TAYLOR による HILBERT CUSP FORMS に付随する GALOIS 表現の構成について

山上 敦士 (京都産業大学)

0. Introduction

本稿では, Taylor の論文 [16]

"On Galois representations associated to Hilbert modular forms"

に従い, Taylor による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について概説する.

以下, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ, 有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の代数的閉包とする.

F を有限次総実代数体とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ での F の代数的閉包を $\bar{F}$ とする. n を F の整 ideal とする. $I := \{\tau : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\}$ を F の $\bar{\mathbb{Q}}$ への埋め込み全体とする. $k = (k_\tau)_{\tau \in I} \in \mathbb{Z}^I_{>0}$ をとり, k_τ の偶奇は τ によらず同一であるものと仮定する. このとき, weight k で level n の F 上の Hilbert cusp forms と, それらに作用する Hecke 作用素 T_q (q は F の素 ideal) と S_a (a は n と互いに素な F の整 ideal) が定義される (Hilbert cusp forms と Hecke 作用素の定義については Section 1.1 で詳述する).

f が上述の Hecke 作用素すべてに対する同時固有形式であるとき, f を Hilbert Hecke 固有形式とよび, Hecke 作用素 T に対し, f の T に関する固有値を $\theta(T)$ で表すことにする. このとき,

$$L_f := \mathbb{Q}(\theta(T) |\ T \text{ はすべての Hecke 作用素})$$

は $\mathbb{Q}$ 上有限次代数体になることが, Shimura の結果により知られている (cf. [15, Proposition 1.3]).

p を素数とし, L_f の整数環 $\mathcal{O}_f$ の p の上の素 ideal $\mathfrak{p}$ を一つとり, $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$ を $\mathcal{O}_f$ の $\mathfrak{p}$-進完備化とする.

Definition 0.1. 以上の設定のもとで, F の絶対 Galois 群 $G_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の連続な 2 次元 Galois 表現

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

が, np の外で不分岐 (つまり np と互いに素な F の任意の素 ideal q について, ρ を q での惰性群 $I_q \subset G_F$ に制限すると自明な表現となる),

Date: January 31, 2009.

さらに, そのような q について, 幾何的 Frobenius 元 Frob_q に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_q)) = \theta(T_q),$$
$$\det(\rho(\mathrm{Frob}_q)) = \theta(S_q)\boldsymbol{N}q$$

を満たすとき, ρ を Hilbert Hecke 固有形式 f **に付随する Galois 表現**ということにする. ここで, $\boldsymbol{N}q$ は q の絶対 norm を表す.

Hilbert Hecke 固有形式 f に付随する Galois 表現は, 上述の設定のもとで, いつでも存在すると予想されているが ([16, Conjecture 1]), 本稿で概説する Taylor の論文 [16] が出版される頃までに, 次の三つの場合について構成されていた:

Case 1. $[F:\mathbb{Q}]$ が奇数のとき;
Case 2. $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数で, f に対応する保型表現 π_f が F のある有限素点 v において special か supercuspidal 表現であるとき;
Case 3. f が p で ordinary, つまり F の p の上のすべての素 ideal q について, $\theta(T_q)$ が p と互いに素であるとき.

Remark 0.1. Case 1 と Case 2 は, Shimura [14], Deligne [3], Ohta [11], Rogawski-Tunnell [13] らによって示されたものであり, Case 3 は Wiles [18] により構成された (cf. Wiles の論文 [18] については, 本報告集にある概説 [19] を参照のこと). これらの場合では, Deligne [3], Langlands [8], Carayol [2], Mazur-Wiles [9], Wiles [18] の仕事により, np の外での様子だけではなく, n を割る素 ideal q のうち p と互いに素なものについて, q での分解群 D_q に制限された ρ の振る舞いについても知られている. さらに, Case 3 に関しての Mazur-Wiles [9] や Wiles [18] の仕事では, p の上の素 ideal q においても, 分解群 D_q での ρ の振る舞いが研究されている. 一方, k_τ がすべて 1 である場合については, Deligne-Serre [4], Rogawski-Tunnell [13], Wiles [18] によって扱われている.

それぞれの場合における具体的な Galois 表現の振る舞いの様子については, [6, Theorem 3.26] もしくは [7, Theorem 2.43] を参照のこと.

この流れを受けて, Taylor [16] は, $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数で k_τ がすべて 2 以上である場合に, f に付随する Galois 表現を構成することを目的としている. つまり, [16] の主定理は以下の通り:

Theorem 0.1. ([16, Theorem 2]) *上述の設定において, $[F:\mathbb{Q}]$ は偶数で k_τ はすべて 2 以上であると仮定する. このとき, f に付随する Galois 表現*

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

が構成される. さらに, ここで構成された ρ は, n を割る素 ideal q のうち p と互いに素で $\theta(T_q) \neq 0$ であるものについて, Frob_q の上にある

$\sigma \in D_q$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(\rho(\sigma)) &= \theta(T_q) + \chi(\sigma)(\boldsymbol{N}q)\theta(T_q)^{-1} \\ \det(\rho(\sigma)) &= \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q\end{aligned}$$

を満たす. ここで, $\chi : G_F \to \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}^{\times}$ は, np の外のすべての素 ideal q に対して $\mathrm{Frob}_q \mapsto \theta(S_q)$ と定義された写像を Chebotarev の稠密定理で G_F 上に延長した連続指標である.

以下、この定理の証明の方針について簡単に述べる. より詳しい説明については, Section 2 をご参照いただきたい.

まず, Hida [5] からヒントを得て, 議論を展開する舞台を Jacquet-Langlands-Shimizu 対応により, Hilbert cusp forms の空間から totally definite な四元数環上の保型形式の空間に転じる (四元数環上の保型形式については, Section 1.2 で解説する). そこに適当な duality を導入し, Ribet [12] の仕事を一般化することで, level n と互いに素な素 ideal λ について, 問題にしている Hilbert Hecke 固有形式 f と, λ で new な level $n\lambda$ の適当な Hilbert Hecke 固有形式 h との, $\mathcal{O}_f$ のある ideal $\mathcal{I}_\lambda$ を法とした合同を入手する ([16, Theorem 1]).

一方, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応によれば, λ で new な level $n\lambda$ の Hilbert Hecke 固有形式たちは, λ で分岐する適当な四元数環上の保型形式に対応し, それらに対応する保型表現は λ で special か supercuspidal 表現となる. したがって, 上述の Case 2 を適用することができ, λ で new な level $n\lambda$ の Hilbert cusp forms に作用する Hecke 環への G_F の擬表現が得られる ([16, Proposition 1]). (擬表現については, Section 1.3 で説明する.)

以上の準備のもと, 各 $m \geq 1$ に対し, 適当な無数の素 ideal λ を採り上げて, np の外で不分岐な mod $\mathfrak{p}^m$ の擬表現

$$r_m : G_F \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m$$

でしかるべき trace と determinant をもつものを, 上述の h と f の mod $\mathcal{I}_\lambda$ での合同性と Case 2 を適用して得られたある Hecke 環への擬表現を組み合わせることで構成できる. (この議論に必要な素 ideal λ が無数に存在することは, Brylinski-Labesse [1] の結果により保証される.)

そして, $\{r_m\}_{m\geq 1}$ の m に関する射影極限をとることで, $\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$ への擬表現

$$r := \varprojlim_m r_m : G_F \to \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$$

で望ましい trace と determinant をもつものが入手でき, Wiles [18] による擬表現から表現を復元するテクニックを適用することで, Hilbert Hecke 固有形式 f に付随する Galois 表現

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

を得る.

さて, 本稿は全部で四つの Sections から成り立っている. Section 1 では, Hilbert cusp forms と, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応でそれらに対応する totally definite な四元数環上の保型形式を定義し, それぞれの空間に作用する Hecke 作用素および Hecke 環の定義を述べる. さらに, Wiles [18] により定式化された擬表現の定義を述べ, 擬表現から表現を復元するテクニックについて解説する.

これにより, 主定理 [16, Theorem 2] の証明を概観する準備が整うので, Seciton 2 では, 証明に用いられる [16, Theorem 1] と [16, Proposition 1] をひとまず認めたうえで, 主定理の証明を概説する. そして, Section 3 と Section 4 において, 先に保留しておいた [16, Theorem 1] と [16, Proposition 1] の証明の概説を行う.

Contents

1. 保型形式, Hecke 環 および 擬表現について

この Section では, Hilbert cusp forms の空間 $S_k^A(U)$ と, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応でそれらに対応する totally definite な四元数環上の保型形式の空間 $S_k^D(U)$ を定義し, それぞれの空間に作用する Hecke 作用素 T_q, S_a および Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k, \boldsymbol{T}_k^D$ の定義を述べる. また, 主定理 [16, Theorem 2] のための準備定理である [16, Theorem 1] の証明において重要な役割を果たす, $S_k^D(U)$ 上の duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義する. さらに, Wiles [18, Lemma 2.2.3] により定式化された擬表現の定義を述べ, 擬表現から表現を復元するテクニックについて解説する.

1.1. Hilbert cusp forms とその Hecke 環

F を有限次総実代数体とし, $A = M_2(F)$ を F-係数の 2×2 行列のなす環とする. G^A を

$$G^A(F) = A^\times (= \mathrm{GL}_2(F))$$

で定まる F 上定義された代数群とする. G^A には, 乗法群 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ への reduced norm

$$\nu_A(= \det) : G^A \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

が伴う. F 上の adele 環 $\mathbb{A}_F$ に対し, その有限部分を F_f, 無限部分を F_∞ とすると,

$$\mathbb{A}_F = F_f \times F_\infty$$

と分解できる. これに伴い, $G_f^A := G^A(F_f)$, $G_\infty^A := G^A(F_\infty)$ とおけば,

$$G^A(\mathbb{A}_F) = G_f^A \times G_\infty^A$$

と分解される. $I := \{\tau : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\}$ を F の $\bar{\mathbb{Q}}$ への埋め込み全体とし, 同型

$$G_f^A = \mathrm{GL}_2(F_f) \cong \prod_q \mathrm{GL}_2(F_q), \quad G_\infty^A = \mathrm{GL}_2(F_\infty) \cong (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))^I$$

を固定しておく. ここで, 直積 $\prod_q$ は F の素 ideal q 全体を走り, F_q は F の q-進完備化を表す.

複素上半平面

$$\mathfrak{h} := \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} |\ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$$

上に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+ := \{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) |\ \det(\gamma) > 0\}$ を一次分数変換を用いて作用させる:

$$\gamma \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

この作用を用いて, $\mathfrak{h}$ の I で添字付けられた直積 $\mathfrak{h}^I$ 上に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^I \subset G_\infty^A$ を作用させる. このとき, $z_0 := (\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, \cdots, \sqrt{-1}) \in \mathfrak{h}^I$ の stabilizer を C_∞ とおけば,

$$SO_2(\mathbb{R}) := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+ |\ \det(\gamma) = 1,\ \gamma^t\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

を用いて,

$$C_\infty = (\mathbb{R}^\times \cdot SO_2(\mathbb{R}))^I$$

となる. 保型因子 $j : G_\infty^A \times \mathfrak{h}^I \to \mathbb{C}^I$ を次で定義する:

$$j(\begin{pmatrix} a_\tau & b_\tau \\ c_\tau & d_\tau \end{pmatrix}_{\tau \in I}, (z_\tau)_{\tau \in I}) := (c_\tau z_\tau + d_\tau)_{\tau \in I}.$$

また, $z=(z_\tau)_{\tau\in I}\in\mathbb{C}^I$ と $\ell=(\ell_\tau)_{\tau\in I}\in\mathbb{Z}^I$ に対し,

$$z^\ell:=\prod_{\tau\in I}z_\tau^{\ell_\tau}\in\mathbb{C}$$

と定める.

さて, $\mathbb{Z}_{>0}^I$ の元 $k=(k_\tau)_{\tau\in I}$ を一つとり, 以下, 次の仮定をしておく:

仮定. (i) k_τ はすべて 2 以上である;
(ii) k_τ の偶奇は τ によらず一定とする.

$t:=(1,1,\cdots,1)\in\mathbb{Z}_{>0}^I$ とし, $m:=k-2t\in\mathbb{Z}_{>0}^I$ とおく. このとき, 次の条件を満たす $v=(v_\tau)_{\tau\in I}\in\mathbb{Z}^I$ と $\mu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まる:

条件. (i) v_τ はすべて 0 以上であり, $v_\tau=0$ なる $\tau\in I$ がある;
(ii) $m+2v=\mu t$.

Definition 1.1. 以上の記号のもとで, 関数 $f:G^A(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$ と $u=u_fu_\infty\in G^A(\mathbb{A}_F)=G_f^A\times G_\infty^A$ $(u_f\in G_f^A, u_\infty\in G_\infty^A)$ に対し, 新たに関数

$$f|_ku:G^A(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$$

を次で定義する:

$$(f|_ku)(x):=j(u_\infty,z_0)^{-k}\nu_A(u_\infty)^{v+k-t}f(xu^{-1})\quad(x\in G^A(\mathbb{A}_F)).$$

Lemma 1.1. 関数 $f:G^A(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$ と $u,v\in G^A(\mathbb{A}_F)$ に対し, もし $u_\infty=1$ もしくは $v_\infty=1$ (つまり, $u\in G_f^A$ もしくは $v\in G_f^A$) ならば,

$$(f|_ku)|_kv=f|_k(uv)$$

が成立する.

Proof. $u_\infty=1$ とすると $\nu_A(u_\infty)=1$ であるので, $x\in G^A(\mathbb{A}_F)$ に対し,

$$\begin{aligned}((f|_ku)|_kv)(x)&=j(v_\infty,z_0)^{-k}\nu_A(v_\infty)^{v+k-t}(f|_ku)(xv^{-1})\\&=j(v_\infty,z_0)^{-k}\nu_A(v_\infty)^{v+k-t}f(xv^{-1}u^{-1})\\&=j((uv)_\infty,z_0)^{-k}\nu_A((uv)_\infty)^{v+k-t}f(x(uv)^{-1})\\&=(f|_k(uv))(x)\end{aligned}$$

を得る. $v_\infty=1$ のときは $j(v_\infty,z_0)=1$ であることを用いて, 全く同様に示すことができる. □

Definition 1.2. G_f^A の compact な開部分群 U に対し, $S_k^A(U)$ を次の三つの条件を満たす関数

$$f:G^A(F)\setminus G^A(\mathbb{A}_F)(=\mathrm{GL}_2(F)\setminus G^A(\mathbb{A}_F))\to\mathbb{C}$$

からなる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする:

(i) すべての $u\in UC_\infty$ に対し, $f|_ku=f$ である;

(ii) すべての $x \in G_f^A$ に対し, 関数

$$f_x : \mathfrak{h}^I \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto j(u, z_0)^k \nu_A(u)^{t-k-v} f(xu)$$

は正則である. ここで, $u \in \mathbb{G}_\infty^A$ は $z = u \cdot z_0$ なる元である (一次分数変換による作用 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+ \curvearrowright \mathfrak{h}$ は推移的であることに注意);

(iii) すべての $x \in G^A(\mathbb{A}_F)$ に対し,

$$\int_{\mathbb{A}_F/F} f(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x) da = 0.$$

ここで, da は $\mathbb{A}_F/F$ 上の additive Haar measure.

このとき, $S_k^A(U)$ の元を **weight** k, **level** U **の Hilbert cusp form** とよぶことにする.

Remark 1.1. Definition 1.2 での条件 (ii) において, 関数 f_x の定義が, $z = u \cdot z_0$ なる $u \in G_\infty^A$ のとり方に依存しないことを示そう.

$u \cdot z_0 = u' \cdot z_0$ と仮定すると, $u'^{-1}u \in C_\infty$ なので, 条件 (i) より $f|_k(u'^{-1}u) = f$ を得る. よって, $x \in G_f^A$ に対し,

$$\begin{aligned} f(xu) &= (f|_k(u'^{-1}u))(xu) \\ &= j(u'^{-1}u, z_0)^{-k} \nu_A(u'^{-1}u)^{v+k-t} f(xu \cdot u^{-1}u') \\ &= j(u'^{-1}, uz_0)^{-k} j(u, z_0)^{-k} \nu_A(u')^{t-k-v} \nu_A(u)^{v+k-t} f(xu') \\ &= j(u', z_0)^k j(u, z_0)^{-k} \nu_A(u')^{t-k-v} \nu_A(u)^{v+k-t} f(xu'). \end{aligned}$$

したがって,

$$j(u, z_0)^k \nu_A(u)^{t-k-v} f(xu) = j(u', z_0)^k \nu_A(u')^{t-k-v} f(xu')$$

となる.

Definition 1.3. G_f^A の 二つの compact な開部分群 U と U' について, 各 $x \in G_f^A$ に対し, double coset UxU' の剰余類分解

$$UxU' = \sqcup_i Ux_i$$

を固定しておいて, **Hecke 作用素** $[UxU']$ を

$$[UxU'] : S_k^A(U) \to S_k^A(U'), \quad f \mapsto \sum_i f|_k x_i$$

と定義する.

Remark 1.2. (1) Lemma 1.1 により, Definition 1.3 での $[UxU']$ の定義が double coset の分解の仕方によらないことがわかる.

(2) さらに, $f \in S_k^A(U)$ に対し $[UxU']f \in S_k^A(U')$ となることを示そう. Definition 1.2 における三つの条件を $[UxU']f$ について確認することになる.

(i) $u'v \in U'C_\infty$ $(u' \in U',\ v \in C_\infty)$ をとる. double coset の分解 $UxU' = \sqcup_i Ux_i$ において, 各 x_i に対して, 添え字 $j(i)$ と $u_i \in U$ が unique に定まり,

$$x_i u' = u_i x_{j(i)}$$

となる. $f \in S_k^A(U)$ であるので, $f|_k u_i = f$ となることに注意. この準備のもと, $u'_\infty = 1$ であること, また G_∞^A の元と G_f^A の元は可換であることに注意して, Lemma 1.1 により次を得る:

$$\begin{aligned}([UxU']f)|_k(u'v) &= (\sum_i f|_k x_i)|_k u'v = \sum_i (f|_k v)|_k(x_i u') = \sum_i f|_k(x_i u') \\ &= \sum_i f|_k(u_i x_{j(i)}) = \sum_i f|_k x_{j(i)} = [UxU']f.\end{aligned}$$

(ii) $y \in G_f^A$ をとる. 任意の $z \in \mathfrak{h}^I$ に対し, $z = uz_0$ となる $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^I$ をとっておく. u と G_f^A の元が可換であることに注意して, Lemma 1.1 により次を得る:

$$\begin{aligned}([UxU']f)_y(uz_0) &= (\sum_i f|_k x_i)_y(uz_0) \\ &= j(u.z_0)^k \nu_A(u)^{t-k-v}(\sum_i f|_k x_i)(yu) \\ &= j(u,z_0)^k \nu_A(u)^{t-k-v} \sum_i f(yux_i^{-1}) \\ &= \sum_i j(u,z_0)^k \nu_A(u)^{t-k-v} f(yx_i^{-1}u) = \sum_i f_{yx_i^{-1}}(uz_0).\end{aligned}$$

各 $f_{yx_i^{-1}}$ は正則なので, $([UxU']f)_y$ も正則となる.

(iii) $x \in G^A(\mathbb{A}_F)$ に対し,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_F/F}([UxU']f)(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}x)da &= \int_{\mathbb{A}_F/F}(\sum_i f|_k x_i)(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}x)da \\ &= \int_{\mathbb{A}_F/F}\sum_i f(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}xx_i^{-1})da \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{A}_F/F} f(\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}xx_i^{-1})da = 0.\end{aligned}$$

以上 (i)-(iii) により, $[UxU']f \in S_k^A(U')$ であることが示された.

さて, F の整数環 $\mathcal{O}_F$ の ideal n を一つ固定し, λ を n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とする. $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し, $\mathcal{O}_F$ の q-進完備化を $\mathcal{O}_{F,q}$ と表すことにする. 各 $\mathcal{O}_{F,q}$ には, $\mathrm{ord}_q(q) = 1$ となるように正規化された q-進付値 ord_q を入れておく.

以下, 主に扱う G_f^A の compact な開部分群は以下のものである:

$$U_0 := \prod_q \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,q}),$$

$$U(n) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0 |\ c \in n,\ a-1 \in n\},$$

$$U(n,\lambda) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0 |\ c \in n\lambda,\ a-1 \in n\}.$$

ここで, $\prod_q$ は $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal q を走る直積である. また, $c = (c_q)_q \in \prod_q \mathcal{O}_{F,q}$ について「$c \in n$」であるとは, 任意の素 ideal q において $\mathrm{ord}_q(c_q) \geq \mathrm{ord}_q(n)$ であることを意味する.

$U(n)$ や $U(n,\lambda)$ を level にもつ Hilbert cusp forms の空間をそれぞれ

$$S_k^A(n) := S_k^A(U(n)), \quad S_k^A(n,\lambda) := S_k^A(U(n,\lambda))$$

とおく. ここで, これらの空間に作用する Hecke 環を次のように定義する:

Definition 1.4. 以下, U は $U(n)$ もしくは $U(n,\lambda)$ を表すものとする.

(1) $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し, $\mathcal{O}_{F,q}$ の素元 π_q を固定しておく. q-成分は π_q, q 以外での成分はすべて 1 であるような F_f の元を, やはり π_q で表すことにする. このとき, $S_k^A(U)$ 上の Hecke 作用素 $[U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix} U]$ を T_q と表す. もし, $u \in \mathcal{O}_{F,q}^\times$ を用いて素元を $u\pi_q$ に取り換えたとしても, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u\pi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}$ であり, かつ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in U$ なので, T_q の定義は素元のとり方によらないことがわかる.

(2) n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の ideal a に対し, $\alpha := \prod_q \pi_q^{\mathrm{ord}_q(a)} \in F_f$ とおき, $S_k^A(U)$ 上の Hecke 作用素 $[U \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} U]$ を S_a と表す. T_q と同様に, S_a も素元のとり方によらずにうまく定義されることがわかる (n と a は互いに素であることに注意).

(3) Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k(n)$ を, T_q (q はすべての素 ideal) と S_a (a は n と互いに素なすべての ideal) で $\mathbb{Z}$ 上生成される多元環 $\mathbb{Z}[T_q,\ S_a]$ の $\mathrm{End}(S_k^A(n))$ における自然な像として定義する.

(4) また, Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$ を, T_q (q は λ と相異なるすべての素 ideal) と S_a (a は $n\lambda$ と互いに素なすべての ideal) で $\mathbb{Z}$ 上生成される多元環 $\mathbb{Z}[T_q,\ S_a]$ の $\mathrm{End}(S_k^A(n,\lambda))$ における自然な像として定義する.

Definition 1.5. $f \in S_k^A(n)$ が Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k(n)$ の Hecke 作用素すべてに対する同時固有形式であるとき, f を **Hilbert Hecke 固有形式** と

よび, Hecke 作用素 T に対し, f の T に関する固有値を $\theta(T)$ で表すことにする. このとき,

$$L_f := \mathbb{Q}(\theta(T)|\ T \text{ はすべての Hecke 作用素})$$

は $\mathbb{Q}$ 上有限次代数体になることが, Shimura の結果により知られている (cf. [15, Proposition 1.3]). L_f の整数環を $\mathcal{O}_f$ で表す.

さて, $\eta := \begin{pmatrix} \pi_\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき, $\mathbb{C}$-線形写像

$$i_\eta : S_k^A(n)^2 \to S_k^A(n,\lambda), \quad (f_1, f_2) \mapsto f_1 + f_2|_k\eta$$

を考える.

Remark 1.3. $(f_1, f_2) \in S_k^A(n)^2$ に対し, $i_\eta(f_1, f_2)$ が $S_k^A(n,\lambda)$ の元になることは, $U(n,\lambda) \subset U(n)$ であることに注意して, Remark 1.2 (2) と同様に確かめることができる.

Miyake [10] により定式化された $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上の保型形式に対する newforms の理論に則してみれば, この写像は単射であり, 像の元は $S_k^A(n,\lambda)$ の中で λ **に関して old な cusp forms** と呼ばれるものである.

Remark 1.4. i_η の単射性については, $S_k^A(n)$ の Hecke 固有形式からなる基底 $\{g_i\}_i$ に対し, $\{g_i,\ g_i|_k\eta\}_i$ の元たちが $S_k^A(n,\lambda)$ において線形独立であることがポイントである.

Lemma 1.2. $\mathbb{C}$-単射線形写像 i_η は $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$ の生成元である Hecke 作用素 T_q (q は λ と相異なる素 ideal) と S_a (a は $n\lambda$ と互いに素な ideal) の作用と可換である. すなわち, T を T_q もしくは S_a としたとき, $f_1, f_2 \in S_k^A(n)$ に対し,

$$T(i_\eta(f_1, f_2)) = i_\eta(Tf_1, Tf_2)$$

を得る. したがって, $i_\eta(S_k^A(n)^2)$ は $S_k^A(n,\lambda)$ の $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$-部分加群となる.

Proof. $T = T_q$ とする. double coset の分解

$$U(n,\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}U(n,\lambda) = \sqcup_i U(n,\lambda)x_i \quad \left(x_i \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}U(n,\lambda)\right)$$

を固定したとき. $U(n,\lambda) \subset U(n)$ かつ $U(n)\eta \subset U(n,\lambda)$ であることから,

$$U(n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}U(n) = \sqcup_i U(n)x_i$$

を得る. したがって, $f_1 \in S_k^A(n,\lambda)$ でもあることに注意して,

$$[U(n,\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}U(n,\lambda)]f_1 = [U(n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix}U(n)]f_1$$

となる．一方，各 x_i に対して，unique に定まる添え字 $j(i)$ とある $v_i \in U(n)$ が存在して，

$$\eta x_i = v_i x_{j(i)} \eta$$

となるので，

$$\begin{aligned} T(f_2|_k\eta) &= \sum_i (f_2|_k\eta)|_k x_i = \sum_i f_2|_k(\eta x_i) \\ &= \sum_i f_2|_k(v_i x_{j(i)}\eta) = (\sum_i f_2|_k x_{j(i)})|_k\eta \\ &= T(f_2)|_k\eta \end{aligned}$$

を得る．以上により，

$$T(i_\eta(f_1, f_2)) = i_\eta(Tf_1, Tf_2)$$

となることがわかった．$T = S_a$ のときも，全く同様に証明できる． □

Miyake [10] の newforms の理論に則して，$i_\eta(S_k^A(n)^2)$ の $S_k^A(n,\lambda)$ における Petersson 内積に関する直交補空間を $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ とおけば，これも $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$-部分加群であり，その元は λ **に関して new な cusp forms** と呼ばれる．このとき，$\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$-加群の直和分解

$$S_k^A(n,\lambda) = i_\eta(S_k^A(n)^2) \oplus S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$$

が得られる．そこで，$\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)$ の $\mathrm{End}(i_\eta(S_k^A(n)^2)$ における自然な像を $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{old}}$ と表し，$\mathrm{End}(S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}})$ における自然な像を $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ と表すことにする．

Remark 1.5. Definition 1.4 (4) の定義では，[16, Proposition 1] において，λ で new な level $n\lambda$ の Hilbert Hecke 固有形式に付随する Galois 表現を用いて，$\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ に値をとる擬表現を構成するために，Hecke 環の生成系として (3) とは異なり λ と互いに素な ideal での Hecke 作用素を用いている．(擬表現については Section 1.3 を参照のこと.)

1.2. 四元数環上の保型形式とその Hecke 環

前節で用いた記号を，ここでも引き続き用いることにする．

D を F 上定義された四元数環で，すべての無限素点で分岐し，すべての有限素点で不分岐なものとする．D の maximal order $\mathcal{O}_D$ を一つ固定する．$\mathbb{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大 $K(\subset \mathbb{C})$ で，F を含み，D が K 上で split するようなものをとり，K-algebra 同型

$$j : D \otimes_{\mathbb{Q}} K \xrightarrow{\sim} (D \otimes_F K)^I \xrightarrow{\sim} M_2(K)^I$$

を一つ固定する．

Remark 1.6. j における二番目の同型の存在は, D が K 上で split することにより保証されている. 一方, 一番目の同型の方は, 次のようにして与えられる:

$d := [F : \mathbb{Q}]$ とおき, I の元たちに $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_d$ と番号付けをしておく. F の $\mathbb{Q}$ 上の基底 $\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$ をとれば,

$$F \otimes_{\mathbb{Q}} K = (\oplus_{i=1}^{d} \mathbb{Q}x_i) \otimes_{\mathbb{Q}} K = \oplus_{i=1}^{d} K(x_i \otimes 1)$$

となるので, $F \otimes_{\mathbb{Q}} K$ の K 上の基底として $\{x_1 \otimes 1, x_2 \otimes 1, \cdots, x_d \otimes 1\}$ をとれる. K-algebra 準同型

$$\varphi : F \otimes_{\mathbb{Q}} K \to K^I, \quad \sum_j f_j \otimes k_j \mapsto (\sum_j f_j^{\tau_i} k_j)_{i=1}^{d}$$

を K-線形写像とみなして, $F \otimes_{\mathbb{Q}} K$ の基底 $\{x_1 \otimes 1, x_2 \otimes 1, \cdots, x_d \otimes 1\}$ と K^I の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_{\tau_1}, \boldsymbol{e}_{\tau_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\tau_d}\}$ に関する φ の表現行列をとると,

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1^{\tau_1} & x_2^{\tau_1} & \cdots & x_d^{\tau_1} \\ x_1^{\tau_2} & x_2^{\tau_2} & \cdots & x_d^{\tau_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\tau_d} & x_2^{\tau_d} & \cdots & x_d^{\tau_d} \end{pmatrix}$$

となる. Minkowski の定理により Φ は正則行列なので, φ は全単射となり K-algebra 同型となる. よって, 次の同型を得る:

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} K = D \otimes_F (F \otimes_{\mathbb{Q}} K) \overset{\varphi}{\cong} D \otimes_F (K^I) = (D \otimes_F K)^I.$$

さて, K の整数環を $\mathcal{O}_K$ と表せば. K-algebra 同型 j から $\mathcal{O}_K$-algebra 同型

$$j : \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} M_2(\mathcal{O}_K)^I$$

が誘導される. また, F の任意の有限素点 v において D が不分岐であることにより存在が保証される F_v-algebra 同型

$$j_v : D \otimes_F F_v \cong M_2(F_v)$$

を一つ固定する. この同型から $\mathcal{O}_{F,v}$-algebra 同型

$$\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F,v} \cong M_2(\mathcal{O}_{F,v})$$

が誘導される.

G^D を $G^D(F) := D^\times$ で定まる F 上定義された代数群とし,

$$\nu_D : G^D \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

を G^D の reduced norm とする. $G_f^D := G^D(F_f)$, $G_\infty^D := G^D(F_\infty)$ とおけば,

$$G^D(\mathbb{A}_F) = G_f^D \times G_\infty^D$$

と分解される. 上で固定した同型 j_v たちにより, 群の同型

$$\prod_v j_v : G_f^D \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2(F_f) = G_f^A$$

を得る. 以下, これをもって G_f^D と G_f^A を同一視し G_f と表すことにする.

さて, D 上の保型形式の空間 $S_k^D(U)$ を定義するために, 右 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^I$-加群 L_k なるものを構成する. ここからしばらくは, 一般的な設定のもとで論を進めることにする.

R を任意の単位的可換環とし, a と b を 0 以上の整数とする. R^2 の R-標準基底 $\{e_1 := (1,0), e_2 := (0,1)\}$ をとれば, R^2 の a-th symmetric power $S^a(R^2)$ の R-基底として $\{e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)}\}_{i=0}^a$ がとれる:

$$\begin{aligned} S^a(R^2) &= \oplus_{i=0}^a R(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)}) \\ &= Re_1^{\otimes a} \oplus R(e_1^{\otimes(a-1)} \otimes e_2) \oplus \cdots \oplus R(e_1 \otimes e_2^{\otimes(a-1)}) \oplus Re_2^{\otimes a}. \end{aligned}$$

Definition 1.6. (1) $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(R)$ と $x = \sum_{i=0}^a c_i(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)}) \in S^a(R^2)$ に対し,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 \\ \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 \end{pmatrix}$$

を用いて,

$$x \cdot \alpha := (\det \alpha)^b \sum_{i=0}^a c_i((\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2)^{\otimes i} \otimes (\alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2)^{\otimes(a-i)})$$

とおく. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$ に対し,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21})e_1 + (\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22})e_2 \\ (\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21})e_1 + (\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22})e_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\beta_{11}e_1 + \beta_{12}e_2) + \alpha_{12}(\beta_{21}e_1 + \beta_{22}e_2) \\ \alpha_{21}(\beta_{11}e_1 + \beta_{12}e_2) + \alpha_{22}(\beta_{21}e_1 + \beta_{22}e_2) \end{pmatrix} \\ &= \alpha(\beta\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

であるから, この作用により $S^a(R^2)$ は右 $\mathrm{GL}_2(R)$-加群となる. $\det^b$ で捻っていることを示唆するために, この右 $\mathrm{GL}_2(R)$-加群を $S_{a,b}(R)$ とかくことにする.

(2) 次のように $S_{a,b}(R)$ 上の duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義する:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : S_{a,b}(R)^2 \to R, \quad (x, y) \mapsto (x \cdot w)^t y.$$

ここで, $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(R)$ であり, $w \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}$ となることに注意.

この duality を, $S_{a,b}(R)$ の R-基底 $\{e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)}\}_{i=0}^a$ を用いて具体的に計算してみよう. $x = \sum_{i=0}^a c_i(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)})$, $y = \sum_{i=0}^a d_i(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)}) \in S_{a,b}(R)$ に対し,

$$x \cdot w = \sum_{i=0}^a (-1)^i c_{a-i}(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)})$$

なので,

$$\langle x, y\rangle = (c_a, -c_{a-1}, \cdots, (-1)^a c_0) \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_a \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^a (-1)^i c_{a-i} d_i$$

を得る.

Remark 1.7. 上の具体的な表示から, a が偶数のとき $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ であり, a が奇数のとき $\langle x, y\rangle = -\langle y, x\rangle$ であることがわかる.

Lemma 1.3. *$\alpha \in M_2(R)$ と $x, y \in S_{a,b}(R)$ に対し,*

$$\langle x \cdot \alpha, y \cdot \alpha\rangle = (\det \alpha)^{a+2b}\langle x, y\rangle$$

が成立する.

Proof. 一般に, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ とし, $x = \sum_{i=0}^a c_i(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)})$, $y = \sum_{i=0}^a d_i(e_1^{\otimes i} \otimes e_2^{\otimes(a-i)})$ とかいたとき, 具体的に計算することで,

$$x^t(y \cdot \alpha) = (\det \alpha)^b \sum_{i=0}^a c_i d_i (\sum_{i,j} \binom{i}{j} \binom{a-i}{k} \alpha_{11}^j \alpha_{12}^{i-j} \alpha_{21}^k \alpha_{22}^{a-i-k}),$$

$$(x^t \cdot \alpha)^t y = (\det \alpha)^b \sum_{i=0}^a c_i d_i (\sum_{i,j} \binom{i}{j} \binom{a-i}{k} \alpha_{11}^j \alpha_{21}^{i-j} \alpha_{12}^k \alpha_{22}^{a-i-k})$$

となる. ここで, $\sum_{i,j}$ は, $0 \leq j \leq i,\ 0 \leq k \leq a-i,\ k+j=i$ を走る和であり, $\binom{i}{j}$ は二項係数である. したがって,

$$x^t(y \cdot \alpha) = (x^t \cdot \alpha)^t y$$

を得る. 一方,

$$w^{-1}\alpha w^t \alpha = \begin{pmatrix} \det \alpha & 0 \\ 0 & \det \alpha \end{pmatrix}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\langle x\cdot\alpha, y\cdot\alpha\rangle &= (x\cdot\alpha)w^t(y\cdot\alpha) = (x\cdot w(w^{-1}\alpha w)^t\alpha)^t y\\ &= (\det\alpha)^{2b}(\det\alpha)^a(x\cdot w)^t y\\ &= (\det\alpha)^{a+2b}\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

を得る. □

Definition 1.7. (1) $k, m, v\in\mathbb{Z}^I$ と $\mu\in\mathbb{Z}$ を前節と同じものとする.

$$L_k := \otimes_{\tau\in I} S_{m_\tau, v_\tau}(\mathbb{C})$$

とおく. 本節の冒頭に固定した K-algebra 同型 j を $\mathbb{C}$ 上に係数拡大した $\mathbb{C}$-algebra 同型から自然に誘導される準同型

$$j : G_\infty^D \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^I$$

を用いて, 各 τ-成分での作用 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \curvearrowright S_{m_\tau, v_\tau}(\mathbb{C})$ をかけ合わせることで, L_k 上に右 G_∞^D-作用が定まる.

(2) さらに, L_k 上の duality $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $S_{m_\tau, v_\tau}(\mathbb{C})$ 上の duality を用いて次のように定義する:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L_k^2 \to \mathbb{C}, \quad (\otimes x_\tau, \otimes y_\tau) \mapsto \prod_{\tau\in I}\langle x_\tau, y_\tau\rangle.$$

Remark 1.8. m_τ の偶奇は $\tau\in I$ によらず, また $I = \{F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}\}$ の元の個数, すなわち F の次数 g は偶数なので, Remark 1.7 により, L_k 上では

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

となる.

Lemma 1.4. $x, y\in L_k$ と $\alpha\in G_\infty^D$ に対し,

$$\langle x\cdot\alpha,\ y\cdot\alpha\rangle = (\boldsymbol{N}\nu_D\alpha)^\mu\langle x, y\rangle$$

が成立する.

Proof. $j : G_\infty^D \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^I$ による α の像を $j(\alpha) = (\alpha_\tau)_{\tau\in I}$ とかいたとき,

$$\boldsymbol{N}\nu_D\alpha = \prod_{\tau\in I}\det\alpha_\tau$$

である. $x = \otimes x_\tau, y = \otimes y_\tau$ とおくと, Lemma 1.3 により次を得る:

$$\begin{aligned}\langle x\cdot\alpha, y\cdot\alpha\rangle &= \langle\otimes x_\tau\cdot\alpha_\tau, y_\tau\cdot\alpha_\tau\rangle = \prod_{\tau\in I}\langle x_\tau\cdot\alpha_\tau, y_\tau\cdot\alpha_\tau\rangle\\ &= \prod_{\tau\in I}(\det\alpha_\tau)^{m_\tau+2v_\tau}\langle x_\tau, y_\tau\rangle = (\prod_{\tau\in I}\det\alpha_\tau)^\mu\prod_{\tau\in I}\langle x_\tau, y_\tau\rangle\\ &= (\boldsymbol{N}\nu_D\alpha)^\mu\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

□

Definition 1.8. (1) R を $\mathcal{O}_K$ を含む $\mathbb{C}$ の部分環として, L_k の R-部分加群 $L_k(R)$ を

$$L_k(R) := \otimes_{\tau\in I} S_{m_\tau, v_\tau}(R)$$

とおく. $L_k = L_k \otimes_R \mathbb{C}$ であり, お互いに基底として

$$\{\otimes_\tau (e_{1,\tau}^{\otimes i_\tau} \otimes e_{2,\tau}^{\otimes(m_\tau - i_\tau)})\}_{i_\tau=0}^{m_\tau}$$

をとれるので, $L_k(R)$ は L_k の R-lattice となっている. また, 本節の冒頭に固定した $\mathcal{O}_K$-algebra 同型

$$j : \mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} M_2(\mathcal{O}_K)^I$$

を R 上に係数拡大したものから自然に誘導される準同型

$$j : \mathcal{O}_D^\times \to \mathrm{GL}_2(R)^I$$

を用いて, $L_k(R)$ 上に右 $\mathcal{O}_D^\times$-作用を定める.

(2) Definition 1.7 (2) で定義された L_k 上の duality から, $L_k(R)$ 上の duality

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L_k(R)^2 \to R, \quad (\otimes x_\tau, \otimes y_\tau) \mapsto \prod_{\tau\in I} \langle x_\tau, y_\tau\rangle$$

が誘導される.

さて, 関数 $f : G^D(\mathbb{A}_F) \to L_k$ と $u = u_f u_\infty \in G^D(\mathbb{A}_F) = G_f \times G_\infty^D$ に対し, 新たに関数

$$(f|_k u)(x) := f(xu^{-1}) \cdot u_\infty \quad (x \in G^D(\mathbb{A}_F))$$

とおく. 以上の準備のもと, 四元数環 D 上の保型形式を定義する.

Definition 1.9. (1) G_f の compact な開部分群 U に対し,

$$\begin{aligned} S_k^D(U) &:= \{f : D^\times \backslash G^D(\mathbb{A}_F) \to L_k |\ f|_k u = f,\ \forall u \in UG_\infty^D\} \\ &\cong \{f : G_f/U \to L_k |\ f(\alpha x) = f(x)\cdot\alpha^{-1},\ \forall x \in G_f, \forall \alpha \in D^\times\} \end{aligned}$$

とおく. $S_k^D(U)$ の元を**四元数環 D 上の weight k, level U の保型形式**という. ここで, $D^\times$ は j から誘導される準同型

$$D^\times \to (D \otimes_{\mathbb{Q}} K)^\times \overset{j}{\cong} \mathrm{GL}_2(K)^I$$

を通して L_k 上に作用している. また, 上段と下段の $\mathbb{C}$-線形空間の同型は, 仮に上段の空間を A, 下段の空間を B と表したとき, 互いに逆な $\mathbb{C}$-線形同型

$$\begin{aligned} &\phi : A \to B, \quad f \mapsto f|_{G_f}, \\ &\psi : B \to A, \quad f \mapsto (\tilde{f} : G^D(\mathbb{A}_F) \ni x \mapsto f(x_f)\cdot x_\infty) \end{aligned}$$

で与えられる. [16] では, $S_k^D(U)$ として主に空間 B を用いている.

(2) $S_k^D(U)$ の部分空間 $I_k(U)$ を, $k \neq 2t$ のときは $\{0\}$ とし, $k = 2t$ のときは $f \in S_{2t}^D(U)$ で

$$\nu_D : D^\times \backslash G_f / U \to F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U)$$

を経由するもの全体のなす部分空間として $I_{2t}(U)$ を定義する.

Remark 1.9. (1) Definition 1.9 (1) で, $\phi(f) \in B$ $(f \in A)$ であることや $\psi(f) \in A$ $(f \in B)$ であることを示す際, $\alpha \in D^\times$ が L_k 上に, $G_\infty^D \xrightarrow{j} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^I$ を通しても, $D^\times \xrightarrow{j} \mathrm{GL}_2(K)^I$ を通しても, 結果として同じ作用となることがポイントとなる.

(2) $k = 2t$ のとき, $L_{2t} = \mathbb{C}$ であるので $S_{2t}(U)$ の元は $\mathbb{C}$ に値をとる $D^\times \backslash G_f / U$ 上の関数となる.

Lemma 1.5. *$X(U) := D^\times \backslash G_f / U$ の完全代表系 $\mathcal{R}(\subset G_f)$ を一つ固定する. $g \in \mathcal{R}$ に対し, $X(U)$ における g を代表元とする剰余類を $[g]$ とかくことにする. このとき, 次の $\mathbb{C}$-線形同型が得られる:*

$$\phi_{\mathcal{R}} : S_k^D(U) \xrightarrow{\sim} \oplus_{g \in \mathcal{R}} L_k^{D^\times \cap gUg^{-1}}, \quad f \mapsto (f(g))_{g \in \mathcal{R}}.$$

ここで, $L_k^{D^\times \cap gUg^{-1}}$ は $D^\times \cap gUg^{-1}$ の作用のもとで固定される元からなる L_k の部分空間を表す.

Proof. $f \in S_k^D(U)$ と $\alpha = gug^{-1} \in D^\times \cap gUg^{-1}(u \in U)$ に対し,

$$f(g) \cdot \alpha = f(\alpha^{-1} g) = f(gu^{-1}) = f(g)$$

となり, $\phi_{\mathcal{R}}$ が $\oplus_{g \in \mathcal{R}} L_k^{D^\times \cap gUg^{-1}}$ に値をとる $\mathbb{C}$-線形写像であることがわかる. もし, すべての $g \in \mathcal{R}$ に対して $f(g) = 0$ となれば, 任意の $g' \in G_f$ に対し, ある $\beta \in D^\times, g \in \mathcal{R}, u \in U$ で $g' = \beta g u$ となるものをとり,

$$f(g') = f(\beta g u) = f(g) \cdot \beta = 0$$

となるので $\phi_{\mathcal{R}}$ は単射であることがわかる.

一方, 任意の $x = (x_g)_{g \in \mathcal{R}} \in \oplus_{g \in \mathcal{R}} L_k^{D^\times \cap gUg^{-1}}$ をとり, 勝手な $g' \in G_f$ について, g' が属する剰余類を $[g] \in X(U)$ とし

$$g' = \beta g u \ (\beta \in D^\times, u \in U)$$

と表して,

$$f : G_f \to L_k, \quad g' = \beta g u \mapsto x_g \cdot \beta^{-1}$$

とおく. もし g' の他の表示として

$$g' = \beta' g u' \ (\beta' \in D^\times, u' \in U)$$

をとれたとすると,

$$\beta^{-1}\beta' = g(uu'^{-1})g^{-1} \in D^\times \cap gUg^{-1}$$

であるので,

$$x_g \cdot \beta^{-1}\beta' = x_g$$

となり,

$$x_g \cdot \beta^{-1} = x_g \cdot \beta'^{-1}$$

を得る. よって, f は well-defined な $D^\times \backslash G_f/U$ 上の写像である. とくに, 各 $g \in \mathcal{R}$ に対しては,

$$f(g) = x_g$$

であるので, $\phi_{\mathcal{R}}$ は全射であることがわかった. □

Definition 1.10. G_f の二つの compact な開部分群 U, U' と $x \in G_f$ に対し, double coset の分解 $UxU' = \sqcup_i Ux_i$ を固定しておいて, **Hecke 作用素** $[UxU']$ を

$$[UxU'] : S_k^D(U) \to S_k^D(U'), \quad f \mapsto \sum_i f|_k x_i$$

と定義する.

Remark 1.10. $[UxU']$ の定義が分解 $UxU' = \sqcup_i Ux_i$ のとり方によらないことや, $f \in S_k^D(U)$ に対し $[UxU'](f) \in S_k^D(U')$ であることは, Remark 1.2 と同様に定義に従って確認できる.

Lemma 1.6. Definition 1.10 の状況で,

$$[UxU'](I_k(U)) \subset I_k(U')$$

となる.

Proof. $k \neq 2t$ のときは, $I_k(U) = I_k(U') = \{0\}$ であるから示すことは何もない.

$k = 2t$ のときは, $f \in I_{2t}(U)$ に対し, ある関数

$$\varphi : F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U) \to \mathbb{C}$$

が存在して,

$$f = \varphi \circ \nu_D$$

とかける. よって, $y \in G^D(\mathbb{A}_F)$ に対し,

$$\begin{aligned}([UxU']f)(y) &= \sum_i (f|_k x_i)(y) = \sum_i (\varphi(\nu_D(yx_i^{-1}))) \\ &= \sum_i \varphi(\nu_D(x_i)^{-1}\nu_D(y))\end{aligned}$$

となり,

$$\Phi : F_f^\times \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_i \varphi(\nu_D(x_i)^{-1}x)$$

とおけば, $[UxU']f = \Phi \circ \nu_D \in I_{2t}(U')$ を得る. □

前節で定義された Hilbert cusp forms の空間 $S_k^A(U)$ と D 上の保型形式の空間 $S_k^D(U)$ は, 次のように Jacquet-Langlands-Shimizu 対応により, Hecke 作用素と可換な同型写像で結びついている:

Theorem 1.7 (cf. [5, Theorem 2.1])**.** (1) G_f の任意の compact な開部分群 U に対し, Hecke 作用素と可換なある $\mathbb{C}$-線形同型

$$i_U : S_k^D(U)/I_k(U) \xrightarrow{\sim} S_k^A(U)$$

が存在する.

(2) G_f の二つの compact な開部分群 U, U' と $x \in G_f$ に対し, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{rcl} i_U : S_k^D(U)/I_k(U) & \xrightarrow{\sim} & S_k^A(U) \\ [UxU'] \downarrow & & \downarrow [UxU'] \\ i_{U'} : S_k^D(U')/I_k(U') & \xrightarrow{\sim} & S_k^A(U'). \end{array}$$

Definition 1.11. G_f の compact な開部分群 U に対し, Lemma 1.5 で定義したように,

$$X(U) := D^\times \backslash G_f / U$$

とおき, L_k 上の duality を用いて, $S_k^D(U)$ 上の duality を

$$\begin{aligned} &\langle \cdot, \cdot \rangle : S_k^D(U)^2 \to \mathbb{C}, \\ &\qquad (f, g) \mapsto \sum_{[x] \in X(U)} [D^\times \cap xUx^{-1} : F^\times \cap U]^{-1} \langle f(x), g(x) \rangle (\boldsymbol{N}\nu_D(x))^\mu \end{aligned}$$

と定義する. ここで, $\sum_{[x]\in X(U)}$ は $X(U)$ の完全代表系を走る和であり, G_f 上の $\boldsymbol{N}\nu_D$ は次の合成写像として定まる群準同型である:

$$\begin{aligned} G_f \xrightarrow{\nu_D = \det} F_f^\times \xrightarrow{\text{norm}} \mathbb{Q}_f^\times &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}_{>0}^\times, \\ (x_p)_p &\overset{\varphi}{\mapsto} \prod_p p^{\mathrm{ord}_p(x_p)}. \end{aligned}$$

Remark 1.11. (1) [16, p. 271] における duality の定義が, 後に [17, p. 565] において訂正されていることに注意.

(2) 上の定義で用いられている $\varphi : \mathbb{Q}_f \to \mathbb{Q}_{>0}^\times$ を $\mathbb{Q}_f$ 内に対角的に埋め込んだ $\mathbb{Q}_{>0}^\times$ に制限すれば, $\mathbb{Q}$ における素因数分解の存在により, $\mathbb{Q}_{>0}^\times$ 上の恒等写像となる.

(3) duality $\langle f, g \rangle$ の定義が $X(U)$ の代表元のとり方によらないことを示そう. まず, G_f の compact な開部分群 U は, U_0 のある compact な開部分群と共役であり, U_0 の元の行列式は各素点で unit であるので, $\boldsymbol{N}\nu_D(U) = \{1\}$ であることがわかる.

さて, $[x] \in X(U)$ について, 任意の $\alpha \in D^\times$ と $u \in U$ をとると,

$$[D^\times \cap xUx^{-1} : F^\times \cap U] = [D^\times \cap (\alpha x u)U(\alpha x u)^{-1} : F^\times \cap U]$$

であり, また, $\boldsymbol{N}\nu_D(u)=1$ であるので, Lemma 1.4 により,

$$\begin{aligned}&\langle f(\alpha xu), g(\alpha xu)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D(\alpha xu))^{\mu}\\ &\qquad = \langle f(x)\cdot\alpha^{-1}, g(x)\cdot\alpha^{-1}\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D(\alpha))^{\mu}(\boldsymbol{N}\nu_D(x))^{\mu}\\ &\qquad = \langle f(x), g(x)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D(x))^{\mu}\end{aligned}$$

を得る. したがって, $\langle f,g\rangle$ の定義は $X(U)$ の代表元のとり方によらないことがわかった.

Lemma 1.8. *G_f の compact な開部分群 U, U' と $x\in G^D(\mathbb{A}_F)$ をとる.*

(1) $f\in S_k(U)$ と $g\in S_k(U')$ に対し,

$$\langle [UxU']f, g\rangle = (\boldsymbol{N}\nu_D(x))^{\mu}\langle f, [U'x^{-1}U]g\rangle$$

が成立する.

(2) $S_k^D(U)$ の部分空間 $I_k(U)$ に対し,

$$I_k(U)^{\perp} := \{f\in S_k^D(U) \mid \langle f,g\rangle = 0,\ \forall g\in I_k(U)\}$$

とおくと,

$$[UxU'](I_k(U)^{\perp})\subset I_k(U')^{\perp}$$

となる.

Proof. (1) double coset の分解 $UxU'=\sqcup_i Uxu_i$ $(u_i\in U')$ を固定する. このとき, U' の部分群 $U'\cup x^{-1}Ux$ による剰余類分解

$$U'=\sqcup_i u_i^{-1}(U'\cup x^{-1}Ux)$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}&\langle [UxU']f, g\rangle\\ &= \sum_{[y]\in X(U')}[D^{\times}\cap yU'y^{-1} : F^{\times}\cap U']^{-1}\langle([UxU']f)(y), g(y)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D y)^{\mu}\\ &= \sum_i\sum_{[y]\in X(U')}[D^{\times}\cap yU'y^{-1} : F^{\times}\cap U']^{-1}\langle(f|_k(xu_i))(y), g(y)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D y)^{\mu}\\ &= \sum_i\sum_{[y]\in X(U')}[D^{\times}\cap yU'y^{-1} : F^{\times}\cap U']^{-1}\\ &\qquad\qquad \times\langle f(yu_i^{-1}x^{-1}), g(yu_i^{-1})\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D(yu_i^{-1}))^{\mu}\\ &= \sum_{[y']\in X(U'\cap x^{-1}Ux)}[D^{\times}\cap y'U'y'^{-1} : F^{\times}\cap U']^{-1}\langle f(y'x^{-1}), g(y')\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D y')^{\mu}\\ &= \sum_{[y'']\in X(U\cap xU'x^{-1})}[D^{\times}\cap y''(xU'x^{-1})y''^{-1} : F^{\times}\cap U']^{-1}\\ &\qquad\qquad \times\langle f(y''), g(y''x)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D y'')^{\mu}(\boldsymbol{N}\nu_D x)^{\mu}\end{aligned}$$

を得る. ここで, 第 4 等式では $y' := yu_i^{-1}$, 第 5 等式では $y'' := y'x^{-1}$ とおいた. 同様に,

$$\langle f, [U'x^{-1}U]g\rangle = \sum_{[y'']\in X(U\cap xU'x^{-1})} [D^\times \cap y''(xU'x^{-1})y''^{-1} : F^\times \cap U']^{-1} \times \langle f(y''), g(y''x)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D y'')^\mu$$

を得るので,

$$\langle [UxU']f, g\rangle = (\boldsymbol{N}\nu_D x)^\mu \langle f, [U'x^{-1}U]g\rangle$$

が成立する.

(2) $f \in I_k(U)^\perp$ と $g \in I_k(U')$ に対し, (1) により

$$\langle [UxU']f, g\rangle = (\boldsymbol{N}\nu_D x)^\mu \langle f, [U'x^{-1}U]g\rangle = 0$$

を得るので, $[UxU']f \in I_k(U')^\perp$ である. □

Definition 1.12. n を $\mathcal{O}_F$ の ideal とし, λ を n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とする.

(1) $U(n)$ と $U(n,\lambda)$ を前節で定義された G_f の comapct な開部分群とし,

$$S_k^D(n) := S_k^D(U(n)), \quad S_k^D(n,\lambda) := S_k^D(U(n,\lambda))$$

とおく. また, これに伴い,

$$I_k(n) := I_k(U(n)), \quad I_k(n,\lambda) := I_k(U(n,\lambda))$$

とおく.

(2) $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q と, n と互いに素な ideal a に対し, T_q と S_a を Definition 1.4 (1) と (2) で定義された Hecke 作用素とする.

このとき, Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k^D(n)$ を, T_q (q はすべての素 ideal) と S_a (a は n と互いに素なすべての ideal) で $\mathbb{Z}$ 上生成される多元環 $\mathbb{Z}[T_q,\ S_a]$ の $\mathrm{End}(S_k^D(n))$ における自然な像として定義する. また, Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)$ を, T_q (q は λ と相異なるすべての素 ideal) と S_a (a は $n\lambda$ と互いに素なすべての ideal) で $\mathbb{Z}$ 上生成される多元環 $\mathbb{Z}[T_q,\ S_a]$ の $\mathrm{End}(S_k^D(n,\lambda))$ における自然な像として定義する.

さて, 前節でも扱ったように, $\eta = \begin{pmatrix} \pi_\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, $\mathbb{C}$-線形写像

$$i : S_k^D(n)^2 \to S_k^D(n,\lambda), \quad (f_1, f_2) \mapsto f_1 + f_2|_k\eta$$

を考える.

Remark 1.12. (1) $(f_1, f_2) \in S_k^D(n)^2$ に対し, $i(f_1, f_2) \in S_k^D(n,\lambda)$ であることを示す際,

$$U(n,\lambda) \subset U(n), \quad U(n)\eta U(n,\lambda) = U(n)\eta$$

であることがポイントとなる.

(2) 前節に扱った i_η と違い, 次の Lemma 1.9 で見るように, $k=2t$ のとき i は単射ではない. 一方, Theorem 1.7 により, $k\neq 2t$ のときは i は i_η と同じく単射である.

Lemma 1.9. (1) 以上の設定のもとで, 次の完全列のなす可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & I_k(n) & = & I_k(n) & & 0 & & \\
 & & \psi\downarrow & & \psi\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & I_k(n)^2 & \to & S_k^D(n)^2 & \xrightarrow{i_n} & S_k^A(n)^2 & \to & 0 \\
 & & i\downarrow & & i\downarrow & & i_\eta\downarrow & & \\
0 & \to & I_k(n,\lambda) & \to & S_k^D(n,\lambda) & \xrightarrow{i_{n,\lambda}} & S_k^A(n,\lambda) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0. & & & & & &
\end{array}$$

ここで, Theorem 1.7 で現れた同型 $i_{U(n)}$, $i_{U(n,\lambda)}$ はそれぞれ i_n, $i_{n,\lambda}$ とかかれており,

$$\psi: I_k(n)\to I_k(n)^2,\quad f\mapsto (f,-f)$$

である.

(2) とくに, $I_k(n,\lambda)\subset i(S_k^D(n)^2)$ を得る.

Proof. (1) (i) まずは, 図式の可換性を示す. 左上の ψ が作っている図式が可換であることは明らか. 中間の左側の図式については,

$$i(I_k(n)^2)\subset I_k(n,\lambda)$$

を示せばよい.

$$U(n)1U(n,\lambda)=U(n),\quad U(n)\eta U(n,\lambda)=U(n)\eta$$

であるから, i を Hecke 作用素を用いて表せば, $(f_1,f_2)\in I_k(n)^2$ に対し,

$$\begin{aligned}
i(f_1,f_2) &= f_1+f_2|_k\eta \\
&= [U(n)1U(n,\lambda)]f_1+[U(n)\eta U(n,\lambda)]f_2
\end{aligned}$$

とかけて, Lemma 1.6 により, $[U(n)1U(n,\lambda)]f_1$ と $[U(n)\eta U(n,\lambda)]f_2$ はともに $I_k(n,\lambda)$ の元であるから, $i(f_1,f_2)\in I_k(n,\lambda)$ となる.

さらに, 中間の右側の図式については, Theorem 1.7 により, $(f_1, f_2) \in S_k^D(n)^2$ に対し,

$$\begin{aligned} i_\eta(i_n(f_1), i_n(f_2)) &= [U(n)1U(n,\lambda)]i_n(f_1) + [U(n)\eta U(n,\lambda)]i_n(f_2) \\ &= i_{n,\lambda}([U(n)1U(n,\lambda)]f_1) + i_{n,\lambda}([U(n)\eta U(n,\lambda)]f_2) \\ &= i_{n,\lambda}(i(f_1, f_2)) \end{aligned}$$

となり可換性が成立する.

(ii) 次に, 各列の完全性を示す. 前節で i_η の単射性については触れており, また, Theorem 1.7 により, 横向きの完全性は保証されているので, 縦向きの完全性がわかればよい.

$k \neq 2t$ のときは, $I_k(n) = I_k(n, \lambda) = \{0\}$ であり, Theorem 1.7 により, i と i_η はともに単射であるので完全性が成立する.

$k = 2t$ のとき, ψ が単射であることは明らかである. まずは, 真ん中の縦向きの完全性について示そう. $f \in I_{2t}(n)$ に対し, 関数

$$\varphi : F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U(n)) \to \mathbb{C}$$

で

$$f = \varphi \circ \nu_D$$

となるものをとる. $x \in D^\times \backslash G_f / U(n)$ に対し,

$$\begin{aligned} ((i \circ \psi)(f))(x) &= i(f, -f)(x) = f(x) - f(x\eta^{-1}) \\ &= \varphi(\nu_D(x)) - \varphi(\nu_D(x)\frac{1}{\pi_\lambda}). \end{aligned}$$

ここで, $\pi \in F$ と $u_\lambda \in \mathcal{O}_{F,\lambda}^\times$ で $\pi_\lambda = \pi u_\lambda$ となるものをとれるので,

$$\varphi(\nu_D(x)\frac{1}{\pi_\lambda}) = \varphi(\frac{1}{\pi}\nu_D(x)\frac{1}{u_\lambda}) = \varphi(\nu_D(x)),$$

となり $(i \circ \psi)(f) = 0$ を得る. 一方, もし $(f_1, f_2) \in S_{2t}^D(n)^2$ が $i(f_1, f_2) = 0$ となれば,

$$0 = i_{n,\lambda}(i(f_1, f_2)) = i_\eta(i_n(f_1, f_2))$$

であるので, $(f_1, f_2) \in I_{2t}(n)^2$ となる. とくに, $x \in D^\times \backslash G_f / U(n)$ に対し $f_2(x\eta^{-1}) = f_2(x)$ であり,

$$0 = i(f_1, f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x\eta^{-1}) = f_1(x) + f_2(x)$$

となるので, $f_2 = -f_1$, つまり, $(f_1, f_2) = \psi(f_1)$ を得る.

最後に, 左側の縦列の完全性を示す. そのためには,

$$i : I_{2t}(n)^2 \to I_{2t}(n, \lambda)$$

が全射であることを示せばよい. 任意の $f \in I_{2t}(n, \lambda)$ に対し, ある関数

$$\varphi : F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U(n, \lambda)) \to \mathbb{C}$$

が存在して, $f = \nu_D \circ \varphi$ とかける. $x \in F_f^\times$ と $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(n,\lambda)$ に対し, $F^\times$ に属する λ での素元 π により,

$$x(ad - bc) = \frac{1}{\pi} x(a(\pi d) - b(\pi c)) \in F^\times x \nu_D(U(n,\lambda))$$

となるので, 自然な全射

$$F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U(n,\lambda)) \to F^\times \backslash F_f^\times / \nu_D(U(n))$$

は全単射となる. したがって, $f = \varphi \circ \nu_D$ は自然に $I_{2t}(n)$ の元とみなせて,

$$i(f, 0) = f$$

により i が全射であることがわかった.

(2) $k \neq 2t$ のときは, $I_k(n,\lambda) = \{0\}$ であるから示すことは何もない. $k = 2t$ のときは, $i : I_{2t}(n)^2 \to I_{2t}(n,\lambda)$ の全射性から,

$$I_{2t}(n,\lambda) \subset i(S_k^D(n)^2)$$

であることがわかる. □

Definition 1.13. Lemma 1.9 の可換図式において,

$$\begin{aligned} S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}} &:= (i(S_k^D(n)^2))^\perp \\ &= \{f \in S_k^D(n,\lambda) |\ \langle f, g \rangle = 0,\ \forall g \in i(S_k^D(n)^2)\} \end{aligned}$$

と定義する. Lemma 1.2 と同様に,

$$i : S_k^D(n)^2 \to S_k^D(n,\lambda)$$

が, $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)$ の生成系 $\{T_q(q \neq \lambda),\ S_a((a, n\lambda) = 1)\}$ の作用と可換であることが示されるので, $S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ は $S_k^D(n,\lambda)$ の $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)$-部分加群となり, $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)$ の $\mathrm{End}(S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}})$ における自然な像を $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ と表すことにする.

Remark 1.13. Definition 1.13 で定義された $S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ と, 前節で定義された λ で new な Hilbert cusp forms の空間 $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ との関係は Lemma 3.1 で検証される.

1.3. 擬表現

ここでは, Wiles [18, Lemma 2.2.3] により定式化され, [16] の主定理 [16, Theorem 2] (本稿の Theorem 0.1) を証明する際に重要な役割を果たす擬表現の理論について, Hida [6, Section 2.2.1] に沿って解説する. とくに, 擬表現から表現を復元するテクニックが主な話題となる.

この Section に限り, G は抽象的な群であり, A は $\mathbb{F}$ を剰余体にもつ局所環であるとする. G の単位元を 1_G, A の極大 ideal を $\mathfrak{m}_A$ とか

く. さらに, G は位数 2 の元 c をもつとして, $\mathrm{char}(\mathbb{F})$ は 2 でないと仮定する.

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$$

を, c に関して odd, すなわち $\det \rho(c) = -1$ を満たす A-係数の 2 次元表現とする. ρ の表現空間を $V = V(\rho) := A^2$ とおく. また, mod $\mathfrak{m}_A$ 表現

$$\bar{\rho} := \rho \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_A) : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

の表現空間を $\bar{V} = V(\bar{\rho}) := \mathbb{F}^2$ とおく.

$2 \in A^\times$ だから, c に対する V の固有空間分解

$$V = \frac{1-c}{2}V \oplus \frac{1+c}{2}V$$

が生じる. 同様に $2 \in \mathbb{F}^\times$ だから, c に対する $\bar{V}$ の固有空間分解

$$\bar{V} = \frac{1-c}{2}\bar{V} \oplus \frac{1+c}{2}\bar{V}$$

も生じる. ここで, $V_\pm := \frac{1\pm c}{2}V$, $\bar{V}_\pm := \frac{1\pm c}{2}\bar{V}$ (以下, $\pm$ は複号同順) とおくと,

$$\bar{V}_\pm = V_\pm / \mathfrak{m}_A V_\pm$$

を得る. $\det \rho(c) = -1$ だから $\dim_{\mathbb{F}} \bar{V}_\pm = 1$ であり, ある $\bar{v}_\pm \in \bar{V}_\pm$ が存在して, $\bar{V}_\pm = \mathbb{F}\bar{v}_\pm$ となる. $v_\pm \in V_\pm$ として $v_\pm \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_A) = \bar{v}_\pm$ なるものをとると, A-module 準同型

$$A \to V_\pm, \quad a \mapsto a v_\pm$$

は A-同型となるので, A-module としての分解

$$V = Av_- \oplus Av_+$$

を得る. この分解のもとで, $\sigma \in G$ に対する $\rho(\sigma)$ の A-係数の表現行列を

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a(\sigma) & b(\sigma) \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{pmatrix}$$

とかくことにする. このとき,

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることに注意. ここで,

$$x : G \times G \to A, \quad (r, s) \mapsto b(r)c(s)$$

とおくと, 次の三つの条件が成立することがわかる:

(W1) $a(rs) = a(r)a(s) + x(r,s),\ d(rs) = d(r)d(s) + x(s,r),$
$$x(rs,tu) = a(r)a(u)x(s,t) + a(u)d(s)x(r,t) + a(r)d(t)x(s,u) + d(s)d(t)x(r,u);$$

(W2) $a(1_G) = d(1_G) = d(c) = 1,\ a(c) = -1,$
$$x(r,s) = x(s,t) = 0 \quad (\text{if } s = 1_G \text{ or } s = c);$$

(W3) $x(r,s)x(t,u) = x(r,u)x(t,s).$

Definition 1.14 ([6, Section 2.2.1])**.** A を $\mathbb{F}$ を剰余体にもつ局所環とし, G を群, $c \in G$ を位数 2 の元とする. $\mathrm{char}(\mathbb{F})$ は 2 でないと仮定する. このとき,

(1) 三つの写像
$$a : G \to A,$$
$$d : G \to A,$$
$$x : G \times G \to A$$
が上の三つの条件 (W1)-(W3) を満たすとき, 組 $\tau = \{a, d, x\}$ を (G, c) の A への**擬表現**という. 位数 2 の元 $c \in G$ として何を用いたかが明らかなときは, とくに c を明示せずに, 記号として
$$\tau : G \to A$$
と表すことが多い.

(2) 擬表現 $\tau = \{a, d, x\}$ に対し,
$$\mathrm{Trace}(\tau) : G \to A, \quad r \mapsto a(r) + d(r),$$
$$\det(\tau) : G \to A, \quad r \mapsto a(r)d(r) - x(r,r)$$
をそれぞれ τ の **trace** と **determinant** とよぶ.

Remark 1.14. (1) 擬表現 $\tau = \{a, d, x\}$ について, $2 \in A^\times$ であるから,
$$a(r) = \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\tau)(r) - \mathrm{Trace}(\tau)(rc)),$$
$$d(r) = \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\tau)(r) + \mathrm{Trace}(\tau)(rc)),$$
$$x(r,s) = a(rs) - a(r)a(s)$$
が得られるので, τ は $\mathrm{Trace}(\tau)$ で定まることがわかる.

(2) 擬表現 τ に対し, $\det(\tau)$ は $A^\times$ に値をもつ G 上の群準同型となる.

(3) Definition 1.14 (2) で定義された $\det(\tau)$ は, Taylor が [16, Section 2] で用いた擬表現の determinant の $\frac{1}{4}$ の値をとるものであるが, 本稿では簡単のため, Definition 1.14 (2) の定義を採用する.

Definition 1.15. 上で見たように, 2 次元表現 ρ から自然に擬表現が構成できる. これを τ_ρ とかき, ρ **に付随する擬表現**とよぶことにする. このとき,

$$\mathrm{Trace}(\rho) = \mathrm{Trace}(\tau_\rho)$$

となることに注意.

Definition 1.15 とは逆に, 擬表現から trace が一致する 2 次元表現を構成することができる:

Proposition 1.10 (Wiles [18] (cf. [6, Proposition 2.16]))**.** *A を $\mathbb{F}$ を剰余体にもつ局所環とし, G を群, $c \in G$ を位数 2 の元とする. $\mathrm{char}(\mathbb{F})$ は 2 でないと仮定する. $\tau = \{a, d, x\}$ を A への (G, c) の擬表現として, 次の二つの条件のうち, どちらか一方は満たされていると仮定する:*

(i) 任意の $r, s \in G$ に対して $x(r, s) = 0$ である;

(ii) ある $(r, s) \in G \times G$ が存在して $x(r, s) \in A^\times$ となる.

このとき, ある A-係数の 2 次元表現

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$$

で, 次を満たすものが存在する:

$$\mathrm{Trace}(\rho) = \mathrm{Trace}(\tau),\ \det(\rho) = \det(\tau),\ \rho(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

もし, A と G が位相的であり a, d, x が連続写像であるときは, 上の ρ として連続な表現を得ることができる.

Proof. (i) 任意の $r, s \in G$ に対して $x(r, s) = 0$ であるとき: (W1) により

$$a(rs) = a(r)a(s), \quad d(rs) = d(r)d(s)$$

であり, (W2) により

$$a(1_G) = 1, \quad d(1_G) = 1$$

となるので, a と d は $A^\times$ に値をもつ G 上の群準同型である. よって,

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ 0 & d(g) \end{pmatrix}$$

と定義すれば, ρ は 2 次元表現であり (W2) により

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. さらに, $g \in G$ に対し $x(g, g) = 0$ であることから,

$$\mathrm{Trace}(\rho)(g) = a(g) + d(g) = \mathrm{Trace}(\tau)(g),$$
$$\det(\rho)(g) = a(g)d(g) = \det(\tau)(g)$$

を得る.

(ii) ある $(r,s)\in G\times G$ が存在して $x(r,s)\in A^\times$ となるとき: $g,h\in G$ を任意の元とする.

$$b(g) := \frac{x(g,s)}{x(r,s)}, \quad c(h) := x(r,h)$$

とおけば (W3) により,

$$b(g)c(h) = \frac{x(g,s)x(r,h)}{x(r,s)} = \frac{x(r,s)x(g,h)}{x(r,s)} = x(g,h)$$

となる. ここで,

$$\rho(g) := \begin{pmatrix} a(g) & b(g) \\ c(g) & d(g) \end{pmatrix}$$

とおくと (W2) により,

$$\rho(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(1_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. さらに,

$$\rho(g)\rho(h) = \begin{pmatrix} a(g)a(h)+b(g)c(h) & a(g)b(h)+b(g)d(h) \\ c(g)a(h)+d(g)c(h) & d(g)d(h)+c(g)b(h) \end{pmatrix}$$

において (W1) により,

$$\begin{aligned}
a(g)a(h)+b(g)c(h) &= a(g)a(h)+x(g,h) = a(gh), \\
d(g)d(h)+c(g)b(h) &= d(g)d(h)+x(h,g) = d(gh), \\
c(g)a(h)+d(g)c(h) &= x(r,g)a(h)+d(g)x(r,h) \\
&= a(1_G)a(h)x(r,g)+a(1_G)d(g)x(r,h) \\
&= x(r,gh) = c(gh), \\
a(g)b(h)+b(g)d(h) &= x(r,s)^{-1}(a(g)b(h)x(r,s)+b(g)d(h)x(r,s)) \\
&= x(r,s)^{-1}(a(g)d(1_G)x(h,s)+d(h)d(1_G)x(g,h)) \\
&= x(r,s)^{-1}x(gh,s) = b(gh)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

であることがわかる. よって,

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_2(A)$$

は表現であり,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Trace}(\rho)(g) = a(g)+d(g) = \mathrm{Trace}(\tau)(g), \\
&\det(\rho)(g) = a(g)d(g)-b(g)c(g) = a(g)d(g)-x(g,g) = \det(\tau)(g)
\end{aligned}$$

となる. さらに, G と A が位相的であるとき, a, d, x が連続ならば ρ も連続となることは構成法からわかる. □

2. [16, Theorem 2] (Theorem 0.1) の証明の概説

ここでは, [16] の主定理 [16, Theorem 2] (本稿の Theorem 0.1) の証明の概説をする. まず始めに, 主定理の証明の中で重要な役割を果たす [16, Theorem 1] と [16, Proposition 1] を紹介する. ここでは主張の紹介だけにとどめて, それらの証明の概説は Section 3 と Section 4 にて行いたい. 以下, 用いる記号としては, Section 1.1 と Section 1.2 のものを踏襲する.

Theorem 2.1 ([16, Theorem 1])**.** *n を $\mathcal{O}_F$ の ideal とする. Hecke 環 $\boldsymbol{T}_k(n)$ に関する Hilbert Hecke 固有形式 $f \in S_k^A(n)$ に対し, 次の条件を満たす $\mathcal{O}_f$ の 0 とは異なる ideal E_f が存在する:*

条件 *n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal λ に対し, $\mathcal{O}_f$ のある ideal $\mathcal{I}_\lambda$ が存在して, $\mathcal{O}_f$-algebra 準同型*

$$\begin{aligned}\theta_{f,\lambda} : \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_f &\to \mathcal{O}_f/\mathcal{I}_\lambda,\\ T_q &\mapsto \theta(T_q) \pmod{\mathcal{I}_\lambda} \quad (q \neq \lambda),\\ S_a &\mapsto \theta(S_a) \pmod{\mathcal{I}_\lambda} \quad ((a, n\lambda) = 1)\end{aligned}$$

が定まり, $\boldsymbol{N}\lambda$ と互いに素な $\mathcal{O}_f$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_\lambda) \geq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\theta(T_\lambda^2 - S_\lambda(1+\boldsymbol{N}\lambda)^2)) - \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(E_f(1+\boldsymbol{N}\lambda))$$

が成り立つ.

Proposition 2.2 ([16, Proposition 1])**.** *p を素数, n を $\mathcal{O}_F$ の ideal, λ を n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とする. G_F を F の絶対 Galois 群とし, $c \in G_F$ を複素共役とする. このとき,*

(1) *次の条件 (i), (ii) を満たす (G_F, c) の $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ への連続な擬表現*

$$r : G_F \to \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

が存在する:

(i) *r は $n\lambda p$ の外で不分岐, つまり, r から Proposition 1.10 により構成される Galois 表現が $n\lambda p$ の外で不分岐である;*

(ii) *$n\lambda p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,*

$$\mathrm{Trace}(r)(\mathrm{Frob}_q) = T_q, \quad \det(r)(\mathrm{Frob}_q) = S_q \boldsymbol{N} q$$

が成立する.

さらに,

(2) *$\chi : G_F \to (\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$ を, $n\lambda p$ と互いに素なすべての素 ideal ℓ に対して $\mathrm{Frob}_\ell \mapsto S_\ell$ と定義された写像を Chebotarev の稠密定理で G_F 上に延長した連続な群準同型とし, q を $p\lambda$ と互いに素*

で, n を割る任意の素 ideal とする. このとき, Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し,

$$\det(r)(\sigma) = \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q,$$

かつ,

$$T_q^{\mathrm{ord}_q(n)} = 0 \quad \text{or} \quad (T_q^2 - T_q(\mathrm{Trace}(r)(\sigma)) - \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q)^2 = 0$$

が成立する.

以上の二つの主張を認めたうえで, Theorem 0.1 の証明の概略をみてみたい.

Theorem 0.1 の Galois 表現 ρ を得るには, Proposition 1.10 により, np の外で不分岐な連続擬表現

$$r : G_F \to \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$$

で, np と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,

$$\mathrm{Trace}(r)(\mathrm{Frob}_q) = \theta(T_q), \quad \det(r)(\mathrm{Frob}_q) = \theta(S_q)\boldsymbol{N}q$$

を満たし, さらに n を割る素 ideal q で p と互いに素なものについて, もし $\theta(T_q) \neq 0$ ならば, Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Trace}(r)(\sigma) = \theta(T_q) + \chi(\sigma)(\boldsymbol{N}q)\theta(T_q)^{-1} \cdots (*),\\ &\det(r)(\sigma) = \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q\end{aligned}$$

を満たすものを構成できればよい. trace に関する等式 $(*)$ の両辺に $\theta(T_q)$ をかけて整理すれば,

$$\theta(T_q)^2 - \theta(T_q)\,\mathrm{Trace}(r)(\sigma) + \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q = 0$$

となり, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ は整域であるから, 条件 $(*)$ を $\theta(T_q) \neq 0$ も包含した形で, ある $s_q \geq 1$ により,

$$\theta(T_q^{s_q})(\theta(T_q)^2 - \theta(T_q)\,\mathrm{Trace}(r)(\sigma) + \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q)^2 = 0$$

となることと読み替えられる.

このような, 擬表現 r を入手するためには, すべての $m \geq 1$ に対し, np の外で不分岐な擬表現

$$r_m : G_F \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m$$

で, np と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Trace}(r_m)(\mathrm{Frob}_q) = \theta(T_q) \pmod{\mathfrak{p}^m},\\ &\det(r_m)(\mathrm{Frob}_q) = \theta(S_q)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathfrak{p}^m}\end{aligned}$$

を満たし, さらに n を割る素 ideal q で p と互いに素なものについて, Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(\theta(T_q^{s_q})(\bmod\ \mathfrak{p}^m)) \\
&\quad \times (\theta(T_q)^2(\bmod\ \mathfrak{p}^m) - \theta(T_q)(\bmod\ \mathfrak{p}^m)\,\mathrm{Trace}(r_m)(\sigma) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (\chi(\sigma)\boldsymbol{N}q)(\bmod\ \mathfrak{p}^m))^2 = 0, \\
&\det(r_m)(\sigma) = \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathfrak{p}^m}
\end{aligned}$$

を満たすものを構成できればよい. もし, このような擬表現の列 $\{r_m\}_{m\geq 1}$ が構成できれば, 任意の $m \geq 1$ と np の外の素 ideal q に対し,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(r_m)(\mathrm{Frob}_q) &= \theta(T_q)(\bmod\ \mathfrak{p}^m) \\
&= \mathrm{Trace}(r_{m+1})(\mathrm{Frob}_q)(\bmod\ \mathfrak{p}^m)
\end{aligned}$$

となる. Chebotarev の稠密定理と Remark 1.14 (1) により, 擬表現の値は $\{\mathrm{Frob}_q \mid q \nmid np\}$ 上の trace の値で決まるので,

$$r_m \equiv r_{m+1} \pmod{\mathfrak{p}^m}$$

を得る. このとき, この射影系の極限

$$r := \varprojlim_m r_m : G_F \to \varprojlim_m \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m = \mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}}$$

が求める擬表現となり, Theorem 0.1 は証明されたことになる.

さて, $m \geq 1$ として, 擬表現 r_m の構成方法をみてみよう.

Lemma 2.3. *E_f を Theorem 2.1 に現れた $\mathcal{O}_f$ の ideal とし, $m \geq 1$ に対し,*

$$t(m) := m + \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(E_f) + [L_f : \mathbb{Q}]$$

とおく. このとき, $\mathcal{O}_F$ の n と互いに素な素 ideal λ で,

$$\boldsymbol{N}\lambda \equiv \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{t(m)}}$$

をみたすものが無限個存在する. ここで, α_λ と β_λ は, 2 次方程式

$$X^2 - \theta(T_\lambda)X + \theta(S_\lambda)\boldsymbol{N}\lambda = 0$$

の根である.

Proof. $d := [F : \mathbb{Q}]$ とおく. Brylinski-Labesse [1] により, F の素点からなるある有限集合の外で不分岐な 2^d 次元の連続 Galois 表現

$$\beta : G_F \to \mathrm{GL}_{2^d}(\mathcal{O}_{f,\mathfrak{p}})$$

で, 次の条件を満たすものが存在する:

条件 下記の (i)-(iii) を満たす $\mathcal{O}_F$ のほとんどすべての素 ideal q に対し, $\beta(\mathrm{Frob}_q)$ の特性多項式の根の集合が, しかるべき $\alpha_{\tau(q)}, \beta_{\tau(q)}$ を用いて

$$\{\prod_{\tau\in I_1}\alpha_{\tau(q)}\prod_{\tau\in I_2}\beta_{\tau(q)}\}_{I_1\sqcup I_2=I}$$

で与えられる. ここで, q の満たすべき条件とは次の三つである:
(i) q は np を割らない;
(ii) β は q で不分岐;
(iii) q の剰余標数 $\bar{q}$ が $\bar{F}$ における F の Galois 閉包 F^{Gal} で完全分解する.

Remark 2.1. I の元の個数は d であるから, I を二つの部分集合 I_1 と I_2 で分割する仕方が 2^d 通りあることに注意.

この β に対し, G_F の正規部分群 H を

$$H := \{\sigma\in G_F|\ \beta(\sigma)\equiv\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t(m)})\}$$

とおき, F^{Gal} と $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{t(m)}})$ と $\bar{F}^H$ の合成体を M とする. このとき, np を割らない $\mathcal{O}_F$ の素 ideal λ で, 剰余標数 $\bar{\lambda}$ が M で完全分解するものが無限個存在するが, それらの $\bar{\lambda}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{t(m)}})$ で完全分解することから, $\bar{\lambda}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^{t(m)})$ となるので,

$$\boldsymbol{N}\lambda\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t(m)})$$

となる. また, λ は $\bar{F}^H$ で不分岐であるから $\mathrm{Frob}_\lambda\in H$ であり,

$$\beta(\mathrm{Frob}_\lambda)\equiv\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t(m)})\cdots(*)$$

となる. 一方, F^{Gal} でも完全分解することから, 上述の Brylinski-Labesse の $\beta(\mathrm{Frob}_\lambda)$ の特性多項式の根に関する結果を適用できて, $(*)$ と組み合わせると,

$$\alpha_\lambda\times\prod_{(\lambda\neq)\lambda'|\bar{\lambda}}\beta_{\lambda'}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t(m)}),$$
$$\prod_{\forall\lambda'|\bar{\lambda}}\beta_{\lambda'}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^{t(m)})$$

を得る．ここで, λ' は $\{F^\tau\}_{\tau\in I}$ たちにおける $\bar{\lambda}$ を割る素 ideal を走る．これらの商をとることで

$$\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{t(m)}}$$

を得る． □

ここで, $m \geq 1$ を固定し, Lemma 2.3 の λ を一つとる．

Lemma 2.4. 上記の設定のもとで, 次が成立する:

(1) $\mathrm{ord}_p(1+\boldsymbol{N}\lambda) \leq [L_f : \mathbb{Q}]$.

(2) $\theta(T_\lambda^2 - S_\lambda(1+\boldsymbol{N}\lambda)^2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{t(m)}}$.

Proof. (1) $\boldsymbol{N}\lambda \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{m+\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(E_f)+[L_f:\mathbb{Q}]}}$ であるから, $1+\boldsymbol{N}\lambda \equiv 2 \pmod{p^{1+[L_f:\mathbb{Q}]}}$ となる．もし, $1+\boldsymbol{N}\lambda \equiv 0 \pmod{p^{1+[L_f:\mathbb{Q}]}}$, つまり $\mathrm{ord}_p(1+\boldsymbol{N}\lambda) \geq 1+[L_f:\mathbb{Q}]$ であれば, $2 \equiv 0 \pmod{p^{1+[L_f:\mathbb{Q}]}}$ となり, $[L_f:\mathbb{Q}] \geq 1$ に矛盾．よって, $\mathrm{ord}_p(1+\boldsymbol{N}\lambda) \leq [L_f:\mathbb{Q}]$ である．

(2) 関係式

$$(1+\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda})(1+\frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda}) = \frac{(\alpha_\lambda+\beta_\lambda)^2}{\alpha_\lambda\beta_\lambda} = \frac{\theta(T_\lambda)^2}{\theta(S_\lambda)\boldsymbol{N}\lambda}$$

により,

$$\theta(T_\lambda)^2 = \theta(S_\lambda)(1+\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda})(1+\frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda})\boldsymbol{N}\lambda$$

となり,

$$\theta(T_\lambda^2 - S_\lambda(1+\boldsymbol{N}\lambda)^2) = \theta(S_\lambda)((1+\frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda})(1+\frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda})\boldsymbol{N}\lambda - (1+\boldsymbol{N}\lambda)^2)$$

を得る．よって, $\boldsymbol{N}\lambda \equiv \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} \equiv \frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{t(m)}}$ により,

$$\theta(T_\lambda^2 - S_\lambda(1+\boldsymbol{N}\lambda)^2) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{t(m)}}$$

となる． □

Proposition 2.2 で得られる $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ への擬表現と, Theorem 2.1 で得られる $\mathcal{O}_f$-algebra 準同型 $\theta_{f,\lambda}$ をつなげることで, $n\lambda p$ の外で不分岐な $\mathcal{O}_f/\mathcal{I}_\lambda$ への擬表現

$$r_{m,\lambda} : G_F \to \mathcal{O}_f/\mathcal{I}_\lambda$$

で, $n\lambda p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,

$$\mathrm{Trace}(r_{m,\lambda})(\mathrm{Frob}_q) = \theta(T_q) \pmod{\mathcal{I}_\lambda},$$
$$\det(r_{m,\lambda})(\mathrm{Frob}_q) = \theta(S_q)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathcal{I}_\lambda}$$

を満たし, さらに p と互いに素で $n\lambda$ を割る任意の素 ideal q に対しては, Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\det(r_{m,\lambda})(\sigma) = \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathcal{I}_\lambda},\\
&(\theta(T_q^{\mathrm{ord}_q(n\lambda)})(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda))\\
&\qquad \times (\theta(T_q^2)(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda) - (\theta(T_q)(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda))\,\mathrm{Trace}(r_{m,\lambda})(\sigma)\\
&\qquad\qquad - \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda))^2 = 0
\end{aligned}$$

を満たすものが構成できる. いま, $\mathfrak{p} \nmid \boldsymbol{N}\lambda$ なので Theorem 2.1 により,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_\lambda) \geq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\theta(T_\lambda^2 - S_\lambda(1+\boldsymbol{N}\lambda)^2)) - \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(E_f(1+\boldsymbol{N}\lambda))$$

である. よって, Lemma 2.4 の (1) と (2) により,

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}_\lambda) \geq m$$

となり, 自然な全射

$$\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m : \mathcal{O}_f/\mathcal{I}_\lambda \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m$$

が生じる. これにより, 擬表現 $r_{m,\lambda} : G_F \to \mathcal{O}_f/\mathcal{I}_\lambda$ を mod $\mathfrak{p}^m$ することで, $\mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m$ への擬表現

$$r_{m,\lambda} : G_F \to \mathcal{O}_f/\mathfrak{p}^m$$

で, $n\lambda p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(r_{m,\lambda})(\mathrm{Frob}_q) &= \theta(T_q) \pmod{\mathfrak{p}^m},\\
\det(r_{m,\lambda})(\mathrm{Frob}_q) &= \theta(S_q)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathfrak{p}^m}
\end{aligned}$$

をみたし, さらに p と互いに素で $n\lambda$ を割る任意の素 ideal q に対しては, Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\det(r_{m,\lambda})(\sigma) = \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q \pmod{\mathfrak{p}^m},\\
&(\theta(T_q^{\mathrm{ord}_q(n\lambda)})(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m))\\
&\qquad \times (\theta(T_q^2)(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m) - (\theta(T_q)(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m))\,\mathrm{Trace}(r_{m,\lambda})(\sigma)\\
&\qquad\qquad - \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m))^2 = 0
\end{aligned}$$

を満たすものができる.

ここでの議論で本来求めている擬表現 r_m の満たすべき条件のうち, $r_{m,\lambda}$ に不足しているものとして次の三つがある:

(i) r_m は λ で不分岐;
(ii) $\mathrm{Trace}(r_m)(\mathrm{Frob}_\lambda) = \theta(T_\lambda) \pmod{\mathfrak{p}^m}$;
(iii) $\det(r_m)(\mathrm{Frob}_\lambda) = \theta(S_\lambda)\boldsymbol{N}\lambda \pmod{\mathfrak{p}^m}$.

しかし, 今まで用いていた λ の代わりに, Lemma 2.3 で無限個の存在が保証されている素 ideal のうち, $n\lambda p$ を割らない λ' を一つとれば, 二つ

の G_F 上の擬表現 $r_{m,\lambda}$ と $r_{m,\lambda'}$ は, 稠密な部分集合 $\{\mathrm{Frob}_q \mid q \nmid n\lambda\lambda' p\}$ 上で同じ trace の値を取るので, Remark 1.14 (1) により

$$r_{m,\lambda} = r_{m,\lambda'}$$

である. $r_{m,\lambda'}$ は λ における上述の条件 (i)-(iii) をみたすので,

$$r_m := r_{m,\lambda} (= r_{m,\lambda'})$$

とおけば, 求めていた r_m を入手できたことになり, Theorem 0.1 は証明された.

3. [16, Theorem 1] (Theorem 2.1) の証明の概説

ここでは, 前節で証明はせずに一旦主張を認めた [16, Theorem 1] (本稿の Theorem 2.1) の証明の概説を行う. 用いる記号としては, Section 1.1 と Section 1.2 のものを踏襲する.

3.1. 四つの補題

この Section では, Theorem 2.1 の証明を概説する前に, そこで用いられる四つの準備補題を紹介したい. これらは, Definition 1.11 で定義された, 四元数環 D 上の保型形式のなす空間 $S^D(U)$ 上の duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の性質を論じたものである.

Lemma 3.1 ([16, Lemma 1])**.** (1) 次の直和分解を得る*:*

$$S_k^D(U) = I_k(U) \oplus I_k(U)^\perp.$$

(2) 直和分解

$$S_k^D(n, \lambda) = i(S_k^D(n)^2) \oplus S_k^D(n, \lambda)^{\mathrm{new}}$$

を得る*.* さらに*,* Jacquet-Langlands-Shimizu 対応 (Theorem 1.7) から Hecke 加群としての同型

$$S_k^D(n, \lambda)^{\mathrm{new}} \overset{i_{n,\lambda}}{\cong} S_k^A(n, \lambda)^{\mathrm{new}}$$

が誘導される*.* したがって*,* Hecke 環の自然な同型

$$\boldsymbol{T}_k^D(n, \lambda)^{\mathrm{new}} \cong \boldsymbol{T}_k(n, \lambda)^{\mathrm{new}}$$

を得る*.*

Proof. (i) $k = 2t$ のとき, Remark 1.9 (2) でみたように,

$$S_{2t}^D(U) = \{f : X(U)(= D^\times \backslash G_f / U) \to \mathbb{C} : \mathrm{maps}\} = \mathbb{C}^{X(U)}$$

であり, $\mathbb{R}^{X(U)} \subset \mathbb{C}^{X(U)}$ により $S_{2t}^D(U)$ に $\mathbb{R}$-ベクトル空間の構造を入れることで, $S_{2t}^D(U)$ を duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ による内積空間とみることができる.

よって, 直交補空間による直和分解として, (1) と (2) の直和分解

$$S_{2t}^D(U) = I_{2t}(U) \oplus I_{2t}(U)^{\perp},$$
$$S_{2t}^D(n,\lambda) = i(S_{2t}^D(n)^2) \oplus S_{2t}^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$$

を得る. さらに, Lemma 1.9 の可換図式により, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応の同型 $i_{n,\lambda}$ から,

$$i(S_{2t}^D(n)^2)/I_{2t}(n,\lambda) \overset{i_{n,\lambda}}{\cong} i_\eta(S_{2t}^A(n)^2)$$

を得るので, 同時に直交補空間の同型

$$S_{2t}^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \overset{i_{n,\lambda}}{\cong} S_{2t}^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$$

も成立する.

(ii) $k \neq 2t$ のとき, $I_k(U) = \{0\}$ であり, $S_k^D(U) = \{0\}^{\perp}$ であるから (1) は成立する.

Jacquet-Langlands-Shimizu 対応 (Theorem 1.7) により,

$$i_{n,\lambda} : S_k^D(n,\lambda) \xrightarrow{\sim} S_k^A(n,\lambda)$$

であり, 直和分解

$$S_k^A(n,\lambda) = i_\eta(S_k^A(n)^2) \oplus S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$$

における直和因子 $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ の $i_{n,\lambda}$ による逆像を $M \subset S_k^D(n,\lambda)$ とおく. Lemma 1.9 により,

$$i_{n,\lambda} : i(S_k^D(n)^2) \xrightarrow{\sim} i_\eta(S_k^A(n)^2)$$

であるので, 直和分解

$$S_k^D(n,\lambda) = i(S_k(n)^2) \oplus M$$

を得る. よって (2) を示すには,

$$M = S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}} (= (i(S_k^D(n)^2))^{\perp})$$

であること, つまり

$$\langle i(S_k^D(n)^2), M \rangle = 0$$

となることを証明すればよい.

$\boldsymbol{T}$ を $\{T_q, S_q\ (q \neq \lambda)\}$ で $\mathbb{Z}$ 上生成された抽象的な Hecke 環とする. Hilbert cusp forms の空間 $S_k^A(n,\lambda)$ の直和因子 $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ と $i_\eta(S_k^A(n))$ への $\boldsymbol{T}$ の作用がともに同時対角化可能であることが, λ で new な cusp forms の理論によって知られており, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応は Hecke 作用素と可換であるから, 対応する $S_k^D(n,\lambda)$ の直和因子 M と $i(S_k^D(n)^2)$ への $\boldsymbol{T}$ の作用も, ともに同時対角化可能となる. したがって, それぞれの部分空間において $\boldsymbol{T}$ に関する固有形式による基底をと

ることができるので, $f \in i(S_k^D(n)^2)$ と $g \in M$ を $\boldsymbol{T}$ についての任意の固有形式としたとき,

$$\langle f, g \rangle = 0$$

であることを示せばよい.

もし, $\boldsymbol{T}$ についてのある固有形式 $f \in i(S_k^D(n)^2)$ と $g \in M$ で,

$$\langle f, g \rangle \neq 0$$

となるものがあれば, Lemma 1.8 と Remark 1.8 により,

$$\begin{aligned}\langle f, T_q(g) \rangle &= \langle f, [U(n,\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix} U(n,\lambda)] g \rangle \\ &= (\boldsymbol{N}\nu_D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix})^{\mu} \langle [U(n,\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi_q} \end{pmatrix} U(n,\lambda)] f, g \rangle \cdots (*)\end{aligned}$$

となる. $(\boldsymbol{N}\nu_D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_q \end{pmatrix})^{\mu} = (\boldsymbol{N}q)^{\mu}$ であり,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi_q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で, $U(n,\lambda)$ の元と $\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi_q} \end{pmatrix}$ は可換であるので,

$$\langle [U(n,\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\pi_q} \end{pmatrix} U(n,\lambda)] f, g \rangle = \langle T_q(S_{q^{-1}} f), g \rangle$$

を得る. よって $(*)$ と合わせて, $\langle f, g \rangle \neq 0$ により,

$$\theta_g(T_q) = \theta_f(T_q)\theta_f(S_q)^{-1}(\boldsymbol{N}q)^{\mu} \cdots (**)$$

が成立する. $q \nmid n\lambda$ に対し,

$$\chi(q) := \theta_f(S_q)^{-1}(\boldsymbol{N}q)^{\mu}$$

とおけば, χ は finite order の character となり, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応で f と g に対応する Hilbert Hecke 固有形式により生成される保型表現をそれぞれπ_f と π_g とかけば, $(**)$ と strong multiplicity one theorem により,

$$\pi_g \cong \pi_f \otimes (\chi \circ \det)$$

となることがわかる. しかし, g は λ で new なので π_g の conductor は λ で割り切れるはずだが, f の level n は λ と互いに素であり, また χ の conductor も λ と互いに素なので矛盾が生じる. よって, Lemma は示された. $\square$

Lemma 3.2 ([16, Lemma 2])**.** $\mathbb{C}$-線形写像

$$i : S_k^D(n)^2 (= S_k^D(n) \oplus S_k^D(n)) \to S_k^D(n, \lambda)$$

の, $S_k^D(n,\lambda)$ と $S_k^D(n) \oplus S_k^D(n)$ 上のそれぞれの duality に関する adjoint 写像を

$$i^\dagger : S_k^D(n, \lambda) \to S_k^D(n)^2$$

と表すことにする. ここで, $S_k^D(n) \oplus S_k^D(n)$ 上の duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $S_k^D(n)$ 上の duality を用いて

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle := \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle$$

と定義されている. このとき, 合成写像

$$i^\dagger \circ i : S_k^D(n)^2 \to S_k^D(n)^2$$

は, 次の行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}\lambda + 1 & (\boldsymbol{N}\lambda)^\mu S_{\lambda^{-1}} T_\lambda \\ T_\lambda & (\boldsymbol{N}\lambda)^\mu (\boldsymbol{N}\lambda + 1) \end{pmatrix}.$$

Proof. i に対する adjoint 写像 $i^\dagger$ は, duality の関係式

$$\langle i(f, g), h \rangle = \langle (f, g), i^\dagger(h) \rangle \quad (f, g \in S_k^D(n),\ h \in S_k^D(n, \lambda))$$

で特徴付けられる. $S_k^D(n)^2$ 上の合成写像 $i^\dagger \circ i$ を $S_k^D(n)$ 上の線形変換 A, B, C, D を用いて,

$$i^\dagger \circ i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

とかいておけば, 任意の $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S_k^D(n)$ に対して,

$$\langle i(f_1, f_2), i(g_1, g_2) \rangle = \langle (f_1, f_2), (i^\dagger \circ i)(g_1, g_2) \rangle$$

により,

$$\begin{aligned} &\langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_1, g_2|_k \eta \rangle + \langle f_2|_k \eta, g_1 \rangle + \langle f_2|_k \eta, g_2|_k \eta \rangle \\ &\qquad = \langle f_1, A(g_1) \rangle + \langle f_1, C(g_2) \rangle + \langle f_2, B(g_1) \rangle + \langle f_2, D(g_2) \rangle \end{aligned}$$

を得る. ここで, $f_2 = g_2 = 0$, $f_1 = g_2 = 0$, $f_2 = g_1 = 0$, $f_1 = g_1 = 0$ とすれば, それぞれの場合で

$$\begin{aligned} \langle f_1, g_1 \rangle &= \langle f_1, A(g_1) \rangle, \\ \langle f_2|_k \eta, g_1 \rangle &= \langle f_2, B(g_1) \rangle, \\ \langle f_1, g_2|_k \eta \rangle &= \langle f_1, C(g_2) \rangle, \\ \langle f_2|_k \eta, g_2|_k \eta \rangle &= \langle f_2, D(g_2) \rangle \end{aligned}$$

となる. ここで, 左辺は $S_k^D(n, \lambda)$ 上の duality であり, 右辺は $S_k^D(n)$ 上のそれである.

ここでは, A について検証してみる. $S_k^D(n,\lambda)$ においては, $f_1 = [U(n)1U(n,\lambda)]f_1$ とみなしていることに注意. double coset の分解

$$U(n)1U(n,\lambda) = U(n)1, \quad U(n)1U(n,\lambda) = \sqcup_i U(n,\lambda)x_i \ (x_i \in U(n))$$

をとっておいて, Lemma 1.8 (1) により,

$$\begin{aligned}\langle f_1, g_1\rangle &= \langle [U(n)1U(n,\lambda)]f_1, [U(n)1U(n,\lambda)]g_1\rangle \\ &= \langle f_1, [U(n,\lambda)1U(n)]([U(n)1U(n,\lambda)]g_1)\rangle \\ &= \langle f_1, \sum_i g_1|_k x_i\rangle = [U(n):U(n,\lambda)]\langle f_1, g_1\rangle \\ &= \langle f_1, (\boldsymbol{N}\lambda+1)g_1\rangle\end{aligned}$$

となるので,

$$A = \boldsymbol{N}\lambda + 1$$

を得る. B, C, D についても同様の計算で求められる. □

次の二つの準備補題は, 四元数環上の保型形式の空間 $S_k^D(U)$ の整構造に関するものである. 補題の紹介に入る前に, U を U_0 の compact な開部分群として, $S_k^D(U)$ の整構造の入れ方について説明する.

いま, $D\otimes_{\mathbb{Q}} K_f$ と $M_2(K_f)^I$ を同一視する方法として, 各素点で D が不分岐であることを用いて, Section 1.2 のはじめに固定した j_v たちの直積 $\prod_v j_v$ に $\otimes K$ をすることで係数拡大したもの (この同一視は今後 identity として扱うもの) と, 一方で, D が K 上で split することから Section 1.2 の冒頭で固定された同型 j に $\otimes K_f$ をすることで係数拡大したものの二種類あることに注意して, 任意の $g \in D\otimes_{\mathbb{Q}} K_f$ に対して, ある $\delta \in (\prod_v G^A(\mathcal{O}_{K,v}))^I$ で

$$j(g) = \delta g \delta^{-1}$$

となるものが存在する. 写像

$$G_f \xrightarrow{j} M_2(K_f)^I = M_2(K)^I \otimes_K K_f$$

を通し, $M_2(K)^I$-part を用いて, $L_k(K)$ の $\mathcal{O}_K$-lattices L からなる集合に $g \in G_f$ の右作用

$$L \mapsto L\cdot g$$

を与える. もし $g \in G_f \cap (\prod_q M_2(\mathcal{O}_{F,q}))$ であれば, g の作用は $\mathcal{O}_K$-係数を用いてなされるので

$$L_k(\mathcal{O}_K)\cdot g \subset L_k(\mathcal{O}_K)$$

となる.

Definition 3.1. R を $\mathcal{O}_K$ を含む $\mathbb{C}$ の部分環とする. $g \in G_f$ に対し,

$$L_k(R)\cdot g := (L_k(\mathcal{O}_K)\cdot g)\otimes_{\mathcal{O}_K} R$$

とおき, R-係数の保型形式からなる $S_k^D(U)$ の R-部分加群として

$$S_k^D(U;R) := \{f \in S_k^D(U) |\ f(g) \in L_k(R)\cdot g^{-1},\ \forall g \in G_f\}$$

と定義する. とくに, $U = U(n)$ あるいは $U = U(n,\lambda)$ のときは,

$$S_k^D(n;R) := S_k^D(U(n);R),$$
$$S_k^D(n,\lambda;R) := S_k^D(U(n,\lambda);R)$$

とおく.

$X(U)$ の完全代表系 $\mathcal{R}$ を固定したもとでの Lemma 1.5 の $\mathbb{C}$-線形同型

$$\phi_{\mathcal{R}} : S_k^D(U) \to \oplus_{g\in\mathcal{R}} L_k^{D^\times \cap gUg^{-1}}, \quad f \mapsto (f(g))_{g\in\mathcal{R}}$$

を $S_k^D(U;R)$ に制限することを考える. すべての $f \in S_k^D(U;R)$ は, 各 $g \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(g) \in L_k \cdot g^{-1}$$

であるので, 制限写像 $\phi_{\mathcal{R}}|_{S_k^D(U;R)}$ は

$$\oplus_{g\in\mathcal{R}}(L_k \cdot g^{-1})^{D^\times \cap gUg^{-1}}$$

に値をとる. 任意の $x = (x_g)_{g\in\mathcal{R}} \in \oplus_{g\in\mathcal{R}}(L_k \cdot g^{-1})^{D^\times \cap gUg^{-1}}$ をとり, 勝手な $g' \in G_f$ について g' が属する剰余類を $[g] \in X(U)$ とし

$$g' = \beta g u\ (\beta \in D^\times, u \in U)$$

と表して,

$$f : G_f \to L_k, \quad g' = \beta g u \mapsto x_g \cdot \beta^{-1}$$

とおくと,

$$f(g') = x_g \cdot \beta^{-1} \in L_k(R)\cdot g^{-1}\beta^{-1} = L_k(R)\cdot u^{-1}g'^{-1} \subset L_k(R)\cdot g'^{-1}$$

であるので, Lemma 1.5 により, $\mathbb{C}$-線形同型

$$\phi_{\mathcal{R}}|_{S_k^D(U;R)} : S_k^D(U;R) \xrightarrow{\sim} \oplus_{g\in\mathcal{R}}(L_k \cdot g^{-1})^{D^\times \cap gUg^{-1}}$$

を得る. 各 $L_k(R)\cdot g^{-1}$ は L_k の R-lattice であったから, 同型 $\phi_{\mathcal{R}}$ と $\phi_{\mathcal{R}}|_{S_k^D(U;R)}$ により, $S_k^D(U;R)$ は $S_k^D(U)$ の R-lattice であることがわかる.

また, $x \in G_f \cap (\prod_q M_2(\mathcal{O}_{F,q}))$ をとり, U_0 の二つの compact な開部分群 U, U' に対し, Hecke 作用素

$$[UxU'] : S_k^D(U) \to S_k^D(U')$$

を $S_k^D(U;R)$ に制限することを考える. double coset の分解

$$UxU' = \sqcup_i Uxu_i \quad (u_i \in U')$$

を固定し, $f \in S_k^D(U;R)$ と $g \in G_f$ に対して,

$$([UxU']f)(g) = \sum_i f(gu_i^{-1}x^{-1}) \in \sum_i L_k(R)\cdot(xu_i)g^{-1} \subset L_k(R)\cdot g^{-1}$$

となるので,

$$[UxU']f \in S_k^D(U';R)$$

が得られる.

以下, Definition 3.1 で入れた $S_k^D(U)$ の整構造と $S_k^D(U)$ 上の duality $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の関係についての補題を二つ紹介する.

Lemma 3.3 ([16, Lemma 3])**.** *ある 0 でない二つの整数 C_1, C_2 が存在して, U_0 のすべての compact な開部分群 U に対し,*

$$C_1\langle S_k^D(U;R), S_k^D(U;R)\rangle \subset R$$

となり, また, もし $f \in S_k^D(U)$ が $\langle f, S_k^D(U;R)\rangle \subset R$ を満たせば,

$$C_2 f \in S_k^D(U;R)$$

となる.

Proof. $X(U_0)$ の完全代表系 $\{t_j \in G_f\}_{j\in J}$ を適当な添え字集合 J とともに一つ固定する. U_0 の任意の compact な開部分群 U に対し, 剰余類分解

$$U_0 = \sqcup_l u_l U \quad (u_l \in U_0)$$

をとれば, G_f の double coset による分解

$$G_f = \sqcup_{j\in J} \sqcup_l D^\times t_j u_l U$$

を得る. よって, $X(U)$ の完全代表系として $\mathcal{R} = \{t_j u_l\}_{j\in J,\ l}$ をとれて, 各 l に対し,

$$L_k(R)\cdot u_l^{-1} = L_k(R)$$

であるので, Lemma 1.5 から誘導される $\mathbb{C}$-線形同型

$$S_k^D(U;R) \overset{\phi_{\mathcal{R}}}{\cong} \oplus_{j\in J} \oplus_l (L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times \cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}$$

を得る. h, h' を相異なる $\mathcal{R}$ の元とする. $x = (x_g)_{g\in\mathcal{R}}$ と $x' = (x'_g)_{g\in\mathcal{R}}$ をそれぞれ

$$x_g = 0 \text{ if } g \neq h, \quad x'_g = 0 \text{ if } g \neq h',$$

をみたす $\oplus_{g\in\mathcal{R}}(L_k(R)\cdot g^{-1})^{D^\times\cap gUg^{-1}}$ の任意の元とし, $\phi_{\mathcal{R}}$ により x と x' に対応する $S_k^D(U;R)$ の元をそれぞれ $f_h, f_{h'}$ とすれば, 各 $g \in \mathcal{R}$ に対して,

$$f_h(g) = 0 \quad \text{or} \quad f_{h'}(g) = 0$$

であるので,

$$\begin{aligned}\langle f_h, f_{h'}\rangle &= \sum_{g\in\mathcal{R}}[D^\times \cap gUg^{-1} : F^\times \cap U]^{-1}\langle f_h(g), f_{h'}(g)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D g)^\mu \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．よって, 上の $S_k^D(U;R)$ の直和分解で, 右辺の各直和因子をそのまま $S_k^D(U;R)$ の部分空間とみなすことで, $S_k^D(U;R)$ の duality $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する直交分解

$$S_k^D(U;R) = \perp_{j\in J}\perp_l (L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}$$

を得る．

各 $t_j u_l \in \mathcal{R}$ において, 直交因子 $(L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}$ の任意の２元 f_1, f_2 をとる．これらは, $t_j u_l$ 以外の $\mathcal{R}$ の元では値 0 をとるので, $\boldsymbol{N}\nu_D(u_l) = 1$ に注意して

$$\begin{aligned}&\langle f_1, f_2\rangle \\ &\quad = [D^\times \cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1} : F^\times \cap U]^{-1}\langle f_1(t_j u_l), f_2(t_j u_l)\rangle(\boldsymbol{N}\nu_D t_j)^\mu\end{aligned}$$

となる．$f_1(t_j u_l), f_2(t_j u_l)$ はともに U に依存しない G_f の元 t_j^{-1} による作用で定まる R-module $L_k(R)\cdot t_j^{-1}$ の元であり, $\boldsymbol{N}\nu_D(t_j)$ は U に依存しない $\mathbb{Q}_{>0}^\times$ の元である．また, 自然な単射群準同型

$$\begin{gathered}(D^\times \cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1})/(F^\times \cap U) \hookrightarrow (D^\times \cap t_j U_0 t_j^{-1})/(F^\times \cap U_0), \\ [x] \mapsto [x]\end{gathered}$$

があるので, $[D^\times \cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1} : F^\times \cap U]$ は U に依存しない整数 $[D^\times \cap t_j U_0 t_j^{-1} : F^\times \cap U_0]$ の約数となる．したがって, U に依存しないような, ある 0 でない整数 $C_1^{(j,l)}$ で,

$$C_1^{(j,l)}\langle f_1, f_2\rangle \in R$$

を満たすものがとれる．同様に, U に依存しないある 0 でない整数 $C_2^{(j,l)}$ で, もし $f \in L_k^{D^\times\cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}$ が

$$\langle f, (L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}\rangle \subset R$$

であれば,

$$C_2^{(j,l)} f \in (L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap t_j u_l U u_l^{-1} t_j^{-1}}$$

となるようなものをとれる．

以上のように, 各直交因子においては Lemma の主張が成立するので, 各 $j\in J$ に対し, $t_j U_0 t_j^{-1}$ の compact な開部分群 W をすべて動かしたときに得られる R-modules の集合

$$\mathcal{L}_j := \{(L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap W}\}_W$$

が有限集合になることを示せば, 適当な有限個の $C_1^{(j,l)}$ たちの積 C_1 と, $C_2^{(j,l)}$ たちの積 C_2 をとることで Lemma は証明されたことになる.

$t_jU_0t_j^{-1}$ の compact な開部分群全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とおき,

$$X = \cup_{W\in\mathcal{S}}(L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap W}$$

とおく. $\mathcal{S}$ を包含関係により順序集合とみなして Zorn の補題を適用することで, ある $W_0\in\mathcal{S}$ で,

$$X = (L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap W_0}$$

となるものが存在することがわかる. この W_0 は $t_jU_0t_j^{-1}$ の正規部分群であると仮定してよい. このとき, W_0 は $t_jU_0t_j^{-1}$ において有限指数であるので, 商群

$$(D^\times\cap t_jU_0t_j^{-1})/(D^\times\cap W_0)$$

は有限群となる. 任意の $W\in\mathcal{S}$ に対して,

$$(L_k(R)\cdot t_j^{-1})^{D^\times\cap W} = X^{(D^\times\cap W)(D^\times\cap W_0)/(D^\times\cap W_0)}$$

となり, 商群

$$(D^\times\cap W)(D^\times\cap W_0)/(D^\times\cap W_0)$$

は有限群 $(D^\times\cap t_jU_0t_j^{-1})/(D^\times\cap W_0)$ の部分群であるので, $\mathcal{L}_j$ は有限集合であることがわかる. □

Remark 3.1. [16, Lemma 3] (本稿の Lemma 3.3) に記述されている証明において, $S_k^D(U)$ 上の duality の定義を [17, p. 565] で訂正したことに伴い, 加筆すべき内容に関するコメントが [17, p. 565] に記載されていることに注意 (cf. Remark 1.11 (1)).

Lemma 3.4 ([16, Lemma 4])**.** *$R\supset\mathcal{O}_K[\frac{1}{\boldsymbol{N}\lambda}]$ とする. このとき, 0 でないある整数 C_3 が存在し, n と互いに素な $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal λ について,*

$$\frac{1}{C_3}i(S_k^D(n;R)^2)\supset S_k^D(n,\lambda;R)\cap i(S_k^D(n)^2)\supset i(S_k^D(n;R)^2)$$

が成立する.

Proof. (1) 後半の包含関係について, $S_k^D(n;R)^2\subset S_k^D(n)^2$ により,

$$i(S_k^D(n;R)^2)\subset i(S_k^D(n)^2)$$

は明らか. 一方, $\eta=\begin{pmatrix}\pi_\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G_f\cap(\prod_q M_2(\mathcal{O}_{F,q}))$ なので, 任意の $f_1,f_2\in S_k^D(n;R)$ に対し, Lemma 3.3 の直前で確認したように,

$$[U(n)1U(n,\lambda)]f_1,\ [U(n)\eta U(n,\lambda)]f_2\in S_k^D(n,\lambda;R)$$

となるので,

$$i(f_1, f_2) = [U(n)1U(n,\lambda)]f_1 + [U(n)\eta U(n,\lambda)]f_2 \in S_k^D(n,\lambda;R)$$

となる. よって,

$$S_k^D(n,\lambda;R) \cap i(S_k^D(n)^2) \supset i(S_k^D(n;R)^2)$$

が成立する.

(2) 前半の包含関係について, 以下, 二つの場合に分けて証明する.
(i) $k = 2t$ のとき. Remark 1.9 (2) と同様に,

$$S_{2t}^D(U;R) = \{f : X(U) \to R |\ \mathrm{maps}\} = R^{X(U)}$$

である. $U(n,\lambda) \subset U(n)$ であることと, $\eta U(n,\lambda)\eta^{-1} \subset U(n)$ であることから, 二つの自然な全射

$$\pi_1 : X(n,\lambda) \to X(n), \quad [g] \mapsto [g],$$
$$\pi_2 : X(n,\lambda) \to X(n), \quad [g] \mapsto [g\eta^{-1}]$$

がそれぞれ定まる. ここで, $X(n,\lambda)$ における関係 $\sim$ を次のように定義する: $x, y \in X(n,\lambda)$ に対し, x を始点とし y を終点とする $X(n,\lambda)$ 内のある有限点列

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y$$

で, 各 $0 \leq i \leq m-1$ について

$$\pi_1(x_i) = \pi_1(x_{i+1}) \quad \mathrm{or} \quad \pi_2(x_i) = \pi_2(x_{i+1})$$

を満たすものが存在するとき

$$x \sim y$$

とする. $\sim$ は $X(n,\lambda)$ における同値関係であり, $c_1, \ldots, c_s$ を $\sim$ に関するすべての同値類とし, $y_1, \ldots, y_s$ をそれぞれの代表元としておく. また, $X(n,\lambda)$ 上の radius 関数

$$d : X(n,\lambda) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を次のように定義する: $x \in X(n,\lambda)$ について, x が属する同値類を c_j とし, x から y_j をつなぐ有限点列たちのもつ長さのうちで最小のものを $d(x)$ とする.

さて, 任意の $f = i(f_1, f_2) \in i(S_{2t}^D(n)^2) \cap S_{2t}^D(n.\lambda;R)$ をとる. このとき,

$$f_1' : X(n) = \sqcup_{i=1}^s \pi_1(c_i) \to R, \quad f_1'(\pi_1(c_i)) = \{f(y_i)\}\ (1 \leq i \leq s),$$
$$f_2' : X(n) = \sqcup_{i=1}^s \pi_2(c_i) \to R, \quad f_2'(\pi_2(c_i)) = \{f(y_i)\}\ (1 \leq i \leq s)$$

と定義すると, $f_1', f_2' \in S_{2t}^D(n;R)$ となり, 各 $1 \le i \le s$ について任意の $x_i \in c_i \subset \sqcup_i c_i = X(n,\lambda)$ に対して,

$$\begin{aligned} i(f_1 - f_1', f_2 + f_2')(x_i) &= (f_1 - f_1')(x_i) + (f_2 + f_2')(x_i\eta^{-1}) \\ &= (f_1(x_i) + f_2(x_i\eta^{-1})) + (-f_1'(\pi_1(x_i)) + f_2'(\pi_2(x_i))) \\ &= i(f_1, f_2)(x_i) - f(y_i) + f(y_i) \\ &= f(x_i) \end{aligned}$$

となり, とくに

$$(f_1 - f_1')(\pi_1(y_i)) = 0$$

であるので, はじめから $f = i(f_1, f_2)$ において,

$$f_1(\pi_1(y_i)) = 0 \quad (1 \le i \le s)$$

と仮定してよい. 以下, この仮定のもとで $d(x)$ に関する数学的帰納法を用いて,

$$f_1(\pi_1(x)),\ f_2(\pi_2(x)) \in R \quad (x \in X(n,\lambda))$$

であることを示す. もし, これが示されれば

$$f_1, f_2 \in S_{2t}^D(n;R)$$

であることがわかり, $C_3 = 1$ として Lemma が証明できたことになる.

いま, $f \in S_{2t}^D(n,\lambda;R)$ であるから,

$$f(x) = f_1(\pi_1(x)) + f_2(\pi_2(x)) \in R$$

なので, $f_1(\pi_1(x))$ か $f_2(\pi_2(x))$ のいずれかが R の元であればよい.

[1] $d(x) = 0$ のとき. ある $1 \le i \le s$ で $x = y_i$ となるから,

$$f_1(\pi_1(y_i)) = 0 \in R$$

となり成立.

[2] $d(x) = m > 0$ として, $d(x') \le m-1$ となるすべての $x' \in X(n,\lambda)$ に対しては $f_1(\pi_1(x'))$ か $f_2(\pi_2(x'))$ のいずれかが R の元であると仮定する. $x \sim y_i$ となる $1 \le i \le s$ をとり, x を始点とし y_i を終点とする長さ m の有限点列を

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y_i$$

としたとき, $d(x_1) = m-1$ であるから $f_1(\pi_1(x_1))$ か $f_2(\pi_2(x_1))$ のいずれかは R の元である. このとき, $\pi_1(x) = \pi_1(x_1)$ もしくは $\pi_2(x) = \pi_2(x_1)$ であるから, $f_1(\pi_1(x))$ か $f_2(\pi_2(x))$ のいずれかが R の元であることがわかった.

(ii) $k \ne 2t$ のとき. $f = i(f_1, f_2) \in S_k^D(n,\lambda;R) \cap i(S_k^D(n)^2)$ をとる. $R \supset \mathcal{O}_K[\frac{1}{\boldsymbol{N}\lambda}]$ であるから,

$$L_k(R) \cdot \eta = L_k(R)$$

となることに注意. $f \in S_k^D(n,\lambda;R)$ であるから, 任意の $g \in G_f$ に対し,

$$\begin{aligned} f(g) &= f_1(g) + f_2(g\eta^{-1}) \\ &\in L_k(R)\cdot g^{-1} = L_k(R)\cdot \eta g^{-1} \end{aligned}$$

となる. もし, この状況で f にも λ にも依存しない 0 でないある整数 $C_3^{(1)}$ で

$$C_3^{(1)} f_1 \in S_k(n;R)$$

となるものがとれれば, 同じ議論で f_2 に対しても同様の整数 $C_3^{(2)}$ をとれることもわかり, それらをかけ合わせることで Lemma を証明できたことになる.

さて, $g \in G_f$ と $u \in U(n)$ に対し,

$$f_1(gu) = f_1(g) \cdots (*)$$

であり, また

$$f(g\eta^{-1}u\eta) \in L_k(R)\cdot \eta^{-1}u^{-1}\eta g^{-1}, \quad f(g) \in L_k(R)\cdot g^{-1}$$

であるので,

$$\begin{aligned} f_1(g\eta^{-1}u\eta) &\in L_k(R)\cdot g^{-1} - f_2(g\eta^{-1}) \\ &= L_k(R)\cdot g^{-1} + f_1(g), \end{aligned}$$

すなわち,

$$f_1(g\eta^{-1}u\eta) \equiv f_1(g) \ (\mathrm{mod}\ L_k(R)\cdot g^{-1}) \cdots (**)$$

を得る. G_f の部分群 V_λ を

$$V_\lambda := \langle U(n), \eta^{-1}U(n)\eta \rangle$$

と定義すれば, 任意の $\alpha \in D^\times \cap gV_\lambda g^{-1}$ に対し, $(*), (**)$ により,

$$f_1(g) \equiv f_1(g)\cdot\alpha \ (\mathrm{mod}\ L_k(R)\cdot g^{-1})$$

となる. よって, $X(n)$ の完全代表系 $g_1, \ldots, g_r \in G_f$ を固定したうえで, 各 $1 \le i \le r$ に対し, λ に依存しない 0 でないある整数 $C(g_i)$ で, 任意の $\alpha \in D^\times \cap gV_\lambda g^{-1}$ に対し

$$x \equiv x\cdot\alpha \ (\mathrm{mod}\ L_k(R)\cdot g_i^{-1})$$

となる $x \in L_k$ について

$$C(g_i)x \in L_k(R)\cdot g_i^{-1}$$

となるようなものが存在すれば, $\prod_{i=1}^r C(g_i)$ が求める $C_3^{(1)}$ の役割を果たすことがわかる.

λ と i に依存しない 0 でない整数 C で

$$CL_k(R)\cdot g_i^{-1} \subset L_k(R) \subset \frac{1}{C}L_k(R)\cdot g_i^{-1}$$

を満たすものが存在し, また同じく λ と i に依存しない $\mathcal{O}_F$ の ideal m で,

$$W_\lambda := \{u \in GL_2(F_\lambda) |\ \det u \in \mathcal{O}_{F,\lambda}\},$$
$$W^\lambda := \{u \in \prod_{q \neq \lambda} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,q}) |\ u \equiv 1 \pmod{m}\}$$

とおいたとき,

$$g_i V_\lambda g_i^{-1} \supset W_\lambda \times W^\lambda$$

を満たすものが存在する. このとき, 任意の $\alpha \in D^\times \cap gV_\lambda g^{-1}$ に対し

$$x \equiv x \cdot \alpha \pmod{L_k(R) \cdot g_i^{-1}}$$

となる $x \in L_k$ について,

$$Cx \equiv Cx\alpha \pmod{L_k(R)}, \forall \alpha \in D^\times \cap (W_\lambda \times W^\lambda) \ \cdots (***)$$

となる. Γ_m を $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ の level m の主合同部分群, すなわち,

$$\Gamma_m = \{\beta \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F) |\ \beta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m}\}$$

とおいて, 対角的に埋め込む単射準同型

$$\mathrm{SL}_2(F) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(K)^I$$

を通して L_k への Γ_m の作用を定めると, strong appoximation theorem により $(***)$ から, 任意の $\beta \in \Gamma_m$ に対し,

$$Cx \equiv Cx\beta \pmod{L_k(R)}$$

となることがわかる (ここで, Γ_m の L_k への作用を j を用いて定めていないことに注意). とくに β として, $\begin{pmatrix} 1 & m' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m' & 1 \end{pmatrix}$ $(0 \neq m' \in m)$ の形のものを用いることで, m と k だけに依存する 0 でない整数 C' で,

$$C'Cx \in L_k(R)$$

となるものが存在することがわかり,

$$C'C^2 x \in L_k(R) \cdot g_i^{-1}$$

を得るので, Lemma は証明された. □

3.2. 証明の概説

前節の四つの準備補題を用いた Theorem 2.1 の証明を概観しよう．

$f \in S_k^A(n)$ を Theorem 2.1 の仮定にある Hilbert Hecke 固有形式とする．Section 1.2 の冒頭で固定した $\mathbb{Q}$ 上の有限次 Galois 拡大 K を，必要であればより大きくとることで, Definition 1.5 で定義された f の Hecke 固有値で $\mathbb{Q}$ 上生成される有限次拡大 L_f は K に含まれると仮定してよい．$R := \mathcal{O}_K[\frac{1}{\boldsymbol{N}\lambda}]$ とおく．

Jacquet-Langlands-Shimizu 対応により, f に対し, ある $f' \in S_k^D(n; R)$ と, K, k, n にのみ依存する R の 0 でない ideal C_4 が存在して, 次の三つの性質を満たす:

(i) $f' \in I_k(n)^\perp$;

(ii) $T(f') = \theta_f(T)f', \quad \forall T \in \boldsymbol{T}_k(n)$;

(iii) $C_4(Kf' \cap (S_k^D(n; R) + I_k(n))) \subset Rf'$.

ここで, (ii) では Jacquet-Langlands-Shimizu 対応 (Theorem 1.7 (1)) と Lemma 3.1 (1) による自然な同型 $I_k(n)^\perp \cong S_k^D(n)/I_k(n)$ を用いて, $T \in \boldsymbol{T}_k(n)$ を $f' \in I_k(n)^\perp$ に作用させている．

$a \in L_f^\times$ と $g \in S_k^D(n; R)^2$ を

$$\begin{aligned} a &:= \theta_f(T_\lambda^2 - S_\lambda(\boldsymbol{N}\lambda + 1)^2), \\ g &:= ((\boldsymbol{N}\lambda + 1)S_\lambda f', -T_\lambda f') \end{aligned}$$

とおくと, Lemma 3.2 により,

$$\begin{aligned} a^{-1}(i^\dagger \circ i)(g) &= a^{-1}((\boldsymbol{N}\lambda + 1)S_\lambda f', -T_\lambda f') \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}\lambda + 1 & (\boldsymbol{N}\lambda)^\mu S_{\lambda^{-1}} T_\lambda \\ T_\lambda & (\boldsymbol{N}\lambda)^\mu(\boldsymbol{N}\lambda + 1) \end{pmatrix} \\ &= a^{-1}(\theta_f(S_\lambda(\boldsymbol{N}\lambda + 1)^2 - T_\lambda^2)f', 0) \\ &= a^{-1}(-af', 0) \\ &= (-f', 0) \end{aligned}$$

を得る．したがって, Lemma 3.3 と Lemma 3.4 により,

$$\begin{aligned} &\langle C_1 C_3 a^{-1} i(g), i(S_k^D(n)^2) \cap S_k^D(n, \lambda; R) \rangle \\ &\quad \subset C_1 C_3 \langle a^{-1} i(g), \frac{1}{C_3} i(S_k^D(n; R)^2) \rangle = C_1 \langle a^{-1} i(g), i(S_k^D(n; R)^2) \rangle \\ &\quad = C_1 \langle a^{-1}(i^\dagger \circ i)(g), S_k^D(n; R)^2 \rangle = C_1 \langle (-f', 0), S_k^D(n; R)^2 \rangle \\ &\quad \subset C_1 \langle S_k^D(n; R)^2, S_k^D(n; R)^2 \rangle \\ &\quad \subset R \end{aligned}$$

を得る．よって,

$$\langle C_1 C_3 a^{-1} i(g), \ \cdot\ \rangle : i(S_k^D(n)^2) \cap S_k^D(n, \lambda; R) \to R$$

を $S_k^D(n,\lambda;R)$ 上に延長することで, ある $h \in S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ で

$$h + C_1C_2C_3a^{-1}i(g) \in S_k^D(n,\lambda;R)$$

となるものが存在することが Lemma 3.3 によりわかる.

$\boldsymbol{T}$ を T_q $(q \neq \lambda)$ と S_a $((a,n\lambda)=1)$ で $\mathbb{Z}$ 上生成された抽象的な Hecke 環とすると, Hecke 環の自然な全射たち

$$\psi_n : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}_k(n),\ \psi_n^D : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}_k^D(n),\ \psi_{n,\lambda}^D : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda),$$
$$\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} (\cong \boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}})$$

がある. ここで, $\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}$ の行き先として, Lemma 3.1 (2) により, $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ と $\boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ を同一視しておく.

さて, 任意の $T \in \boldsymbol{T}$ に対して, $S_k^D(n,\lambda;R)$ は $\psi_{n,\lambda}^D(T)$ の下で保たれ, i は Hecke 作用素と可換であるので,

$$\begin{aligned}
&\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T)h - \theta_f(\psi_n(T))h \\
&\qquad \in -a^{-1}C_1C_2C_3 i(\psi_n^D(T)g - \theta_f(\psi_n(T))(g)) + S_k^D(n,\lambda;R) \\
&\qquad = S_k^D(n,\lambda;R) \cdots (*)
\end{aligned}$$

となる. R の ideal $\mathcal{I}_\lambda$ を

$$\mathcal{I}_\lambda := \{x \in R |\ xh \in S_k^D(n,\lambda;R)\}$$

とおくと, 次の補題を得る:

Lemma 3.5. (1) R-algebra の well-defined な準同型

$$\begin{aligned}
\theta_{f,\lambda} :& \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R/\mathcal{I}_\lambda, \\
& T_q \mapsto \theta(T_q) \pmod{\mathcal{I}_\lambda} \quad (q \neq \lambda), \\
& S_a \mapsto \theta(S_a) \pmod{\mathcal{I}_\lambda} \quad ((a,n\lambda)=1).
\end{aligned}$$

ここで, 左辺の T_q と右辺の T_q はそれぞれ $\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T_q)$ と $\psi_n(T_q)$ を記号を濫用して表したもの. S_a についても同様.

(2) 次の包含関係が成立する:

$$\mathcal{I}_\lambda \subset a(\boldsymbol{N}\lambda + 1)^{-1}C_1^{-1}C_2^{-1}C_3^{-2}C_4^{-1}.$$

Proof. (1) 任意の $T \in \boldsymbol{T}_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \cong \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ に対し, $T_1, T_2 \in \boldsymbol{T}$ で, $\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T_1) = \psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T_2) = T$ となるものをとれば, 上述の $(*)$ により,

$$T(h) - \theta_f(\psi_n(T_1))h \in S_k^D(n,\lambda;R),$$
$$T(h) - \theta_f(\psi_n(T_2))h \in S_k^D(n,\lambda;R)$$

となり,

$$\theta_f(\psi_n(T_1)) \equiv \theta_f(\psi_n(T_2)) \pmod{\mathcal{I}_\lambda}$$

を得るので, $R/\mathcal{I}_\lambda$ の元として, $\theta_f(\psi_n(T_1))(=\theta_f(\psi_n(T_2)))(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda)$ を $\theta_f(T)(\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda)$ とかいてよい. さらに, $T, T' \in \boldsymbol{T}$ に対し $(*)$ により, ある $h_T, h_{T'}, h_{TT'} \in S_k^D(n,\lambda;R)$ で,

$$\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T)h = \theta_f(\psi_n(T))h + h_T,$$
$$\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T')h = \theta_f(\psi_n(T'))h + h_{T'},$$
$$\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(TT')h = \theta_f(\psi_n(TT'))h + h_{TT'}$$

を満たすものがとれる. このとき,

$$\begin{aligned}\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T')(\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T)h) &= \theta_f(\psi_n(T))(\psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T')h) + \psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T')h_T \\ &= \theta_f(\psi_n(T))\theta_f(\psi_n(T'))h + \theta_f(\psi_n(T))h_{T'} + \psi_{n,\lambda}^{\mathrm{new}}(T')h_T\end{aligned}$$

でもあるので,

$$\theta_f(\psi_n(T)\psi(T')) \equiv \theta_f(\psi_n(T))\theta_f(\psi_n(T'))\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{I}_\lambda)$$

を得る. 和 $T+T'$ に関しても同様の計算ができるので, 記号を濫用したうえで, (1) の主張にある well-defined な R-algebra 準同型 $\theta_{f,\lambda}$ が得られる.

(2) $x \in \mathcal{I}_\lambda$ をとる. $h \in S_k^D(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ のとり方により,

$$xh + xC_1C_2C_3a^{-1}i(g) \in S_k^D(n,\lambda;R)$$

であり, $xh \in S_k^D(n,\lambda;R)$ なので,

$$xC_1C_2C_3a^{-1}i(g) \in S_k^D(n,\lambda;R)$$

を得る. 一方, $i(g) \in i(S_k^D(n)^2)$ でもあるので Lemma 3.4 により,

$$xC_1C_2C_3a^{-1}i(g) \in \frac{1}{C_3}i(S_k^D(n;R)^2)$$

を得る. したがって,

$$i(xC_1C_2C_3^2a^{-1}g) \in i(S_k^D(n;R)^2)$$

となり,

$$xC_1C_2C_3^2a^{-1}g \in S_k^D(n;R)^2 + \mathrm{Ker}(i)$$

を得る. $g = ((\boldsymbol{N}\lambda+1)S_\lambda(f'), -T_\lambda(f'))$ であり, また Lemma 1.9 により, $\mathrm{Ker}(i)$ の元はある $\varphi \in I_k(n)$ を用いて $(\varphi, -\varphi)$ と表されるので,

$$xC_1C_2C_3^2a^{-1}(\boldsymbol{N}\lambda+1)S_\lambda(f') \in S_k^D(n;R) + I_k(n)$$

となり, $S_{\lambda^{-1}}$ をほどこせば,

$$xC_1C_2C_3^2a^{-1}(\boldsymbol{N}\lambda+1)f' \in S_k^D(n;R) + I_k(n)$$

を得る. さらに, R の ideal C_4 の条件 (iii) により,

$$(a^{-1}(\boldsymbol{N}\lambda+1)x)C_1C_2C_3^2a^{-1}f' \in (S_k^D(n;R) + I_k(n)) \cap Kf' \subset C_4^{-1}f'$$

となるので,

$$x \in a(\boldsymbol{N}\lambda+1)^{-1}C_1^{-1}C_2^{-1}C_3^{-2}C_4^{-1}$$

を得る. □

R の ideal E_f を

$$E_f := C_1C_2C_3^2C_4$$

と定義すると, Lemma 3.5 (2) により,

$$\mathcal{I}_\lambda \subset a(\boldsymbol{N}\lambda+1)E_f$$

を得る. $R=\mathcal{O}_K[\frac{1}{\boldsymbol{N}\lambda}]$ であり, $\boldsymbol{N}\lambda$ を割らない $\mathcal{O}_K$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, R の $\mathfrak{p}$-進完備化 $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ での $\mathfrak{p}$-進付値をみれば,

$$\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathcal{I}_\lambda) \geq \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(a) - \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}\lambda+1) - \mathrm{ord}_\mathfrak{p}(E_f)$$

が得られる.

Lemma 3.5 (1) の R-algebra 準同型 $\theta_{f,\lambda}$ は, $T_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_\mathbb{Z} R$ の R 上の生成系 $\{T_q(q \neq \lambda),\ S_a((a,n\lambda)=1)\}$ で, $\mathcal{O}_f/(\mathcal{O}_f \cap \mathcal{I}_\lambda)$ に値をとるので, 改めて $\mathcal{O}_f \cap \mathcal{I}_\lambda$ を $\mathcal{I}_\lambda$ とかいて, 係数を R から $\mathcal{O}_f$ に落とすことで Theorem 2.1 が証明されたことになる.

4. [16, Proposition 1] (Proposition 2.2) の証明の概説

ここでは, Section 2 で証明を省略した [16, Proposition 1] (本稿の Proposition 2.2) の証明の概説を行う. 記号は, Section 2 のものを踏襲することにする.

ひとまず, Proposition 2.2 の (1) と (2) の条件をみたす $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_\mathbb{Z} \bar{\mathbb{Q}}_p$ への擬表現が構成できれば, G_F の稠密な部分集合 $\{\mathrm{Frob}_q \mid q \nmid n\lambda p\}$ 上で trace が $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ に値をとるので, $\mathbb{Z}_p$ に係数を落とすことで, 本来求めていた $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p$ への擬表現 r を得ることができる. よって, ここから先は $\bar{\mathbb{Q}}_p$-係数で議論を進めることにする.

さて, $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ において, $\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ に関する Hecke 固有形式からなる $\bar{\mathbb{Q}}_p$ 上の基底を, (n の外での) Hecke 固有値の一致により分類して得られる $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ の直和分解から, cusp forms の空間と Hecke 環との duality を通して得られる Hecke 環の直和分解を

$$\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_\mathbb{Z} \bar{\mathbb{Q}}_p = \oplus_i \mathcal{R}_i$$

とする. このとき, 各 i において Hecke 固有値をとらせる unique な $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algebra 全射準同型

$$\theta_i : \mathcal{R}_i \to \bar{\mathbb{Q}}_p$$

が伴い, $\theta_i(T) \neq 0$ なる $T \in \mathcal{R}_i$ は逆作用素 T^{-1} を $\mathcal{R}_i$ にもちうるので, $\mathcal{R}_i$ は $\mathrm{Ker}(\theta_i)$ を極大 ideal とする局所環である.

したがって, 各 i ごとに, 望ましい条件をみたす擬表現

$$r_i : G_F \to \mathcal{R}_i$$

を構成できれば,

$$r := \oplus_i r_i : G_F \to \oplus_i \mathcal{R}_i = \boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}_p$$

とおくことで, 求める擬表現を得ることができる.

さて, Jacquet-Langlands-Shimizu 対応によれば, λ で new な level $n\lambda$ の Hilbert Hecke 固有形式たちは, λ で分岐する適当な四元数環上の保型形式に対応しており, それらに対応する保型表現は λ で special か supercuspidal 表現となる. したがって, Hilbert Hecke 固有形式に付随する Galois 表現が構成されている Introduction で述べた三つの Cases のうちの Case 2 を $\theta_i : \mathcal{R}_i \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ に適用することができ, ある $n\lambda p$ の外で不分岐な連続 Galois 表現

$$\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$$

で, $n\lambda p$ を割らない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal q に対し,

$$\mathrm{Trace}\,\rho(\mathrm{Frob}_q) = \theta_i(T_q), \quad \det\rho(\mathrm{Frob}_q) = \theta_i(S_q)\boldsymbol{N}q$$

を満たすものが存在する. $\mathcal{R}_i$ 上に G_F の自明な作用を与えて, ρ を $\mathcal{R}_i$ 上に係数拡大したものを

$$\rho_i : G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{R}_i)$$

とおくと, $\mathcal{R}_i$ において, $n\lambda p$ を割らない q に対し, スカラー作用素として

$$T_q = \theta_i(T_q), \quad S_q = \theta_i(S_q)$$

を得るので,

$$\mathrm{Trace}\,\rho_i(\mathrm{Frob}_q) = T_q, \quad \det\rho_i(\mathrm{Frob}_q) = S_q\boldsymbol{N}q$$

となる. さらに, $n\lambda p$ と互いに素なすべての素 ideal ℓ に対して $\mathrm{Frob}_\ell \mapsto S_\ell$ と定義された写像を Chebotarev の稠密定理で G_F 上に延長した連続な群準同型

$$\chi : G_F \to (\boldsymbol{T}_k(n,\lambda)^{\mathrm{new}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$$

が定まり, G_F 上で

$$\det\rho_i = \chi\boldsymbol{N}$$

となる.

また, n を割る素 ideal q で $p\lambda$ と互いに素なものについて, もし, $\theta_i(T_q) = 0$ ならば, $S_k^A(n,\lambda)^{\mathrm{new}}$ の θ_i に対応する直和因子 S_i において, conductor が q で割れるような q で old な固有形式が張る部分空間を考えることで, $\mathcal{R}_i$ の中で T_q は冪零作用素であり, $s_q := \mathrm{ord}_q(n)$ とおけば $T_q^{s_q} = 0$ となることがわかる. 一方, $\theta_i(T_q) \neq 0$ のときは, 対応する保型表現 π_i が q で 2 次元の Jacquet module をもつので, $\mathcal{R}_i$ の中で

$$(T_q - \theta_i(T_q))^2 = 0$$

となることがわかる．とくに，このとき π_i は q で special か principal series 表現となっており，Carayal [2] により，Frob_q の任意の持ち上げ $\sigma \in D_q$ に対し，

$$\theta_i(T_q)^2 - \theta_i(T_q)(\mathrm{Trace}\,\rho_i(\sigma)) - \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q = 0$$

であることがわかっているので，

$$\begin{aligned}
&(T_q^2 - T_q(\mathrm{Trace}\,\rho_i(\sigma)) - \chi(\sigma)\boldsymbol{N}q)^2 \\
&\quad = (T_q^2 - T_q(\mathrm{Trace}\,\rho_i(\sigma)) - \theta_i(T_q)^2 + \theta_i(T_q)(\mathrm{Trace}\,\rho_i(\sigma)))^2 \\
&\quad = (T_q - \theta_i(T_q))^2(T_q + \theta_i(T_q) - \mathrm{Trace}\,\rho_i(\sigma))^2 \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

となり，Definition 1.15 にあるように，r_i として ρ_i に付随する擬表現 τ_{ρ_i} をとることで Proposition は証明された．

References

[1] J.L. Brylinski and J.P. Labesse, Cohomologies d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) **17** (1984), 361-412.

[2] H. Carayol, Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Ec. Norm. Super.* (4) **19** (1986), 409-468.

[3] P. Deligne, Formes modulaires et représentations l-adiques, *Sém. Bourbaki*, exp. 335, 1969.

[4] P. Deligne and J.-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) **7** (1974), 507-530.

[5] H. Hida, On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields, *Ann. Math.* **128** (1988), 295-384.

[6] H. Hida, *Modular Forms and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **69**, Cambridge University Press, 2000.

[7] H. Hida, *Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 2006.

[8] R.P. Langlands, Modular forms and l-adic representations, pp. 362-499, *in* "Modular functions of one variable II," Lecture Notes in Math. **349**, Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, 1973.

[9] B. Mazur and A. Wiles, On p-adic analytic families of Galois representations, *Comp. Math.* **59** (1986), 231-264.

[10] T. Miyake, On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators, *Ann. of Math.* **94** (1971), 174-189.

[11] M. Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, *Jpn. J. Math.* **9** (1983), 1-26.

[12] K. Ribet, Congruence relations between modular forms, *Proc. I.C.M.* (1983), 503-514.

[13] J.D. Rogawski and J.B. Tunnell, On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one, *Invent. Math.* **74** (1983), 1-42.

[14] G. Shimura, “ Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions,” Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo-Princeton, 1971.
[15] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, *Duke Math. J.* **45** (1978), 637-679.
[16] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, *Invent. Math.* **98** (1989), 265-280.
[17] R. Taylor, On icosahedral Artin representations, II, *Amer. J. of Math.* **125** (2003), 549-566.
[18] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), 529-573.
[19] 山上敦士, Wiles による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について, *in* this proceeding.

Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University, Kyoto, 603-8555, Japan
E-mail address: ayama30@cc.kyoto-su.ac.jp