の条件を出す. 命題 1.1 の性質を満たすような B の構成と d の計算は次々章で行う.

2　大域的な議論.

この章では, 前章末に出した記号の定義をした後, 局所的な議論は次章にまわして大域的な議論の部分をこの章で示す.

2.1　Galois 側 — 位相的生成元の個数.

簡単のために $p>2$ とする $p=2$ の場合も [K5] と [KW3] で扱われている. $p=2$ だと $(\mathrm{ad}^0\bar{\rho})^\vee \not\cong \mathrm{ad}^0\bar{\rho}$ であるため, Galois コホモロジーの計算に修正がいる. 結論から言うとこの修正による寄与は $p=2$ で存在する無限素点の寄与とキャンセルされる ([KW3] 参照. [K5] もこの部分は [KW3] を使っている). また, 整 p 進 Hodge 理論の Breuil 加群 ($p=2$ では使えない) を使うところは Zink の displays と windows の理論を使う ([K5] 参照).

F を有限次総実代数体, G_F をその絶対 Galois とする. S を F の有限素点の有限集合で, p の上にある素点をすべて含むものとする. $G_{F,S}$ を F 上 $S\cup\{v\mid\infty\}$ の外不分岐最大拡大の Galois 群とする. 各素点 $v\in S$ に対して分解群 G_v を選んで固定する. Σ を S の部分集合で, p の上にある素点を含まないものとする (実際に適用するときには Σ は考えている四元数代数が分岐する素点を選ぶ. Skinner-Wiles の底変換議論により Σ が決まる. Skinner-Wiles の底変換議論については本報告集加塩氏の記事参照). $\Sigma_p := \Sigma\cup\{v\mid p\}$ とおく. $\mathbb{A}_F$ を F のアデール, $\mathbb{A}_f=(\mathbb{A}_F)_f$ をその有限部分とする. $\psi:\mathbb{A}_f^\times/F^\times\to\mathcal{O}^\times$ を S の外不分岐な指標とする. 類体論を使った以下の射により, ψ を $G_{F,S}$ の指標とみなす:

$$G_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} (F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^{+,\times}\backslash\mathbb{A}_f^\times/F^\times \to \mathbb{A}_f^\times/F^{+,\times} \to \mathbb{A}_f^\times/F^\times \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}^\times.$$

$\bar{\rho}:G_F\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続な Galois 表現とする. $\bar{\rho}$ の表現空間を $V_{\mathbb{F}}$ とし, その順序付けされた基底 $\beta_{\mathbb{F}}$ を選ぶ. 有限局所 Artin $\mathcal{O}$ 代数 $(A,\mathfrak{m}_A)$ と同型 $A/\mathfrak{m}_A\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}$ の組のなす圏を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ とおく. $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ の対象 A に対して $G_{F,S}$ の連続な作用付きの有限自由 A 加群 V_A と同型 $V_A\otimes_A\mathbb{F}\xrightarrow{\sim}V_{\mathbb{F}}$ の組の同値類を $\bar{\rho}$ の A への**変形**という. ここで同値関係は $\ker\{\mathrm{GL}_2(A)\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})\}$ による共役でいれる. 同様に $\bar{\rho}|_{F_v}$ の A への変形も定義される. $\bar{\rho}|_{F_v}$ の A への変形 V_A と V_A の順序付けされた基底で $\beta_{\mathbb{F}}$ の持ち上げになっているものの組を $\bar{\rho}|_{F_v}$ の A への持ち上げ, あるいは**枠付変形** (framed deformation) という. 誤解の恐れがない時は基底 β_A を明示せずに枠付変形 V_A ということもある. $\bar{\rho}$ の A への変形 V_A と各 $v\in\Sigma_p$ に対して V_A の順序付けされた基底 β_v で $\beta_{\mathbb{F}}$ の持ち上げになっているもの $\{\beta_v\}_{v\in\Sigma_p}$ の組を $\bar{\rho}$ の Σ_p **につい**

ての A への枠付変形という. $\mathfrak{AR}$ の対象 A に対して $\bar{\rho}$ の Σ_p についての A への変形とそのあいだの射の同値類 (同値関係は定数倍でいれる) のなす (集合ではなく) 圏 $D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ を考えるとこれはファイバー付けされた圏 (fibered category) を与え, これが亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}$ を与えることも分かる. 同様に $\bar{\rho}$ の枠付変形のなす亜群 $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ も定義される. また, 各素点 $v \in \Sigma_p$ に対して制限 $\bar{\rho}|_{F_v}$ を考え, G_v の表現としての変形, 枠付変形, 及びそれらのなす亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}|_{F_v}}$, $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}|_{F_v}}$ も同様に定義される (ここで亜群を考えるのは, $\bar{\rho}|_{F_v}$ が一般に絶対既約とは限らないためである). $\bar{\rho}$ の枠付変形のなす亜群 $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は表現可能であることが容易に分かる. その普遍対象を $R^{\square}_{F,S}$ とおく. これは完備局所 $\mathcal{O}$ 代数である $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{F,S}]}V_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$ の時, $\bar{\rho}$ の変形のなす亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}$ は副表現可能であることも分かる (こちらはさっきほど容易ではないがよく知られていることである). その副普遍対象を $R_{F,S}$ とおく. $R^{\square}_{F,S}$ の商で, $\det \rho_A = \psi\varepsilon$ に対応するものを $R^{\psi,\square}_{F,S}$ とする. ここで ε は p 進円分指標. $\bar{\rho}|_{F_v}$ の枠付変形のなす亜群 $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}|_{F_v}}$ も副表現可能であることが容易に分かる. その副普遍対象を $R^{\square}_v$ とおく. $R^{\square}_v$ の商で, $\det \rho_A = \psi\varepsilon$ に対応するものを $R^{\psi,\square}_v$ とする ($R^{\psi|_{F_v},\square}_v$ と書くほうが正確だが, 誤解のない時は ψ の G_v への制限も ψ と書くことにする). 以降, p を割る素点に対して, Σ の素点と同時に扱わないときは記号として v ではなく $\mathfrak{p}$ を使うことにする. $R^{\square}_p := \widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}|p} R^{\square}_{\mathfrak{p}}$, $R^{\square}_{\Sigma} := \widehat{\otimes}_{v\in\Sigma} R^{\square}_{\Sigma}$ ($\mathcal{O}$ 上のテンソル積), $R^{\square}_{\Sigma,p} := R^{\square}_{\Sigma}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} R^{\square}_p$ とおく. $R^{\psi,\square}_p$, $R^{\psi,\square}_{\Sigma}$, $R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}$ も同様に定義する.

$R^{\psi,\square}_{F,S}$ の位相的生成元の個数を計算するのが本節の目標である. 計算方法はだいたい [Y] で説明したのと同様に行う. ただし, 今回は枠付変形を考えていることと大域普遍変形環を局所普遍変形環上で考えているので, そこの修正のために以下の補題を使う.

補題 2.1

1. $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{F,S}]}V_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$ の時, $R^{\psi,\square}_{F,S}$ は $R^{\psi}_{F,S}$ 上形式的滑らかで相対次元 $4\#\Sigma_p - 1 (=: j)$. 特に, $R^{\psi,\square}_{F,S}$ は形式的冪級数環 $R^{\psi}_{F,S}[[Y_1, \ldots, Y_j]]$ と同型.

2. $H^1_{\Sigma_p}(G_{F,S}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) := \ker\{H^1(G_{F,S}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) \to \prod_{v\in\Sigma_p} H^1(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})\}$ とおくと, 大域普遍変形環 $R^{\psi,\square}_{F,S}$ は局所普遍変形環 $R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}$ 上位相的に
$$\dim H^1_{\Sigma_p}(G_{F,S}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) + \sum_{v\in\Sigma_p} \dim H^0(F_v, \mathrm{ad}\bar{\rho}) - \dim H^0(G_{F,S}, \mathrm{ad}\bar{\rho})$$
個の元で生成される. □

上の記号 $H^1_{\Sigma_p}$ は [Y] の記号とは意味が違うことに注意 ($v \in \Sigma_p$ で $L_v = 0$, それ以外で $L_v = H^1(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})$ ととっている).

証明 1. を示す. 各 $v \in \Sigma_p$ について順序付けされた基底の持ち上げ β_v のなす空間は $1 + M_2(\mathfrak{m}_{R^{\psi,\square}_v})$ でありこの空間は $R^{\psi,\square}_v$ 上 4 個の独立な変数でパラメータ付けされる. よってすべての $v \in \Sigma_p$ についての組を考えると $4\#\Sigma_p$ 個の独立な変数でパラメータ付けされる. それらが同値で移りあうのは $\dim \mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{F,S}]}V_{\mathbb{F}} = 1$ 次元分あり, $4\#\Sigma_p - 1$ 個のパラメータが決まれば最後のパラメータも決まるので, 同値類で割った空間は $4\#\Sigma_p - 1$ 個の独立な変数でパラメータ付けされる.

2. を示す．$R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\Sigma,p}$ とする．$R^{\psi,\square}_{F,S}/\mathfrak{m}_{\Sigma,p}$ の余接空間は $V_{\mathbb{F}}$ の $V_{\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$ への変形 $V_{\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}$ と $\beta_{\mathbb{F}}$ の持ち上げの組 $\{\beta_v\}_{v\in\Sigma_p}$ で各 $v\in\Sigma_p$ に対して $(V_{\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}|_{F_v},\beta_v)\cong(V_{\mathbb{F}},\beta_{\mathbb{F}})\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ となるものの同値類と同一視できる ($v\in\Sigma_p$ にたいして $H^1(F_v,\mathrm{ad}^0\bar{\rho})$ では 0 になるという条件が $(V_{\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)}|_{F_v},\beta_v)\cong(V_{\mathbb{F}},\beta_{\mathbb{F}})\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ に対応している．[Y, 補題 2.2] も参照)．$\bar{\rho}$ の $\mathbb{F}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ への変形の空間は $H^1_{\Sigma_p}(G_{F,S},\mathrm{ad}^0\bar{\rho})$ で与えられる ([Y, 補題 2.2])．順序付けされた基底 $\{\beta_v\}_{v\in\Sigma_p}$ を別の $\{\beta'_v\}_{v\in\Sigma_p}$ に取り替える自由度は $\sum_{v\in\Sigma_p}\dim H^0(F_v,\mathrm{ad}\bar{\rho})$ 次元分ある．$\{\beta_v\}_{v\in\Sigma_p}$ と $\{\beta'_v\}_{v\in\Sigma_p}$ が同値になるのは $\dim H^0(G_{F,S},\mathrm{ad}\bar{\rho})$ 次元分ある．あわせると補題が従う．□

$\bar{\rho}$ について以下の仮定をおく:

1. $\bar{\rho}$ は総奇 (totally odd), つまり $\det\bar{\rho}$ のすべての複素共役での値は -1,

2. $\bar{\rho}$ は p の上にある素点の外で不分岐,

3. $\bar{\rho}$ の $F(\zeta_p)$ への制限は絶対既約,

4. (ζ_p): $p>3$ の時 $[F(\zeta_p),F]>2$,

5. $v\in S\setminus\Sigma_p$ の時,

$$(\mathbf{S}):\ (1-Nv)((1+Nv)^2\det\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)-Nv(\mathrm{Tr}\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v))^2)\in\mathbb{F}^{\times} \qquad (2)$$

   が成立．ここで $Nv:=\#O_F/v$ であり, Fr_v は v での算術的 Frobenius.

上記の条件 2. はかなり強い条件と思われるかもしれないが, 応用上は**Skinner-Wilesの底変換の議論**を用いてこの場合に帰着される (本報告集加塩氏の記事参照)．条件 3. と条件 4.(ζ_p) は双対 Selmer 群を消す時に使う (条件 (ζ_p) については [T3, Lemma 2.5] の証明あるいは [Y, 定理 2.6 ステップ 1 の仮定 2] 参照)．条件 5.(S) は $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ の固有値を α,β とすると, $\mathbb{F}$ において $Nv\neq 1$, $\alpha Nv\neq\beta$, $\beta Nv\neq\alpha$ であることと同値であり ($(Nv-1)(\alpha Nv-\beta)(\beta Nv-\alpha)=(Nv-1)(((Nv)^2+1)\alpha\beta-Nv((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta))/\alpha\beta=(Nv-1)((Nv+1)^2\alpha\beta-Nv(\alpha+\beta)^2)/\alpha\beta$), したがって $\mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1)(\mathrm{Fr}_v)$ は固有値 1 を持たない．これは Selmer 群の計算で $v\in S\setminus\Sigma_p$ での局所項の消滅に使う．

注意 2.1.1 条件 (S) は保型側では $S\setminus\Sigma_p$ **に関する新形式と旧形式の間に合同関係式が存在しない**ことを保障する ([Y, 系 3.6] 参照)．これより Σ_p を使って構成した Hecke 環, Hecke 加群は S を使って構成した Hecke 環, Hecke 加群と適当な極大イデアルで局所化すると同型になる (4 章及び [Y, 3.3 節] 参照)．適用するときは補助的素点 $\mathfrak{r}$ を 1 つとり $S\setminus\Sigma_p=\{\mathfrak{r}\}$ に対して使う (4 章参照)．□

命題 2.2 各 n に対して, S の元を含まない F の有元素点の有限集合 Q_n で以下を満たすものが存在する:

- 各 $v \in Q_n$ に対して $Nv \equiv 1 \mod p^n$ であり, $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ は相異なる固有値を持つ,
- $\#Q_n = \dim H^1(G_{F,S}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1))(=: r)$
- $S_{Q_n} := S \cup Q_n$ とすると, 大域普遍変形環 $R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}$ は局所普遍変形環 $R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}$ 上
$$\#Q_n - [F:\mathbb{Q}] + \#\Sigma_p - 1$$
個の元で位相的に生成される. □

注意 2.2.1 補題 2.1 の $j = 4\#\Sigma_p - 1$ と補題 2.2 の $r = \#Q_n$ は最終的に命題 1.1 の j と r にそれぞれなる. $B[1/p]$ の形式的滑らか性と B の整域性以外に $r + j - d = \#Q_n + 4\Sigma_p - 1 - d$ と上記 $\#Q_n - [F:\mathbb{Q}] + \#\Sigma_p - 1$ との一致
$$\#Q_n + 4\Sigma_p - 1 - d = \#Q_n - [F:\mathbb{Q}] + \#\Sigma_p - 1, \quad \text{つまり } d = [F:\mathbb{Q}] + 3\#\Sigma_p$$
を確かめないと命題 1.1 が適用できない (条件を少し緩めて前者は $\geq$, 後者は $\leq$ でもよい). 次章の局所的な議論で各 $v \in \Sigma_p$ に対して $R^{\psi,\square}_v$ の商 $\overline{R}^{\psi,\square}_v$ で整域かつ p を可逆にすると E 上形式的滑らかであり
$$\mathrm{rel.dim}_{\mathcal{O}}\overline{R}^{\psi,\square}_v = \begin{cases} 3 & v \in \Sigma \text{ の時}, \\ 3 + [F_v, \mathbb{Q}_p] & v \mid p \text{ の時}, \end{cases}$$
であるものを構成する. すると $B = \widehat{\otimes}_{v\in\Sigma_p}\overline{R}^{\psi,\square}_v$, $R = R^{\psi,\square}_{F,S}\widehat{\otimes}_{R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}}B$, $R_n = R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}\widehat{\otimes}_{R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}}B$ に対して命題 1.1 の仮定は満たされることになる. この数値的一致は重要である (注意 1.1.2 の 2. 参照). この数値的一致において, $[F:\mathbb{Q}]$ の項は一方は無限素点からの寄与から来ており ($[F:\mathbb{Q}] = \#\{v \mid \infty\}$. この命題の以下の証明参照), 他方は p の上にある素点の寄与から来ている ($[F:\mathbb{Q}] = \sum_{\mathfrak{p}|p}[F_{\mathfrak{p}}:\mathbb{Q}_p]$) のは面白い. □

証明 $\mathcal{L} = \{L_v\}_v$ を $L_v = 0$ ($v \in \Sigma_p$ の時) $L_v = H^1(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})$ ($v \in S_{Q_n} \setminus \Sigma_p$ の時), $L_v = H^1(\mathbb{F}_v, (\mathrm{ad}^0\bar{\rho})^{I_v})$ ($v \notin S_{Q_n}$ の時) とおく. 対応する Selmer 群と双対 Selmer 群をそれぞれ $H^1_{\mathcal{L}}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})$, $H^1_{\mathcal{L}^\perp}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1))$ とおく ([Y, 2 章] 参照). これに対し [Y, 定理 2.3] を適用すると,
$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})}{\#H^1_{\mathcal{L}^\perp}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1))} = \frac{\#H^0(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})}{\#H^0(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1))}\prod_{v\in S_{Q_n}\cup\{v|\infty\}}\frac{\#L_v}{\#H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})}$$
を得る ([Y, 定理 2.3] では $F = \mathbb{Q}$ であるが, 一般の場合も同様に証明できる). ここで [Y, 定理 2.6] のように Q_n をとってくると $H^1_{\mathcal{L}^\perp}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1)) = 0$ かつ $\#Q_n = \dim H^1(G_{F,S}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1))$ となる (ここは $H^1(G_{F,S_{Q_n}}, -)$ ではなく $H^1(G_{F,S}, -)$ である. n に依らないことが大事. [Y, 定理 2.6] では $F = \mathbb{Q}$ であるが, 一般の場合も同様に証明できる. 仮定 (ζ_p) にも注意). [Y, 命題 2.4] の 1. と 2. より $H^0(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) = H^0(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1)) = 0$ である. 残りの項は以下のように計算される:

1. $v \mid \infty$ の時, $\frac{\# L_v}{\# H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})} = (\#\mathbb{F})^{-1}$,

2. $v \in S \setminus \Sigma_p$ の時, $\frac{\# L_v}{\# H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})} = 1$,

3. $v \in \Sigma_p$ の時 $\frac{\# L_v}{\# H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})} = (\#\mathbb{F})^{1-\dim H^0(F_v, \mathrm{ad}\bar{\rho})}$,

4. $v \in Q_n$ の時 $\frac{\# L_v}{\# H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})} = \#\mathbb{F}$.

3. は定義から明らか. 1. と 4. はそれぞれ [Y, 命題 2.4] の 3. と 4. から分かる. 2. は [Y, 命題 2.4] の 4. と $H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1)) = 0$ から分かる (仮定 (S) より, $\mathrm{ad}^0\bar{\rho}(1)(\mathrm{Fr}_v)$ は固有値 1 を持たないことから従う). よって,

$$\begin{aligned}\dim H^1_{\mathcal{L}}(G_{F,S_{Q_n}}, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) &= -\sum_{v\mid\infty} 1 + \sum_{v\in\Sigma_p}(1-\dim H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho})) + \sum_{v\in Q_n} 1 \\ &= -[F:\mathbb{Q}] + \#\Sigma_p - \sum_{v\in\Sigma_p}\dim H^0(F_v, \mathrm{ad}^0\bar{\rho}) + \#Q_n\end{aligned}$$

を得る. 補題 2.1 の 2. とあわせると, 主張を得る. □

$R^{\psi}_{F,S_{Q_n}}$ の $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$ 代数構造を [Y, 2.4 節] と同様に入れる. ここで各 $v \in Q_n$ に対して $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ の相異なる固有値のうち一方 α_v を選んだことに注意する. $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$ 余不変部分について [Y, 系 2.8] と同様に

$$R^{\psi}_{F,S_{Q_n}}/\mathfrak{a}_{Q_n} \xrightarrow{\sim} R^{\psi}_{F,S} \tag{3}$$

が得られる. ここで $\mathfrak{a}_{Q_n}$ は $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$ の付加 (augmentation) イデアル. 射 $R^{\psi}_{F,S_{Q_n}} \to R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}$ で $R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}$ にも $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$ 代数構造が入る. 同型 (3) と補題 2.1 の 1. より

$$R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}/\mathfrak{a}_{Q_n} \xrightarrow{\sim} R^{\psi,\square}_{F,S} \tag{4}$$

も得られる.

2.2 保型側 — $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 自由性.

簡単のために $p > 2$ とする. $p = 2$ の場合も [KW3] で扱われている. 本節で出てくる仮定 (Neatness) は $p = 2$ の時 U を十分小さくとっても一般には成立しない ([T3, Lemma 1.1] の証明参照) ので, $v \mid 2$ では $U_v = D_v^{\times}$ ととり (非コンパクト!), Δ_Q も適当な商で取り替える. [KW3, §6] 参照 ([K5] もこの部分は [KW3] を使っている).

四元数代数上の保型形式の定義を復習する (本報告集山上氏の記事でも復習しているが, そこでは $\Sigma = \emptyset$, $\psi = 1$ なので, 記号の導入も兼ねてここでも一応復習する). D を中心が F であるような四元数代数とする. Σ を D が分岐する有限素点の集合とする. 以下を仮定する:

- F のすべての無限素点で分岐する,
- Σ は p の上にある素点を含まない.

D の極大整環 O_D を固定し, Σ に入らない各有限素点 v に対して同型 $(O_D)_v \cong M_2(O_{F_v})$ を固定する. $U = \prod_v U_v \subset (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$ を $\prod_v (O_D)_v^\times$ に含まれるコンパクト開部分群で以下を満たすものとする:

- 各 $v \in \Sigma$ に対して $U_v = (O_D)_v^\times$,
- 各 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して $U_\mathfrak{p} = \mathrm{GL}_2(O_{F_\mathfrak{p}})$.

A を位相的 $\mathcal{O}$ 代数とする. 各 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して有限自由 A 加群上の連続表現 $\tau_\mathfrak{p} : U_\mathfrak{p} \to \mathrm{Aut}(W_{\tau_\mathfrak{p}})$ を固定する (これは重さに対応するものである. 重さ $(2,\ldots,2)$ に対応するものは各 $\mathfrak{p}$ に対して $\tau_\mathfrak{p} = 1$ となるものである. 本稿では応用上は重さ $(2,\ldots,2)$ のみを使うが, 定義のみ一般の τ でしておく). $W_\tau := \otimes_{\mathfrak{p}|p} W_{\tau_\mathfrak{p}}$, $\tau := \otimes_{\mathfrak{p}|p} \tau_\mathfrak{p} : \prod_{\mathfrak{p}|p} U_\mathfrak{p} \to \mathrm{Aut}(W_\tau)$ とおく. p の外では自明表現として τ を U の表現とみる. 連続指標 $\psi : \mathbb{A}_f^\times / F^\times \to A^\times$ で

- $\tau|_{\prod_{\mathfrak{p}|p}(U_\mathfrak{p} \cap O_{F_\mathfrak{p}}^\times)} = \psi|^{-1}_{\prod_{\mathfrak{p}|p}(U_\mathfrak{p} \cap O_{F_\mathfrak{p}}^\times)}$,

を満たすものをとり固定する. $\mathbb{A}_f^\times$ を W_τ に ψ^{-1} で作用させることで W_τ を $U\mathbb{A}_f^\times$ 加群とみる. $S_{\tau,\psi}(U,A)$ を連続関数

$$f : D^\times \backslash (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times \to W_\tau$$

で

- $g \in (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$, $u \in U$ に対して $f(gu) = \tau(u)^{-1} f(g)$,
- $g \in (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$, $z \in \mathbb{A}_f$ に対して $f(gz) = \psi(z) f(g)$,

を満たす集合とする. $S_{\tau,\psi}(U,A)$ を**重さ τ, レベル U, 指標 ψ の $D \otimes_F \mathbb{A}_f$ 上の保型形式のなす空間**という. 全ての埋め込み $\sigma : F \hookrightarrow \overline{E}$ を含むように E を十分大きくとっておく. すべての $\sigma : F \hookrightarrow E$ に対して $k_\sigma \geq 2$ であり, $k_\sigma + 2w_\sigma$ が σ によらないような $k = (k_\sigma)_{\sigma:F\hookrightarrow E}$, $w = (w_\sigma)_{\sigma\hookrightarrow E}$ に対して τ が

$$\tau_{(k,w)} := \otimes_{\sigma:F\hookrightarrow E}(\mathrm{Sym}^{k_\sigma-2} A^{\oplus 2} \otimes \det{}^{w_\sigma}),\ g \mapsto \otimes_{\sigma:F\hookrightarrow E}(\mathrm{Sym}^{k_\sigma-2}(\sigma g) \det(\sigma g)^{w_\sigma})$$

という表現の時, $S_{\tau,\psi}(U,A)$ を $S_{(k,w),\psi}(U,A)$ と書くことにする. $k_\sigma + 2w_\sigma$ が σ によらないという条件は中心指標を ($F \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ ではなく) $F \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} F_\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ に制限したら埋め込み $\sigma : F \hookrightarrow E$ によらないようなってほしいことから来ている. $w = (0,\ldots,0)$ の時, $S_{k,\psi}(U,A)$ と略記する. (τ が自明表現の時は $S_{2,\psi}(U,A)$ である. ここで $2 = (2,\ldots,2)$).

以下を仮定する.

- (Neatness): すべての $t \in (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$ に対して $p \nmid \#(U\mathbb{A}_f^\times \cap t^{-1} D^\times t)/F^\times$ を満たす.

[T3, Lemma 1.1] より $\#(U\mathbb{A}_f^\times \cap t^{-1}D^\times t)/F^\times < \infty$ であることと, この仮定は U を十分小さくとると満たされることに注意 ([T3, Lemma 1.1] では $p > 3$ かつ p は F で不分岐と仮定しているので上の仮定は自動的に満たされる). [Kh1, Theorem 2.1] の証明と [Kh1, Lemma 2.2], 及び [K1, Theorem 3.5.5] の証明中で補助的素点をとるところ参照. この仮定は命題 1.1 を適用する時に仮定 3.(Hecke 加群の $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 自由性) と仮定 1.($\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 余不変空間をとると元に戻る) を確かめるのに必要である. $D^\times\backslash(D\otimes_F \mathbb{A}_f)^\times/U\mathbb{A}_f^\times$ は有限なので, $(D\otimes_F \mathbb{A}_f)^\times = \coprod_{i\in I} D^\times t_i U\mathbb{A}_f^\times$ とすると $\#I < \infty$ であり, 対応 $f \mapsto \{f(t_i)\}_i$ により

$$S_{\tau,\psi}(U,A) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i\in I} W_\tau^{(U\mathbb{A}_f^\times \cap t_i^{-1}D^\times t_i)/F^\times} \tag{5}$$

を得るので, 上の仮定 (Neatness) から $S_{\tau,\psi}(U,A)$ は有限自由 A 加群と分かる. 特に, 関手 $A \mapsto S_{\tau,\psi}(U,A)$ は完全. $W_{\tau_{(k,w)}}$ には

$$\langle x,y\rangle_{\tau_{(k,w)}} := (x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})^t \cdot y$$

でペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau_{(k,w)}}$ が定まる. p が A で 0 でないか, すべての σ に対して $k_\sigma < p+1$ ($\mathrm{Sym}^{k_\sigma-2}$ の分母に p が現れない) の時にはこのペアリングは完全である. これを用いて, $S_{\tau,\psi}(U,A)$ には

$$\langle f,h\rangle_{\tau,\psi,U} := \sum_{t\in D^\times\backslash(D\otimes_F\mathbb{A}_f)^\times/U\mathbb{A}_f^\times} \langle f(t),h(t)\rangle_{W_\tau}\psi^{-1}(\det t)\#(U\mathbb{A}_f^\times \cap t^{-1}D^\times t/F^\times)^{-1}$$

で完全ペアリングが定まる. 本報告集山上氏の記事参照 (ここでは ψ^{-1} が入っている). ここで仮定 (Neatness) を用いたことにも注意.

S を F の有限素点の有限集合で以下を満たすものとする:

- $S \supset \Sigma \cup \{v \mid p\} \cup \{v \mid U_v \neq (O_D)_v^\times\}$.

前節では $S\backslash\Sigma_p$ に関して条件 (S) を課していたが本節では (あとで出てくる $\bar\rho$ について) この仮定はしない. 4 章で適用するときには, 条件 (S) を満たす補助的素点 $\mathfrak{r}$ をとって $S = \Sigma_p \cup \{\mathfrak{r}\}$ で使うことになる. 各素点 v に対して素元 ϖ_v を選ぶ. S に入らない素点 v に対して本報告集山上氏の記事と同様に Hecke 作用素 $T_v = \left[U\begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U\right]$ と $S_v = \left[U\begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}U\right]$ が定義される. これは ϖ_v の選び方によらない. また, p を割る素元 $\mathfrak{p}$ に対して半群 $\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p}) \cap M_2(O_{F_\mathfrak{p}})$ が $S_{\tau,\psi}(U,A)$ に $f(g) \mapsto \tilde\tau(u)f(gu)$ で作用する. ここで $\tilde\tau(u)$ は $\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})$ の $W_\tau \otimes E$ への自然な作用である. これより, p を割る素元 $\mathfrak{p}$ に対して Hecke 作用素 $T_\mathfrak{p} = \left[U\begin{pmatrix} \varpi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U\right]$ が定義される. $\mathrm{End}(S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O}))$ の部分 $\mathcal{O}$ 代数で Hecke 作用素 $\{T_v, S_v\}_{v\notin S}$ で $\mathcal{O}$ 上生成されるものを $\mathbb{T}'_{\tau,\psi}(U)$ とおく. $\mathrm{End}(S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O}))$ の部分 $\mathcal{O}$ 代数で $\mathbb{T}'_{\tau,\psi}(U)$ と Hecke 作用素 $\{T_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}|p}$

で A 上生成されるものを $\mathbb{T}_{\tau,\psi}(U)$ とおく．これらは $\mathcal{O}$ 上の可換代数であることが知られている．τ が自明表現の時はそれぞれ $\mathbb{T}'_{\psi}(U)$, $\mathbb{T}_{\psi}(U)$ と略記する．$\mathbb{T}'_{\psi}(U)$ あるいは $\mathbb{T}_{\psi}(U)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ が **Eisenstein イデアル**とは F のある Abel 拡大で完全分解するような F の素点 v に対して有限個の v を除いて $T_v - 2 \in \mathfrak{m}'$ が成立するときにいう．$S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ は $\mathbb{T}'_{\tau,\psi}(U)$ あるいは $\mathbb{T}_{\tau,\psi}(U)$ 加群であり，その局所化 $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'}$ は $\mathbb{T}'_{\tau,\psi}(U)_{\mathfrak{m}'}$ あるいは $\mathbb{T}_{\tau,\psi}(U)_{\mathfrak{m}'}$ 加群である．Hecke 作用素 $[UgU]$ について

$$\langle [UgU]\, f, h\rangle_{\tau,\psi,U} = \psi(\det g)\langle \left[f, Ug^{-1}U\right] h\rangle_{\tau,\psi,U}$$

が満たされる．特に, ペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau,\psi,U}$ に関する随伴を $(\cdot)^{\vee}$ とすると

$$\left[U\begin{pmatrix}\varpi_v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}U\right]^{\vee} = \psi(\varpi_v)\left[U\begin{pmatrix}\varpi_v^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}U\right] = \left[U\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_v\end{pmatrix}U\right]$$

が分かる．

以降, $\tau = \tau_{(k,w)}$ の場合を考える．埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{E}$ を固定する．$S_{(k,w),\psi}(U,\overline{E})$ のすべての Hecke 固有形式の Hecke 固有値が (固定した埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{E}$ で) E に含まれるように十分 E を大きくとる．Hecke 固有形式 $f \in S_{(k,w),\psi}(U,\mathcal{O})$ に対して Galois 表現 $\rho_{f,\lambda} : G_F \to \mathrm{GL}_2(E)$ が構成される ($\Sigma = \emptyset$ の時は本報告集山上氏の記事参照．それ以外の時は本報告集三枝氏の記事参照)．これを束ねて, Galois 表現 $G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}'_{(k,w),\psi}(U) \otimes E)$ が構成される．擬表現の理論 (本報告集山上氏の記事参照) あるいは [Ca3] を用いると, 非 Eisenstein イデアル $\mathfrak{m}'$ に対して, Galois 表現

$$\rho_{\mathfrak{m}'} : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}'_{(k,w),\psi}(U)_{\mathfrak{m}'})$$

で

- $v \notin S$ に対して, $\rho_{\mathfrak{m}'}$ は v で不分岐で, $\mathrm{Tr}\rho_{\mathfrak{m}'}(\mathrm{Fr}_v) = T_v$,
- $\det \rho_{\mathfrak{m}'} = \psi\varepsilon$

を満たすものが構成される (4 章で適用する時には絶対既約で保型的な $\bar{\rho}$ に対応する非 Eisenstein イデアルとして $\mathfrak{m}'$ をとることになる)．$\mathfrak{m}'$ を $\bar{\rho}$ に対応する $\mathbb{T}'_{(k,w),\psi}(U)$ の極大イデアルとする．$\mathfrak{m}'$ の上にある $\mathbb{T}_{(k,w),\psi}(U)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を 1 つ選ぶ (各 $\mathfrak{p} \mid p$ での通常性 (oridinarity) データに応じて $\mathfrak{m}$ が決まる．あるいは $\mathfrak{m}$ により通常性データが定まる．4 章参照)．$\bar{\rho}$ は既約なのでこれは非 Eisenstein イデアルである．$R^{\psi}_{F,S}$ の普遍性より, 射

$$R^{\psi}_{F,S} \to \mathbb{T}'_{(k,w),\psi,\mathcal{O}}(U)_{\mathfrak{m}'} \tag{6}$$

を得る．これが全射であることが $\mathrm{Tr}\rho_{\mathfrak{m}'}(\mathrm{Fr}_v) = T_v$ $(v \notin S)$ からすぐに分かる．$R = T$ を示したいのはこの射ではなく, $\mathbb{T}$ に対応するような $R^{\psi}_{F,S}$ の商 (に各 $\mathfrak{p} \mid p$ での跡を R と $\mathbb{T}$ にそれぞれつけ加えたもの) である．

以降, $w = (0,\dots,0)$ の場合を考える．$\rho_{\mathfrak{m}'}$ の法 $\mathfrak{m}'$ 還元を $\bar{\rho}$ とおく．F の有限素点の有限集合 Q で各 $v \in Q$ に対して

- D は v で不分岐,
- $v \notin S$ (従って, $(O_D)_v^\times \cong \mathrm{GL}_2(O_{F_v})$),
- $Nv \equiv 1 \mod p$ (特に, v は p の上にない),
- $\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)$ は相異なる固有値 $\alpha_v \neq \beta_v$ をもつ

を満たすものをとる. Hensel の補題より, 多項式 $X^2 - T_v X + (Nv)\psi(\varpi_v)$ は $\mathbb{T}'_{(k,w),\psi}(U)_{\mathfrak{m}'}$ で $(X - A_v)(X - B_v)$ と分解する. ここで $A_v \equiv \alpha_v \mod \mathfrak{m}'$, $B_v \equiv \beta_v \mod \mathfrak{m}'$. 各 $v \in Q$ に対して, Δ_v を $(O_F/v)^\times$ の最大 p 冪商とし, $\Delta_Q := \prod_{v\in Q} \Delta_v$ とおく. U の部分群 $U_Q \subset U_Q^-(\subset U)$ を以下のように定義する:

$$U_Q := \left\{ g \in U \;\middle|\; 各\, v \in Q\, に対して\, g_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c \equiv 0 \mod \varpi_v,\ ad^{-1} \mapsto 1 \in \Delta_v \right\},$$

$$\subset U_Q^- := \left\{ g \in U \;\middle|\; 各\, v \in Q\, に対して\, g_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c \equiv 0 \mod \varpi_v \right\}.$$

$U_Q^-/U_Q \cong \Delta_Q$ である. $\mathbb{T}_{k,\psi}(U_Q)$ と Hecke 作用素 $\left\{ \mathbf{U}_{\varpi_v} := \left[U_Q \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_Q \right] \right\}_{v \in Q}$ で $\mathcal{O}$ 上生成される $\mathrm{End}(S_{k,\psi}(U_Q, \mathcal{O}))$ の部分 $\mathcal{O}$ 代数を $\tilde{\mathbb{T}}_{k,\psi}(U_Q)$ とおく. $\tilde{\mathbb{T}}_{k,\psi}(U_Q^-)$ も同様に定義する. $\tilde{\mathbb{T}}_{k,\psi}(U_Q^-)_{\mathfrak{m}}$ の極大イデアルは, 各 $v \in Q$ に対して α_v と β_v のどっちを選ぶかによって $2^{\#Q}$ 個の選び方がある. R^{ψ}_{F,S_Q} の $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 代数構造を定める時に選んだ $\{\alpha_v\}_{v\in Q}$ に対応する極大イデアルを $\mathfrak{m}_Q^-$ とする. つまり, $\mathfrak{m}_Q^-$ は

- λ,
- すべての $v \notin S$ について $T_v - \mathrm{Tr}\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_v)^\sim$,
- すべての Q について $\mathbf{U}_{\varpi_v} - A_v$,

で生成されるイデアル. ここで $(\cdot)^\sim$ は $\mathcal{O}$ への勝手な持ち上げ (λ も入っているので持ち上げにはよらない). $\mathfrak{m}_Q^-$ から誘導される $\tilde{\mathbb{T}}_{k,\psi}(U_Q)_{\mathfrak{m}}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_Q$ とする.

$$\mathbb{T} := \mathbb{T}_{k,\psi}(U)_{\mathfrak{m}},\ \mathbb{T}_Q := \tilde{\mathbb{T}}_{k,\psi}(U_Q)_{\mathfrak{m}_Q}$$

$$H := S_{k,\psi}(U, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}},\ H_Q := S_{k,\psi}(U_Q, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_Q}$$

とおく. $a \in \Delta_Q$ に対してダイヤモンド作用素 $\langle a \rangle := \left[U_Q \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_Q \right]$ が定義される ($\tilde{a} \in \prod_{v\in Q}(O_F/v)^\times$ は a の勝手な持ち上げ). これにより $\mathbb{T}_Q$ は $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 代数, H_Q は $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 加群の構造が入る. また, 射

$$R^{\psi}_{F,S_Q} \to \mathbb{T}'_{k,\psi}(U_Q)_{\mathfrak{m}'_Q} \to \mathbb{T}_Q$$

は $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 代数構造と整合的である (ここで $\mathfrak{m}'_Q := \mathfrak{m}_Q \cap \mathbb{T}'_{k,\psi}(U_Q)$).

補題 2.3 次が成立:

1. $H_Q/\mathfrak{a}_Q \xrightarrow{\sim} S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_Q^-}$,

2. H_Q は自由 $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 加群,

3. 各 $v \in Q$ に対して対応 $\eta : f \mapsto A_v f - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} f$ は同型

$$S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_{Q-\{v\}}^-} \xrightarrow{\sim} S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_Q^-}$$

を誘導する. ここで $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} f$ は f への右移動による作用.

証明 1. ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\psi,U_Q^-}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\psi,U_Q}$ を使って双対を考えると, 射

$$S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O}) \otimes E/\mathcal{O} \to (S_{k,\psi}(U_Q, \mathcal{O}) \otimes E/\mathcal{O})^{\Delta_Q}$$

が同型を言えば十分. これは仮定 (Neatness) と同型 (5) (で U を U_Q^-, U_Q に置き換えたもの) から明らか.

2. を示す. 任意の $t \in (D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$ に対して $[U_Q^- : U_Q]$ は $\#(U_Q^- \mathbb{A}_f^\times \cap x^{-1} D x)/F^\times$ と互いに素であることと同型 (5) より,

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} S_{k,\psi}(U_Q, \mathcal{O}) = [U_Q^- : U_Q] \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})$$

を得る. これは $\#\Delta_Q \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})$ と等しいので, 主張は 1. より従う.

3. を示す. まず 3. で与えられた対応 η が $\mathfrak{m}_{Q-\{v\}}^-$ での局所化を経由することを示す. $\mathbf{U}_{\varpi_v} \eta = \eta A_v$ を示せば十分.

$$\mathbf{U}_{\varpi_v} = T_v - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} = A_v + B_v - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}$$

と

$$\mathbf{U}_{\varpi_v} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} = (Nv) \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} = (Nv)\psi(\varpi_v) = A_v B_v$$

より

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\varpi_v} \eta &= \mathbf{U}_{\varpi_v}(A_v - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}) \\ &= (A_v + B_v - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}) A_v - A_v B_v = A_v(A_v + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}) = \eta A_v \end{aligned}$$

が分かる.

次にペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle_{k,\psi,U_Q^-}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{k,\psi,U_{Q-\{v\}}^-}$ に関する自然な埋め込み $\iota : S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-) \hookrightarrow S_{k,\psi}(U_Q^-)$ の随伴 $\iota^\vee$ と η の合成 $\iota^\vee\eta$ を計算する. $\iota^\vee\iota = Nv+1$ と

$$\iota^\vee \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}^\vee \iota\right)^\vee = \left[U_{Q-\{v\}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} U_{Q-\{v\}}\right]^\vee$$
$$= \left[U_{Q-\{v\}} \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{Q-\{v\}}\right] = T_v = A_v + B_v$$

より (2 つ目の等式はほぼ Hecke 作用素の定義),

$$\iota^\vee\eta = (Nv+1)A_v - (A_v+B_v) = (Nv)A_v - B_v \notin \mathfrak{m}_Q^-$$

と分かる. よって, η は単射で余核はトーションがないことが分かる. 各 $v \in Q$ に対して $\alpha_v Nv \neq \beta_v$, $\beta_v Nv \neq \alpha_v$ なので, $\bar\rho$ の変形で $\det = \psi\varepsilon$ であるものの v での導手はちょうど v になる ([Y, 補題 3.5] 参照. ここでは $\det = \psi\varepsilon$ となるものを考えるので [Y, 補題 3.5] の 2. の場合は現れないことに注意. [Y, 注意 3.6.2] の直後の $q \in Q$ に関する議論も参照). よって,

$$S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_Q^-} = \left(S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O}) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O})\right)_{\mathfrak{m}_Q^-}$$

が成り立つ.

$$\mathbf{U}_{\varpi_v}\left(f_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} f_2\right) = (T_v f_1 + (Nv)\psi(\varpi_v) f_2) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} f_1$$

なので, $\mathbf{U}_{\varpi_v}$ は $S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O}) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O})$ に対して行列

$$\begin{pmatrix} T_v & (Nv)\psi(\varpi_v) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で作用する. この行列の固有値は A_v と B_v であり, これは法 λ で相異なるので, $S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O}) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O})$ は $\mathfrak{m}_Q^-$ で局所化すると $S_{k,\psi}(U_{Q-\{v\}}^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_{Q-\{v\}}^-}$ と同型になる. □

系 2.4 H_Q は自由 $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ 加群であり,

$$H_Q/\mathfrak{a}_Q \cong H$$

が成立. □

証明 最初の主張は補題の 2. 次の主張は補題の 3. を帰納的に用いると同型

$$H \xrightarrow{\sim} S_{k,\psi}(U_Q^-, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}_Q^-}$$

を得る．これと補題の 1. をあわせると系が従う．□

[Y, 3 章] では群のコホモロジーを用いた de Shalit の議論を使うなど同様の結果を示すのは非自明だったが, すべての無限素点で分岐する四元数代数上の保型形式を考えるとこの結果は非常に簡単に示されたことに注意．これは対応する志村多様体が 0 次元になるからである．

3 局所的な議論.

前章までの結果から, 各 $v \in \Sigma_p$ に対して $R_v^{\psi,\square}$ の商 $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ で (ψ の F_v への制限も ψ とした) 以下を満たすものを構成すれば命題 1.1 が適用できる状況になる (注意 2.2.1 参照):

1. $\overline{R}_v^{\psi,\square}[1/p]$ は E 上形式的滑らか,
2. $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ の $\mathcal{O}$ 上の相対次元は $v \in \Sigma$ の時 3 で, $v \mid p$ の時 $[F_v : \mathbb{Q}_p] + 3$ である,
3. $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ **は整域である**,
4. 合成 $R_v^{\psi,\square} \to R_{F,S_{Q_n}}^{\psi,\square} \to \mathbb{T}_{Q_n}^{\square} := \mathbb{T}_{Q_n} \otimes_{R_{F,S_{Q_n}}^{\psi}} R_{F,S_{Q_n}}^{\psi,\square}$ は $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ を経由する.

よって, 4. を除いて局所的な話になる．また, 4. を除いて Galois 側のみの話になる．本章で構成した商に対して, 4. は大域局所整合性を用いて示される．これは定理 4.1 の証明中に示されるので, 本章では以降 Galois 側の局所的な話を扱う.

$v \in \Sigma_p$ に対して $K := F_v$ とおく．G_K の有限位数の不分岐指標 $\psi : G_K \to \mathcal{O}^\times$ を固定する．3.1 節では $v \in \Sigma$ の時, 3.2 節では $v \mid p$ の時を扱う．$v \in \Sigma$ の時は容易であり, $v \mid p$ の時の “toy モデル” である．$v \mid p$ の時は整 p 進 Hodge 理論 (本報告集望月氏の記事参照) を用いて定義される “有限平坦モデルのモジュライ”$\mathscr{GR}_{V_\mathbb{F}}$ を用いるが, その定義と性質は本報告集今井氏の記事で扱われる.

注意 3.0.1 本稿では潜在的 Barsotti-Tate 変形を扱うが, 中間重さのクリスタリン変形についての $R^{\mathrm{red}} = T$ でもこれまでの部分の話は全く同様であり, 上の性質を満たす局所変形環の構成のみが変更点である．そこでは “有限平坦モデルのモジュライ” を “Wach 加群のモジュライ” で置き換えることで構成される．本報告集中村氏の記事参照.

3.1 $v \nmid p$ の場合.

G_K の不分岐指標 γ で $\gamma^2 = \psi$ を満たすものとする (ただひとつ存在する). $\bar{\rho} : G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現で以下を満たすものとする:

1. $\det \bar{\rho} = \overline{\psi}\varepsilon$ ($\psi\varepsilon$ の法 λ 還元),
2. $(\bar{\rho}((\varepsilon\gamma)^{-1}))^{G_K} \neq 0$.

ここで $(\varepsilon\gamma)^{-1}$ は指標による捻り. $\bar{\rho}$ の表現空間を $V_{\mathbb{F}}$ とし, その基底 $\beta_{\mathbb{F}}$ を固定する. $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A に対して $\bar{\rho}$ の変形 ρ_A で $\det \rho_A = \psi\varepsilon$ を満たすもののなす圏を考えると $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D^{\psi}_{V_{\mathbb{F}}}$ を得る. 同様に枠付変形のなす亜群 $D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ も得られる.

一般に $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 D に関して少し言葉を準備する. 亜群 D に対して集合に値をもつ関手 $A \mapsto$ ($D(A)$ の同型類のなす集合) を $|D|$ と書くことにする. $|D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}|$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現可能であることが容易に分かる. 有限局所 $W(\mathbb{F})[1/p]$ 代数で剰余体が E であるもの (それ自身標準的に E 代数になる) のなす圏を $\mathfrak{AR}_E$ とする ($\mathfrak{AR}_E$ の対象は p が可逆であるので一般ファイバーで考えていることを分かりやすくするために記号として A でなく F を以降ではしばしば使い F の部分 $W(\mathbb{F})$ 代数に記号 A をとっておくが, もちろん F は体ではない). $D(\mathcal{O})$ の対象 ξ に対して $\mathfrak{AR}_E$ 上の亜群 $D_{(\xi)}$ を以下のように定義する. $\mathfrak{AR}_E$ の対象 F に対して,

$$D_{(\xi)}(F) := \varinjlim_{A} (D(A) \text{ の対象 } \eta \text{と}, A \to \mathcal{O} \text{ と整合する射 } \alpha : \eta \to \xi \text{の組 } (\eta, \alpha) \text{ のなす圏})$$

ここで, F の部分 $W(\mathbb{F})$ 代数 A で $A \otimes_{\mathcal{O}} E = F$ を満たすものと $W(\mathbb{F})$ 代数の射 $A \to \mathcal{O}$ の組で自然な埋め込みについて極限をとっている. 亜群 D が完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 R で副表現可能の時, ξ から誘導された射 $R \otimes_{\mathcal{O}} E \to E$ の核で $R \otimes_{\mathcal{O}} E$ を完備化して得られる完備局所 $W(\mathbb{F})[1/p]$ 代数を $\widehat{R}_{\xi}$ とおくと,

$$D_{(\xi)} \text{ は } \widehat{R}_{\xi} \text{ で副表現可能である} \tag{7}$$

ことも難しくなく分かる ([K1, Lemma (2.3.3)] 参照). また, $D = D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ に対して, $\xi \in D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O})$ をとり V_{ξ} を対応する $\mathcal{O}$ 上の表現に $\otimes_{\mathcal{O}} E$ したものとする (これを対応する E 上の表現と呼ぶことにする). $D^{\square}_{V_{\xi}}$ を V_{ξ} の枠付変形で $\det = \psi\varepsilon$ を満たすもののなす $\mathfrak{AR}_E$ 上の亜群とすると, 自然な射により $\mathfrak{AR}_E$ 上の亜群の圏同値

$$D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}},(\xi)} \xrightarrow{\sim} D^{\psi,\square}_{V_{\xi}} \tag{8}$$

も難しくなく得られる ([K1, Proposition (2.3.5)] 参照). これらは普遍変形環の一般ファイバーでの完備局所環を調べる時に使うテクニックである.

$W(\mathbb{F})$ 代数 A とその冪零イデアル I で $\lambda A \subset I$ を満たすものの組 (A, I) と (A, I) から (B, J) への射として I を J に送るもののなす圏を $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ とする. 標準的な方法で $D^{\psi}_{V_{\mathbb{F}}}$ 及び

$D_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ は $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群から $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群に拡張される ([K1, (2.1.1)] 参照). $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ を以下のように定義する． $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 (A,I) に対して, $L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}(A,I)$ を, $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}(A,I)$ の対象 V_A と V_A の G_K 安定な階数 1 の部分自由 A 加群 L_A で以下を満たすもののなす組 (V_A, L_A) とする:

- V_A/L_A は射影的 A 加群 (たとえば $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^{\oplus 2} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p \to 0$ のようなものは排除される),
- L_A には G_K は $\gamma\varepsilon$ で作用する (従って V_A/L_A には G_K は γ で作用する),
- A 上局所的に, 短完全系列
$$0 \to L_A \to V_A \to V_A/L_A \to 0$$
は $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A \to \mathrm{Ext}^1_{A[G_K]}(A, A(1)) \cong \mathrm{Ext}^1_{A[G_K]}(A(\gamma), A(\gamma\varepsilon))$ の像の類からくる.

$\mathrm{Spec}\, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ の普遍加群の射影化の $\mathfrak{m}_{R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}}$ についての完備化 $\widehat{\mathbb{P}^1} \to \mathrm{Spec}\, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ の閉部分スキームで $|L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}|$ は副表現可能なので, 形式的 (formal)GAGA よりこれは $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ 上の射影スキーム
$$\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square} \to \mathrm{Spec}\, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$$
で表現される (形式スキームではなくスキームが欲しいので $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ から $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ まで拡張した). この $L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$, $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ 及びそれについての以降の議論は $v \mid p$ の場合の $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ とそれについての議論の “toy モデル” にあたる.

補題 3.1 $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ *について以下が成立:*

1. $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ *は* $W(\mathbb{F})$ *上形式的滑らか,*
2. $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ *の極大イデアルでの特殊ファイバー* $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\psi,\square} := \mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square} \otimes_{R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}} R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}/\mathfrak{m}_{R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}}$ *は連結,*
3. $\xi \in L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}(\mathcal{O})$ *に対して,* $\mathfrak{AR}_E$ *上の亜群の射* $L_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\psi,\square} \to D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\psi,\square}$ *は充満忠実. もし* ξ *に対応する* E *上の表現* V_ξ *が非自明な直和分解をもたなければ, これは圏同値,*
4. *射* $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square} \to \mathrm{Spec}\, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ *は* p *を可逆にすると閉埋入になる.* □

証明 1. を示す. $A \twoheadrightarrow A'$ を局所 Artin $W(\mathbb{F})$ 代数で剰余体が $\mathbb{F}$ の有限次拡大なものの全射として, $|L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}|(A) \to |L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}(A')|$ が全射であることを示せば十分. $|L_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}(A')|$ の元 $(V_{A'}, L_{A'})$ をとる. $V_{A'}$ は $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(1,\varepsilon) \otimes A'$ の類から来る. これは $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(1,\varepsilon) \otimes A$ の類に持ち上がる. これにより $(V_{A'}, L_{A'})$ の持ち上げ (V_A, L_A) を得る.

2. を示す. $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\psi,\square}$ は $\mathbb{F} \cong \mathbb{F}(1)$ かつ $V_{\mathbb{F}}$ が非自明な直和分解をもつ時 (つまり G_K の $V_{\mathbb{F}}$ への作用が γ 倍の時)$\mathbb{P}^1$ になり ($V_{\mathbb{F}}$ が γ で作用する 1 次元部分空間のなす集合は $V_{\mathbb{F}}$ の任意の 1

次元部分空間全体), それ以外は 1 点になる ($\gamma\varepsilon$ で作用する 1 次元部分空間はただ 1 つ) ことから分かる.

3. を示す. $F \in \mathfrak{AR}_E$ に対し V_F を $D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}(F)$ の対象とする. 圏同値 (8) より, V_F は V_ξ の枠付変形に対応する. 最初の主張を示すには, $\gamma\varepsilon$ で作用する V_F の階数 1 の部分自由加群 L_F は存在すれば唯一つであることを示せば十分. $\det_F V_F = \psi\varepsilon$ なので $\mathrm{Hom}_{F[G_K]}(F(\gamma\varepsilon), V_F/L_F) = 0$. よって $\mathrm{Hom}_{F[G_K]}(F(\gamma\varepsilon), V_F) = \mathrm{Hom}_{F[G_K]}(F(\gamma\varepsilon), L_F)$ なので, L_F の唯一性が示される.

最後の主張は V_ξ が非自明な直和分解をもたない時に $\gamma\varepsilon$ で作用する階数 1 の部分自由加群 $L_F \subset V_F$ で商が射影 A 加群になるものが存在することを言えばよい. V_F が自明な枠付変形 $V_\xi \otimes_E F$ と同型であることを言えば十分. 局所 Tate 双対性より

$$\dim_E H^1(K, \mathrm{ad}^0 V_\xi) = \dim_E H^0(K, \mathrm{ad}^0 V_\xi) + \dim_E H^0(K, \mathrm{ad}^0 V_\xi(1)) = 0$$

であり (V_ξ が非自明な直和分解をもたないことを使った), これと F の長さ (length) による帰納法から主張が従う.

4. を示す. 上で示した 3. と性質 (7) より, $\xi \in L^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O})$ に対して射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}\, R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は ξ とその像での完備局所環の間の全射を誘導する (もし V_ξ が非自明な直和分解をもたなければこれは同型). 主張はこれより従う. □

$\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ のスキーム理論的像を $\overline{R}^{\psi,\square} (= \overline{R}^{\psi,\square}_v)$ とおく. 以下の補題が欲しい性質であった.

補題 3.2 $\overline{R}^{\psi,\square}$ について以下が成立*:*

1. 射 $\xi : R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to E$ が $\overline{R}^{\psi,\square}$ を経由する必要十分条件は, ξ に対応する E 上の表現 V_ξ が $E(\gamma)$ の $E(\gamma\varepsilon)$ による拡大になっていること,

2. $\overline{R}^{\psi,\square}[1/p]$ は $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上形式的滑らか,

3. $\mathrm{rel.dim}_{W(\mathbb{F})} \overline{R}^{\psi,\square} = 3$,

4. $\overline{R}^{\psi,\square}$ は整域. □

証明 1. は定義から明らか. 2. は補題 3.1 の 1. と 4. から従う.

3. を示す. V_ξ が非自明な直和分解をもたないような $\xi \in D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O})$ をとる.

$$\begin{aligned} \dim \overline{R}^{\psi,\square}[1/p] &= \dim_E |D^{\psi,\square}_{V_\xi}|(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \\ &= \dim_E |D^{\psi}_{V_\xi}|(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) + 4 - \dim_E(\mathrm{ad} V_\xi)^{G_K} = \dim_E H^1(K, \mathrm{ad}^0 V_\xi) + 3 = 3. \end{aligned}$$

4. を示す. 連結成分のなす集合を H_0 で表すことにする. $\widehat{\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}}$ を $\mathfrak{m}_{R^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}}$ で完備化して得られる形式的スキームとする. 補題 3.1 の 2. より, 全単射

$$H_0(\mathrm{Spec}\, \overline{R}^{\psi,\square}[1/p]) \cong H_0(\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes E) \cong H_0(\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}) \cong H_0(\widehat{\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}}) \cong H_0(\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}},0})$$

を示せば主張が得られる．補題 3.1 の 4. より p を可逆にすると $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ と $\operatorname{Spec}\overline{R}^{\psi,\square}$ は同型であることから最初の全単射が分かる．補題 3.1 の 1. より $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F}$ は特に被約であるので 2 番目の全単射が分かる (e を $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}\otimes E$ の連結成分に対応する射影子 (idempotent) とする．ϖ を E の素元とすると，ある非零整数 n が存在して $\varpi^n e$ は $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}$ に延びるが，$(\varpi^n e)^2=\varpi^n(\varpi^n e)$ なのでもし $n\geq 1$ だと $\varpi^n e$ は $\mathscr{L}_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\square}\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F}$ 上非零かつ冪零になり被約性と矛盾)．形式的 GAGA(あるいは形式的関数定理) より 3 番目の全単射が従う．4 番目の全単射は定義から分かる．□

3.2　$v\mid p$ の場合.

$\bar{\rho}: G_K\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現, $V_{\mathbb{F}}$ をその表現空間とする．$V_{\mathbb{F}}$ の変形のなす亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}$ と枠付変形のなす亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ が定義される．$D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ で副表現可能である．$\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_K]}V_{\mathbb{F}}=\mathbb{F}$ の時, $D_{V_{\mathbb{F}}}$ も完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現可能である．

仮定

- $V_{\mathbb{F}}$ は O_K 上の有限平坦群スキームの一般ファイバーからくる

をおく．$D_{V_{\mathbb{F}}}$ の充満部分亜群として O_K 上の有限平坦群スキームからくる $V_{\mathbb{F}}$ の変形及び枠付変形のなす亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}$, $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ が定義される．射 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}\to D_{V_{\mathbb{F}}}$ 及び射 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}\to D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ は相対的表現可能である ([R] 参照)．特に, $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ は $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ の商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ で副表現可能であり, $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_K]}V_{\mathbb{F}}=\mathbb{F}$ の時 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}$ は $R_{V_{\mathbb{F}}}$ の商 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}$ で副表現可能である．

まず $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ の一般ファイバーを調べる．$\xi\in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}(\mathcal{O})$ とし, V_ξ を対応する E 上の表現とする．前節で説明したように $\mathfrak{AR}_E$ 上の亜群 $D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\mathrm{fl},\square}$ が定義される．これは $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}\otimes_{W(\mathbb{F})}E$ を ξ が誘導する射 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}\otimes_{W(\mathbb{F})}E\to E$ の核で完備化して得られる完備局所 E 代数 $\widehat{R}_{\xi}^{\mathrm{fl},\square}$ で副表現される．$D_{V_\xi}^{\mathrm{crys},\square}$ を V_ξ のクリスタリンな枠付変形のなす $\mathfrak{AR}_E$ 上の亜群とする．

命題 3.3 圏同値 (8) と同様な圏同値 $D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\square}\xrightarrow{\sim}D_{V_\xi}^{\square}$ を $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ に制限すると, 圏同値

$$D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\mathrm{fl},\square}\xrightarrow{\sim}D_{V_\xi}^{\mathrm{crys},\square}$$

が得られる．□

証明　F を $\mathfrak{AR}_E$ の対象とする．A を F の有限部分 $\mathcal{O}$ 代数で $A\otimes_{\mathcal{O}}E=F$ を満たすものとする．$D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}(A)$ の対象 V_A と任意の自然数 n に対して, V_A/p^nV_A は O_K 上の有限平坦群スキームからくる．よって, V_A は O_K 上の p 可除群からくる ([R, 2.3.1]) ので $V_F=V_A\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ はクリスタリンである．これより, 射 $D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\square}\xrightarrow{\sim}D_{V_\xi}^{\square}$ の $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}$ への制限の像は $D_{V_\xi}^{\mathrm{crys},\square}$ に入ることが分かる．この射 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\square}\to D_{V_\xi}^{\mathrm{crys},\square}$ は圏同値の制限なので充満忠実である．残りはこの射の本質的全射性である．$D_{V_\xi}^{\mathrm{crys},\square}(F)$ の対象 V_F をとる．$\mathbb{Q}_p$ 上の表現としては V_F は V_ξ の拡大の繰り返しにより得られるので, V_F の Hodge-Tate 重みはすべて 0 か 1 である．圏同値 $D_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}^{\square}\xrightarrow{\sim}D_{V_\xi}^{\square}$

により, G_K 安定な部分自由 A 加群 $V_A \subset V_F$ で $V_A \otimes_A F \xrightarrow{\sim} V_F$ となるものが存在する (A は F の有限部分 $\mathcal{O}$ 代数で $A \otimes_{\mathcal{O}} E = F$ を満たすもの). 一方 [B3, 5.3.1] より, G_K 安定な $\mathbb{Z}_p$ 格子 $L \subset V_F$ で L は p 可除群からくるものが存在する. L を L と V_A で生成される格子で取り替えることで $V_A \subset L$ と仮定してよい. 商 L/V_A はある p 冪 p^r で消える. よって, 各自然数 $n > r$ に対して $V_A/p^{n-r}V_A$ は L/p^nL の部分商である ($L/p^nL \twoheadrightarrow L/p^{n-r}V_A \supset V_A/p^{n-r}V_A$). 従って [R, 2.1] より $V_A/p^{n-r}V_A$ は有限平坦群スキームからくるので $V_A \in D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}},(\xi)}(A)$. よって本質的全射性が得られた. □

$\operatorname{Spec} R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分の中で, $\det|_{I_K} = \varepsilon$ (I_K は K の惰性群) となる変形のなす連結成分の和集合の $\operatorname{Spec} R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ における閉包を $\operatorname{Spec} R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ とおく ([K1] では $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を任意の $a \in K$ に対して

$$\det{}_E(a|D_{\mathrm{crys}}(V_\xi)_K/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{crys}}(V_\xi)_K) = \mathrm{Norm}_{K/\mathbb{Q}_p} a$$

が成立するような $D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O}) \ni \xi : R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathcal{O}$ のなす $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分の閉包を考えているが, 本稿で考える状況ではより簡単な定義 ([K3, (2.6)]) で述べた. より一般に有限平坦群スキームからくる d 次元表現 $V_{\mathbb{F}}$ と "p 進 Hodge 型" $\mathbf{v}$ に対して $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ が定義できる. [Sen] の主定理より, $\operatorname{Spec} R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ において特性多項式は解析的に変動するので "p 進 Hodge 型" は $\operatorname{Spec} R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分上で一定であることに注意. 詳しくは本報告集今井氏の記事参照).

以降 $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}} \neq 0$ を仮定する. $\det = \psi\varepsilon$ に対応する $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の商を $R^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ とおく. 次の命題が欲しい性質のうち整域性以外の部分である. $R^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分を選んでその $R^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ における閉包が実際に欲しい $\overline{R}^{\psi,\square}$ になる.

命題 3.4 $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ および $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ について以下が成立:

1. $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ は $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上形式的滑らか. 特にそのいくつかの連結成分の和集合である $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ も $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上形式的滑らか,

2. $\mathrm{rel.dim}_{W(\mathbb{F})} R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}} = [K:\mathbb{Q}_p] + 4$. 特に,

$$\mathrm{rel.dim}_{W(\mathbb{F})} R^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}} = [K:\mathbb{Q}_p] + 3. \ \square$$

この証明には以降で出てくる $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$, 特に Kisin の $\mathfrak{S}$ 加群の理論は使われないことに注意.

証明 1. を示す. F を $\mathfrak{AR}_E$ の対象, $I \subset F$ を $I^2 = 0$ を満たすイデアルとする. $V_{F/I}$ を $|D^{\mathrm{crys},\square}_{V_\xi}|(F/I)$ の元とする. これが $|D^{\mathrm{crys},\square}_{V_\xi}|(F)$ の元に持ち上がることを示せば十分. クリスタリン表現の圏は弱認容的フィルトレイション付き φ 加群の圏と圏同値なので, 後者の圏で持ち上げを構成すれば十分. 以降 $\otimes_{\mathbb{Z}_p} K$ を $(\cdot)_K$ で表すことにする. $M_{F/I}$ を $V_{F/I}$ に対応する $(F/I)_K$ 上の弱認容的フィルトレイション付き φ 加群とする (通常の K 上の弱認容的フィルトレイション付き φ 加群ではなく, F/I 作用をもつものを考えている. この時, フィルトレイションのすべての部分商が射影 F/I 加群になるものと圏同値になる. [K1, Lemma (1.3.2), Proposition (1.3.4)] 参照). $V_{F/I}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の表現としては V_ξ の拡大の繰り返しにより得られるので, $\mathrm{Fil}^1 M_{F/I,K} = 0$, $\mathrm{Fil}^{-1} M_{F/I,K} = M_{F/I,K}$ である. Frobenius 準同型の議論により $M_{F/I}$ は自由 $F/I \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})[1/p]$ 加群である (Frobenius 準同型は極大イデアルを可遷的に置換するので各極大イデアルで局所化した時に階数は一定であることが分かるという議論. [K1, Lemma (1.2.3)] の (4) 参照). 自由 $F \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})[1/p]$ 加群 M_F と同型 $M_F \otimes_F F/I \xrightarrow{\sim} M_{F/I}$ を選ぶ. $M_{F/I,K}$ のフィルトレイションによる部分商は射影 $(F/I)_K$ 加群なので, $M_{F,K}$ の部分射影 F_K 加群 $\mathrm{Fil}^0 M_{F,K}$ で $M_{F,K}/\mathrm{Fil}^0 M_{F,K}$ も F_K 上射影的で $\mathrm{Fil}^0 M_{F,K} \otimes_F F/I \cong \mathrm{Fil}^0 M_{F/I,K}$ を満たすものが存在することが分かる. 同様に, 射 $\varphi^*(M_{F/I}) \to M_{F/I}$ も射 $\varphi^*(M_F) \to M_F$ に持ち上がる. あとはこのフィルトレイション付き φ 加群 M_F が弱認容的であることを示せば主張が従う. $I^2 = 0$ より完全系列

$$0 \to I \otimes_{F/I} M_{F/I} \to M_F \to M_{F/I} \to 0$$

を得るが, これは φ とも整合的であるし, $\mathrm{Fil}^0()_K$ をとっても完全である. I を自由 F/I 加群としての表示をとると, $I \otimes_{F/I} M_{F/I}$ は弱認容的と分かる (弱認容的フィルトレイション付き φ 加群の圏は余核をもつので). また, 弱認容的フィルトレイション付き φ 加群の圏は拡大でも閉じているので, M_F が弱認容的であることが分かった.

2. を示す. $\xi \in D^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O})$ をとる. G_K の E 上の表現に対して D_{dR}, D_{crys} をそれぞれ $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 上のフィルトレイション付き加群及びフィルトレイション付き φ 加群を与える Fontaine の関手とすると, 次が成立.

$$\begin{aligned}
&\dim R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p] = \dim_E |D^{\mathrm{crys},\square}_{V_\xi}|(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \\
&= \dim_E |D^{\mathrm{crys}}_{V_\xi}|(E[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) + 4 - \dim_E (\mathrm{ad}V_\xi)^{G_K} \\
&= \dim_E H^1_{\mathrm{f}}(K, \mathrm{ad}V_\xi) + 4 - \dim_E (\mathrm{ad}V_\xi)^{G_K} \\
&= \dim_E D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{ad}V_\xi)/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{ad}V_\xi) + 4 = [K : \mathbb{Q}_p] + 4.
\end{aligned}$$

ここで, 4 番目の等号は de Rham 表現 V に対する完全系列 ([BK, Corollary 3.8.4])

$$\begin{aligned}
0 \to &H^0(K, V) \to D_{\mathrm{crys}}(V) \oplus \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V) \\
&\xrightarrow{(x,y)\mapsto((1-\varphi)(x),\iota(x)-y)} D_{\mathrm{crys}}(V) \oplus D_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1_{\mathrm{f}}(K, V) \to 0
\end{aligned}$$

から従う. 5 番目の等号は $\mathrm{ad}V_\xi$ の Fil^0 は V_ξ の Fil を保つ準同型全体ということと

$$M_2(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K) \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \cong E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$$

から従う. □

残りは整域性である. 亜群 $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を考える時, 有限平坦群スキームの一般ファイバーからくる変形という条件においてやってくる有限平坦群スキームは一般に唯一ではない. そこで

“有限平坦群モデルのモジュライ” を考えると ($D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上から $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上に拡張した後で) $\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ 上のスキーム

$$\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$$

が得られる．この構成には**整 p 進 Hodge 理論における Kisin の $\mathfrak{S}$ 加群の理論**を使い, (幾何的データでなく) 半線形代数データでなされる．また, 構成で非自明な Breuil の充満忠実性定理 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{tor}}(G_K) \hookrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{K_\infty})$ ([B1, Theorem 3.4.3] 及び本報告集望月氏の記事参照) が使われている．Galois 表現の方で $\det|_{I_K} = \varepsilon$ に対応する条件を $\mathfrak{S}$ 加群の言葉で置き換えることで $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ の対応する閉部分スキーム

$$\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$$

が得られる (単にファイバー積で定義してもいいが, 対応するモジュライが半線型代数的データで記述されることが後の計算で重要になる．また, この構成でも Breuil の充満忠実性定理 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{tor}}(G_K) \hookrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G_{K_\infty})$ を再び使う)．一般に有限平坦群スキームからくる d 次元表現 $V_{\mathbb{F}}$ と “p 進 Hodge 型” $\mathbf{v}$ に対して $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ 及び $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ が定義される．以下で述べる $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ の性質は局所普遍変形環の極大イデアルでの特殊ファイバー $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の計算以外は適当に修正 (適当な条件が満たされない時は $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F}$ で p 冪トーションを消すなど) すると成立する．また, モジュライ $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ の元に対して Galois 表現での通常 (ordinary) 性に対応する “通常性” が定義できる．上述の事柄について詳しいことは本報告集今井氏の記事に譲る．以下では今井氏の記事で証明される $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ の性質を述べた後, $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ の性質から $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の性質を導くことをする.

命題 3.5 $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ について以下が成立:

1. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F}$ は被約かつ正規で有理特異点のみもつ,
2. 射 $\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} : \mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は p を可逆にすると同型になる．□

注意 3.5.1 命題の 2. と命題 3.4 の 1. から $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} W(\mathbb{F})[1/p]$ の形式的滑らか性が従うことにも注意 ($v \nmid p$ の時はモジュライ $\mathscr{L}^{\psi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の形式的滑らか性から $\overline{R}^{\psi,\square}[1/p]$ の形式的滑らか性を出したが, $v \mid p$ の時は逆である).

[K1] では ξ をとって $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ に対して主張が述べられているが, 本稿では [K3] の方に従った．□

この命題の証明は今井氏の記事に譲る．証明の大雑把な方針としては, 1. は ($\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ を定義する時に使ったような半線型代数的データを用いて) 補助的なモジュライを 3 つほど導入し, それらを通じて $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ を [DP] で考察された Hilbert モジュラー多様体 ($\dim V_{\mathbb{F}} = 2$ の時) や [PR] で考察された志村多様体 ($\dim V_{\mathbb{F}}$ が一般の時) の完備局所環と関係付けることで証明される．2. について, 対応する関手の本質的全射性は Kisin の $\mathfrak{S}$ 加群の理論によりモジュ

ライを定義した半線型代数的データから有限平坦スキームあるいはp可除群が復元できること (本報告集望月氏の記事参照) を使って示され, 充満忠実性はTateの定理より固定したGalois表現を与えるp可除群は一意的があることを使って証明される ([K3] では$\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$が$p$を可逆にして同型になることを "Tateの定理の幾何的化身 (incarnation)" と述べている).

次の定理の2.がこの分野に新しい進展をもたらした鍵である.

定理 3.6 $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$の極大イデアルでの$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$の特殊ファイバーを

$$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0} := \mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} \otimes_{R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}} R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}/\mathfrak{m}_{R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}}$$

とおく. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$の通常な点からなる連結成分の和集合を$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$とおく.

1. ([K1, Proposition (2.5.15)])

   (a) $V_{\mathbb{F}}$が2つの不分岐指標の直和$\chi_1 \oplus \chi_2$に分解されない時,

   $$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} = \{1\text{点}\},$$

   (b) $V_{\mathbb{F}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ (χ_1, χ_2は不分岐指標), かつ$\chi_1 \neq \chi_2$の時,

   $$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} = \{2\text{点}\}$$

   で, 対応する有限平坦モデルは$G^*_{\chi_1^{-1}} \oplus G_{\chi_2}$と$G^*_{\chi_2^{-1}} \oplus G_{\chi_1}$ (G_{χ_1}, G_{χ_2}はそれぞれχ_1, χ_2に対応する有限エタール群スキームであり, $(\cdot)^*$はCartier双対),

   (c) $V_{\mathbb{F}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ (χ_1, χ_2は不分岐指標), かつ$\chi_1 = \chi_2$の時,

   $$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} \cong \mathbb{P}^1$$

   で, 対応する有限平坦モデルはすべて$G^*_{\chi_1^{-1}} \oplus G_{\chi_1}$と同型.

2. ([K1, Proposition (2.5.6)], [G, Proposition 2.3], [I, main theorem])

   $$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0} \setminus \mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}\ \text{は連結.}\ \square$$

注意 3.6.1 まず, 同じ連結成分に入る元はともに通常かともに非通常であることも容易に分かることに注意する. 定理の1.は難しくないが2.は非自明である. [K1, Proposition (2.5.6)] では$\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$の仮定のもとで2.が証明された. [G, Proposition 2.3] では, $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_p$かつ$G_K$の表現$V_{\mathbb{F}}$が自明という仮定のもとで2.が証明された ($V_{\mathbb{F}}$が自明という仮定は強いように思われるかもしれないが, 体拡大してこの場合に帰着できるので応用上は十分である. 定理4.1の証明参照. また, 応用に関して [G, Lemma 3.3] には誤りがあるため [G, Theorem 3.2] は修正しないといけない. [G] のerratum参照). [I, main theorem] では, $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_p$ ($V_{\mathbb{F}}$は一般) という仮定のもとで2.が証明された. □

この定理の証明も今井氏の記事に譲る. 2. の大雑把な方針としては, $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ は半線型代数的データで定義されているので, 行列の具体的な計算をすることで $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}$ の中に入るような $\mathbb{P}^1$ でパラメータ付けされた $\mathfrak{G}$ 加群の族が構成される. そのような $\mathbb{P}^1$ で繰り返し点を別の点と結びつけ, 最終的に与えられた 2 点を結びつけることができることを示すことで証明される.

次の定理が欲しい性質であった.

定理 3.7 $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の通常表現(あるいは非通常表現)に対応する連結成分の和集合の $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ での閉包を $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$(あるいは $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$) とおく. $V_{\mathbb{F}}$ が相異なる 2 つの不分岐指標の直和 $\chi_1 \oplus \chi_2$ に同型の時は χ_1 と χ_2 のどちらか一方 χ_i $(i = 1, 2)$ を選び, $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ において 1 次元の商への Galois 作用が法 λ 還元すると χ_i になるものに対応する連結成分の和集合の $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ での閉包を $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\chi_i,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ とおく. $\overline{R}^{\square}$ を $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$, $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ ($V_{\mathbb{F}}$ が相異なる 2 つの不分岐指標の直和と同型でない時), $R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\chi_i,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ ($V_{\mathbb{F}}$ が相異なる 2 つの不分岐指標の直和と同型の時) のいずれかとする. $\overline{R}^{\psi,\square}$ を $\det = \psi\varepsilon$ に対応する $\overline{R}^{\square}$ の商とすると $\overline{R}^{\psi,\square}$ は整域. □

注意 3.7.1 この定理と命題 3.4 より, $\overline{R}^{\psi,\square}$ は

1. $\overline{R}^{\psi,\square}[1/p]$ は $W(\mathbb{F})[1/p]$ 上形式的滑らか,
2. $\mathrm{rel.dim}_{W(\mathbb{F})}\overline{R}^{\psi,\square} = [K : \mathbb{Q}_p] + 3$,
3. $\overline{R}^{\psi,\square}$ は整域,

を満たすことが分かる.□

証明 連結成分のなす集合を H_0 で表すことにする. $\widehat{\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}}$ を $\mathfrak{m}_{R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}}$ で完備化して得られる形式的スキームとする. 定理 3.6 より, 全単射

$$H_0(\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]) \cong H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes E) \cong H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}) \cong H_0(\widehat{\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}}) \cong H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0})$$

を示せば主張が得られる. 命題 3.5 の 2. より p を可逆にすると $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ と $\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は同型であることから最初の全単射が分かる. 命題 3.5 の 1. より $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F}$ は被約なので 2 番目の全単射が分かる ($v \nmid p$ の時参照). 形式的 GAGA(あるいは形式的関数定理) より 3 番目の全単射が従う. 4 番目の全単射は定義から分かる. □

4 潜在的 Barsotti-Tate 表現の保型性.

本章でも $p > 2$ を仮定する. $p = 2$ は [K5] でも扱われている. 本稿の主定理にいく前に, 準備的な定理を先に示す. そのためにまず次の定義から始める.

定義 4.1 連続表現 $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(E)$ が以下の条件を満たす時に**強い意味で剰余的保型性をもつ**という:

1. 重さ $(2,\ldots,2)$ の Hecke 固有な Hilbert 保型形式 f が存在して, ρ の法 λ 還元 $\bar{\rho}$ は $\bar{\rho} \sim \overline{\rho_{f,\lambda}}$ を満たす,

2. f から定まる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π_f は p を割るすべての素点で特殊表現ではない,

3. p を割る素点 $\mathfrak{p}$ に対して,

$$\rho|_{F_\mathfrak{p}} \text{が潜在的通常} \Leftrightarrow \rho_{f,\lambda}|_{F_\mathfrak{p}} \text{が潜在的通常.} \ \square$$

ここで, 潜在的通常とは $F_\mathfrak{p}$ の有限時拡大の絶対 Galois 群に制限すると通常になることをいう. 上述の定義は [K1, (3.5.4)] の定義と違うことに注意. 最後の条件は, 局所普遍変形環で通常性データに関して同じ連結成分に含まれていることを保障する.

定理 4.1 ([K1, Theorem 3.5.5]) $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(E)$ を連続表現で以下を満たすものとする:

1. ρ は強い意味で剰余的保型性をもつ,

2. $\det\rho = \psi\varepsilon$ で, ψ は有限位数の指標,

3. p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して $\rho|_{F_\mathfrak{p}}$ は潜在的 Barsotti-Tate 表現,

4. $\bar{\rho}|_{F(\zeta_p)}$ は絶対既約,

5. $p > 3$ の時 $[F(\zeta_p) : F] > 2$.

この時, ρ は保型的, つまりある Hecke 固有な Hilbert 保型形式 g が存在して $\rho \sim \rho_{g,\lambda}$. $\square$

証明 f を強い意味での剰余的保型性の条件を満たす Hecke 固有な Hilbert 保型形式とする. Skinner-Wiles の底変換議論 ([SW3], [K1, Lemma (3.5.2)], 及び本報告集加塩氏の記事参照) により (F, f を取り替えて) 以下を仮定してもよい:

1. $[F : \mathbb{Q}]$ は偶数,

2. $\bar{\rho}$ は p の外不分岐,

3. p を割らない有限素点 v に対して, ρ が v で分岐する時は $\rho|_{I_v}$ は冪単 (unipotent) 表現,

4. p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して $\rho|_{F_\mathfrak{p}}$ は Barsotti-Tate 表現,

5. p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して $\rho|_{F_\mathfrak{p}}$ が通常ならば $\bar{\rho}|_{F_\mathfrak{p}}$ は非自明な直和分解を持たないか, あるいは自明表現,

6. f が定める保型表現 π_f はすべての有限素点で不分岐.

ここで, Skinner-Wiles の底変換議論を用いるのは 6. の部分である ([SW3] では, p を割る素点でのレベル下げは扱っていないが, ここでは p を割る素点では π_f は特殊表現でないと仮定しているので, 6. において p を割る素点についても大丈夫である). この時, $\rho|_{F_v}$ は不分岐指標 γ の $\gamma(1)$ による拡大になっている. π_f がすべての有限素点で不分岐なので, 補題 2.3 の 3. の証明中に示した $\mathrm{coker}(\eta)$ の $\mathcal{O}$ 上の平坦性を用いた議論 ([K1, Lemma (3.5.3)] 及び加塩氏の記事参照) により, f を取り替えて

- p を割らない各有限素点 v に対して,

$$\rho|_{F_v} : \text{不分岐} \ \Leftrightarrow (\pi_f)_v : \text{不分岐},$$

$$\rho|_{F_v} : \text{分岐} \ \Leftrightarrow (\pi_f)_v : \text{導手 } 1 \text{ の特殊表現},$$

と仮定してよい. 必要とあれば底変換により $\Sigma := \{v \mid \rho\text{が } v \text{ で分岐}\}$ の位数が偶数と仮定してよい. 底変換あるいは指標による捻りにより $\det \rho = \det \rho_{f,\lambda}$ と仮定してよい.

F を中心にもつ四元数代数 D で分岐する素点の集合が $\Sigma \cup \{v \mid \infty\}$ であるものをとる. D の極大整環 O_D を固定する. $(D \otimes_F \mathbb{A}_f)^\times$ の開コンパクト部分群 $U_0 = \prod_v (U_0)_v$ を全ての有限素点 v に対して $(U_0)_v := (O_D)_v$ で定義する. $S_{2,\psi}(U, \overline{E})$ のすべての Hecke 固有形式の Fourier 係数を含むように E を十分大きくとる. Jacquet-Langlands-清水対応により f は Hecke 固有形式 $f^D \in S_{2,\psi}(U_0, \mathcal{O})$ に対応する. 補助的素数 $\mathfrak{r} \notin \Sigma_p$ を

1. $N\mathfrak{r} \neq 1 \mod p$,

2. $\mathrm{Tr}\bar{\rho}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{r})^2 / \det \bar{\rho}(\mathrm{Fr}_\mathfrak{r}) \neq (1 + N\mathfrak{r})^2 / N\mathfrak{r}$

を満たすようにとる. $[F(\zeta_p) : F] \neq 3$ かつ $\bar{\rho}|_{F(\zeta_p)}$ の絶対既約性より, [DDT, Lemma 4.11] あるいは [DT, Lemma 3] を使うとこのような $\mathfrak{r}$ が存在する. U_0 の部分群 U を $\mathfrak{r}$ 以外の有限素点 v では $U_v := (U_0)_v$, $\mathfrak{r}$ では

$$U_\mathfrak{r} := \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(O_{F_\mathfrak{r}}) \;\middle|\; g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod \varpi_\mathfrak{r} \right\}$$

とおく. $N\mathfrak{r}$ を十分大きくとって U が 2.2 節の仮定 (Neatness) を満たすと仮定する. f^D を $S_{2,\psi}(U, \mathcal{O})$ の元とみる. $S := \Sigma \cup \{\mathfrak{p} \mid p\} \cup \{\mathfrak{r}\}$ とする. $\mathfrak{m}$ を f^D に対応する $\mathbb{T}_\psi(U)$ の極大イデアルとする (p を割る素点での Hecke 作用素を入れたものの方. また, $k = (2, \ldots, 2)$ の時は $\mathbb{T}_{k,\psi}$ を $\mathbb{T}_\psi$ と略記することにしていた). $\{\mathfrak{p} \mid p\}$ の部分集合 σ' を

$$\sigma' := \{T_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{m}\}$$

とおく. σ' の各元 $\mathfrak{p}$ に対して $T_{\mathfrak{p}}$ の $\mathbb{T}_{\psi}(\mathcal{O})/\mathfrak{m}$ での像が $\chi_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}})$ であるような法 p 不分岐指標 $\chi_{\mathfrak{p}}: G_{F_{\mathfrak{p}}} \to \mathbb{F}^{\times}$ をとる ($V_{\mathbb{F}}$ が非自明な直和分解を持たない時は $V_{\mathbb{F}}$ の Galois 作用をもった 1 次元の商での作用により定まる (Galois 表現 $\rho_{\mathbb{T}_{\psi}(U)_{\mathfrak{m}}}: G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}_{\psi}(U)_{\mathfrak{m}})$ について,

$$T_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Tr}(\varphi^{[\mathbb{F}:\mathbb{F}_p]}|D_{\mathrm{crys}}(\rho_{\mathbb{T}_{\psi}(U)_{\mathfrak{m}}}))$$

が成り立つことから分かる. この等号は [K1, Lemma (3.4.2)] 参照) が, $V_{\mathbb{F}}$ が非自明な直和分解 $V_{\mathbb{F}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ で $\chi_1 \neq \chi_2$ となるものをもつ時は, $V_{\mathbb{F}}$ だけからでは $\chi_{\mathfrak{p}}$ は定まらず, 2 通りの可能性がある. これは 3.2 節の記号で $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}[1/p]$ の連結成分が 2 つに分かれていることに対応する. ここでは f^D が入っている方の χ をとってくる, という意味である. 一般に組 $\sigma := (\sigma', \{\chi_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}\in\sigma'})$ で $\chi_{\mathfrak{p}}$ が $V_{\mathbb{F}}|_{F_{\mathfrak{p}}}$ のある Galois 作用をもった 1 次元の商への作用と同じであるものを**通常性データ**という. 通常性データは $\widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}|p} R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\square}$ の 1 つの連結な商と対応する).

命題 1.1 を適用するために B, R, R_n, T, H, H_n をこれから定めていく. 各素点 $v \in \Sigma$ に対して, $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ を $\bar{\rho}|_{F_v}$ に関して3.1 節で定めたものとする. 各素点 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して, $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ を $\bar{\rho}|_{F_{\mathfrak{p}}}$に関して3.1 節で定めたものを通常性データ σ を使って選ぶ. つまり, $\mathfrak{p} \notin \sigma'$ の時は $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square} := R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord},\square}$ とする. $\mathfrak{p} \in \sigma'$ の時, $V_{\mathbb{F}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$ で $\chi_1 \neq \chi_2$ の時は $\chi_{\mathfrak{p}}$ に対応する $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\chi_{\mathfrak{p}},\square}$ を $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ とし, それ以外の時は $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square} := R_{V_{\mathbb{F}}}^{\psi,\mathrm{fl},\mathbf{v},\mathrm{ord},\square}$ とする. $v \in \Sigma_p$ とする. 前章での $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ は $W(\mathbb{F})$ 代数であったが, $\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathcal{O}$ したものを再び $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ とおく. 構成から $\overline{R}_v^{\psi,\square}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦である. $\overline{R}^{\psi,\square}$ は注意 3.7.1 で述べた条件を満たす. より正確には, $\overline{R}_v^{\psi,\square}[1/p]$ は E 上形式的滑らかだけでなく, $\overline{R}_v^{\psi,\square}[1/p]$ は幾何的整 (つまり E の任意の有限次拡大 E' に対して $\overline{R}^{\psi,\square}[1/p] \otimes_E E'$ は整 (= 既約かつ被約)) であることも分かる.

Hecke 環で p を割る素点でも Hecke 作用素 $T_{\mathfrak{p}}$ を付け加えたように, p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ で $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ を少し修正する (通常性データを決めるところで p を割る素点での Hecke 作用素 $T_{\mathfrak{p}}$ が必要であった). $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}$ の構造層の大域切断 $\Gamma(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}, \mathcal{O}_{\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}})$ を係数にもつ普遍特性多項式 $P_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}(T) \in \Gamma(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}, \mathcal{O}_{\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}})[T]$ が存在する ([K1, (2.4.17)]) が, $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ を $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ と $P_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}(T)$ の係数の像で生成される $\mathcal{O}$ 代数とする. 射 $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square} \to \tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ は平坦 $\mathcal{O}$ 代数の間の有限射であり, p を可逆にすると同型になるので, $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ に対しても $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ は注意 3.7.1 で述べた条件を満たす. 同様に $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}[1/p]$ が幾何的整であることも分かる. $\overline{R}_{\Sigma}^{\psi,\square} := \widehat{\otimes}_{v\in\Sigma}\overline{R}_v^{\psi,\square}$, $\overline{R}_p^{\sigma,\psi,\square} := \widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}|p}\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$, $\tilde{R}_p^{\sigma,\psi,\square} := \widehat{\otimes}_{\mathfrak{p}|p}\tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ とする (つまり, $\tilde{R}_p^{\sigma,\psi,\square}$ は通常性データ σ に対応するもの). ここでテンソルは $\mathcal{O}$ 上でとっている.

$$\overline{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square} := \overline{R}_p^{\sigma,\psi,\square}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\overline{R}_{\Sigma}^{\psi,\square}, \quad B := \tilde{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square} := \tilde{R}_p^{\sigma,\psi,\square}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\overline{R}_{\Sigma}^{\psi,\square},$$

とする. $\overline{R}_v^{\psi,\square}$, $\overline{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$, $\tilde{R}_{\mathfrak{p}}^{\psi,\square}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦な整域で, p を可逆にするとは幾何的整かつ E 上形式的滑らかなので, $\overline{R}_{\Sigma}^{\psi,\square}$, $\overline{R}_p^{\sigma,\psi,\square}$, $\tilde{R}_p^{\sigma,\psi,\square}$, $\overline{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square}$, $\tilde{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square}$ も整域になる ([K3, Corollary (1.4)] の証明中の注釈参照). $R_{F,S}^{\psi}$, $R_{F,S_{Q_n}}^{\psi}$, $R_{F,S}^{\psi,\square}$, $R_{F,S_{Q_n}}^{\psi,\square}$ を 2 章で定義した大域普遍 (枠付) 変形環とする.

$$R := \tilde{R}_{F,S}^{\sigma,\psi,\square} := R_{F,S}^{\psi}\widehat{\otimes}_{R_{\Sigma,p}^{\psi,\square}}\tilde{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square}, \quad R_n := \tilde{R}_{F,S_{Q_n}}^{\sigma,\psi,\square} := R_{F,S_{Q_n}}^{\psi}\widehat{\otimes}_{R_{\Sigma,p}^{\psi,\square}}\tilde{R}_{\Sigma,p}^{\sigma,\psi,\square}$$

とおく ($R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}$ は 2 章で定義したもの). Q_n を命題 2.2 のような素数の有限集合とし, U の部分群 U_{Q_n}, $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}_{Q_n}$ を 2 章で定義したものとする (ここでは $k=(2,\ldots,2)$ である).

$$T := \mathbb{T}^\square := R^{\psi,\square}_{F,S} \otimes_{R^{\psi}_{F,S}} \mathbb{T},\ \ \mathbb{T}^\square_{Q_n} := R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}} \otimes_{R^{\psi}_{F,S_{Q_n}}} \mathbb{T}_{Q_n},$$

$$H := S_{2,\psi}(U,\mathcal{O})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{T}} \mathbb{T}^\square,\ \ H_n := S_{2,\psi}(U_{Q_n},\mathcal{O})_{\mathfrak{m}_{Q_n}} \otimes_{\mathbb{T}_{Q_n}} \mathbb{T}^\square_{Q_n}$$

とおく. 大域局所整合性 (本報告集三枝氏の記事参照) より, 2 章の射 (6)

$$R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}} \to \mathbb{T}'_{2,\psi}(U_{Q_n})_{\mathfrak{m}'_{Q_n}}$$

は $\overline{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S_{Q_n}} := \overline{R}^{\sigma,\psi,\square}_{\Sigma,p} \otimes_{R^{\psi,\square}_{\Sigma,p}} R^{\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}$ を経由する. $T_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Tr}(\varphi^{[\mathbb{F}:\mathbb{F}_p]}|D_{\mathrm{crys}}(\rho_{\mathbb{T}_\psi(U_{Q_n})_{\mathfrak{m}_{Q_n}}}))$ を使うと, この射から射

$$R_n = \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S_{Q_n}} \to \mathbb{T}^\square_{Q_n}$$

が定まる. $Q_n=\emptyset$ とするとこの射は

$$R = \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S} \to \mathbb{T}^\square = T$$

である. 注意 2.2.1, 命題 2.2, 式 (4), 系 (2.4), 補題 3.2, 命題 3.4, 定理 3.7 及び射 $\overline{R}^{\psi,\square} \to \tilde{R}^{\psi,\square}$ に関する上で与えた注意より, この B, R, R_n, T, H, H_n は命題 1.1 の条件を満たす. よって,

$$\tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S}/(p\text{-tor}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^\square$$

が成立する. $\overline{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S}$ ($Q_n=\emptyset$ とした時の $\overline{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S_{Q_n}}$) の普遍性より, ρ は射 $\overline{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S} \to \mathcal{O}$ を誘導するが, これは $\kappa_\rho : \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S} \to \mathcal{O}$ に一意的に拡張される. ρ に対応する Hecke 固有な Hilbert 保型形式は射

$$\mathbb{T} \to \mathbb{T}^\square \xleftarrow{\sim} \tilde{R}^{\sigma,\psi,\square}_{F,S}/(p\text{-tor}) \xrightarrow{\kappa_\rho} \mathcal{O}$$

の核に対応するものである. □

次が本稿の主定理である.

定理 4.2 ([K1, Theorem 3.5.7]) $\rho : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(E)$ を連続表現で以下を満たすものとする:

1. ρ の法 λ 還元 $\bar{\rho}$ は $\bar{\rho} \sim \overline{\rho_{f,\lambda}}$ となる重さ $(2,\ldots,2)$ の Hecke 固有な Hilbert 保型形式 f が存在する,
2. $\det\rho = \psi\varepsilon$ で, ψ は有限位数の指標,
3. p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して $\rho|_{F_{\mathfrak{p}}}$ は既約潜在的 Barsotti-Tate 表現,
4. $\bar{\rho}|_{F(\zeta_p)}$ は絶対既約,
5. $p>3$ の時 $[F(\zeta_p):F]>2$.

この時, ρ は保型的. □

証明 f を $\bar{\rho} \sim \overline{\rho_{f,\lambda}}$ を満たす Hecke 固有な Hilbert 保型形式とする. 定理 4.1 の証明と同様に底変換議論を用いて, $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数であり, p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して f から定まる保型表現 π_f が $\mathfrak{p}$ で不分岐あるいは導手 1 の特殊表現であると仮定してよい. $\mathfrak{p}$ で不分岐あるいは導手 1 の特殊表現と超尖点的表現の間の合同関係式 ([K1, Corollary (3.1.6)] 及び本報告集加塩氏の記事参照) と Jacquet-Langlands-清水対応を用いて, Hecke 固有な Hilbert 保型形式 f' で, p を割る各素点 $\mathfrak{p}$ に対して f' から定まる保型表現 $\pi_{f'}$ が $\mathfrak{p}$ で超尖点的であり, $\overline{\rho_{f',\lambda}} \sim \overline{\rho_{f,\lambda}}$ を満たすものが存在する. よって, $\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})$ の表現 $(\pi_{f'})_\mathfrak{p}$ に対応する Weil 群の表現は既約. [S4] の主結果よりこの表現は潜在的クリスタリン表現 $\rho_{f'}|_{F_\mathfrak{p}}$ から (Fontaine の関手により) くる. よって, $\rho_{f'}|_{F_\mathfrak{p}}$ は既約である. これより ρ は強い意味で剰余的保型性をもつことが分かるので, 定理 4.1 より主張が従う. □

この定理では $\mathfrak{p} \mid p$ に対して $\rho|_{F_\mathfrak{p}}$ の既約性を仮定していたが, $F=\mathbb{Q}$ の時にはこの仮定は除ける.

系 4.3 ([K1, Corollary 3.5.8]) $\rho : G_{\mathbb{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(E)$ を連続表現で以下を満たすものとする:

1. ρ の法 λ 還元 $\bar{\rho}$ は保型的,
2. $\det \rho = \psi\varepsilon$ で, ψ は有限位数の指標,
3. $\rho|_{G_{F_p}}$ は潜在的 Barsotti-Tate 表現,
4. $\bar{\rho}|_{\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})}$ は絶対既約.

この時, ρ は保型的. □

証明 $\rho|_{\mathbb{Q}_p}$ が既約の時は定理 4.2 から従う. $\rho|_{\mathbb{Q}_p}$ は潜在的通常と仮定する. [D3, 6.4] より, $\rho_{f,\lambda}$ が p で潜在的 Barsotti-Tate かつ潜在的通常であり $\bar{\rho} \sim \overline{\rho_{f,\lambda}}$ を満たすものが存在する. よって, この場合も ρ が強い意味で剰余的保型性をもつことが分かる. □

参考文献

[B1] Breuil, C., *Integral p-adic Hodge theory.* Algebraic Geometry 2000, Azumino, Adv. Studies in Pure Math. **36** (2002), 51–80.

[B3] Breuil, C., *Groupes p-divisibles, groupe finis et modules filtrés.* Ann. of Math. **152** (2000), 489–549.

[BCDT] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., Taylor, R. *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$*: wild* 3*-adic exercises.* J. Amer. Math. Soc. **14**(4) (2001), 843–939.

[BK] Bloch, S.; Kato, K. *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., **86**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

[Ca3] Carayol, H. *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet.* in “p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture”, Contemp. Math. **165**, Amer. Math. Soc., 1994.

[CHT] Clozel, L., Harris, M., Taylor, R. *Automorphy for some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations.* preprint.

[D1] Diamond, F. *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one.* Invent. Math. **128** (1997) no. 2, 379–391.

[D3] Diamond, F. *The refined conjecture of Serre.* Elliptic Curves, Modular Forms, and Fermat's last Theorem (Hong Kong 1993), Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 22–37.

[DDT] Darmon, H., Diamond, F., Taylor, R. *Fermat's last theorem.* Elliptic Curves, Modular Forms, and Fermat's last Theorem (Hong Kong 1993), Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, 1–154.

[DP] Deligne, P., Pappas, G. *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant.* Compositio Math. **90** (1994), 59–79.

[DT] Diamond, F., Taylor, R. *Lifting modular mod ℓ representations.* Duke Math. J., **74** (1994), 253–269.

[G] Gee, T., *A modularity lifting theorem for weight two Hilbert modular forms.* Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 5, 805–811.

[HSBT] Harris, M., Shepherd-Barron, N., Taylor, R. *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy.* preprint.

[I] Imai, N., *On the connected components of moduli spaces of finite flat models.* preprint.

[K1] Kisin, M. *Moduli of finite flat group schemes and modularity.* to appear in Ann. of Math.

[K2] Kisin, M. *Crystalline representations and F-crystals.* Algebraic geometry and number theory, Progr. Math. **253**, Volume in honor of Drinfeld's 50th birthday, Birkhäuser, Boston (2006), 459–496.

[K3] Kisin, M. *Modularity for some geometric Galois representations.* L-functions and Galois representations (Durham 2004), 438–470.

[K5] Kisin, M. *Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations.* Current Developments in Mathematics 2005, 191-230.

[Kh1] Khare, C. *Serre's modularity conjecture: the level one case.* Duke Math. J. **134** (2006), 534–567.

[KW3] Khare, C., Wintenberger, J.-P. *Serre's modularity conjecture (II).* preprint.

[PR] Pappas, G., Rapoport, M. *Local models in the ramified case. I. The EL-case.* J. Algebraic Geom. **12** (2003), 107–145.

[R] Ramakrishna, R. *On a variation of Mazur's deformation functor.* Compositio Math. **87** (1993), 269–286.

[S4] Saito, T. *Hilbert modular forms and and p-adic Hodge theory.* preprint.

[SW3] Skinner, C., Wiles, A. *Base change and a problem of Serre.* Duke Math. J. **107**(1) (2001), 15–25.

[Sen] Sen, S. *The analytic variation of p-adic Hodge Structure.* Ann. of Math. **127** (2) (1988), 647–661.

[T1] Taylor, R. *On Galois representations associated to Hilbert modular forms.* Invent. Math. **98**(2) (1989), 265–280.

[T3] Taylor, R. *On the meromorphic continuation of degree two L-functions.* Documenta Math. Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday (2006), 729–779.

[T4] Taylor, R. *Automorphy for some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations II.* preprint.

[Y] 山下剛. Taylor-Wiles 系の復習. 本報告集.