WILES による HILBERT CUSP FORMS に付随する GALOIS 表現の構成について

山上 敦士　　(京都産業大学)

0. Introduction

本稿では, Wiles の論文 [27]

"On ordinary λ-adic representations associated to modular forms"

に従い, Wiles による "λ で ordinary" という条件を課したもとでの Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について概説する.

以下, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ, 有理整数環, 有理数体, 実数体, 複素数体とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の代数的閉包とする. 素数 p に対し, $\mathbb{Z}_p$ と $\mathbb{Q}_p$ をそれぞれ p-進整数環, p-進数体とし, $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ とする. 以下, 二つの体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を固定しておく. また, 任意の単位的可換環 R とその ideal $\mathfrak{a}$ に対し, 剰余環 $R/\mathfrak{a}$ が有限集合であるとき, その元の個数を $N\mathfrak{a}$ とかく.

F を有限次総実代数体とし, $\mathcal{O}_F$ をその整数環とする. $\bar{\mathbb{Q}}$ での F の代数的閉包を $\bar{F}$ とかく. また, $\mathbb{A}_F$ を F 上の adele 環とする.

$\mathcal{O}_F$ の ideal $\mathfrak{c}$, 整数 $k \geq 1$, mod $\mathfrak{c}\mathfrak{S}_\infty$ の ray class character ψ に対し (ここで, $\mathfrak{S}_\infty$ は F のすべての無限素点の積を表す), parallel weight k, level $\mathfrak{c}$, character ψ の Hilbert modular forms や Hilbert cusp forms, そして, それらに作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$, $S(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a}$ は $\mathcal{O}_F$ の ideal) が定義される. Wiles の論文 [27] では, 考える Hilbert modular forms はすべて parallel weight なので, 以下 parallel という言葉を省略して単に weight と呼ぶことにする.

$\mathbf{f}$ を weight k, level $\mathfrak{c}$, character ψ の Hilbert cusp form とする. $\mathbf{f}$ が上述の Hecke 作用素すべてに対する同時固有形式であるとき, $\mathbf{f}$ のことを **Hilbert Hecke eigenform** もしくは **Hilbert eigenform** ということにする. その中でもとくに, $\mathbf{f}$ は newform と呼ばれるものであると仮定し, Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ に対する固有値を $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$, すなわち, $\mathcal{O}_F$ の任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対し,

$$T(\mathfrak{a})\mathbf{f} = c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})\mathbf{f}$$

が成り立つとする. このとき, Shimura の結果により, $\mathbf{f}$ の **Hecke 体**

$$K_{\mathbf{f}} := \mathbb{Q}(c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}) |\ \mathfrak{a} : \text{ideal})$$

Date: February 24, 2009.

は $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大であり, 総実代数体か CM 体になることが知られている (cf. [24, Proposition 1.3]). $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ を $K_{\mathbf{f}}$ の整数環とし, その素 ideal λ に対して, $\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda}$ を $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ の λ による完備化とする. p を λ の剰余標数とする.

以上の設定のもとで, 次の予想はよく知られたものである:

Conjecture 0.1 ([27, Conjecture in Introduction]). F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の連続な 2 次元 Galois 表現

$$\rho_{\mathbf{f},\lambda} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda})$$

で, 次の二つの条件を満たすものが存在する:

(i) $\mathfrak{c}p$ の外不分岐, つまり, $\mathfrak{c}p$ を割らない $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し, $\mathfrak{q}$ での惰性群に制限すると $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ は自明な表現となる;

(ii) $\mathfrak{c}p$ を割らない $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathbf{f},\lambda}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathbf{f}),$$
$$\det(\rho_{\mathbf{f},\lambda}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \psi(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{k-1}$$

が成立する. ここで, $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}$ は $\mathfrak{q}$ での幾何的 Frobenius 元を表す.

Conjecture 0.1 で存在が予想されている Galois 表現のことを **f に付随する Galois 表現**とよぶ.

Remark 0.1. $F = \mathbb{Q}$ のときの Ribet の定理を一般化した結果 [26, Proposition 2.1 (a)] により, もし Conjecture 0.1 が正しいならば, 得られる Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ は既約となることがわかっている. しかも, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ の複素共役における determinant が -1 であるため, 既約であるということはそのまま $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ が絶対既約であることを意味する.

本稿で概説する Wiles の論文 [27] が出版される頃までに, $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現が構成されていた仕事について簡単に振り返ってみたい.

Remark 0.2. 論文 [27] が出版された頃には, Taylor [25] により, non-ordinary な場合も含め, 一般に, とくに $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数の場合に, Hilbert eigemforms に 付随する Galois 表現が構成されている (この Taylor の仕事については, 本報告集に掲載されている概説 [29] を参照のこと).

まず $F = \mathbb{Q}$ としたとき, $k = 2$ の場合は Shimura [22] により, ある modular 曲線 の Jacobian 上の l-進等分点に作用する Galois 表現として構成され, $k > 2$ の場合において, Deligne [3] により, ある modular 曲線の l-進 cohomology から Galois 表現を構成するという形で一般化された. さらに, $k = 1$ の場合は Deligne-Serre [5] により, weight 1 の modular forms と weight ≥ 2 の modular forms との合同を用いて, Galois 表現の構成の議論を weight ≥ 2 の場合に帰着させることで $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現が得られている.

一般の総実代数体 F 上では, Jacquet-Langlands 対応で $\mathbf{f}$ に対応する適切な四元数環 B 上の保型形式に着目することで, Shimura により構成されていた B の極大 order の合同部分群に付随した曲線に対する canonical model の l-進 cohomology から $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現を構成するという手法が, Rogawski-Tunnell [18] や Ohta [15] により示されている. この方法を $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数の場合に適用するには, 四元数環が偶数個の素点で分岐せざるをえないので, Jacquet-Langlands 対応を用いるために, $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\pi_{\mathbf{f}}$ が, ある有限素点 v で special 表現か supercuspidal 表現であると仮定しなければならない.

以上をまとめると, Wiles [27] の結果が示されるまでは, 次の二つのうちいずれかの場合に $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現が構成されていたことになる:

Case 1. $[F:\mathbb{Q}]$ が奇数のとき;
Case 2. $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\pi_{\mathbf{f}}$ が, ある有限素点 v で special 表現か supercuspidal 表現であるとき.

Conjecture 0.1 の主張によれば, $\mathfrak{c}N\lambda$ を割らない F の素 ideal $\mathfrak{q}$ での分解群 $D_{\mathfrak{q}} \subset \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ を制限したものの semisimplification の様子を, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ の特性多項式を通して知ることができる. Carayol [2] は, Deligne [3] や Langlands [12] による $F=\mathbb{Q}$, $p\neq 2$ の場合での結果を一般化することで, 上述の二つの場合に $\mathfrak{c}$ の p と素な素因子 $\mathfrak{q}$ に対しても, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}|_{D_{\mathfrak{q}}}$ の semisimplification の様子が決定できることを示した.

Wiles が Hilbert newform $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現を必要としたのは岩澤理論の研究を促進させるためであり (cf. [28]), とくに $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数のときに, Case 2 の条件が満たされない状況下で Galois 表現を用いたかったため, それまで知られていた結果だけでは不十分であった. そのため, [27] では Case 2 の条件の代わりに, 岩澤理論の研究においては至極自然な条件, すなわち「$\mathbf{f}$ は λ で ordinary である」という条件を課したもとで, $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現を構成することが主目的となっている. 一般に, "ordinary" という術語は様々な意味合いで用いられているので, [27] で用いられる "ordinary" という言葉の意味を明確にしておこう:

Definition 0.1 ([27, Definition in Introduction])**.** $\mathbf{f}$ が λ で **ordinary** であるとは, p を割る $\mathcal{O}_F$ のすべて素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, 2 次方程式

$$x^2 - c(\mathfrak{p},\mathbf{f})x + \psi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{k-1} = 0$$

の二つの根のうち, 少なくとも一つは λ-unit であることをいう.

とくに $k \geq 2$ のときは, 上述の 2 次方程式の定数項が λ と互いに素ではないので, 次の条件

「p のすべての素因子 $\mathfrak{p}$ に対し, $c(\mathfrak{p}, \mathbf{f}) \not\equiv 0 \pmod{\lambda}$」

が, $\mathbf{f}$ が λ で ordinary であるための必要十分条件となる.

以上の設定のもと, 次の定理, すなわち $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現の存在定理が [27] の主結果である:

Theorem 0.2. (1) (=[27, Theorem 1 (i)=Theorem 2.1.2]) *もし* $\mathbf{f}$ *が* λ *で ordinary であるならば,* $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ *は存在する.*

(2) (=[27, Theorem 1 (ii)=Theorem 2.4.1]) $k=1$ *のときは, (とくに ordinary という仮定なしに) 有限な像をもつ複素数係数の連続な 2 次元 Galois 表現*

$$\rho_{\mathbf{f}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

で次の二つの条件を満たすものが存在する:

(i) $\mathfrak{c}$ *の外不分岐である;*

(ii) $\mathfrak{c}$ *を割らない* $\mathcal{O}_F$ *のすべての素 ideal* $\mathfrak{q}$ *に対し,*

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathbf{f}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathbf{f}),$$
$$\det(\rho_{\mathbf{f}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \psi(\mathfrak{q})$$

が成立する.

さらに [27] では, 前述した Carayol [2] の結果を一般化し, $\mathbf{f}$ が λ で ordinary であるとき, $\mathfrak{c}p$ を割るすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}|_{D_{\mathfrak{q}}}$ の振る舞いを決定している. このことに関する定理を述べるために, ここでいくつか記号を導入しよう: $\mathfrak{q}$ を p と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とする. $W'_{F_{\mathfrak{q}}}$ を $\mathfrak{q}$ における局所 Weil-Deligne 群とし, $\sigma_{\mathfrak{q}}$ を $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ に付随する $W'_{F_{\mathfrak{q}}}$ の Φ-semisimple な複素表現とする. 一方, $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\pi_{\mathbf{f}}$ の $\mathfrak{q}$-成分を $\pi_{\mathfrak{q}}$ とかくことにして, $\sigma(\pi_{\mathfrak{q}})$ を 局所 Langlands 対応で $\pi_{\mathfrak{q}}$ に対応する $W'_{F_{\mathfrak{q}}}$ の表現で, $F_{\mathfrak{q}}^{\times}$ の任意の quasi-character χ に対し

$$L(s, \sigma(\pi_{\mathfrak{q}}) \otimes \chi) = L(s - \frac{1}{2}, \pi_{\mathfrak{q}} \otimes \chi)$$

が成り立ち, ε-factor に関しても同様の関係が成り立つものとする. このとき, 次の定理が得られる:

Theorem 0.3. $\mathbf{f}$ *は* λ *で ordinary であると仮定する.*

(1) ([27, Theorem 2.1.3]) p *と互いに素な* $\mathcal{O}_F$ *のすべての素 ideal* $\mathfrak{q}$ *に対し,*

$$\sigma_{\mathfrak{q}} \cong \sigma(\pi_{\mathfrak{q}})$$

が成立する.

(2) ([27, Theorem 2=Theorem 2.1.4]) $\mathfrak{p}$ *を* p *を割る* $\mathcal{O}_F$ *の任意の素 ideal とし,* $\alpha(\mathfrak{p}, \mathbf{f})$ *を 2 次方程式* $x^2 - c(\mathfrak{p}, \mathbf{f})x + \psi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{k-1} = 0$ *の*

λ-unit な根とする．このとき，ある二つの characters ε_1 と ε_2 で，とくに ε_2 は不分岐で $\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = \alpha(\mathfrak{p}, \mathbf{f})$ を満たすにより，

$$\rho_{\mathbf{f},\lambda}|_{D_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

とかける．

Remark 0.3. (1) Theorem 0.3 (2) は, Mazur-Wiles [14] により $F = \mathbb{Q}, p \neq 2$ で level $\mathfrak{c}$ が p-冪であるとき, character ψ についてある条件を課した下で得られた結果を一般化したものである．

(2) (=[27, Lemma 2.1.5]) $\mathbf{f}$ の weight が 2 のときは, 前述の $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ の存在が知られている二つの場合, つまり,

Case 1. $[F:\mathbb{Q}]$ が奇数のとき;
Case 2. $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\pi_{\mathbf{f}}$ が, ある有限素点 v で special 表現か supercuspidal 表現であるとき

のいずれかの場合において, もし $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{p}}$ が principal series 表現であるならば, $\mathbf{f}$ に付随する Abel 多様体 $A_{\mathbf{f}}$ の p-divisible group A_p から生じる Dieudonné 加群 $D(A_p)$ をとり, それに付随する p-進表現, とくに $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ の作用を考察することで Theorem 0.3 (2) の主張が成立することを証明できる．このことは, 本質的には [26, Theorem 2.2] で示されているが, その証明の記述に曖昧な点がいくつかあったため, [27, Section 2.1] の最後の部分で [27, Lemma 2.1.5] を主張した後にその補足説明がなされている．

Theorems 0.2, 0.3 の証明において主役となるのが, Hilbert modular forms を weights に関して p-進解析的に補間する "Λ-adic forms" と呼ばれるものである．Wiles [27, Section 1.2] により定式化されたこの Λ-adic forms なるものは, Hida [7], [8] による $F = \mathbb{Q}$ の場合での p-進 Hecke 環の研究にヒントを得て導入された概念であり, 実際, ordinary な Λ-adic forms のなす空間は, Hida による level p^∞ の ordinary な p-進 Hecke 環と Λ-dual の関係にある (cf. [10, Chapter 7])．本質的に, Wiles [27] により得られた ordinary な Λ-adic forms のなす空間の構造に関する様々な結果は, Hida [7], [8] により用いられた ordinary な p-進 Hecke 環の構造を研究する手法を援用することで示されている．

ここで, Λ-adic forms について簡単に説明しよう (詳しくは, Section 1.2 を参照): 煩雑さを避けるため, F の類数は 1 であると仮定する．$\mathbb{Z}_p$ 上の 1 変数形式的冪級数環 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ の商体 F_Λ の有限次拡大 L をとり, L での Λ の整閉包を $\mathcal{O}_L$ とする．$\mathcal{O}_L$ に係数をもち, 不定元 q の指数が集合 $\{\mathcal{O}_L$ の総正な元 $\} \cup \{0\}$ を走る形式的な q-展開 $\mathcal{F}$ について, $\mathcal{O}_L$ のある無限個の素 ideals P_ν に対し, 各 ν で $\mathcal{F}(\mathrm{mod}\ P_\nu)$ がある Hilbert modular form $\mathbf{f}_\nu$ の q-展開となるとき, $\mathcal{F}$ を **Λ-adic form** とよぶ．$\mathcal{O}_F$ の ideal $\mathfrak{n}$ に対し, 各 $\mathbf{f}_\nu$ ごとにある非負整数 r が存在し, $\mathfrak{n}p^r$

が $\mathbf{f}_\nu$ の level で割り切れるとき, Λ-adic form $\mathcal{F}$ は level $\bar{\mathfrak{n}}$ をもつという. さらに, $I_{\mathfrak{n}p^r}$ を strict ray class group mod $\mathfrak{n}p^r$ とし, $\mathcal{F}$ が準同型

$$\chi : \varprojlim_r I_{\mathfrak{n}p^r} \to \mathcal{O}_L^\times$$

を character にもつとは, 各 $\mathbf{f}_\nu$ が character $N^{2-k} \cdot (\chi(\mathrm{mod}\ \mathrm{P}_\nu))$ をもつこととする. Λ-adic forms に作用する Hecke 作用素は, q-展開への具体的な作用を通して定義することができ, それらすべての Hecke 作用素に対して同時に固有な form となるとき, $\mathcal{F}$ を **Λ-adic eigenform** とよび, さらに, 十分多くの $\mathbf{f}_\nu$ が newform であるとき, $\mathcal{F}$ を **Λ-adic newform** とよぶ (厳密な定義については Section 1.6 を参照のこと).

さて, 前述したように [27] の主目的は, Hilbert newforms $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ を構成することであった. それを Λ-adic forms $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の構成問題に帰着させるために, [27] では Λ-adic forms に関する豊富な成果が挙げられている. その中でもとくに次の二つは, Galois 表現 $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ の構成にとって重要なものである:

結果 (i) ([27, Theorem 3=Theorem 1.4.1]) 任意の "p-stabilized newform" はある ordinary な Λ-adic eigenform の特殊化として得られる (ここで, p-stabilizd newforms と ordinary な Λ-adic forms の定義については, それぞれ Section 1.5 と Section 1.3 を参照のこと);

結果 (ii) ([27, Theorem 4=Theorem 2.2.1, Theorem 2.2.2]) level $\bar{\mathfrak{n}}$, character χ をもつ Λ-adic newforms $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$, すなわち, L-係数の連続な 2 次元 Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

で, 次の二つの条件

(i) $\mathfrak{n}p$ の外不分岐である;

(ii) $\mathfrak{n}p$ を割らない $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}),$$
$$\det(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \chi(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$$

を満たすものが存在し, さらに, p を割る任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ において, ある二つの characters $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ で, とくに ε_2 は不分岐で $\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ を満たすものにより.

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

とかける. ここで, $c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})$ と $c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ はそれぞれ ideals $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ に付随した $\mathcal{F}$ を定義する data のこと (Λ-adic forms を定義する data については, Section 1.2 を参照のこと).

これらの結果を認めたうえで, Theorems 0.2, 0.3 の証明のおおまかな流れをみてみたい (詳しくは, Section 2 を参照のこと). Theorem 0.2

(1) と Theorem 0.3 (2) については, およそ次のような流れで証明される: まず, λ で ordinary な Hilbert newform $\mathbf{f}$ に付随する p-stabilized newform $\mathbf{f}^*$ を取り出し, 結果 (i) を用いて $\mathbf{f}^*$ をある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}$ に持ち上げる. 次に, $\mathcal{F}$ に付随する Λ-adic newform $\mathcal{F}^*$ を取り出し, $\mathcal{F}^*$ に結果 (ii) を適用することで Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}^*}$ が得られて, その $D_\mathfrak{p}$ での様子もわかる. 最後に, $\rho_{\mathcal{F}^*}$ の適切な特殊化として, 求める $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ を得ることができ, 同時にその $D_\mathfrak{p}$ に制限したときの様子も決定される.

また, Theorem 0.2 (2) は, $\mathbf{f}$ が ordinary であるような λ をとったうえで, Theorem 0.2 (1) を適用して得られる λ-進表現に対し, Rogawski-Tunnell (cf. [18, Proposition 3.6]) の手法を応用して証明される. さらに, Theorem 0.3 (1) は, 上述のように結果 (i) を用いて $\mathbf{f}$ から得られる Λ-adic newform $\mathcal{F}^*$ に対し, 結果 (ii) で Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}^*}$ を構成する際に用いられる無限個の Λ-adic eigenforms $\{\mathcal{G}_i\}_i$ を取り出し, 各 $\mathcal{G}_i$ の適切な特殊化がそれぞれある有限素点で special 表現をもつことに着目し, Carayol [2] の結果を適用することで $\mathcal{F}^*$ の局所的な情報が得られて, その特殊化として $\sigma_\mathfrak{q} \cong \sigma(\pi_\mathfrak{q})$ が示される.

次に, 上述の結果 (i), (ii) の証明を概観しておきたい (詳しくは, Section 3 を参照のこと). 結果 (i) に関しては, $k \geq 2$ の場合は Hida により証明されたものであるが, Wiles は Hida とは異なる手法を用いることで $k = 1$ の場合も含めることができたのと同時に, 結果 (ii) の証明で重要な役割を果たす "congruence module" の divisor の評価を与える [27, Theorem 1.6.1] を証明する道も拓くことができた (ここで, congruence module の定義については, Section 1.7 を参照のこと). 証明のおおまかな流れは次の通り: まず, Kubota-Leopoldt の仕事を一般化した F 上の p-進 L-関数に関する Deligne-Ribet [4] の結果を用いて, Eisenstein 級数の定数項を p-進解析的に補間することで Λ-adic Eisenstein 級数を構成する ([27, Proposition 1.3.1], 詳しくは Section 1.4 を参照のこと). 次に, Λ-adic Eisenstein 級数と classical な Eisenstein 級数の積をとることで Λ-adic modular forms が作られ, それらを用いて Λ-adic eigenforms を構成して, Rankin の手法と Shimura による Hilbert modular forms の L-関数の特殊値に関する研究を応用することで, $\mathbf{f}$ の weight が十分大きい場合に, ある Λ-adic eigenform の特殊化として得られることを示す. そして, 低い weight の場合には, [27, Lemma 1.4.2] で存在が保証される $\boldsymbol{\theta} \equiv 1 \pmod{p}$ なる Hilbert modular form $\boldsymbol{\theta}$ を用いて, 十分大きな m とともに $\mathbf{f}\boldsymbol{\theta}^{p^m}$ を考えることで, weight が大きい場合へと帰着させて証明を完結する.

結果 (ii) については, $F = \mathbb{Q}$ のときは Hida [8] により証明されており, その手法は $[F : \mathbb{Q}]$ が奇数の場合へと一般化可能であるが, $[F : \mathbb{Q}]$ が偶数の場合へ一般化できるかどうかはすぐにはわからない. ここで, Wiles による Λ-adic forms を用いた証明で鍵となるのが, 擬表現の理論である (詳しくは, Section 3.1 を参照のこと. [29, Section 1.3] にも若干

の解説がある). これを用いれば, ある条件下で, 無限個の Galois 表現を貼り合わせることができるようになるので (cf. [27, Lemma 2.2.3]), $\rho_{\mathcal{F}}$ を構成するために, どうすれば無限個の貼り合わせの材料 $\{\rho_{\mathcal{F}_j}\}_j$ を入手できるかということが証明のポイントとなる. 一般に, Λ-adic form $\mathcal{G}$ について, $\mathcal{G}$ のある無限個の特殊化 $\mathbf{g}_\nu$ をうまくとったとき, そのそれぞれがある有限素点で special 表現をもつとき, $\mathcal{G}$ を **special** な Λ-adic form とよぶことにする. 以下, 結果 (ii) の証明のおおまかな流れをみてみる: まず Λ-adic newform $\mathcal{F}$ に対し, ある無限個の special な Λ-adic newforms $\mathcal{F}_j$ とそれに伴う素 ideal Q_j が存在し, 各 j について

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_j \pmod{Q_j}$$

が成立することが示される. 各 j に対し, special な $\mathcal{F}_j$ には無限個の special な特殊化があるおかげで, 前述した Galois 表現がすでに構成されている二つの場合のうちの Case 2 が適用でき, 擬表現を用いた Galois 表現の貼り合わせのテクニックを用いることで, $\mathcal{F}_j$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}_j}$ が構成される. その一方で, Theorem 1.6.1 で示される $\mathcal{F}$ に付随する congruence module の divisor の評価式を用いて, $\mathcal{F}_j$ たちに伴う無限個の素 ideals $\{Q_j\}_j$ として $\cap_j Q_j = \{0\}$ を満たすようにとれることが示せて, 再び Galois 表現を貼り合わせることで, $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ が得られる. また, $D_{\mathfrak{p}}$ に制限したときの形が $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ となることについては, Abel 多様体の Tate 加群に付随する Galois 表現という観点から weight 2 での特殊化に対して同様の形が得られ ([27, Lemma 2.1.5]), special な $\mathcal{F}_j$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}_j}$ にその情報が引き継がれて ([27, Lemma 2.2.4]), 最終的にそれらが貼り合わせられることで $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の形が決定される.

最後に, 実 2 次体上の weight 2 の Hilbert newforms $\mathbf{f}$ について, $\mathbf{f}$ は $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ の少なくとも一つの素 ideal λ で必ず ordinary となることについて確認しておきたい. この結果は, [27] では一番最後の箇所で示されているものであるが, この概説の本筋からは少し外れるので, この段階で紹介しておくことにする:

Lemma 0.4 (=[27, Lemma in Section 2.4])**.** *$F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を実 2 次体とし, $\mathbf{f} \in S_2(\mathfrak{n}, \chi)$ を weight 2, level $\mathfrak{n}$, character χ の Hilbert newform とする. このとき, 素数 p であって, p を割る $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ のある素 ideal λ で, $\mathbf{f}$ が λ で ordinary となるものが存在するようなもののなす集合を S とおけば, S は正の analytic density をもつ. とくに, $\mathbf{f}$ は少なくとも一つの素 ideal において ordinary である.*

Proof. 素数 p が S に属さずに $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ で不分岐ならば,

$$c(p, \mathbf{f}) \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ. Brylinski-Labesse の結果 [1, Theorem 3.4.6] により, ある定数 $C_0 > 1$ が存在して, 有限個を除くすべての素数 p に対し,

$$|c(p, \mathbf{f})| \leq C_0 p$$

が成り立つ. 一方, Brylinski-Labesse [1] により, ある素数 l を伴った 4 次元の Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_4(\bar{\mathbb{Q}}_l)$$

で, 有限個を除くすべての素数 p に対し,

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = c(p, \mathbf{f})$$

であり, 複素共役 c に対しては,

$$\mathrm{Trace}(\rho(c)) = 0$$

を満たすものが構成されている. 以上により, $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal λ に対し, 素数の集合

$$S_\lambda := \{p |\ c(p, \mathbf{f}) \equiv 0 \pmod{\lambda}\}$$

は正の analytic density をもつことがわかる. $\mathcal{O}_F$ で惰性する素数 λ で $\lambda > C_0$ なるものをとり, $\Sigma := \{p |\ p \notin S,\ p \in S_\lambda,\ p$ は $\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda}$ で不分岐 $\}$ とおけば, $p \in \Sigma$ のとき $c(p, \mathbf{f}) = 0$ を得る. もし, Lemma 0.4 の主張にある S の analytic density が 0 であるならば, それと同時に Σ は正の analytic density をもつことになる. 以下, この状況のもとで矛盾を導く.

ここで, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ のある 2 次元表現 ρ' で, 有限個を除くすべての素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathfrak{p}'$ を $\mathfrak{p}$ の共役とし $\delta := [F_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p]$ とおいて,

$$\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})) = \pm c(\mathfrak{p}, \mathbf{f}) \quad \text{or} \quad \mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})) = \pm c(\mathfrak{p}', \mathbf{f}),$$
$$\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}))\,\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}'})) = c(\mathfrak{p}, \mathbf{f})^\delta$$

を満たすものが存在する (cf. [18, Section 3] もしくは [16, Section 5]). このとき, $p \in \Sigma$ に対し, p を割るある素 ideal $\mathfrak{p}$ が存在して

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})) = 0$$

が成り立つ. よって, Σ は正の analytic density をもつので, Serre の結果により, ρ' は F 上のある有限次拡大に制限したとき可約となる. したがって, [16, (5.25)] により $\mathbf{f}$ は CM-type であることがわかり, ρ' は F のある CM 2 次拡大から誘導されることになり矛盾が導かれる (cf. [16, (5.27)]). $\square$

Remark 0.4. $F = \mathbb{Q}$ で weight が 3 の場合でも, Lemma 0.4 と同様の結果が証明される.

さて, 本稿は全部で三つの Sections から成り立っている. Section 1 では, まず [24] に従う形で, Hilbert modular forms の定義を復習する. 次に, Λ-adic forms を定義し, Hida 作用素 e を定式化する. そして, Λ-adic Eisenstein 級数を構成して, p-stabilized newforms が ordinary な Λ-adic eigenform に持ち上がることを証明する ([27, Theorem 1.4.1]). さらに, Λ-adic newforms と Λ-adic old forms を定式化し, Λ-adic newforms に付随する congruence modules の divisor の評価式を与える ([27, Theorem 1.6.1]).

Section 2 では, Λ-adic newforms に付随する Galois 表現にまつわる主結果 ([27, Theorems 2.2.1, 2.2.2]) を認めたうえで, 論文 [27] の主定理である Theorem 0.2 と Theorem 0.3 の証明の概説を行う. 最後に, Section 3 において, 擬表現の理論を用いて無限個の Galois 表現を貼り合わせることについて概観してから, 前節で保留した定理の証明について概説する.

Contents

1. Hilbert modular forms と Λ-adic forms

1.1. Hilbert modular forms

本節では, [24, Sections 1, 2] における定式化を採用し, Hilbert modular forms の定義を復習する.

F を有限次総実代数体とし, $\mathcal{O}_F$ をその整数環とする. $d := [F:\mathbb{Q}]$ とおき, $\mathfrak{d}$ を F の差積, h を F の狭義類数とする. F の $\bar{\mathbb{Q}}$ への埋め

込み全体に番号を付けて, $\sigma_1, \ldots, \sigma_d : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ としておく. F の分数 ideal $\mathfrak{b}$ と 整 ideal $\mathfrak{c}$ に対し,

$$\Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) := \{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(F) |\ ad-bc \in \mathcal{O}_F^\times, a, d \in \mathcal{O}_F, b \in \mathfrak{b}^{-1}, c \in \mathfrak{bc}\}$$

とおく. ここで, $\mathrm{GL}_2^+(F)$ は行列式が総正な F-係数の 2×2 正則行列全体のなす群を表す. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ に対し,

$$\alpha_i := \begin{pmatrix} \sigma_i(a) & \sigma_i(b) \\ \sigma_i(c) & \sigma_i(d) \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, d)$$

とおき, 複素上半平面 $\mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の d 個の直積 $\mathfrak{h}^d$ の元 $z = (z_i)_{i=1}^d$ に対し, $\alpha(z) \in \mathfrak{h}^d$ を一次分数変換を用いて,

$$\alpha_i(z_i) := \frac{\sigma_i(a)z_i + \sigma_i(b)}{\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d)}$$

を i-成分とする元として定義する. k を非負整数とし, $\mathfrak{h}^d$ 上の $\mathbb{C}$-値関数 $f : \mathfrak{h}^d \to \mathbb{C}$ と $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ に対し,

$$(f \|_k \alpha)(z) := (\det \alpha)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(\alpha(z)) \qquad (z = (z_i)_{i=1}^d \in \mathfrak{h}^d)$$

とおく. ここで,

$$(\det \alpha)^{\frac{k}{2}} := \prod_{i=1}^d (\det \alpha_i)^{\frac{k}{2}}, \quad (cz + d)^{-k} := \prod_{i=1}^d (\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d))^{-k}$$

とおいた.

Definition 1.1 (cf. [24, Sections 1, 2])**.** (1) 以上の設定のもと, $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{c})^\times$ の任意の character $\psi_0 : (\mathcal{O}_F/\mathfrak{c})^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対し, $\mathfrak{h}^d$ 上の $\mathbb{C}$-値正則関数

$$f : \mathfrak{h}^d \to \mathbb{C}$$

が次の条件を満たすとき, f を **weight** k, **character** ψ_0 をもつ $\Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ 上の **Hilbert modular form** と呼ぶ: 任意の $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ と $z \in \mathfrak{h}^d$ に対し,

$$(f \|_k \alpha)(z) = \psi_0(\alpha) f(z)$$

が成り立つ. ここで, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ に対し,

$$\psi_0(\alpha) := \psi_0(a (\mathrm{mod}\ \mathfrak{c}))$$

としている. $F = \mathbb{Q}$ のときは, さらに「f は無限遠点 ∞ にて正則である」という条件を課す. weight k, character ψ_0 をもつ $\Gamma(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ 上

の Hilbert modular forms のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $M_k(\Gamma(\mathfrak{b},\mathfrak{c}),\psi_0)$ とかく.

(2) $\mathfrak{n}$ を F の整 ideal とし, $t_1,\ldots,t_h$ を狭義 ideal 類群の代表で, $(Nt_\lambda, N\mathfrak{n}p)=1$ $(\lambda=1,\ldots,h)$ となるものとする. 以下, この代表たちを固定しておく. $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times$ の任意の character $\psi_0:(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times\to\mathbb{C}^\times$ に対し,

$$M_k(\mathfrak{n},\psi_0):=\prod_{\lambda=1}^{h}M_k(\Gamma(t_\lambda\mathfrak{d},\mathfrak{n}),\psi_0)$$

とおき, $\mathbb{C}$-ベクトル空間

$$M_k(\mathfrak{n}):=\bigoplus_{\psi_0:(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times\to\mathbb{C}^\times}M_k(\mathfrak{n},\psi_0)$$

の元を, **weight** k, **level** $\mathfrak{n}$ の **Hilbert modular form** と呼ぶ.

(3) また, $\psi_0:(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times\to\mathbb{C}^\times$ を一つ取り, ψ を $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times$ に制限すると ψ_0 と合致する ray class character mod $\mathfrak{n}\mathfrak{S}_\infty$ とする. F の任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対し, Shimura [24, Section 2] において, Hecke operators $T(\mathfrak{a})$, $S(\mathfrak{a})$ が定義されており, とくに $\mathfrak{n}$ と互いに素な任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して $S(\mathfrak{a})\mathbf{f}=\psi(\mathfrak{a})\mathbf{f}$ となる元 $\mathbf{f}\in M_k(\mathfrak{n},\psi_0)$ からなる部分空間を $M_k(\mathfrak{n},\psi)$ とかき, その元を **central character** ψ をもつ Hilbert modular form と呼ぶ.

Remark 1.1. $M_k(\mathfrak{n},\psi_0)$ の元と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上のある条件を満たす関数 (すなわち, adele 群上の保型形式) の空間との一対一対応が存在することが知られている. (詳しくは, [24, Section 2] を参照のこと. この対応については, [26, Section 1.1] の最後にも若干の解説がある. また, adele 群の保型形式については, [29, Sections 1.1, 1.2] においても概説されている.)

$\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_h)\in M_k(\mathfrak{n},\psi_0)$ について, 各 f_λ は $b\in(t_\lambda\mathfrak{d})^{-1}$ に対し,

$$f_\lambda((z_i+\sigma_i(b))_{i=1}^d)=(f_\lambda\parallel_k\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix})(z)=f(z)\quad(z=(z_i)_{i=1}^d\in\mathfrak{h}^d)$$

を満たすので, Fourier 展開

$$f_\lambda(z)=a_\lambda(0)+\sum_{0<<\mu\in t_\lambda}a_\lambda(\mu)e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Trace}(\mu z)}$$

をもつ. ここで, $\mu>>0$ は μ が総正であることを表し,

$$\mathrm{Trace}(\mu z):=\sigma_1(\mu)z_1+\cdots+\sigma_d(\mu)z_d$$

としている.

Definition 1.2 (cf. [24, Sections 1, 2])**.** 以上の記号のもとで, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_h) \in M_k(\mathfrak{n}, \psi_0)$ で, 各 f_λ が任意の $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ に対し, $f_\lambda \|_k \alpha$ の Fourier 展開の定数項が 0 であるようなもの全体のなす $M_k(\mathfrak{n}, \psi_0)$ の部分空間を $S_k(\mathfrak{n}, \psi_0)$ とかき,

$$S_k(\mathfrak{n}) := \bigoplus_{\psi_0 : (\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^\times \to \mathbb{C}^\times} S_k(\mathfrak{n}, \psi_0)$$

とおき, その元を **weight** k, **level** $\mathfrak{n}$ の **Hilbert cusp form** と呼ぶ.

ここで, Hilbert modular forms に付随する Dirichlet 級数を定義する.

Definition 1.3 (cf. [24, Section 2])**.** $\mathfrak{a}$ を F の 0 でない任意の整 ideal とすると, ある λ と総正な元 $\mu \in t_\lambda$ が存在し, $\mathfrak{a} = (\mu)t_\lambda^{-1}$ となる. このとき, $\mathbf{f} \in M_k(\mathfrak{n})$ に対し,

$$c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}) := a_\lambda(\mu)(Nt_\lambda)^{-\frac{k}{2}}$$

とおく. これは, μ の取り方によらず $\mathfrak{a}$ のみに依存する複素数である. 一方で, 整 ideal 以外の分数 ideal $\mathfrak{a}$ に対しては, $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}) := 0$ としておく. $\mathbf{f}$ に付随する **Dirichlet 級数** を

$$D(s, \mathbf{f}) := \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F : \mathrm{ideal}} c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})(N\mathfrak{a})^{-s}$$

と定義する.

Remark 1.2. $\mathbf{f}$ が正規化された Hecke eigenform であるとき, すなわち, $c(\mathcal{O}_F, \mathbf{f}) = 1$ であるとき, $\mathbf{f}$ の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ に対する固有値は $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$ と一致することに注意 (cf. [24, Section 2]).

次に, 様々な環を係数にもつ Hilbert modular forms を定義したい. $\lambda = 1, \ldots, h$ に対し,

$$c_\lambda(0, \mathbf{f}) := a_\lambda(0)(Nt_\lambda)^{-\frac{k}{2}}$$

とおく. このとき, Shimura により, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ と $\mathbf{f} \in M_k(\mathfrak{n}, \psi_0)$ に対し, $\mathbf{f}^\sigma \in M_k(\mathfrak{n}, \psi_0^\sigma)$ で, 0 でない F のすべての整 ideal $\mathfrak{a}$ とすべての $\lambda = 1, \ldots, h$ について,

$$c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}^\sigma) = c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})^\sigma, \quad c_\lambda(0, \mathbf{f}^\sigma) = c_\lambda(0, \mathbf{f})^\sigma$$

が成り立つものが存在することが知られている (cf. [27, Proposition 2.6]).

Definition 1.4. (1) $\mathbb{C}$ の任意の部分環 A に対し, A を係数にもつ Hilbert modular forms の空間を

$$M_k(\mathfrak{n}, A) := \{\mathbf{f} \in M_k(\mathfrak{n}) |\ c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}),\ c_\lambda(0, \mathbf{f}) \in A \text{ for all } \mathfrak{a}, \lambda\}$$

と定義する. このとき, Shimura により,

$$M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) = M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

であることが示されている.

(2) Introduction の冒頭で固定した体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を用いて,

$$M_k(\mathfrak{n}, \bar{\mathbb{Q}}_p) := M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{\mathbb{Q}}_p$$

と定義し, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の任意の部分環 A に対し,

$$M_k(\mathfrak{n}, A) := \{\mathbf{f} \in M_k(\mathfrak{n}, \bar{\mathbb{Q}}_p) |\ c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}),\ c_\lambda(0, \mathbf{f}) \in A \text{ for all } \mathfrak{a}, \lambda\}$$

とおく. 以下, 固定されている体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ を通して, $M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ にまつわる結果を $M_k(\mathfrak{n}, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ にも適用することにする. Definition 1.4 に入る前に述べた Shimura の結果により, $\mathbb{C}$ もしくは $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の任意の部分体 A について,

$$M_k(\mathfrak{n}, A) = M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

が成立することに注意.

(3) 以上の定義と考察を下地として, $\mathbb{Q}$ もしくは $\mathbb{Q}_p$ の任意の拡大体 A に対して,

$$M_k(\mathfrak{n}, A) := M_k(\mathfrak{n}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

と定義し, A の任意の部分環 R に対しては,

$$M_k(\mathfrak{n}, R) := \{\mathbf{f} \in M_k(\mathfrak{n}, A) |\ c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}),\ c_\lambda(0, \mathbf{f}) \in R \text{ for all } \mathfrak{a}, \lambda\}$$

と定義する.

(4) 以上 (1)-(3) の定義において, 様々な環に係数をもつ Hilbert cusp forms のなす空間 ($S_k(\mathfrak{n}, A)$ や $S_k(\mathfrak{n}, R)$) も全く同様に定義される.

Remark 1.3. Definition 1.4 の定義のあり方からわかるように, Hilbert modular form $\mathbf{f}$ がどの環で定義されるかは, $c(\mathfrak{a}, \mathbf{f})$ と $c_\lambda(0, \mathbf{f})$ がどのような環に属するのかで定まるため, これらの値のことを $\mathbf{f}$ を定義する **data** と呼ぶことがある.

さて, Definition 1.1 (3) で少し言及したように, F の任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対し, $M_k(\mathfrak{n})$ に作用する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ と $S(\mathfrak{a})$ が定まり, これらは $\mathfrak{n}$ の素因子のなす集合にのみ依存する. つまり, level $\mathfrak{n}$ の $\mathbf{f}$ は, そのまま level $\mathfrak{n}\mathfrak{m}$ の Hilbert modular form ともみなせるが, もし $\mathfrak{n}$ の素因子のなす集合と $\mathfrak{m}$ の素因子がなす集合が一致するならば, $T_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{a})\mathbf{f} = T_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})\mathbf{f}$ となる. ここで, level $\mathfrak{n}$ で作用するということを示唆するために $T_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{a})$ と下付きの添え字を施している. [24, Section 2] では "primitive form" と呼ばれているものをここでは **newform** という術語を用いることにして, 任意の $\mathbf{f} \in S_k(\mathfrak{n})$ は, 適切な $\beta_i \in \mathbb{C}$ と level $\mathfrak{m}_i$ の正規化された newform $\mathbf{f}_i$ と $\mathfrak{m}_i\mathfrak{q}_i|\mathfrak{n}$ なる ideal $\mathfrak{q}_i$ を用いて,

$$\mathbf{f} = \sum_i \beta_i \mathbf{f}_i(\mathfrak{q}_i z)$$

の形にただ一通りに表現されることが知られている．ここで,「正規化された」という言葉は $c(\mathcal{O}_F, \mathbf{f}_i) = 1$ であることを意味し, $\mathbf{f}_i(\mathfrak{q}_i z)$ は任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対し,

$$c(\mathfrak{a}, \mathbf{f}_i(\mathfrak{q}_i z)) = c(\mathfrak{q}_i^{-1}\mathfrak{a}, \mathbf{f}_i)$$

となることで特徴付けられる Hilbert cusp form である (cf. [24, Proposition 2.3]).

1.2. Λ-adic forms

本節では, [27, Section 1.2] で定式化されている Λ-adic forms とその Hecke 作用素について概説する．

p を素数とする．p が奇素数のときは $q := p$ とし, $p = 2$ であるときは $q := 4$ とおくことにする．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上のある有限次拡大体の整数環とし, $\mathcal{O}$ を係数にもつ 1 変数の形式的冪級数環を $\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$ とおく．$\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大として, $[F \cap \mathbb{Q}_\infty] = p^e$ で指数 e を定義し, $u := (1+q)^{p^e}$ とおく．ここで, $2 \leq k \in \mathbb{Z}$ と 1 の p^r 乗根 $\zeta \in \bar{\mathbb{Q}}_p$ $(r \geq 0)$ の組 (k, ζ) 全体のなす集合を

$$\mathfrak{X} := \{(k,\zeta) |\ k \geq 2,\ \zeta^{p^r} = 1 \text{ for some } r \geq 0\}$$

とおき, 任意の $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ に対し, $\mathcal{O}$-algebra 準同型

$$\nu_{k,\zeta} : \Lambda \to \mathcal{O}[\zeta], \quad 1+T \mapsto \zeta u^{k-2}$$

が定まる．

Definition 1.5 ([27, Definition in Section 1.2]). (1) $\mathfrak{n}$ を F の整 ideal とする．$\mathcal{O}_F$ の ideal 上の関数

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F :\ \text{ideal}\} \cup \{0\}^h \to \Lambda,&\\ \mathfrak{a} \mapsto c(\mathfrak{a}, \mathcal{F}),&\\ \lambda\text{-th } 0 \mapsto c_\lambda(0, \mathcal{F}) \quad (\lambda = 1, \ldots, h)&\end{aligned}$$

が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を **level $\mathfrak{n}$ の Λ-adic form** と呼ぶ: 有限個を除くすべての $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}$ $(\zeta^{p^r} = 1)$ に対して, ある $\mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta}} \in M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}[\zeta])$ で,

$$D(s, \mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta}}) = \sum_{\mathfrak{a}} \nu_{k,\zeta}(c(\mathfrak{a}, \mathcal{F}))(N\mathfrak{a})^{-s},$$

$$c_\lambda(0, \mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta}}) = \nu_{k,\zeta}(c_\lambda(0, \mathcal{F}))\ (\lambda = 1, \ldots, h)$$

が成り立つものが存在する．ここで現れる Hilbert modular form $\mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta}}$ を $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ と表すこともある．

level $\mathfrak{n}$ の Λ-adic forms 全体のなす Λ-加群を $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n})$ とかくことにする．とくに, Λ が何ものであるかがわかっている場合は, $\mathcal{M}(\mathfrak{n})$ とかくこともある．$\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathfrak{n})$ に対し, 各整 ideal での値 $c(\mathfrak{a}, \mathcal{F})$, $c_\lambda(0, \mathcal{F})$ $(\lambda =$

$1,\ldots,h)$ を $\mathcal{F}$ を定める **data** と呼ぶ. $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathfrak{n})$ に対し, 定義の条件にある Hilbert modular form $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が存在する組 (k,ζ) のなす $\mathfrak{X}$ の部分集合を $A_{\mathcal{F}}$ とおく.

(2) (1) の状況において, Λ-adic cusp forms のなす Λ-加群を

$$\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{n}):=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n})|\,\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})\in S_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O}[\zeta]),\forall(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}\ (\zeta^{p^r}=1)\}$$

とおく. Λ が何ものであるかがわかっている場合は, $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ とかくこともある.

ここで, Λ-adic forms に作用する Hecke 作用素を定義する:

Definition 1.6. (1) F の整 ideal $\mathfrak{a}$ について, ある $\lambda_{\mathfrak{a}}\in\Lambda$ で, 任意の $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ に対し,

$$(N\mathfrak{a})^{k-1}S(\mathfrak{a})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})=\nu_{k,\zeta}(\lambda_{\mathfrak{a}})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$$

が成り立つものが存在するとき, Hecke 作用素 $S(\mathfrak{a})^*$ を

$$S(\mathfrak{a})^*(\mathcal{F}):=\lambda_{\mathfrak{a}}\mathcal{F}$$

と定義する.

(2) さらに, 任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して, (1) のような $\lambda_{\mathfrak{a}}$ が存在すると仮定する. 各 $\mathfrak{a}$ を固定したとき, $\mathcal{G}\in\mathcal{M}(\mathfrak{n})$ を次の data で定まる Λ-adic form とする:

$$c(\mathfrak{a}',\mathcal{G})=\sum_{\mathfrak{m}\supset\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}}\lambda_{\mathfrak{m}}(N\mathfrak{m})c(\mathfrak{m}^{-2}\mathfrak{a}\mathfrak{a}',\mathcal{F}),$$
$$c_\lambda(0,\mathcal{G})=\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}}\lambda_{\mathfrak{b}}(N\mathfrak{b})c_{\lambda\rho^2\mu^{-1}}(0,\mathcal{F})\quad(\lambda=1,\ldots,h).$$

ここで, 添え字 ρ, μ はそれぞれ狭義 ideal 類群において, $[\mathfrak{b}]=[t_\rho]$, $[\mathfrak{a}]=[t_\mu]$ により定まるものであり, 添え字 $\lambda\rho^2\mu^{-1}$ は $[t_\lambda t_\rho^2t_\mu^{-1}]=[t_{\lambda\rho^2\mu^{-1}}]$ で定まるものとしている. そこで, Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ を

$$T(\mathfrak{a})\mathcal{F}:=\mathcal{G}$$

と定義する. このとき, 任意の $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ に対し,

$$\nu_{k,\zeta}(T(\mathfrak{a})\mathcal{F})=T(\mathfrak{a})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$$

が成り立つことに注意 (cf. [24, Section 2] あるいは [27, Section 1.7]).

次に, character 付きの Λ-adic forms を定義する:

Definition 1.7. (1) $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathfrak{n})$ について, Definition 1.6 (2) のような結び付け $\mathfrak{a}\mapsto\lambda_{\mathfrak{a}}$ が存在すると仮定する. ある character

$$\chi:\varprojlim_r I_{\mathfrak{n}p^r}\to\Lambda^\times$$

で, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対し,

$$\lambda_{\mathfrak{a}}=\chi(\mathfrak{a})$$

が成立するものが存在するとき, $\mathcal{F}$ は **character** χ をもつという．このとき, 任意の $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ について, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対し,

$$S(\mathfrak{a})\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})=(N\mathfrak{a})^{2-k}\nu_{k,\zeta}(\chi(\mathfrak{a}))\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$$

となるので, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ は central character $\chi_{\nu_{k,\zeta}}:=N^{2-k}\cdot(\nu_{k,\zeta}\circ\chi)$ をもつことがわかる．

level $\mathfrak{n}$ で character χ をもつ Λ-adic forms のなす Λ-加群を $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ とかくことにする．とくに, Λ が何ものであるかがわかっている場合は, $\mathcal{M}(\mathfrak{n},\chi)$ とかくこともある．

(2) (1) の状況のもとで, level $\mathfrak{n}$ で character χ をもつ Λ-adic cusp forms のなす Λ-加群を

$$\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi):=\{\mathcal{F}\in\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)\,|\,\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})\in S_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O}[\zeta]),\forall(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}\ (\zeta^{p^r}=1)\}$$

とおく．Λ が何ものであるかがわかっている場合は, $\mathcal{S}(\mathfrak{n},\chi)$ とかくこともある．

Lemma 1.1. Definition 1.7 の設定のもとで, $\mathcal{M}(\mathfrak{n},\chi)$ は Λ 上 torsion-free である．

Proof. $\mathcal{F}\in\mathcal{M}(\mathfrak{n},\chi)$ を 0 でない元, つまり, 有限個を除くすべての $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ に対し, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})\neq 0$ であるとする．もし $g(T)\in\Lambda$ により, $g(T)\mathcal{F}=0$ となれば, 有限個を除くすべての 1 の p-冪乗根 ζ に対し,

$$g(\zeta-1)\nu_{2,\zeta}(\mathcal{F})=0,\quad \nu_{2,\zeta}(\mathcal{F})\neq 0$$

が成立する．よって, $g(\zeta-1)=0$ であり, Weierstrass preparation theorem (cf. [10, Lemma 7.3.1]) により, $g(T)=0$ となる． □

1.3. **Hida 作用素 e と $\mathcal{M}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ の有限生成性**

本節では, Hilbert modular forms や Λ-adic forms のなす空間の ordinary な部分空間を与える作用素 e について概説する．この作用素は一般に Hida 作用素と呼ばれる冪等作用素で, しかるべき条件下で存在が保証される極限 $\lim_{a\to\infty}T(p)^{a!}$ として定義される．さらに, ordinary な Λ-adic forms のなす加群 $\mathcal{M}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\chi):=e\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ が, ある条件の下で有限生成であることを保証する定理 [27, Theorem 1.2.2] を紹介する．これは, 今後議論を進めるうえで根本となる重要な定理である．

以下, 前節の記号を用いる．二つの整数 $r\geq 1$ と $k\geq 1$ に対し, $M_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O})$ に作用する p での Hecke 作用素 $T_{\mathfrak{n}p^r}(p)$ を U_p とおく．$|\cdot|_p$ を $\mathcal{O}$ における p-進 norm とし, $\mathbf{f}\in M_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O})$ に対し,

$$\|\,\mathbf{f}\,\|:=\sup_{\mathfrak{a},\lambda}\{|c(\mathfrak{a},\mathbf{f})|_p,|c_\lambda(0,\mathbf{f})|_p\}$$

により $\mathbf{f}$ の norm を定義し, この norm を用いて $M_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O})$ を位相空間とみなす．このとき,

Lemma 1.2. $M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ 上の作用素として, 極限

$$e := \lim_{a\to\infty} U_p^{a!}$$

が存在する. これを $M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ 上の Hida **作用素**と呼ぶ. e を Hilbert cusp forms のなす部分空間 $S_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ に制限すれば, $S_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ 上の Hida 作用素を与える.

Proof. [6, p. 236] にある議論を応用する (cf. [10, Lemma 7.2.1]): $\mathfrak{P}$ を $\mathcal{O}$ の極大 ideal とし,

$$X := M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})/\mathfrak{P}M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$$

とおくと, U_p は X に作用する. $\mathbb{F} := \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ とおけば, $M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ 上有限生成なので, X は有限次な $\mathbb{F}$-ベクトル空間となる. X に作用する U_p は, 互いに可換なある semisimple な作用素 s と冪零作用素 n で,

$$U_p = s + n$$

と分解できて, $\mathbb{F}$ の標数が p であることと $sn = ns$ であることから, 十分大きな p-冪 p^μ により, $U_p^{p^\mu}$ は X 上 semisimple となる. よって, ある β により U_p^β は X 上の冪等作用素となり, すべての $n \geq 1$ に対し, $U_p^{p^n\beta}$ は $M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})/\mathfrak{P}^n M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ 上の冪等作用素となる. したがって, n に関して射影極限をとることで,

$$M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}) = \varprojlim_{n\geq 1} M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})/\mathfrak{P}^n M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$$

上の冪等作用素 $e := \lim_{a\to\infty} U_p^{a!}$ が定義される. $S_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O})$ 上でも全く同様の議論で e が定義されることがわかる. □

Definition 1.8. 以上の記号のもと, K を $\mathcal{O}$ の商体として,

$$M_k^0(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}) := eM_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}), \quad S_k^0(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}) := eS_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}),$$
$$M_k^0(\mathfrak{n}p^r, K) := eM_k(\mathfrak{n}p^r, K), \quad S_k^0(\mathfrak{n}p^r, K) := eS_k(\mathfrak{n}p^r, K)$$

をそれぞれ **ordinary** な部分空間と呼ぶ.

Remark 1.4. Definition 1.8 において, Hida 作用素 e の像を ordinary な部分空間と名付けてはいるが, 実際は ordinary な Hilbert newforms に付随する "p-stabilized newforms" と呼ばれるもので生成される部分空間であるので, 誤解を招きやすい名称であることに注意 (p-stabilized newforms については, Definition 1.9 を参照のこと).

ここで, $k \geq 2$ として, $M_k^0(\mathfrak{n}p^r, K)$ の生成元について考察したい: 以下, $M_k(\mathfrak{n}p^r, K)$ に属するすべての正規化された Hecke eigenforms は $\mathcal{O}$ 上定義されている, つまり, それらを定義する data たちがすべて $\mathcal{O}$ に属すると仮定する. このとき,

$$M_k(\mathfrak{n}p^r, K) = \langle \mathbf{f}_i(\mathfrak{q}_i z) |\ \mathbf{f}_i :\ \text{newform of level } \mathfrak{m}_i \text{ with } \mathfrak{m}_i\mathfrak{q}_i | \mathfrak{n}p^r \rangle_K$$

となることが知られている．よって，e による像は

$$M_k^0(\mathfrak{n}p^r, K) = \langle e\mathbf{f}_i(\mathfrak{q}_i z) \mid \mathbf{f}_i: \text{ newform of level } \mathfrak{m}_i \text{ with } \mathfrak{m}_i\mathfrak{q}_i | \mathfrak{n}p^r,\ (\mathfrak{q}_i, p) = 1\rangle_K$$

となることがわかる．ここで，$k \geq 2$ と仮定していることに注意して，各 $e\mathbf{f}_i$ について $\mathbf{f}_i$ が $\mathfrak{P}$ で ordinary，すなわち $c(p, \mathbf{f}_i) \in \mathcal{O}^\times$ であることが $e\mathbf{f}_i \neq 0$ となるための必要十分条件であり，このとき，$e\mathbf{f}_i$ は level $\mathfrak{m}_i\mathcal{P}$ の Hecke eigenform となる．ここで，

$$\mathcal{P} := \prod_{\mathfrak{p}|p,\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{m}_i)=1} \mathfrak{p}$$

とおいた．とくに，$e\mathbf{f}_i$ の $U_\mathfrak{p}$-固有値は，2 次多項式 $x^2 - c(\mathfrak{p}, \mathbf{f}_i)x + \chi_\mathbf{f}(\mathfrak{p})N\mathfrak{p} = 0$ の p-進 unit な根と一致する．ここで，$\chi_\mathbf{f}$ は $\mathbf{f}$ の character を表している．

Definition 1.9. 以上の設定のもと，$e\mathbf{f}_i$ のことを Hilbert newform $\mathbf{f}_i$ に付随する p-**stabilized newform** と呼ぶ．つまり，p-stabilized newforms とは p と互いに素な素 ideal に関しては new であり，p の素因子 $\mathfrak{p}$ においては p-進 unit な $U_\mathfrak{p}$-固有値をもつ Hecke eigenform のことである．

$k = 1$ のときも，この意味で p-stabilized newforms という術語を用いることにする．

Proposition 1.3 (=[27, Proposition 1.2.1])**.** Hilbert modular forms 上の Hida 作用素 e は，Λ-adic forms $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}, \chi)$ $(\Lambda = \mathcal{O}[\![T]\!])$ 上の冪等作用素 e に，特殊化と可換なものとして自然に拡張される．この e は Λ-adic cusp forms $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{n}, \chi)$ 上の冪等作用素としても定まる．

Proof. $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathfrak{n}, \chi)$ をとる．以下，$e\mathcal{F}$ に相当する Λ-adic form を構成する．$\mathcal{O}$ の商体 K について，任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ と $(k, \zeta) \in A_\mathcal{F}$ に対し，Shimura の結果により，$\mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta}}^\sigma = \mathbf{f}_{\nu_{k,\zeta^\sigma}}$ も Hilbert modular form となるので，$(k, \zeta^\sigma) \in A_\mathcal{F}$ となる．よって，$A_\mathcal{F}$ を加算無限個の有限部分集合たち A_i で，

$$A_i \subset A_{i+1} \quad (i \geq 1),$$
$$(k, \zeta) \in A_i \Rightarrow (k, \zeta^\sigma) \in A_i, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$$

を満たすものの和集合として表すことができる:

$$A_\mathcal{F} = \cup_{i=1}^\infty A_i.$$

$\pi_{k,\zeta}$ を $\zeta u^{k-2} - 1$ の K 上の最小多項式とし，各 $i \geq 1$ に対して，

$$\pi_i := \prod_{\{(k,\zeta)\}:\text{conj.class in } A_i} \pi_{k,\zeta}$$

とおく. ここで, 最小多項式 $\pi_{k,\zeta}$ の積をとる際に, (k,ζ) として $A_{\mathcal{F}}$ 内の各 conjugacy class $\{(k,\zeta)\}$ の代表元をとっている. 以下, それらを固定しておく.

$\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ の部分加群 $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ を

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} := \{\mathcal{G} \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi) |\ \nu_{k,\zeta}(\mathcal{G}) \in M_k(\mathfrak{n}p^r), \forall (k,\zeta) \in A_{\mathcal{F}}\ (\zeta^{p^r}=1)\}$$

とおき, さらに, 各 $i \geq 1$ に対し,

$$\mathcal{M}(A_i) := \{\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}} |\ c(\mathfrak{a},\mathcal{G}), c_\lambda(0,\mathcal{G}) \in \pi_i\Lambda,\ \forall \mathfrak{a},\ \forall \lambda = 1,\cdots,h\}$$

とおく. このとき, 上で固定した代表元 (k,ζ) たちを用いて, $\mathcal{O}$-加群の injection

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}/\mathcal{M}(A_i) \hookrightarrow \oplus_{\{(k,\zeta)\}\text{in } A_i} M_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}[\zeta]),$$
$$\mathcal{G} \mapsto (\nu_{k,\zeta}(\mathcal{G}))_{(k,\zeta)}$$

が定まる. 右辺においてはすでに e が定義されているので,

$$\hat{\mathcal{F}}_i := e(\mathcal{F}(\text{mod } \mathcal{M}(A_i)))$$

を定義することができ, i に関して $\hat{\mathcal{F}}_i$ たちの係数ごとに極限をとって得られる Λ-adic form $\hat{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ を, $\mathcal{F}$ の e による像として採用することで, 求める冪等作用素

$$e : \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi) \to \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$$

が定義される. Λ-adic cusp forms に制限したときでも, 全く同様に e は定義される. □

Definition 1.10. Proposition 1.3 の e を用いて,

$$\mathcal{M}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\chi) := e\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi),$$
$$\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\chi) := e\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$$

をそれぞれ $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ と $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{n},\chi)$ の **ordinary** な部分加群と呼ぶ.

以下, character $\chi : \varprojlim_{r\to\infty} I_{\mathfrak{n}p^r} \to \Lambda^\times$ がある条件を満たすときに, $\mathcal{M}^0(\mathfrak{n},\chi)$ は Λ 上有限生成になることを証明する. ordinary な部分加群が Λ 上有限生成であるという事実は, Galois 表現を構成する議論の中で基礎となるものであり, Wiles による Galois 表現の構成において, Hilbert modular forms の ordinary 性を仮定する意義はここにある. (この結果は, level p^∞ の p-進 Hecke 環に関する Hida 理論で鍵となる同様の結果の類似である.)

まずは, χ に関する条件についてみてみよう: $\mathcal{O}_F$ の任意の ideal $\mathfrak{a}$ に対して, F 上の conductor $\mathfrak{a}\mathfrak{S}_\infty$ の strict ray class field を $F_{\mathfrak{a}}$ で表すことにする. いま, Λ-adic forms の level として用いている整 ideal $\mathfrak{n}$ と,

任意の非負整数 $r \geq 0$ に対して, 類体論により, $I_{\mathfrak{n}p^r}$ のある正規部分群 $\mathcal{C}_r$ で, Artin 写像により

$$\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{n}}(\zeta_{p^r})/F) \xrightarrow{\sim} I_{\mathfrak{n}p^r}/\mathcal{C}_r$$

となるものが存在する. ここで, ζ_{p^r} は 1 の原始 p^r 乗根を表す.

Definition 1.11 (=[27, Definition in Secition 1.2])**.** 上記の設定のもとで, character χ が **cyclotomic** であるとは, 任意の $r \geq 0$ と 1 の原始 p^r 乗根 ζ に対して, 次の二つの条件を満たすことをいう:

(i) $\chi_{\nu_{2,\zeta}}(\mathcal{C}_r) = 1$;

(ii) ζ に依存しないある定数 $c > 0$ が存在して, $\chi_{\nu_{2,\zeta}}$ の位数は cp^r 以上である.

Remark 1.5. 以下, Galois 表現の構成に用いられる Λ-adic forms たちの characters はすべて Definition 1.11 の意味で cyclotomic なものである.

Theorem 1.4 (=[27, Theorem 1.2.2])**.** *χ が cyclotomic のとき, $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}, \chi)$ は Λ 上有限生成である.*

Proof. 次の Lemma を証明は後に回すことにして一旦認めておく:

Lemma 1.5 (=[27, Lemma in Section 1.2], cf. [10, Theorem 7.2.2])**.** *$\mathfrak{n}$ を固定したとき, $\dim_K S_k^0(\mathfrak{n}p, K)$ は k に依存せずに有界である.*

$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t \in \mathcal{M}_\Lambda^0(\mathfrak{n}, \chi)$ を Λ 上独立な元とし, それらで Λ 上生成される部分加群を $\mathcal{N} := \langle \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t \rangle_\Lambda$ とおく. 自然に Λ-加群の同型 $\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \Lambda^t$ があることに注意. F_Λ を Λ の商体とし, $W := (N \otimes_\Lambda F_\Lambda) \cap \mathcal{M}_\Lambda^0(\mathfrak{n}, \chi)$ とおけば, $W/\mathcal{N}$ は torsion Λ-加群となる. $\mathcal{F}_j$ たちを定義する data について, t 個の整 ideal $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ をうまく選んで, $\Lambda \ni \lambda(T) := \det(c(\mathfrak{a}_i, \mathcal{F}_j)_{i,j}) \neq 0$ となるようにとれて, このとき, $W/\mathcal{N}$ は λ 倍で消える.

$\lambda(u^{k-2} - 1) \neq 0$ となる十分大きな k については, $\mathcal{O}$-加群準同型

$$\mathcal{N}/(1 + T - u^{k-2})\mathcal{N} \to M_k^0(\mathfrak{n}p, \mathcal{O}), \quad \mathcal{F} \mapsto \nu_{k,1}(\mathcal{F})$$

は injection となり, 右辺において Hilbert cusp forms のなす部分空間の $\mathcal{O}$-rank は, Lemma 1.5 により k によらず有界であり, Eisenstein 級数からの寄与も k によらずに有界であることが知られているので (cf. [26, Proposition 1.5]), $\mathcal{N}$ の Λ-rank t は有界となり, $\mathcal{M}_\Lambda^0(\mathfrak{n}, \chi)$ は Λ 上有限生成であることが示された. □

以下, Lemma 1.5 を証明して本節を終わることにする (cf. [10, Theorem 7.2.2]).

$$\Delta := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F) \cap M_2(\mathcal{O}_F) |\ c - 1, d \in \mathfrak{n}p \}$$

とおき, Γ を Δ に含まれる合同部分群とする. このとき, Definition 1.1 と同様に, weight k の Γ 上の Hilbert cusp forms のなす空間 $S_k(\Gamma)$ が定義され, その ordinary な部分空間 $S_k^0(\Gamma)$ も定義されるが, Γ が十分小さいときに, $S_k^0(\Gamma)$ が k に依存しないある有限次元な群 cohomology に包含されることを示せば, Lemma 1.5 が証明されたことになる.

N を F の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包とし, $\mathcal{O}_N$ をその整数環とする. 体の埋め込み $\tau : F \hookrightarrow N$ ごとに, Δ の τ による像が 2 次列ベクトル $\mathcal{O}_N^2$ 上に自然に作用することを通して, 各 $n \geq 0$ に対し, n-th symmetric power $S^n(\mathcal{O}_N^2)$ への Δ の作用が定まり, τ に関してこれらのテンソル積をとることにより, 各 $\mathbf{n} = (n_\tau)_{\tau:F\hookrightarrow N}$ $(n_\tau \geq 0)$ に対し, $S_{\mathbf{n}} := \otimes_\tau S^{n_\tau}(\mathcal{O}_N^2)$ への Δ の作用が定まる. さらに, 任意の $\mathcal{O}_N$-algebra R に対して, $S_{\mathbf{n}}(R) := S_{\mathbf{n}} \otimes_{\mathcal{O}_N} R$ と定義し, Δ は自然に $S_{\mathbf{n}}(R)$ にも作用する (cf. [29, Defintion 1.6]).

$\mathfrak{p}$ を p の上の N の素 ideal とし, その剰余体を $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ とかくことにする. 各 τ について, 係数を mod $\mathfrak{p}$ する前に, $S^{n_\tau}(\mathcal{O}_N^2)$ の標準基底 $\{e_{\tau,0}, \ldots, e_{\tau,n_\tau}\}$, つまり, 作用 $S^{n_\tau}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表現行列が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\otimes n_\tau}$ となる基底をとる. そして, 係数を mod $\mathfrak{p}$ したうえで, $\{e_{\tau,i} | \ i = 0, \ldots, n_\tau, \ \tau : F \hookrightarrow N\}$ を $S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ の基底とみなし, Δ-加群の準同型

$$j : S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \to S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$$

を $\otimes_\tau e_{\tau,n_\tau}$ の係数を取り出す写像として定義すれば, $g = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し,

$$j : gS_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} gS_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$$

となる.

$$j_* : H^\cdot(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathfrak{p})) \to H^\cdot(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathfrak{p}))$$

を j から誘導される写像とする.

一方, 任意の Δ-加群 M に対し, 写像 $T(p) : H^\cdot(\Gamma, M) \to H^\cdot(\Gamma, M)$ を, 合成写像

$$T(p) : H^\cdot(\Gamma, M) \xrightarrow{\tilde{g}_*} H^\cdot(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, M) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^\cdot(\Gamma, M)$$

として定義する (この写像は, 後に Hilbert cusp forms の空間に作用する Hecke 作用素 $T(p)$ に対応するものである). ここで, $\tilde{g}_*$ は二つの写像

$$M \to M, \quad m \mapsto gm,$$
$$\Gamma \cap g\Gamma g^{-1} \to \Gamma, \quad \gamma \mapsto g^{-1}\gamma g$$

により誘導される写像である. このとき, $T(p)$ は次の合成写像と一致することがわかる:

$$H^\cdot(\Gamma, M) \xrightarrow{g_*} H^\cdot(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, gM) \xrightarrow{i_*} H^\cdot(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, M) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^\cdot(\Gamma, M).$$

ここで, i_* は自然な包含写像 $i : gM \hookrightarrow M$ から誘導されるものである.

ここからは, M として $S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ や $S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ を採用することにして, さらに, 写像 $I : H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \to H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$ を合成写像

$$H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \xrightarrow{g_*} H^{\cdot}(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, gS_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \overset{j_*^{-1}}{\cong} H^{\cdot}(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, gS_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$
$$\xrightarrow{i_*} H^{\cdot}(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$

として定義する. ここで, $j : gS_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} gS_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})$ であることに注意.

以上の定義のもと, j_* と i_*, cor と i_*, cor と j_*, そして g_* と j_* がそれぞれ可換であることがわかり, 次の等式が得られる:

$$I \circ j_* = T(p) \quad \text{on } H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})),$$
$$j_* \circ I = T(p) \quad \text{on } H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})).$$

一般に, $T(p)$ の作用をもつ有限次 N-ベクトル空間 V について, 係数を $N_{\mathfrak{p}}$ に拡大すれば, $V \otimes_N N_{\mathfrak{p}}$ 上の作用素として $e := \lim_{r\to\infty} T(p)^{r!}$ が定義され (cf. Lemma 1.2), 固定されている体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ と $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を通して, $V \otimes_N \mathbb{C}$ 上で e が定まる. とくに, $H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}))$ 上で e が定まり, $\mathbf{n} = (k-2, \ldots, k-2)$ として, Γ が十分小さいときに, $T(p)$ の作用と可換な injection

$$S_k(\Gamma) \hookrightarrow H^d(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}))$$

が存在することから (cf. [13]), 両辺において e を施して, $eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}))$ の次元が $\mathbf{n}$ によらずに有界であることを証明すればよい. さらに, $\dim_{N_{\mathfrak{p}}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(N_{\mathfrak{p}})) = \dim_{\mathbb{C}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{C}))$ であるので, $eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(N_{\mathfrak{p}}))$ の次元の有界性がわかればよい.

$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ を $N_{\mathfrak{p}}$ の整数環とし, π を $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ の素元とする. 自然な完全列

$$0 \to S_{\mathbf{n}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\pi} S_{\mathbf{n}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\bmod \pi} S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \to 0$$

から, 自然な injection

$$eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$

が誘導される. したがって,

$$\dim_{N_{\mathfrak{p}}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(N_{\mathfrak{p}})) \le \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})) \le \dim_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$

となる. 一方で, $eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$ 上 $T(p) = I \circ j_*$ は可逆となるので, とくに

$$j_* : eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})) \to H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$

は injection となる. 以上の考察をまとめれば,

$$\dim_{\mathbb{C}} eH^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})) \le \dim_{\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}} H^{\cdot}(\Gamma, S_{\mathbf{0}}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}))$$

となることがわかり, 右辺は $\mathbf{n}$ によらずに有界なので, Lemma 1.5 は示された.

1.4. Λ-adic Eisenstein 級数

本節では, Λ-adic forms の具体的な例として, Λ-adic Eisenstein 級数を構成する. ここで, 構成される Λ-adic Eisenstein 級数は, ただ単に Λ-adic forms の具体例というだけではなく, p-stabilized newforms が Λ-adic eigenforms に持ち上がることを主張する [27, Theorem 1.4.1] の証明において重要な役割を果たす.

まず, Kubota-Leopoldt の仕事を一般化することで, Deligne-Ribet [4] により得られた F 上の p-進 L-関数について, 簡単に復習しておく: ψ を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ に値をもつ F の even で primitive な ray class character とし, F_ψ を $\mathrm{Ker}\,\psi$ に対応する F の拡大とする.

Definition 1.12. 上記の記号のもとで, F_∞ を F の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. ψ が **type** W であるとは, $F_\psi \subset F_\infty$ が成立することをいう.

u を Section 1.2 の冒頭で定義した unit とし, $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ の生成元で, 作用 $\zeta \mapsto \zeta^u$ (ζ は 1 の p-冪乗根) に対応するものを γ とする. $\zeta_0 := \psi(\gamma)$ とおき, 多項式 $H_\psi(T)$ を, ψ が type W であるときは $H_\psi(T) := \zeta_0(1+T)-1$, それ以外のときは $H_\psi(T) := 1$ として定義する. また, ω を conductor q の Teichmuller character とする. このとき, Deligne-Ribet [4] の結果により, $s \in \mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ に関して連続な p-進 L-関数 $L_p(s,\psi)$ で (もし ψ が type W でなければ, $s=1$ でも連続), 任意の $n \geq 1$ に対し,

$$L_p(1-n,\psi) = L(1-n,\psi\omega^{-n})\prod_{\mathfrak{p}|p}(1-(\psi\omega^{-n})(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{n-1})$$

を満たすものが存在することが知られている. ここで, $L(1-n,\psi\omega^{-n})$ は, classical な L-関数 $L(s,\psi\omega^{-n})$ の $s=1-n$ での値である. p-進 L-関数の値は, その連続性により $L_p(1-n,\psi)$ の値たちで定まり, F_ψ が総実代数体でなければ $L_p(s,\psi)=0$ となることがわかる. さらに, Deligne-Ribet [4] の結果により, ある $G_\psi(T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][\![T]\!]$ で,

$$L_p(1-s,\psi) = \frac{G_\psi(u^s-1)}{H_\psi(u^s-1)}$$

を満たすものがただ一つ存在することも知られている.

次に, Λ-adic Eisenstein 級数について論を進める前に, classical な Eisenstein 級数についても復習しておく: $k \geq 1$ を整数とし, ε を各無限素点で parity が $(-1)^k$ であるような conductor $\mathfrak{f}$ の strict ray class character とする ($F=\mathbb{Q}$ のときは, $\mathfrak{f} \neq 1$ と仮定する). このとき, weight k, level $\mathfrak{f}$, character ε の Eisenstein 級数 $\boldsymbol{E}_{k,\varepsilon} \in M_k(\mathfrak{f},\varepsilon)$ で, 付随する Dirichlet 級数が

$$\zeta_F(s)L_{\mathfrak{f}}(s+1-k,\varepsilon)$$

で与えられ, 定数項が

$$c_\lambda(0, \boldsymbol{E}_{k,\varepsilon}) = 2^{-d} L(1-k, \varepsilon) \qquad (\lambda = 1, \dots, h)$$

で与えられるものが存在する.

Remark 1.6. $\boldsymbol{E}_{k,\varepsilon}$ を定義する data は $\bar{\mathbb{Q}}$ の元なので, ε が p-進 character であっても $\boldsymbol{E}_{k,\varepsilon}$ は定義されることに注意.

ここで, Λ-adic Eisenstein 級数の構成をはじめ, 今後 Galois 表現の構成を進めるにあたり, 主に用いる character の形について説明したい: χ を conductor $\mathfrak{n}$ の strict ideal class character とし, $\mathcal{O}_\chi := \mathbb{Z}_p[\chi]$ とおく. このとき, χ から作られる character

$$\boldsymbol{\chi} : \varprojlim_r I_{\mathfrak{n}p^r} \to \mathcal{O}_\chi[\![T]\!]$$

を, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{a}) := \chi(\mathfrak{a})(1+T)^a$$

とおくことで定義する. ここで, $a \in \mathbb{Z}_p$ は $\mathfrak{a}$ に対して,

$$N\mathfrak{a} = u^a \delta \quad (\delta \in \mu_{p-1} \text{ if } p \neq 2, \text{ or } \delta = \pm 1 \text{ if } p = 2)$$

という関係式を通してただ一通りに定まる p-進整数である. このとき, $\boldsymbol{\chi}$ は Definition 1.11 の意味で cyclotomic な character であり, 係数環 $\mathcal{O}$ として $\mathcal{O}_\chi$ を含んでいるものをとれば, Theorem 1.4 により, $\Lambda = \mathcal{O}[\![T]\!]$ 上 $\mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}, \boldsymbol{\chi})$ は有限生成となる. 以上の準備のもと, Λ-adic Eisenstein 級数は次のように構成される:

Proposition 1.6 (=[27, Proposition 1.3.1])**.** *χ を conductor $\mathfrak{n}$ で even な strict ray class character とする. $\Lambda := \mathbb{Z}_p[\chi][\![T]\!]$ とおき, F_Λ を Λ の商体とする. このとき, level $\mathfrak{n}p$, character $\boldsymbol{\chi}$ で F_Λ に係数をもつ Λ-adic form $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}} \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi}) \otimes_\Lambda F_\Lambda$ で, 特殊化に関して次の条件を満たすものが存在する: 任意の整数 $k \geq 1$ と 1 の p-冪乗根 ζ に対し,*

$$\nu_{k,\zeta}(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}) = \boldsymbol{E}_{k, \text{“}\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}\text{”}}.$$

ここで, character ρ_ζ は, p と互いに素な整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して, 上述した分解 $N\mathfrak{a} = u^a\delta$ に現れる a を用いて,

$$\rho_\zeta(\mathfrak{a}) := \zeta^a$$

と定義されるものであり, “$\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}$” は p を割るすべての素 ideal で conductor が割り切れるものとみなしたときの character $\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}$ を表す.

さらに, χ が type W でないときは $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}} \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ であり, type W のときは $H_\chi(T)\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}} \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathfrak{n}p, \boldsymbol{\chi})$ である. (このようにして得られる $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}$ を **Λ-adic Eisenstein** *級数と呼ぶ.)*

Proof. 求める $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}$ を, Dirichlet 級数として

$$\sum_{\mathfrak{m}} c(\mathfrak{m}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}})(N\mathfrak{m})^{-s} = \zeta_F(s)L(s-1, \boldsymbol{\chi})$$

が付随し, 定数項に

$$c_\lambda(0, \mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}) = 2^{-d}\frac{G_{\boldsymbol{\chi}}(T)}{H_{\boldsymbol{\chi}}(T)} \quad (\lambda = 1, \ldots, h)$$

をもつ Λ-adic form として定義すればよい. ここで,

$$G_{\boldsymbol{\chi}}(T) := G_{\boldsymbol{\chi}\omega^2}(u^2(1+T)-1),$$
$$H_{\boldsymbol{\chi}}(T) := H_{\boldsymbol{\chi}\omega^2}(u^2(1+T)-1)$$

とおいた. このとき, $T = \zeta u^{k-2} - 1$ での特殊化, つまり $\nu_{\zeta,k}$ を施したときの整合性については, 実際は Deligne-Ribet [4] の結果の一部であるが, 関係式 [26, (3)] を用いて計算できる. □

次に, Hilbert cusp forms と Λ-adic Eisenstein 級数の特殊化として得られる Hilbert modular forms との Petersson 内積の値について考察する. ここで得られる計算結果は, 次節で p-stabilized newforms の Λ-adic eigenforms への持ち上げについて議論する際に重要な役割を果たすものである. 論を進める前に, 二つの Hilbert modular forms $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ に付随する Dirichlet 級数 $D(s, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ と, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ の Petersson 内積を定義しておく.

Definition 1.13. level が同じである二つの Hilbert modular forms $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ に対し,

$$D(s, \mathbf{f}, \mathbf{g}) := \sum_{\mathfrak{m}\subset\mathcal{O}_F:\ \text{ideal}} c(\mathfrak{m}, \mathbf{f})c(\mathfrak{m}, \mathbf{g})(N\mathfrak{m})^{-s}$$

と定義する. ここで, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ の weight や character は異なっていても構わない (cf. [24, Section 4]).

Definition 1.14. 二つの Hilbert modular forms $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in M_k(\mathfrak{n})$ について, それぞれを $\mathfrak{h}^d$ 上の h 個の Hilbert modular forms の組 $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_h)$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_h)$ とかいておく. 積 $\mathbf{fg}$ が Hilbert cusp form となるとき, 各 $\lambda = 1, \ldots, h$ に対し,

$$\langle f_\lambda, g_\lambda \rangle := M_{\mathfrak{n}}^{-1}\int_{\mathfrak{h}^d/\Gamma(t_\lambda\mathfrak{d}, \mathfrak{n})} \bar{f}_\lambda(z)g_\lambda(z)y^k d\mu(z)$$

とおく. ここで, $z = (z_v)_{v=1}^d \in \mathfrak{h}^d$ に対し $z_v = x_v + \sqrt{-1}y_v$ としておき, 測度 $d\mu(z) := \prod_{v=1}^d y_v^{-2}dx_vdy_v$ で測った $\mathfrak{h}^d/\Gamma(t_\lambda\mathfrak{d}, \mathfrak{n})$ の volume を $M_{\mathfrak{n}}$

と表している. また, $\bar{f}_\lambda$ は f_λ の複素共役であり, y^k は $\prod_{v=1}^d y_v^k$ のことを表す. このとき, $\mathbf{f}$ と $\mathbf{g}$ の Petersson 内積を

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \sum_{\lambda=1}^{h} \langle f_\lambda, g_\lambda \rangle$$

と定義する (cf, [24, Section 2]).

さて, 改めて χ を conductor $\mathfrak{c}$ で even な strict ray class character とすると, Proposition 1.6 により, level $\mathfrak{c}p$ の Λ-adic Eisenstein 級数 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}$ が存在する. 任意の整 ideal $\mathfrak{m}$ に対し, Moebius 関数 μ を用いて,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi}} := \sum_{\mathfrak{a}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{a})\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{a})^{-1}(N\mathfrak{a})^{-2}\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathfrak{m}\mathfrak{a}^{-1}z)$$

と定義する. これは, level $\mathfrak{n} := \mathfrak{c}\mathfrak{m}$ の Λ-adic form である. ここで, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathfrak{m}\mathfrak{a}^{-1}z)$ は, Hilbert modular forms への特殊化 ν をとったときに, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}$ に同じ特殊化 ν を施して得られる Hilbert modular forms $\mathbf{f}$ を用いて, $\nu(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathfrak{m}\mathfrak{a}^{-1}z)) = \mathbf{f}(\mathfrak{m}\mathfrak{a}^{-1}z)$ となる Λ-adic form を表す.

さらに, 任意の整 ideal $\mathfrak{a}$ と mod $\mathfrak{a}\mathfrak{S}_\infty$ の ray class character ψ に対し, weight 1, level $\mathfrak{a}$, character ψ の任意の Eisenstein 級数 $\mathbf{h} \in M_1(\mathfrak{a}, \psi)$ を一つ固定し,

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi},\psi} := \mathbf{h}\mathcal{E}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi}}(u^{-1}(1+T)-1)$$

と定義する. これは, level が $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{a}$ の最小公倍 ideal $\mathfrak{b}$ で, character $\boldsymbol{\chi}\psi\omega$ をもつ Λ-adic form である. $\mathfrak{m} = (1)$ のときは, 記号を少し省略して $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\chi},\psi}$ とかくことにする.

Proposition 1.7 (=[27, Proposition 1.3.2])**.** *以上の設定のもと, 二つの整数 $r \geq 1$, $k \geq 2$ と 1 の p-冪乗根 ζ を, $\mathrm{cond}(\chi\rho_\zeta\omega^{3-k})$ が p の上のすべての素 ideal で割り切れるように選んでおく. ここで, $\mathrm{cond}(\chi\rho_\zeta\omega^{3-k})$ は character $\chi\rho_\zeta\omega^{3-k}$ の conductor を表し, ρ_ζ は Proposition 1.6 で定義された ζ に付随する character のことである. 分数 ideal $\mathfrak{P}$ を $\mathrm{cond}(\chi\rho_\zeta\omega^{3-k}) = \mathfrak{c}\mathfrak{P}$ により定義し, 整 ideal について, $\mathfrak{n}\mathfrak{P}$ は整 ideal となり $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{n}\mathfrak{P}$ を割り切ると仮定する. このとき,*

$$C := \frac{h((k-2)!)^{2d}(N\mathfrak{c}\mathfrak{d})^{k-2}}{(-8\pi^2\sqrt{-1})^{d(k-1)}(N\mathfrak{d})\tau(\chi^{-1}\rho_\zeta^{-1}\omega^{k-3})M_{\mathfrak{n}}}$$

とおけば, 任意の $\mathbf{f} \in S_k(\mathfrak{n}\mathfrak{P}, \chi^{-1}\rho_\zeta^{-1}\omega^{k-3}\psi^{-1})$ に対し,

$$\langle \bar{\mathbf{f}}, \nu_{k,\zeta}(\mathcal{G}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi},\psi}) \rangle = CL_{\mathfrak{n}\mathfrak{P}}(k-1, \chi^{-1}\rho_\zeta^{-1}\omega^{k-3})D(k-1, \mathbf{f}, \mathbf{h})$$

が成り立つ. ここで, τ は Gauss 和を表している (cf. [24, Section 3]).

Proof. $F=\mathbb{Q}$ のときは, とくに non-primitive な場合で, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{E}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi}})$ と Shimura の $E_{k-1,\mathfrak{n}\mathfrak{P}}(z,\chi^{-1}\rho_{\zeta}^{-1}\omega^{k-3})$ が定数倍の差を除いて一致することを [23, (3.3), (3.4)] を用いて確認することで, Proposition 1.7 が [23, Theorem 2] と同等の主張であることを示すことができる. F が一般の場合には, [24, Section 3] で与えられている $E_{\kappa,U}(z)$ と $K_A(z,\chi)$ の定義を用いて Shimura の $J_{\mathfrak{r},\lambda}$ の Fourier 展開と, ここで用いられている $\mathcal{E}_{\mathfrak{m},\boldsymbol{\chi}}$ の特殊化として得られる Eisenstein 級数との関係を計算することで, Proposition 1.7 は本質的に [24, (4.32)] と同じものであることが示される. □

1.5. p-stabilized newforms の Λ-adic forms の持ち上げ

本節では, [27, Section 1] の主定理の一つである, 任意の p-stabilized newforms $\mathbf{f}$ が必ずある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}$ の特殊化として得られることを主張する [27, Theorem 1.4.1] について概説する (Introduction の結果 (i)). このとき, $\mathcal{F}$ のことを $\mathbf{f}$ の**持ち上げ**ということにする. はじめに, Λ-adic cusp forms の基礎環を 1 変数形式的冪級数環 Λ から拡張することについて述べる. 記号は前節のものを用いることにする.

χ を conductor $\mathfrak{n}$ の strict ray class character とし, $\mathcal{O}:=\mathbb{Z}_p[\chi]$, $\Lambda:=\mathcal{O}[\![T]\!]$ とおく. $F_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ と F_Λ をそれぞれ, $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ と Λ の商体とし, $\bar{F}_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ を含む $F_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ の代数的閉包とする. 以下, $F_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ の有限次拡大はすべて $\bar{F}_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ の中で考えることにする. まず, 今後議論を進めるにあたり, 基礎となる事実を確認しておく:

Lemma 1.8. $\mathfrak{n}$ を固定したうえで p の冪を増やしながら無限和をとり

$$\mathcal{M}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi}):=\cup_{r=0}^{\infty}\mathcal{M}^0_\Lambda(\mathfrak{n}p^r,\boldsymbol{\chi}),$$
$$\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi}):=\cup_{r=0}^{\infty}\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n}p^r,\boldsymbol{\chi})$$

と定義するとき, これらは Λ 上有限生成となる.

Proof. Λ-adic fomrs の空間において, Λ-adic cusp forms に対する補空間が具体的に書き下せること (cf. [27, Proposition 1.5]) と Proposition 1.4 により,

$$\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})=\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})$$

であることを示せばよい. そのためには, $\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n}p,\boldsymbol{\chi})\subset\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})$ であるから, 任意の $\mathcal{F}\in\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})$ について, 有限個を除くすべての $(k,\zeta)\in A_{\mathcal{F}}$ $(\zeta^{p^r}=1)$ に対し, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ の level が $\mathfrak{n}p^{r+1}$ を割り切ることを示せばよい.

Section 1.3 で考察したように, $k\geq 2$ のとき $S_k(\mathfrak{n}p^i)$ のすべての元は, $\mathfrak{r}|\mathfrak{n}$, $(\mathfrak{r},p)=1$ なる整 ideal $\mathfrak{r}$ と $\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{r}}p^i$ を割り切る level をもつ newforms $\mathbf{f}$ を走らせた $e\mathbf{f}(\mathfrak{r}z)$ たちの和として表される. このとき, $e\mathbf{f}\neq 0$ ならば $\mathbf{f}$ は p を割る素 ideal $\mathfrak{p}$ において, 0 でない Euler $\mathfrak{p}$-factor をもつ. $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{p}}$ を $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ の既約な admissible 表現とすれば, Euler

$\mathfrak{p}$-factor が 0 でないということから, $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{p}}$ は不分岐な character μ_1 を伴う $\pi(\mu_1,\mu_2)$ の形の principal series 表現か不分岐な special 表現のいずれかとなる. したがって, $\mathbf{f}$ の level の $\mathfrak{p}$-部分は, もし $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{p}}$ が principal series 表現であるならば, $\mathbf{f}$ の character $\chi_{\mathbf{f}}$ の conductor を割り切る $\mathfrak{p}$-冪であり, $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{p}}$ が special 表現であるときは $\mathfrak{p}$ と一致することになる. 一方, $\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ の character は $\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}$ なので, その level の p-部分は $\max(\mathrm{cond}(\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}),p)$ を割り切る. よって, $\mathrm{cond}(\chi)p^{r+1}=\mathfrak{n}p^{r+1}$ を割り切ることがわかり, Lemma 1.8 は証明された. □

さて, Λ-adic cusp forms の係数環を拡張することについて述べる: 任意の $\mathcal{F}\in\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ と $\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{F}_\Lambda/F_\Lambda)$ に対し, $\mathcal{F}^\sigma\in\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ であるので, $\mathcal{O}$ の商体の任意の有限次拡大の整数環 $\mathcal{O}'$ について, $\Lambda':=\mathcal{O}'[\![T]\!]$ とおけば, Λ' の商体 $F_{\Lambda'}$ に対し,

$$\mathcal{S}^0_{F_{\Lambda'}}(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})=\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})\otimes_\Lambda F_{\Lambda'}$$

が成立する.

Definition 1.15. 上の性質を用いて, F_Λ の任意の有限次拡大 L に対して,

$$\mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi}):=\mathcal{S}^0_\Lambda(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})\otimes_\Lambda L$$

と定義する. また, L における Λ の整閉包 を $\mathcal{O}_L$ とおき, $\mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ の部分 $\mathcal{O}_L$-加群 $\mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ を, 定義する data がすべて $\mathcal{O}_L$ の元であるような $\mathcal{F}\in\mathcal{S}^0_L(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ からなるものとする.

$\mathcal{F}\in\mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\mathfrak{n},\boldsymbol{\chi})$ について, 有限個を除くすべての $(k,\zeta)\in\mathfrak{X}$ ($\zeta^{p^r}=1$) に対し, $\zeta u^{k-2}-1$ の $\mathcal{O}$ 上の最小多項式で生成される素 ideal $P_{\nu_{k,\zeta}}\subset\Lambda$ を $\mathcal{O}$ の整閉包 $\mathcal{O}_L$ へ任意に延ばした素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ をとり, $\mathcal{O}':=\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ とおけば, reduction map $\tilde{\nu}_{k,\zeta}:\mathcal{O}_L\to\mathcal{O}'$ は, $\mathcal{O}$-algebra 準同型 $\nu_{k,\zeta}:\Lambda\to\mathcal{O}[\zeta]$ の延長であり, $\mathcal{F}$ の特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ は $S^0_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O}',\chi_{\nu_{k,\zeta}})$ の元となる. ここで, $\chi_{\nu_{k,\zeta}}=\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}$ であることに注意. $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ のことを $\mathcal{F}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}})$ とかくこともある. Section 1.2 でおいたように, Hilbert cusp form となるような $\mathcal{F}$ の特殊化が得られる有限個を除くすべての $(k,\zeta)\in\mathfrak{X}$ のなす集合を $A_{\mathcal{F}}$ とかく.

ここから, p-stabilized newforms を Λ-adic eigenforms に持ち上げることについて論を進めよう: conductor $\mathfrak{n}$ の strict ideal class character χ をとっておく. $r\geq 1$ をとり, 1 の原始 p^r-乗根 ζ を一つ固定し, $\mathcal{O}[\zeta]$ の商体の任意の有限次拡大 K_r をとり, その整数環を $\mathcal{O}_r$ とし, $\Lambda_r:=\mathcal{O}_r[\![T]\!]$ とおく. このとき, Lemma 1.8 と上述の考察により, 有限個を除く $k\geq 2$ に対して, Hecke 作用素と可換な $\mathcal{O}_r$-加群の injection

$$\phi_{k,\zeta}:\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})/(1+T-\zeta u^{k-2})\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})\to M^0_k(\mathfrak{n}p^r,\mathcal{O}_r,\chi\rho_\zeta\omega^{2-k}),$$
$$\mathcal{F}\mapsto\nu_{k,\zeta}(\mathcal{F})$$

が定まる. まず, 特別な場合に持ち上げがうまくなされることを示しておく:

Lemma 1.9. 上記の記号のもとで, $\mathbf{f}_k$ を $\mathrm{Image}(\phi_{k,\zeta})$ に属するある元を生成する正規化された p-stabilized newforms の一つとする. もし, $\mathbf{f}_k$ の level が $\mathfrak{n}$ の p と互いに素な部分 $\mathfrak{n}_0$ で割り切れるならば, Λ_r の商体 F_{Λ_r} の適当な有限次拡大 L をとり, その中での Λ_r の整閉包 $\mathcal{O}_L$ をとることで, $\mathbf{f}_k$ はある Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に持ち上がる, すなわち, Λ_r の素 ideal $(1+T-\zeta u^{k-2})$ を $\mathcal{O}_L$ に適切に延ばした素 ideal P により, $\mathbf{f}_k = \mathcal{F} (\mathrm{mod}\ P)$ となる.

Proof. $\mathbf{f}_k$ の level に関する仮定により, $\mathbf{f}_k(\mathfrak{q}z)$ $(\mathfrak{q} \neq (1))$ の形は $M^0_k(\mathfrak{n}p^r, \mathcal{O}_r, \chi\rho_\zeta\omega^{2-k})$ の生成系に現れないので, K_r の有限次拡大 K' を適当にとり, その整数環 $\mathcal{O}'$ の有限個の元 a_i と Hecke 作用素 T_i をうまくとれば, K'-ベクトル空間の全射

$$t := \sum_i a_i T_i : M^0_k(\mathfrak{n}p^r, K', \chi\rho_\zeta\omega^{2-k}) \to K'\mathbf{f}_k$$

が定まる. このとき, $t\mathbf{f}_k = c\mathbf{f}_k$ とおけば $c \neq 0$ である.

$\Lambda' := \mathcal{O}'[\![T]\!]$ とおくと, $\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \otimes_{\Lambda_r} \Lambda'$ に作用する t の特性多項式 $g(x)$ は $\Lambda'[x]$ の元となる. $Y = 1+T-\zeta u^{k-2}$ とおけば, $g(x)(\mathrm{mod}\ Y)$ は $\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \otimes_{\Lambda_r} \Lambda'/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \otimes_{\Lambda_r} \Lambda')$ に作用する t の特性多項式となり, $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}_r$ 上 flat なので, $(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})) \otimes_{\mathcal{O}_r} \mathcal{O}'$ 上での特性多項式にほかならない. $g(x)$ の次数を μ とすると, $(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))/Y(\mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})) \otimes_{\mathcal{O}_r} \mathcal{O}'$ の生成元のうち, t のもとで消えないのは $\mathbf{f}_k$ だけなので,

$$g(x) \equiv x^{\mu-1}(x-c)\ (\mathrm{mod}\ Y)$$

となる. Λ' の商体 $F_{\Lambda'}$ 上で $g(x)$ の分解体 L をとり. その中での Λ' の整閉包を $\mathcal{O}_L$ とする. Λ' の素 ideal (Y) の $\mathcal{O}_L$ への任意の延長 P を固定し, $g(x) = 0$ の根 $\alpha \in \mathcal{O}_L$ で $\alpha \equiv c\ (\mathrm{mod}\ P)$ となるものをとる. $h(x) := \frac{g(x)}{x-\alpha} \in \mathcal{O}_L[x]$ とおけば, $g(x)$ が $\mathcal{M}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に作用する t の特性多項式であることにより, $h(t)\mathcal{M}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ は L 上 1 次元のベクトル空間となる. したがって, $\mathbf{f}_k$ が生成元として現れる $\mathrm{Image}(\phi_{k,\zeta})$ の元 $\phi_{k,\zeta}(\mathcal{F}')$ を与える $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}^0_{\Lambda_r}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ をとれば, $h(t)\mathcal{F}'$ は Hecke eigenform となり, $h(t)\mathcal{F}'(\mathrm{mod}\ P)$ は $\mathbf{f}_k$ と定数倍の差を除いて一致する. Hecke 作用素たちは有限生成 Λ_r-加群を保ち, $\mathcal{O}_L$ は整閉であるから, $\mathcal{F}'$ の Hecke 固有値はすべて $\mathcal{O}_L$ の元となる. よって, $\mathcal{O}_L$ に係数を持たせたまま $h(t)\mathcal{F}'$ を正規化した Hecke eigenform $\mathcal{F}$ をとることができて, $\mathbf{f}_k \equiv \mathcal{F}(\mathrm{mod}\ P)$ となる.

もし, $\mathcal{F}$ が Λ-adic cusp form でなければ, $\mathcal{F}$ の無限個の特殊化は Eisenstein 級数となり, $\frac{\mathfrak{n}_0}{\mathrm{cond}(\chi)}$ の適切な素因子 $\mathfrak{q}$ をとれば, $\mathcal{F}$ と $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathfrak{q}z)$ が無限個の共通の特殊化をもつことになる. したがって, Wierestrass preparation theorem (cf. [10, Lemma7.2.1]) により, $\mathcal{F} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}}(\mathfrak{q}z)$ となってしまい, $\mathcal{F}$ の特殊化の生成元として $\mathbf{f}_k$ が現れることに矛盾する. よって, $\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ となり, Lemma 1.9 は示された. □

さて, 一般の p-stabilized newforms も Λ-adic eigenforms に持ち上がることを示そう:

Theorem 1.10 (=[27, Theorem 1.4.1]= Introduction の結果 (i))**.** *$k \geq 1$ を整数とし, α を conductor $\mathfrak{a}$ の strict ideal class character とする. $\mathbb{Q}_p$ の α の値を含む任意の有限次拡大の整数環 $\mathcal{O}$ をとり, $\mathbf{f}_k \in S^0_k(\mathfrak{a}, \mathcal{O}, \alpha)$ を任意の p-stabilized newform とする. このとき, $\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$ の商体 F_Λ の適当な有限次拡大 L をとり, その中での Λ の整閉包 $\mathcal{O}_L$ に, 素 ideal $P_{\nu_{k,1}} := (1+T-u^{k-2}) \subset \Lambda$ を延長した素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ を適当に選べば, ある Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in S^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})$ で,*

$$\mathbf{f}_k \equiv \mathcal{F} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}}$$

となるものが存在する.

定理の証明に入る前に, それに必要な四つの Lemmas を準備する. 一つ目は, mod p で 1 と合同な Hilbert modular form が構成できるというもので, Theorem 1.10 の証明の中で, 低い weight に対する議論を weight の高いものへと帰着させる際に用いる:

Lemma 1.11 (=[27, Lemma 1.4.2])**.** *ある 整数 $i \geq 1$ と整 ideal $\mathfrak{c}$ をうまく選ぶことで, weight $2^i(p-1)$, level $\mathfrak{c}$, 自明な character $\mathbf{1}$ をもつ Hilbert modular form $\boldsymbol{\theta} \in M_{2^i(p-1)}(\mathfrak{c}, \mathbf{1})$ で,*

$$\boldsymbol{\theta} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad c_\lambda(0, \boldsymbol{\theta}) = 1 \quad (\lambda = 1, \ldots, h)$$

を満たすものが存在する. このとき, $\boldsymbol{\theta}$ の level の取り方として, 適当な p-冪 $\mathfrak{c} = (p^j)$ としてとれるか, さもなくば, $\mathcal{O}_F$ の無限個の素 ideals $\mathfrak{q}_0$ を $\mathfrak{c}$ として採用できる.

Proof. 有限次拡大 M/K を, p が奇素数のときは $M = F(\zeta_p)$, $K = F(\zeta_p)^+$ (つまり, $F(\zeta_p)$ に含まれる最大総実部分体), $p = 2$ のときは $M = F(\sqrt{-1})$, $K = F$ と定義し, $\mathcal{O}_M$ の整 ideal $\mathfrak{b}$ と K の総正な元 ξ を用いた M/K に対する theta 級数

$$g'(z) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{b}^{-1}} e^{\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Trace}(\xi\alpha\bar{\alpha}z)}$$

を考える. D を M/K の判別式, $\mathfrak{d}_K$ を K の差積とする.

$$g(z) := \prod_{u \in \{u \in \mathcal{O}_K^\times \mid\ u >> 0\}/\{u\bar{u} \mid\ u \in \mathcal{O}_M^\times\}} g'(uz)$$

とおき, 整数 $i \geq 1$ を, 定義式の積において u が走る集合の元の個数 2^{i-1} により定義する. このとき, $\mathfrak{c} := (\xi)N_{M/K}(\mathfrak{b}^{-1})\mathfrak{d}_K$ とおけば, Shimura の結果により,

$$g^2 \in M_{2^i}^K(\Gamma(\mathfrak{c}, D), \mathbf{1}),$$

つまり g^2 は K 上の weight 2^i, level $\Gamma(\mathfrak{c}, D)$ で自明な character をもつ modular form であることが知られている. よって, g を制限したものを適当に t 乗することで, F 上の weight $2^i(p-1)$ の Hilbert modular form g^t が得られる. ここから, 二つの場合に分けて論を進める:

(i) M/K がある素 ideal で分岐する拡大のとき: このとき, strict ideal class 上の norm 写像は全射であるので, 各 $\lambda = 1, \ldots, h$ に対し, $\mathcal{O}_M$ のある整 ideal $\mathfrak{b}_\lambda$ と K の総正な元 ξ_λ で,

$$\mathfrak{c}_\lambda (:= (\xi_\lambda)N_{M/K}(\mathfrak{b}_\lambda^{-1})\mathfrak{d}_K) = (t_\lambda \mathfrak{d})\mathcal{O}_K$$

となるものが存在する. $D_0 := D \cap \mathcal{O}_F$ とおけば, D_0 は p の上の素 ideal でしか割り切れないものであり, 上述の g と同様に λ 付きの材料 $\mathfrak{b}_\lambda$, ξ_λ を用いて構成した F 上の Hilbert modular form g_λ^t は $M_{2^i(p-1)}(\Gamma(t_\lambda \mathfrak{d}, D_0), \mathbf{1})$ の元となる.

さて, strict ideal class group C について, C/C^2 の代表元 λ_i ごとに任意に K の総正な元 ξ_i と $\mathcal{O}_M$ の整 ideal $\mathfrak{b}_i$ をとっておき, 任意の $\mu \in C$ について, $\lambda := \lambda_i \mu^{-2}$ に対し, $(t_{\lambda_i}^{-1} t_{\lambda_i \mu^{-2}} t_\mu^2)$ の総正な生成元 δ を用いて, $\xi_\lambda := \xi_i \delta$, $\mathfrak{b}_\lambda := \mathfrak{b}_i t_\mu$ とおけば, それらから上記の構成方法により, Hilbert modular form

$$\theta_\lambda := (Nt_\lambda)^{2^{i-1}(p-1)} g_\lambda^t$$

を入手できる. これらを用いて定義した $\boldsymbol{\theta} := (\theta_\lambda)_\lambda$ は weight $2^i(p-1)$, level D_0 で自明な character をもつ Hilbert modular form となる. このとき, $\alpha \in \mathfrak{b}^{-1}$ に対し, $\zeta_p \alpha \in \mathfrak{b}^{-1}$ となるので, $\boldsymbol{\theta} \equiv 1 \pmod{p}$ であることがわかり, 各 θ_λ の定数項が $(Nt_\lambda)^{2^{i-1}(p-1)}$ であることから, $c_\lambda(0, \boldsymbol{\theta}) = 1$ となることもわかる.

(ii) M/K が不分岐な拡大のとき: このときは, $\mathcal{O}_K$ の無限個の素 ideals $\mathfrak{q}$ に対して, 各 λ について, ある $\mathfrak{b}_\lambda$ と ξ_λ により,

$$\mathfrak{c}_\lambda (:= (\xi_\lambda)N_{M/K}(\mathfrak{b}_\lambda^{-1})\mathfrak{d}_K) = (t_\lambda \mathfrak{d})\mathfrak{q}$$

とできる. よって, 対応する g_λ^2 は, ある整数 $i \geq 1$ とともに, $M_{2^i}^K(\Gamma(t_\lambda \mathfrak{d}, \mathfrak{q}), \mathbf{1})$ の元となり, $\mathfrak{q}_0 := \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_F$ とおけば, (i) と同様の議論により, 求める Hilbert modular form $\boldsymbol{\theta} \in M_{2^i(p-1)}(\mathfrak{q}_0, \mathbf{1})$ が得られる. □

二番目の Lemma は, Hecke eigenforms の合同を与える p-冪の深さにまつわる主張であり, Theorem 1.10 の証明の中で, 十分に高い p-冪を法として Hecke eigenform であるような Hilbert cusp form と合同な標数 0 での Hecke eigenform をいくつか取り出したときにその合同の深さを統一的にコントロールする際に用いる:

Lemma 1.12 (=[27, Lemma 1.4.3]). $k \geq 2$ を整数, ψ を mod $\mathfrak{n}\mathfrak{S}_\infty$ の ray class character とする. $\mathbb{Q}_p$ の十分大きな有限次拡大の整数環 $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ をとり, $S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}, \psi)$ に属するすべての Hecke eigenforms の Hecke 固有値は $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ に含まれると仮定する. U を $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ 上 $\{\mathbf{f}_i(\mathfrak{a}_{ij}z)|\ \mathbf{f}_i\ (i = 1, \dots, t)$ は weight k, level $\mathfrak{m}_i$, character ψ の newform で, $\mathfrak{a}_{ij}$ は $\mathfrak{m}_i\mathfrak{a}_{ij}|\mathfrak{n}$ を満たす整 ideal $\}$ により生成される $S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}, \psi)$ の部分 $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$-加群とする. $\mathcal{O}_F$ の各素 ideal l に対し, 各 $i = 1, \dots, t$ について, 非負整数 $r_{i,l}$ を $l^{r_{i,l}} \parallel \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}$ により定義し, $\delta_{i,l}$ を $l|\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}$ のときは 1, そうでないときは 0 として定義する. また, ψ_i を conductor $\mathfrak{m}_i$ をもつとみなしたときの ψ を表すとする. さらに, $\mathbf{f} \in S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}, \psi)$ に対し,

$$\eta_{i,l} := c(l, \mathbf{f})^{r_{i,l}}(c(l, \mathbf{f}_i) - c(l, \mathbf{f})) - \delta_{i,l}c(l, \mathbf{f})^{r_{i,l}-1}\psi_i(l)(Nl)^{k-1} \in \mathcal{O}_\mathfrak{P}$$

とおく.

以上の設定のもとで, $\mathfrak{P}$ を $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ の極大 ideal とし, 整数 $N \geq 1$ に対し, $\mathbf{f}$ (mod $\mathfrak{P}^N$) は Hecke eigenform であり, $c(1, \mathbf{f}) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{P}$) と仮定する. また, 各 $i = 1, \dots, t$ に対して, 非負整数 x_i を

$$\mathfrak{P}^{x_i} := (\mathfrak{P}^N, \eta_{i,l}|\ l:\ \text{prime})$$

により定義する. このとき,

$$\sum_{i=1}^{t} x_i \geq N$$

が成立する.

Proof. T を $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathfrak{P}}(S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}, \psi))$ の中で, $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ 上 すべての Hecke 作用素で生成される部分環とし, T の ideal I を

$$I := \mathrm{Ann}(\mathbf{f}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^N)\ (= \{t \in T|\ t\mathbf{f} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^N)\})$$

と定義する. 仮定により, $c(1, \mathbf{f}) \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{P}$) なので, $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$-algebra の同型

$$T/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^N, \quad T \mapsto c(T, \mathbf{f})\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^N)$$

が定まる. $U \subset S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}, \psi)$ は有限指数をもつので, faithful な T-加群となる. したがって, U/IU の T-加群としての fitting ideal は I に含まれ, $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$-加群としてのそれは $\mathfrak{P}^N$ に含まれることになる. 一方, x_i の定義により,

$$U/IU \xrightarrow{\sim} \oplus_{i=1}^{t}\mathcal{O}_\mathfrak{P}\mathbf{f}_i(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}z)/\mathfrak{P}^{x_i}\mathbf{f}_i(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}z)$$

となるので,

$$\sum_{i=1}^{t} x_i \geq N$$

が得られる. □

ここで, 後ほど Theorem 1.10 の証明の第二段階で活かすために, Lemma 1.12 の状況設定に現れる newforms $\{\mathbf{f}_i\}_i$ と mod $\mathfrak{P}^N$ での Hecke eigenform $\mathbf{f}$ の関係をさらに深く掘り下げておきたい. そのために, 次の仮定 (H) をおくことにする:

(H) $\mathfrak{n}$ の各素因子 l について, $c(l,\mathbf{f}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^N}$ か $c(l,\mathbf{f})$ は mod $\mathfrak{P}$ で unit
である.

この仮定のもと, $\mathfrak{n}$ の素因子 l について, 次の二つの場合を考える:

Case (i). $l \nmid \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}$ のとき: このときは, $\eta_{i,l} \in \mathfrak{P}^{x_i}$ であり, $\delta_{i,l} = r_{i,l} = 0$ なので,

$$c(l,\mathbf{f}) - c(l,\mathbf{f}_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{x_i}}$$

となる.

Case (ii). $l | \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}_i}$, $l \nmid \mathfrak{m}_i$ のとき: この場合は, 2 次方程式

$$x^2 - c(l,\mathbf{f}_i)x + \psi_i(l)(Nl)^{k-1} = 0$$

の根を $\alpha_{i,l}$, $\beta_{i,l}$ として, $\eta_{i,l} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{x_i}}$ であることから,

$$\begin{aligned} &c(l,\mathbf{f})^{r_{i,l}-1}(c(l,\mathbf{f}) - \alpha_{i,l})(c(l,\mathbf{f}) - \beta_{i,l}) \\ &\qquad = c(l,\mathbf{f})^{r_{i,l}-1}(c(l,\mathbf{f})^2 - c(l,\mathbf{f}_i)c(l,\mathbf{f}) + \psi_i(l)(Nl)^{k-1}) \\ &\qquad = -\eta_{i,l} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{x_i}} \end{aligned}$$

が得られる.

以上の考察により, 各 $i = 1, \ldots, t$ に対し, $\mathbf{f}_i$ に付随するある Hecke eigenform $\mathbf{f}_i^*$ で

$$\mathbf{f}_i^* \equiv \mathbf{f} \pmod{\mathfrak{P}^{\frac{x_i}{2}}}$$

を満たすものが存在する. 以上をまとめて, 次の三つ目の Lemma を得る:

Lemma 1.13. *Lemma 1.12 の状況で, $\mathbf{f}$ は仮定 (H) を満たすとする. このとき, 互いに異なる newforms に付随するある Hecke eigenforms $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_t$ で*

$$\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{f} \pmod{\mathfrak{P}^{\frac{x_i}{2}}}$$

となるものが存在する. ここで, 非負整数 x_i たちは Lemma 1.12 により, $\sum_{i=1}^t x_i \geq N$ を満たすことがわかっている.

四つ目の最後の Lemma は, Hecke eigenforms の Hecke 固有値にまつわる主張であり, Theorem 1.10 の証明において, (1) の主張はある mod p^n の Hecke eigenforms が Lemma 1.13 の仮定 (H) を満たすことを保証するものであり, (2) の主張は $\mathbf{f}_k$ の持ち上げとなる Λ-adic eigenform を構成する段階で重要な役割を果たす:

Lemma 1.14. (1) (=[27, Lemma 1.4.4]) 記号は Lemma 1.12 のものを用いるとして, $\mathbf{g} \in S_k(\mathfrak{n}, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}, \psi)$ を正規化された Hecke eigenform とし, l を p と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とする. このとき, 2 次方程式 $x^2 - c(l, \mathbf{g})x + \psi(l)(Nl)^{k-1} = 0$ の根は mod $\mathfrak{P}$ で 0 か unit である.

(2) (=[27, Lemma 1.4.5]) $k \geq 2$ を整数とし, ψ を mod $\mathfrak{n}\mathfrak{S}_\infty$ の ray class character とする. $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{n}$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal とし, $\mathbf{f} \in S_k^0(\mathfrak{n}\mathfrak{q}, \psi)$ を正規化された newform とする. このとき, $\pi_{\mathbf{f},\mathfrak{q}}$ は special 表現であり,

$$c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})^2 = \psi(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{k-2}$$

が成り立つ. もし $k = 1$ ならば, このような性質をもつ $\mathbf{f}$ は存在しない.

逆に, $\mathbf{f} \in S_k^0(\mathfrak{n}\mathfrak{q}, \psi)$ が $c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})^2 = \psi(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{k-2}$ を満たせば, $\mathbf{f}$ に付随する newform の level は $\mathfrak{q}$ で割り切れる.

Proof. (1) この主張は多くの場合よく知られた結果であり, ここでは, 非自明な場合として, $\pi_{\mathbf{g},l}$ が principal series 表現であると仮定できる場合に証明したい. このとき, F の適当な odd cyclic な拡大をとり, そこから各 stage が総実拡大となる 2 次拡大を繰り返すことで, 拡大全体の合成体 F^* 上 $\mathbf{g}$ の character が不分岐になるようにできる. F^* に base change したときには Lemma 1.14 (1) の主張は成立するので, それは F 上においても成り立つことがわかる.

(2) こちらの主張はすべて, principal seiries 表現や special 表現の具体的な書き表され方からただちにわかる標準的なものである. □

以上の準備のもとで, Theorem 1.10 の証明を概観する: まず, 証明の第一段階として, Lemma 1.9 を活かして, k が十分大きいときに定理の主張が成り立つことを示す.

Theorem 1.10 の状況において, primitive で even な character χ で次の三つの条件を満たすものを一つ固定する:

(i) $\chi\alpha^{-1}$ は $\mathrm{Gal}(F(\zeta_\infty)/F)$ の character;
(ii) $p|\mathrm{cond}(\chi\omega^{3-k})$;
(iii) $\mathrm{cond}(\alpha^{-1}\chi\omega^{3-k})|\mathrm{cond}(\chi\omega^{3-k})$.

$F = \mathbb{Q}$ のときは, さらに $\psi := \alpha\chi^{-1}\omega^{k-3}$ は non-trivial であると仮定する. $\mathfrak{c} := \mathrm{cond}(\chi)$, $\mathfrak{m} := \frac{\mathfrak{a}}{(\mathfrak{c},\mathfrak{a})}$ とおき, 整数 $t \geq 1$ に対し, Section 1.4 の記号を用いて,

$$\mathbf{g}_{k,t} := \nu_{k,1}(\mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^t, \boldsymbol{\chi}, \psi})$$

とおく. $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^t, \boldsymbol{\chi}, \psi}$ を用いているということは, 内在的にそれを定義するための weight 1 の Eisenstein 級数 $\mathbf{h}$ を固定しているということであり, ここでは, Lemma 1.9 を適用するために, $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^t, \boldsymbol{\chi}, \psi}$ として

$$\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_{k,t} \rangle \neq 0,$$

すなわち, e の Petersson 内積に関する adjoint 作用素 e^* を用いれば
$$\langle e^*\mathbf{f}_k, \mathbf{g}_{k,t}\rangle \neq 0$$
となるようなものを採用したい. そこで, そのための weight 1 の Eisenstein 級数 $\mathbf{h}$ として, t を十分に大きくとっておき, 付随する Dirichlet 級数が, 条件
$$\psi_1\psi_2 = \psi, \quad p|\mathrm{cond}(\psi_i)\ (i=1,2), \quad \mathrm{cond}(\psi_1)\mathrm{cond}(\psi_1)|p^t\mathrm{cond}(\psi)$$
を満たす二つの characters $\psi_1,\ \psi_2$ を用いて,
$$\zeta_F(s,\psi_1)\zeta_F(s,\psi_2)$$
という形で与えられるものをとるならば, Proposition 1.7 により, 上述の Petersson 内積が消えないという要請は, 次の条件に帰着される:
$$L_{\mathfrak{n}p}(k-1,\chi^{-1}\omega^{k-3})D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\mathbf{h}) \neq 0.$$
[23, Lemma 1] および [24, Theorem 4.3 の証明] によれば,
$$D(s,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\psi_i) := \sum_{\mathfrak{a}} \psi_i(\mathfrak{a})c(\mathfrak{a},\overline{e^*\mathbf{f}_k})(N\mathfrak{a})^{-s}$$
とおいたうえで,
$$L_{\mathfrak{n}p}(k-1,\chi^{-1}\omega^{k-3})D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\mathbf{h}) = D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\psi_1)D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\psi_2)$$
となることがわかる. したがって, 上述の Dirichlet 級数の特殊値の積が消えないという要請は,
$$D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\psi_i) \neq 0 \qquad (i=1,2)$$
という条件に帰着される.

さて, $\bar{\mathbf{f}}_{k,0}$ を $\bar{\mathbf{f}}_k$ から p の上の素 ideals での Euler factors を取り除くことで得られる Hecke eigenform とすれば, $p|\mathrm{cond}(\psi_i)$ であることにより,
$$D(k-1,\overline{e^*\mathbf{f}_k},\psi_i) = c(1,\overline{e^*\mathbf{f}_k})D(k-1,\bar{\mathbf{f}}_{k,0},\psi_i)$$
となる.

Claim. このとき, $c(1,\overline{e^*\mathbf{f}_k}) \neq 0$ である.

Proof. まず, $\langle e^*\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k\rangle = \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k\rangle \neq 0$ より, $e^*\mathbf{f}_k \neq 0$ であることに注意. $e^*\mathbf{f}_k \neq 0$ は p の外で Hecke eifenform なので, p と互いに素なある素 ideal $\mathfrak{m}$ で, $c(\mathfrak{m}, e^*\mathbf{f}_k) \neq 0$ となるものが存在すれば $c(1, e^*\mathbf{f}_k) \neq 0$ となり Claim は証明されたことになる. そこで, p と互いに素なすべての素 ideal $\mathfrak{m}$ に対して, $c(\mathfrak{m}, e^*\mathbf{f}_k) = 0$ であると仮定して矛盾を導く. この仮定のもとでは, 恒等的に
$$D(s, e^*\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k(pz)) = 0$$
となり, [24, Proposition 4.13] により $\langle e^*\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k(pz)\rangle = 0$ となり $e^*\mathbf{f}_k \neq 0$ であることに矛盾する. □

一方で, $k \geq 3$ のとき, [24, Proposition 4.16] により,

$$D(k-1, \bar{\mathbf{f}}_{k,0}, \psi_i) \neq 0$$

であるので, Claim と合わせると,

$$\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_{k,t} \rangle \neq 0$$

となる. ここで, $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_p[\chi, \psi]$, $\Lambda := \mathcal{O}[\![T]\!]$ とおけば,

$$e\mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^t, \boldsymbol{\chi}, \psi} \in \mathcal{M}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})$$

となり, 条件 $\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_{k,t} \rangle \neq 0$ は, $\mathbf{f}_k$ が $e\mathbf{g}_{k,t} = \nu_{k,1}(e\mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^t, \boldsymbol{\chi}, \psi})$ の生成元として使われていることを意味する. よって, Lemma 1.9 により, 十分大きな k に対して, Theorem 1.10 は証明された.

証明の第二段階として, 第一段階で証明したことを用いて, すべての $k \geq 1$ に対して, Theorem 1.10 を証明する. ここでのポイントは, Lemma 1.11 で構成された $\boldsymbol{\theta}$ を用いて, 低い weight での議論を高い weight を扱うものへと帰着させることである. 以下, Lemma 1.11 で構成された $\boldsymbol{\theta}$ の level $\mathfrak{c}$ のあり方によって二通りに場合分けする:

(i) $\mathfrak{c}$ が p-冪 (p^r) で与えられるとき: Lemma 1.9 は p-stabilized newforms $\mathbf{f}$ に対する主張であるが, $\mathbf{f}$ が Λ-adic eigenform $\mathcal{F}$ に持ち上がったとき, $\mathcal{F}$ の level を割る素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して, $\mathbf{f} - c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})\mathbf{f}(\mathfrak{q}z)$ も $\mathcal{F} - c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})\mathcal{F}(\mathfrak{q}z)$ に持ち上がるので, このことを用いて, 一般の Hecke eigenforms に対しても, weight が十分に大きい場合に Λ-adic eigenforms に持ち上がることを示すことができる.

$\dim_L \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})$ は有限次拡大 L/F_Λ によらずに有界なので, level $\bar{\mathfrak{a}}$, character $\boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2}$ の正規化された相異なる Λ-adic eigenforms は高々有限個しかない. それらを $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ とする. Lemma 1.9 と上述の考察により, 十分大きな k については, $S^0_k(\mathfrak{a}, \alpha)$ に属するすべての Hecke eigenforms は, この $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ たちの特殊化として得られる. とくに, 各 weight k ごとに定まっている $\mathcal{F}_i$ たちの個数 t は, Lemma 1.5 により k によらずに有界となる.

さて, Theorem 1.10 の主張にある $\mathbf{f}_k$ をとる. L を $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ がすべて定義されるような F_Λ の有限次拡大とし, その中での Λ の整閉包を $\mathcal{O}_L$ とする. Lemma 1.11 で構成された weight $2^i(p-1)$, level (p^r) の Hilbert modular form $\boldsymbol{\theta}$ をとり, 各 $m \geq 1$ に対して, weight $k' := k + 2^i p^m (p-1)$ の ordinary な Hilbert modular form $e(\mathbf{f}_k \theta^{p^m})$ を考える. 素 ideal $P_{\nu_{k',1}} = (1 + T - u^{k'-2}) \subset \Lambda$ を $\mathcal{O}_L$ に延長した素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k',1}}$ を一つ取り, $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k',1}}$ の整閉包の合成を $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$ とおき, その極大 ideal を $\mathfrak{P}_m$ とする. $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_t$ に関する上述の考察により, とくに $S^0_{k'}(\mathfrak{a}, \alpha)$ に属するすべての Hecke eigenforms は $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$ 上定義されることに注意. $\boldsymbol{\theta} \equiv 1 \pmod{p}$ であることから, $e(\mathbf{f}_k \boldsymbol{\theta}^{p^m})$ に対して, Lemma 1.12 の仮定は満たされ, さらに, e の像であることと Lemma 1.14 (1) を適用することで, Lemma 1.13 の仮定 (H) が満たされるの

で, ある 整数 $t_m \geq 1$ と非負整数 $x_1(m), \ldots, x_{t_m}(m)$, そして相異なる newforms に付随する weight k' の Hecke eigenforms $\mathbf{g}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{g}_{t_m}^{(m)}$ が存在して,

$$\mathbf{g}_j^{(m)} \equiv \mathbf{f}_k \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_m^{x_j(m)})\ (j = 1, \ldots, t_m), \quad p^{\frac{m}{2}} | \mathfrak{P}_m^{\sum_{j=1}^{t_m} x_j(m)}$$

が成り立つ. 上述の議論により, $\mathbf{g}_j^{(m)}$ の個数 t_m は m に依存せずに有界であることがわかっているので, $m \to \infty$ としたときに, 添字 m を適当に集めて作った無限集合 S で添え字付けられた $\{\mathbf{g}_j^{(m)}\}$ の部分無限列 で, $m \in S$ ごとに $j = 1, \ldots, t_m$ から番号 j_m を一つ取っておいて, $v_p(\mathfrak{P}_m^{x_{j_m}(m)}) \to \infty$, かつ, m によらずに固定されたある $\mathcal{F}_s$ が存在し, 任意の $m \in S$ に付随する Hecke eigenform $\mathbf{g}_{j_m}^{(m)}$ は $\mathcal{F}_s$ の特殊化として得られる, つまり,

$$\mathbf{g}_{j_m}^{(m)} \equiv \mathcal{F}_s \ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k'}})$$

となるものが取り出せる. このとき, $m \in S$ について,

$$\mathbf{g}_{j_m}^{(m)} \equiv \mathbf{f}_k \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_m^{x_{j_m}(m)})$$

も成り立つことに注意. $\mathcal{O}_L$ の ideal I を

$$I := \{x \in \mathcal{O}_L |\ x(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k',1}}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_m^{x_{j_m}(m)}),\ \forall m \in S\}$$

とおく.

Claim. このとき, 次の二つの主張が成立:

(1) $\mathcal{O}_L$ のある素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ で

$$\tilde{P}_{\nu_{k,1}} \cap \Lambda = P_{\nu_{k,1}}, \qquad I \subset \tilde{P}_{\nu_{k,1}}$$

となるものがとれる.

(2) $\mathcal{F}_s \equiv \mathbf{f}_k \ (\mathrm{mod}\ I)$ である.

Proof. (1) 題意を満たすような $\mathcal{O}_L$ の素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ の存在を知るには, $I \cap \Lambda \subset P_{\nu_{k,1}}$ であることを示せばよい. $x \in I \cap \Lambda$ をとる. 整数 $N \geq 1$ ごとに, $m \in S$ で

$$m \geq N, \qquad \mathfrak{P}_m^{x_{j_m}(m)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^N)$$

となるものがとれて, 自然な inclusion

$$\Lambda / P_{\nu_{k',1}} \hookrightarrow \mathcal{O}_L / \tilde{P}_{\nu_{k',1}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{P}_m}$$

による $x(\mathrm{mod}\ P_{\nu_{k',1}})$ の像は mod p^N で 0 となる. したがって, 任意の整数 $N \geq 1$ に対し,

$$x \in (p^N, P_{\nu_{k',1}}) = (p^N, P_{\nu_{k,1}})$$

となるので, $x \in \cap_{N \geq 1}(p^N, P_{\nu_{k,1}}) = P_{\nu_{k,1}}$ を得る.

(2) 任意の $m \in S$ に対し,

$$\mathcal{F}_s \equiv \mathbf{g}_{j_m}^{(m)} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k',1}}}$$

であることから,

$$(\mathcal{F}_s - \mathbf{f}_k) \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k',1}}} = (\mathbf{g}_{j_m}^{(m)} - \mathbf{f}_k) \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k',1}}} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_m^{x_{j_m}(m)}}$$

となるので, I の定義により,

$$\mathcal{F}_s \equiv \mathbf{f}_k \pmod{I}$$

を得る. □

よって, Claim の (1) と (2) を組み合わせることで,

$$\mathcal{F}_s \equiv \mathbf{f}_k \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}}$$

が得られて, (i) の場合での Theorem 1.10 の証明は完結した.

(ii) $\mathfrak{c}$ が p-冪で与えられないとき: この場合は, $\mathfrak{c}$ として無限個の素 ideals を取りうるので, ここでは, とくに $\mathfrak{a}$ と互いに素な素 ideal $\mathfrak{q}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の level $\mathfrak{c}$ として取っておく. Theorem 1.10 の主張にある p-stabilized newform $\mathbf{f}_k$ から level を $\mathfrak{q}$ だけ増加するように作られた level $\mathfrak{aq}$ の Hecke eigenform $\mathbf{f}_\beta$ に対しては (i) の議論を適用することができるので, $\mathbf{f}_\beta$ は F_Λ のある有限次拡大 L で定義されたある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}_\beta \in \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{q}, \boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})$ に持ち上がる.

いま, $\mathbf{f}_\beta$ には level $\mathfrak{a}$ の newform が付随しているから, Lemma 1.14 (2) により,

$$c(\mathfrak{q}, \mathbf{f}_\beta)^2 \neq \alpha(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{k-2}$$

となる. したがって, L において

$$c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}_\beta)^2 \neq (\boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})(\mathfrak{q})$$

となるので, $\mathcal{F}_\beta$ の特殊化 $\mathbf{g}$ のうち, 仮に $\mathbf{g}$ の weight を k' として

$$c(\mathfrak{q}, \mathbf{g})^2 = \alpha(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{k'-2}$$

を満たすものは高々有限個である. よって, Lemma 1.14 (2) により, 正規化された Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_{\mathcal{O}_L}^0(\bar{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\alpha})$ で, それを定義する data が

$$\begin{aligned} c(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) &= c(\mathfrak{m}, \mathcal{F}_\beta) \quad \text{for } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{q} : \text{ prime}, \\ c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) &= c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}_\beta) + c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}_\beta)^{-1}\boldsymbol{\alpha}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q} \end{aligned}$$

として得られるものが定まり, $\mathbf{f}_k$ は $\mathcal{F}$ の特殊化として得られるので, (ii) の場合でも Theorem 1.10 は証明された.

Theorem 1.10 と同様に, 特殊化をとる場合に 1 の p-冪乗根 ζ が付け加えられた場合の主張も成立する:

Theorem 1.15 (=[27, Theorem 1.4.6]). 記号は Theorem 1.10 のものを用いる. 整数 $r \geq 1$ をとり, 1 の原始 p^r-乗根 ζ を一つ固定し, $\mathbb{Z}_p[\alpha, \zeta]$ の商体の有限次拡大を一つ取りその整数環を $\mathcal{O}_r$ とする. ρ_ζ を Proposition 1.6 で定義された ζ に付随する character とする. $\mathbf{f}_k \in S_k^0(\mathfrak{a}, \mathcal{O}_r, \alpha\rho)$ を任意の p-stabilized newform とする. このとき, $\Lambda_r := \mathcal{O}_r[\![T]\!]$ の商体 F_{Λ_r} の適当な有限次拡大 L をとり, その中での Λ_r の整閉包 $\mathcal{O}_L$ に, 素 ideal $P_{\nu_{k,\zeta}} := (1 + T - \zeta u^{k-2}) \subset \Lambda_r$ を延長した素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ を適当に選べば, ある Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in S_{\mathcal{O}_L}^0(\bar{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\alpha}\omega^{k-2})$ で,

$$\mathbf{f}_k \equiv \mathcal{F} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}}$$

となるものが存在する.

1.6. Λ-adic newforms と Λ-adic old forms

本節では, “Λ-adic newforms” という概念を導入し, それらが Λ-adic cusp forms の生成系を与えることを証明する. また, “l に関して new” あるいは “l に関して old” という概念も導入する. これは, 次節の congruence modules に関する考察の準備となるものである.

Remark 1.7. [27] では, “new” という術語を 2 種類の意味で使い分けていることに注意. つまり, 一つの意味は, 有限個を除くすべての特殊化が p-stabilized newforms となるということ (Definition 1.16) であり, もう一つの意味は, level $\bar{\mathfrak{n}}$ の Λ-adic forms からの自然な像として得られる level $\bar{\mathfrak{n}}fl$ の Λ-adic forms を “l に関して old である” と言い表し, その補空間の元として “l に関して new” な Λ-adic forms を定義するものである (Definition 1.18).

Definition 1.15 の状況設定に戻ることにする.

Definition 1.16 (=[27, Definition in Section 1.5]). 正規化された Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in S_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ が level $\bar{\mathfrak{n}}$ の **Λ-adic newform** であるとは, 有限個を除くすべての $(k, \zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ と, それに付随する準同型 $\nu_{k,\zeta}$ の $\mathcal{O}_L$ への任意の延長 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}$ に対し, 特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が level が $\mathfrak{n}$ の p と互いに素な部分 $\mathfrak{n}_0$ で割り切れる p-stabilized newform となることである.

次の Proposition は, Λ-adic newforms の特徴付けとして Definition 1.16 の条件は, やや強いものであるということを主張している:

Proposition 1.16 (=[27, Proposition 1.5.1]). $\mathcal{F} \in S_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ が Λ-adic newform であるための必要十分条件は, $A_{\mathcal{F}}$ の任意の無限部分集合 S に対し, 各 $(k, \zeta) \in S$ について $\nu_{k,\zeta}$ の延長 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}$ を一つ取っておいて, S を走るすべての特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が p-stabilized newforms となることである.

Proof. 十分性は, Λ-adic newforms の定義 Definition 1.16 により明らかである. 必要性を示すために, その対偶を示す. つまり, $\mathcal{F} \in S_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に対し, $A_{\mathcal{F}}$ の元 (k,ζ) であって, 付随する $\tilde{\nu}_{k,\zeta}$ をうまくとると $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ は level が $\mathfrak{n}_0$ で割り切れるような p-stabilized newform **ではない** Hecke eigenform となるもの全体のなす $A_{\mathcal{F}}$ の部分集合を Σ とおくとき, Σ が無限集合になると仮定して, $\mathcal{F}$ は Λ-adic newform ではないことを示す.

Σ の定義により, $(k,\zeta) \in \Sigma$ $(\zeta^{p^r} = 1)$ について, $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F}) \in S_k^0(\mathfrak{n}p^r, \chi_{\nu_{k,\zeta}})$ は p-stabilized newform ではない. これに付随する newform に Hida 作用素 e を施して得られる p-stabilized newform を $\mathbf{f}_0(k,\zeta)$ とかくことにする. L は level $\bar{\mathfrak{n}}$, character $\boldsymbol{\chi}$ のすべての Λ-adic eigenforms が定義されるくらいに十分大きな体であると仮定しておき, Theorem 1.15 により, 本質的には $\mathbf{f}_0(k,\zeta)$ と同じ level をもつある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}_0(k,\zeta) \in \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ で, $\mathbf{f}_0(k,\zeta)$ の持ち上げとなるものがとれる. このとき, 前節の Theorem 1.10 の証明の (i) における Λ-adic eigenforms の個数に関する考察により, $\mathfrak{X}$ のある無限部分集合 $\mathfrak{X}_0$ で, 任意の二つの元 $(k_1,\zeta_1), (k_2,\zeta_2) \in \mathfrak{X}_0$ に対し, $\mathcal{F}_0(k_1,\zeta_1) = \mathcal{F}_0(k_2,\zeta_2) (=: \mathcal{F}_0)$ となるものをとれる. このとき, $\mathcal{F}_0$ の level を $\bar{\mathfrak{n}}_0'$ とすれば, $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ が p-stabilized newform ではないので, $\mathfrak{n}_0' | \mathfrak{n}_0$ かつ $\mathfrak{n}_0' \neq \mathfrak{n}_0$ となる.

ここで, $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l に対し, 2 次多項式 $x^2 - c(l,\mathcal{F}_0)x + \boldsymbol{\chi}(l)Nl = 0$ の根を $\alpha(l,\mathcal{F}_0)$, $\beta(l,\mathcal{F}_0)$ とする. とくに, $l|\mathfrak{n}$ であるとき, $\alpha(l,\mathcal{F}_0)$, $\beta(l,\mathcal{F}_0) \in L$ となることに注意. 写像 $\phi_l : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(lz)$ と, $l^2 | \frac{\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{n}_0'}$ でないときは $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 0$ となる ε_α, $\varepsilon_\beta \in \{0,1\}$ を用いて作られる Λ-adic form

$$\mathcal{F} - \left(\prod_{l | \frac{\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{n}_0'}} (1 - \alpha(l,\mathcal{F}_0)\phi_l)^{\varepsilon_\alpha} (1 - \beta(l,\mathcal{F}_0)\phi_l)^{\varepsilon_\beta} \right) \mathcal{F}_0$$

は, $(k,\zeta) \in \mathfrak{X}_0$ ごとにうまく ε_α, $\varepsilon_\beta \in \{0,1\}$ を選ぶことにより, mod $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ で 0 となる. ここで, $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ は $\tilde{\nu}_{k,\zeta}$ に対応する $\mathcal{O}_L$ の素 ideal を表す (cf. Section 1.5). したがって, ε_α, $\varepsilon_\beta \in \{0,1\}$ を固定した際には, 無限個の (k,ζ) に対して, mod $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ で 0 となり, $\cap \tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}} = 0$ であるので, $\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ の元として,

$$\mathcal{F} = \left(\prod_{l | \frac{\mathfrak{n}_0}{\mathfrak{n}_0'}} (1 - \alpha(l,\mathcal{F}_0)\phi_l)^{\varepsilon_\alpha} (1 - \beta(l,\mathcal{F}_0)\phi_l)^{\varepsilon_\beta} \right) \mathcal{F}_0$$

が成立する. よって, $\mathcal{F}$ は Λ-adic newform でないことが示された. □

次の Proposition は, Λ-adic newforms から Λ-adic cusp forms の生成系が得られることを保証する. このことは, classical な Hilbert cusp forms に対して成立する事実の類似物である:

Proposition 1.17 (=[27, Proposition 1.5.2])**.** 以上の記号のもと, $U := \{\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) |\ \mathcal{F}$ は level $\bar{\mathfrak{m}}$, character $\boldsymbol{\chi}$ の Λ-adic newform で, $\mathfrak{a}$ は $\bar{\mathfrak{m}}\mathfrak{a}|\bar{\mathfrak{n}}$ を満たす整 ideal $\}$ とおき, L は U を作る newforms $\mathcal{F}$ たちがすべて定義されるくらいに十分大きな F_Λ の有限次拡大であるとする. このとき, $\mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ は L 上 U で生成される.

Proof. $LU \subset \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ であるから, $\dim_L LU = \dim_L \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を示せばよい.

$$\mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{S}^0_{F_\Lambda}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \otimes_{F_\Lambda} L$$

なので, L/F_Λ に関する trace を係数に施すことで,

$$\mathrm{tr} : \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \to \mathcal{S}^0_{F_\Lambda}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$$

が誘導される. このとき, $\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U) \otimes_\Lambda L = LU$ なので, $\dim_L LU = \dim_L \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を示すためには,

$$\mathrm{rank}_\Lambda \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U) = \mathrm{rank}_\Lambda(\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))$$

を示せばよい. 一般に, $\mathrm{rank}_\Lambda \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U) \leq \mathrm{rank}_\Lambda(\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))$ であるので, 逆の不等式を示すことになる.

各 $r \geq 1$ に対し, 1 の原始 p^r-乗根 ζ_{p^r} を一つ取っておき, ρ_r を Proposition 1.6 で定義された ζ_{p^r} に付随する character とする. X で $\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)$ かもしくは $\mathcal{S}^0_\Lambda(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を表すことにして, Λ の係数環 $\mathcal{O}$ 上での $\zeta_{p^r} - 1$ の最小多項式を ξ_r とおくと, 十分大きな r に対しては, weight 2 での特殊化から誘導される injection

$$\phi_r : X/\xi_r X \to S^0_2(\mathfrak{n}p^\infty, \mathcal{O}[\zeta_{p^r}], \chi\rho_r), \quad \mathcal{F} \mapsto \nu_{2,\zeta_{p^r}}(\mathcal{F})$$

が定まる.

Claim. とくに, $X = \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)$ のとき, 十分大きな r に対して, $\phi_r(\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)/\xi_r \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U))$ は $S^0_2(\mathfrak{n}p^\infty, \mathcal{O}[\zeta_{p^r}], \chi\rho_r)$ において有限な指数をもつ.

Proof. $\mathcal{O}_r$ を $\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{2,\zeta_{p^r}}}$ の整閉包とする. L/F_Λ の基底 $\{\alpha_i\}_i \subset \mathcal{O}_L$ と F_Λ 上の体の埋め込み全体 $\{\sigma_i : L \hookrightarrow \bar{L}\}_i$ をとり, 行列式 $\det(\alpha_i^{\sigma_j})_{i,j}$ が mod $\tilde{P}_{\nu_{2,\zeta_{p^r}}}$ で消えないような r に対して, ある $u \in \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U) \otimes_\Lambda \mathcal{O}_L$ で, 任意の $\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) \in U$ について, ある $\lambda \in \mathcal{O}_L$ で

$$\lambda \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{2,\zeta_{p^r}}}), \quad u = \lambda \mathcal{F}(\mathfrak{a}z)$$

を満たすものがとれるようなものが存在する. weight 2, character $\chi\rho_r$ の p-stabilized newform $\mathbf{f}$ であって, $\mathbf{f}(\mathfrak{a}z)$ の level が $\mathfrak{n}p^\infty$ を割るようなものに対し, Theorem 1.15 により, ある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) \in U$ で

$$\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) \equiv \mathbf{f}(\mathfrak{a}z) \ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{2,\zeta^{p^r}}})$$

となるものが存在する．したがって，有限個を除くすべての r に対して，ある $u \in \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U) \otimes_\Lambda \mathcal{O}_L$ で，

$$u \equiv \lambda \mathbf{f}(\mathfrak{a}z) \ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_2, \zeta_{p^r}})$$

となるものが存在する．$S_2^0(\mathfrak{n}p^\infty, \mathcal{O}[\zeta_{p^r}], \chi\rho_r)$ は今考えたような $\mathbf{f}(\mathfrak{a}z)$ たちで生成されるので，$\phi_r(\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)) \otimes_{\mathcal{O}[\zeta_{p^r}]} \mathcal{O}_r$ は $S_2^0(\mathfrak{n}p^\infty, \mathcal{O}_r, \chi\rho_r)$ で有限な指数をもつ．よって，Claim は示された．□

したがって，$\mathrm{rank}_\Lambda(\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U))$ を t とおくと，

$$\{\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}(\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)/\xi_r \mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)) - t \deg \xi_r\}_r$$

が $t \to \infty$ としたとき有界であることから，

$$\mathrm{rank}_\Lambda(\mathrm{tr}(\mathcal{O}_L U)) \geq \mathrm{rank}_\Lambda(\mathcal{S}_\Lambda^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}))$$

が成立することが示された．□

ちなみに，Λ-adic Eisenstein 級数に対しても，同様に Λ-adic Eisenstein new series が定義されて，それらから，Λ-adic newforms とともに Λ-adic forms の生成系が作り出されることが証明できる:

Definition 1.17. level $\bar{\mathfrak{n}}$ の Λ-adic Eisenstein 級数 $\mathcal{E}$ が **new** であるとは，有限個を除くすべての $(k,\zeta) \in A_{\mathcal{E}}$ とそれに付随する準同型 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}$ に対し，$\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{E})$ が level が $\mathfrak{n}_0$ で割り切れる p-stabilized Eisenstein new series となることである．

Proposition 1.18. *以上の設定のもと，$V := \{\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) |\ \mathcal{F}$ は level $\bar{\mathfrak{m}}$, character $\boldsymbol{\chi}$ の Λ-adic newform かもしくは Λ-adic Eisenstein new sereis で，$\mathfrak{a}$ は $\bar{\mathfrak{m}}\mathfrak{a}|\bar{\mathfrak{n}}$ を満たす整 ideal $\}$ とおき，L は V を作る $\mathcal{F}$ たちがすべて定義されるくらいに十分大きな F_Λ の有限次拡大であるとする．このとき，$\mathcal{M}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ は L 上 V で生成される．*

最後に，次節で Λ-adic newforms に付随する "congruence modules" なるものを定義するための準備となる，$\mathfrak{n}$ と互いに素な素 ideal l に関して "new" あるいは "old" であるという概念を導入する．

改めて，χ を conductor $\mathfrak{n}$ の strict ideal class character とし，$\Lambda_\chi := \mathbb{Z}_p[\chi][\![T]\!]$ とおく．F_{Λ_χ} を Λ_χ の商体とし，L を F_{Λ_χ} の任意の (有限次とは限らない) 拡大とする．$\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l をとり，level を l だけ増加する二つの写像 ϕ_1, ϕ_2 をそれぞれ

$$\phi_1 : \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \to \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F},$$
$$\phi_2 : \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \to \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(lz)$$

と定義する．

Definition 1.18. (1) 以上の記号のもとで, level $\bar{\mathfrak{n}}l$ で l **に関して old** な Λ-adic cusp forms のなす部分空間を

$$\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{old}} := \mathrm{Image}(\phi_1) + \mathrm{Image}(\phi_2) \subset \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

と定義する.

(2) L は $\mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に属するすべての Λ-adic eigenforms の Hecke 固有値を含む F_{Λ_χ} の有限次拡大と仮定する. ここで, Theorem 1.4 により, $\mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ は有限次な $\bar{F}_{\Lambda_\chi}$-ベクトル空間であることに注意. このとき, $V := \{\mathcal{F}(\mathfrak{a}z) |\ \mathcal{F}$ は l で割り切れる level $\bar{\mathfrak{m}}$ をもつ character $\boldsymbol{\chi}$ の Λ-adic newform で, $\mathfrak{a}$ は $\bar{\mathfrak{m}}\mathfrak{a}|\bar{\mathfrak{n}}$ を満たす整 ideal $\}$ とおき l **に関して new** な Λ-adic cusp forms のなす部分空間を

$$\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} := LV$$

と定義する. このとき, Proposition 1.17 と classical な Hilbert newforms の理論により, Λ-adic cusp forms の空間は

$$\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} \oplus \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{old}}$$

と直和分解される.

(3) L は (2) のものとする. K を F_{Λ_χ} の任意の拡大とする. K-**係数の** l **に関して new** な Λ-adic cusp forms のなす部分空間を

$$\mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} := \mathcal{S}_{LK}^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} \cap \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

と定義する. ここで, $\mathcal{S}_{LK}^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} := LV \otimes_L LK$ とおいた. このとき, (2) の分解により, K-係数においても

$$\mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} \oplus \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{old}}$$

と直和分解される.

Remark 1.8. Lemma 1.14 (2) により, l に関して new な Λ-adic cusp forms の空間の特徴付けとして, 次の等式が成立することに注意:

$$\mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} = \mathrm{Ker}(U_l^2 - \boldsymbol{\chi}(l)) \subset \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}).$$

1.7. **Congruence modules**

本節では, Λ-adic newforms に付随する "congruence modules" を定義し, [27, Section 1] の主定理の一つである congruence modules の構造に関する結果 [27, Theorem 1.6.1] の証明の概説をする. Section 3 で概説する Λ-adic newforms に付随する Galois 表現の構成を与える [27, Theorem 2.2.1] の証明において, level $\bar{\mathfrak{n}}$ の Λ-adic newforms から, 議論の対象を $\mathfrak{n}$ と互いに素な素 ideal l に関して new な level $\bar{\mathfrak{n}}l$ の Λ-adic eigenforms に帰着させる際に, この congruence modules の効力が発揮される. そして, l を無限個動かした際に, それに伴って Galois 表現の貼り合わせに必要な互いに相異なる係数環をもつ無限個の Galois 表現

が生じることを検証する際に, [27, Theorem 1.6.1] は重要な役割を果たすものである.

前節の記号をそのまま用いることにする. $\mathcal{F} \in \mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を Λ-adic newform とする. F_{Λ_χ} 上 $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値全体で生成される有限次拡大を $M_\mathcal{F}$ とおき, $\mathcal{F}$ の **Hecke 体**と呼ぶ. $M_\mathcal{F}$ の中での Λ_χ の整閉包を $\Lambda_\mathcal{F}$ とおく:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_\mathcal{F} & \subset & M_\mathcal{F} \\ \text{int.cl.} \cup & & \cup \\ \Lambda_\chi & \subset & F_{\Lambda_\chi}. \end{array}$$

Definition 1.19. 以上の記号のもと, Λ-module

$$H_\mathcal{F}(l) := \{\mathcal{H} \in \mathcal{S}^0_{M_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\text{new}} |\ \mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz) \\ \text{with } \mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}),\ u, v \in M_\mathcal{F}\}$$

を用いて, $\mathcal{F}$ に付随する **congruence module** を

$$C_\mathcal{F}(l) := H_\mathcal{H}(l)/(\mathcal{S}^0_{M_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\text{new}} \cap \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}))$$

と定義する.

Lemma 1.19. 以上の記号のもとで,

(1) 任意の $\mathcal{H} \in H_\mathcal{F}(l)$ の元について $H_\mathcal{F}(l)$ の定義にしたがい, $\mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$ と $u,\ v \in M_\mathcal{F}$ を用いて $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz)$ とかいたとき, $\Lambda_\mathcal{F}$-加群の injection

$$\gamma : C_\mathcal{F}(l) \hookrightarrow M_\mathcal{F}/\Lambda_\mathcal{F}, \quad \mathcal{H} \mapsto u$$

が定まる. とくに, M_Λ のある分数 ideal $\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}$ で,

$$\gamma : C_\mathcal{F}(l) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}/\Lambda_\mathcal{F}$$

となるものがとれる.

(2) 2 次方程式 $x^2 - c(l, \mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(l)Nl = 0$ の根を α_l, β_l とし,

$$w_l := (\alpha^2 - \boldsymbol{\chi}(l))(\beta^2 - \boldsymbol{\chi}(l)) \in \Lambda_\mathcal{F}$$

とおけば, (1) で得られた分数 ideal $\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}$ は

$$w_l \mathfrak{a}_{\mathcal{F},l} \subset \Lambda_\mathcal{F}$$

を満たす.

Proof. (1) $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz)$ と $\mathcal{H}' = \mathcal{G}' - u'\mathcal{F} - v'\mathcal{F}(lz)$ を $\mathcal{H} - \mathcal{H}' \in \mathcal{S}^0_{M_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\text{new}} \cap \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$ となる $H_\mathcal{F}(l)$ の二つの元とすると, $\mathcal{G} - \mathcal{G}' \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$ であることから,

$$(u - u')\mathcal{F} + (v - v')\mathcal{F}(lz) \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_\mathcal{F}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

となり, とくに $u - u' \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ となるので, $\Lambda_{\mathcal{F}}$-加群の準同型

$$\gamma : C_{\mathcal{F}}(l) \to M_{\mathcal{F}}/\Lambda_{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{H} \mapsto u$$

がうまく定まる. γ が単射であることを示すために, $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz)$ について, $u \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ と仮定する. このとき, $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ であることを示せばよい. Remark 1.8 で注意したように, $\mathcal{S}^0_{M_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} = \mathrm{Ker}(U_l^2 - \boldsymbol{\chi}(l))$ であるので, $(U_l^2 - \boldsymbol{\chi}(l))\mathcal{H} = 0$. したがって,

$$v(U_l^2 - \boldsymbol{\chi}(l))(\mathcal{F}(lz)) = v(c(l, \mathcal{F}) - \boldsymbol{\chi}(l)Nl)\mathcal{F} - v\boldsymbol{\chi}(l)\mathcal{F}(lz) \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

となり, とくに $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ である.

(2) $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz) \in H_{\mathcal{F}}(l)$ に対し, $w_l u \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ であることを示せばよい. $U := (U_l^2 - \alpha_l^2)(U_l^2 - \beta_l^2)$ を $\mathcal{H}$ に施せば, $U(\mathcal{F}) = U(\mathcal{F}(lz)) = 0$ なので,

$$U(\mathcal{H}) = U(\mathcal{G}) \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

を得る. 一方で, $(U_l^2 - \boldsymbol{\chi}(l))\mathcal{H} = 0$ なので,

$$U(\mathcal{H}) = (\boldsymbol{\chi}(l) - \alpha_l^2)(\boldsymbol{\chi}(l) - \beta_l^2)\mathcal{H} = w_l\mathcal{H}$$

であり,

$$w_l\mathcal{G} - w_l u\mathcal{F} - w_l v\mathcal{F}(lz) \in \mathcal{S}^0_{\Lambda_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

を得るので, $w_l u \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ が示された. □

ここで, 本節の主定理を説明する準備として, F_{Λ_χ} の任意の有限次拡大 L に対し, L の元あるいは分数 ideal の divisor を定義する:

Definition 1.20. $\mathcal{O}_L$ を L における Λ_χ の整閉包とし, P を $\mathcal{O}_L$ の高さ 1 の素 ideal とすると, P での局所化 $\mathcal{O}_{L,P}$ は離散付値環となる. その付随する付値を v_P とかくことにする.

a を L の元もしくは分数 ideal として, $\mathcal{O}_L$ のすべての高さ 1 の素 ideal P_i たちに対し, $n_i := v_{P_i}(a)$ とおき, a の **divisor** を

$$\mathrm{div}(a) := \sum_{P_i} n_i P_i$$

と定義する. また, a とは別に b の divisor が $\mathrm{div}(b) = \sum_{P_i} m_i P_i$ とかかれるとして, すべての P_i において $n_i \geq m_i$ が成り立つことを

$$\mathrm{div}(a) \geq \mathrm{div}(b)$$

と表す. L での divisor であることをとくに示唆したい場合は, 下付きの添え字で $\mathrm{div}_L(a)$ と表すこともある.

Remark 1.9. $\mathcal{O}_L$ の高さ 1 の素 ideal P について, mod P した後の剰余標数が p か 0 かのいずれかにより, P が p の上にあるかないかの二つの場合に分けられる.

さて, Lemma 1.19 (2) により,

$$w_l\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l} \subset \Lambda_{\mathcal{F}}$$

が成り立つので, $M_{\mathcal{F}}$ での divisor を比較した際, $\mathrm{div}(w_l\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \geq 0$, すなわち

$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \geq \mathrm{div}(w_l^{-1})$$

が得られる.

Conjecture 1.20. *$M_{\mathcal{F}}$ の高さ 1 の素 ideal P について, P が p の上にないときは,*

$$v_P(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) = v_P(w_l^{-1})$$

が成立する.

この予想は, $F = \mathbb{Q}$ の場合で, classical な newforms に対しては Ribet によって, また Λ-adic newforms に対しては Diamond によって, それぞれ証明されている. 今から証明の概説を行う本節の主定理 [27, Theorem 1.6.1] は, 一般の場合における Conjecture 1.20 の成立まであと一歩に迫る, $\mathrm{div}(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l})$ の上からの評価を与えるものである:

Theorem 1.21 (=[27, Theorem 1.6.1])**.** *上記の設定のもとで, $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l に依存しない $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ と $c \in \mathbb{Z}$ が存在して, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な有限個を除くすべての l に対し,*

$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \leq \mathrm{div}(w_l^{-1}) + \mathrm{div}(v) + c\,\mathrm{div}(1 + Nl)$$

が成り立つ.

Proof. 証明の中で, Hilbert modular forms に対する Ramanujan-Petersson 予想をほぼ解決した Brylinski-Labesse [1] の定理を, Katz-Laumon [11] の結果を用いて改良した次の定理が用いられることをあらかじめ注意しておく:

Theorem 1.22 (=[27, Theorem 1.6.2] (cf. [1]))**.** *$\mathbf{f}$ を weight $k \geq 2$, level $\mathfrak{m}$, character $\chi_{\mathbf{f}}$ の Hilbert modular form とすると, $\mathfrak{m}$ だけに依存し k には依存しない $M \in \mathbb{Z}$ が存在して, M と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal l に対し, 2 次方程式 $x^2 - c(l,\mathbf{f})x + \chi_{\mathbf{f}}(l)(Nl)^{k-1} = 0$ の根はすべての無限素点において, 絶対値 $(Nl)^{\frac{k-1}{2}}$ をもつ.*

さて, Theorem 1.21 の証明を進める際の土台となる基礎体 K を, どのように取っておくかについて考察することから始める. K を $M_{\mathcal{F}}$ の

任意の有限次拡大とし, その中での $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の整閉包を $\mathcal{O}_K$ とする:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_K & \subset & K \\ \text{int.cl.} \cup & & \cup \\ \Lambda_{\mathcal{F}} & \subset & M_{\mathcal{F}} \\ \text{int.cl.} \cup & & \cup \\ \Lambda_{\chi} & \subset & F_{\Lambda_\chi}. \end{array}$$

Definition 1.19 と同様に, $\mathcal{O}_K$-加群

$$H_K(l) := \{\mathcal{H} \in \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} |\ \mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz) \quad \text{with } \mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_K}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}),\ u, v \in K\}$$

を用いて, $\mathcal{F}$ に付随する K-係数の congruence module

$$C_K(l) := H_K(l)/(\mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} \cap \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_K}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi}))$$

を考えると, Lemma 1.19 と同様に, K のある分数 ideal $\mathfrak{a}_{K,l}$ で,

$$\gamma : C_K(l) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{K,l}/\mathcal{O}_K, \quad \mathcal{F} \mapsto u$$

となるものがとれる. 係数の体に $\mathrm{Trace}_{K/M_{\mathcal{F}}}$ を施すことで得られる写像

$$\mathrm{trace} : H_K(l) \to H_{\mathcal{F}}(l)$$

から, 分数 ideal の間の写像

$$\mathrm{trace} : \mathfrak{a}_{K,l} \to \mathfrak{a}_{\Lambda_{\mathcal{F}},l}$$

が誘導されて,

$$\mathrm{trace}((w_l^{-1})) = w_l^{-1}\mathrm{trace}(\mathcal{O}_K)$$

であるから, K が l に依存しないように選ばれているならば, Theorem 1.21 の主張を K 上の不等式に帰着できる.

以下, 具体的に K としてどのような体を採用するかについて論を進める. L を $\mathcal{M}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に属するすべての Λ-adic eigenforms の Hecke 固有値を含む F_{Λ_χ} の任意の有限次拡大とする. このとき, $M_{\mathcal{F}} \subset L$ であることに注意. Proposition 1.18 により, Hecke 作用素と norm 写像により作られる

$$t := N_{L/M_{\mathcal{F}}}(\prod_{\mathcal{F} \neq \mathcal{G}_i:\text{ of level } \mathfrak{m}_i} (T(\mathfrak{m}_i) - c(\mathfrak{m}_i, \mathcal{G}_i)))$$

は, M_Λ-ベクトル空間の surjection

$$t : \mathcal{M}^0_{M_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi}) \to M_{\mathcal{F}}\mathcal{F}$$

を与える (cf. Lemma 1.9 の証明に用いられた t を参照). ここで, t の定義にある $\prod$ の添え字 $\mathcal{G}_i$ は, Proposition 1.18 を $\mathcal{M}^0_{M_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ に適用した際に生成系 V に現れる Λ-adic newforms もしくは Λ-adic Eisenstein new series たち $\mathcal{G}_i$ のうち, その level $\mathfrak{m}_i$ が $\bar{\mathfrak{n}}$ を割り切り, $\mathcal{G}_i \neq \mathcal{F}$ なるもの全体を走るものである. $\Lambda_{\mathcal{F}}$-係数においては,

$$t(\mathcal{M}^0_{\Lambda_{\mathcal{F}}}(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})) \subset \Lambda_{\mathcal{F}}\mathcal{F}$$

が得られる. Proposition 1.5.1 により, 十分大きな無限個の整数 $k \geq 2$ に対し, $(k,1) \in A_{\mathcal{F}}$ であり, かつ Λ_χ の素 ideal $P_{\nu_{k,1}} = (1+T-u^{k-2})$ を $\Lambda_{\mathcal{F}}$ に延長した素 ideal から適当に $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ を選んで level $\mathfrak{n}$, character $\chi_k := \chi\omega^{2-k}$ の特殊化 $\mathbf{f}_k := \mathcal{F}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})$ をとったとき, $\mathbf{f}_k$ が $t\mathbf{f}_k \neq 0$ を満たす. Theorem 1.10 の証明にあるように, 整数 $r \geq 1$, character ψ, そして weight 1 の Eisenstein 級数 $\mathbf{h}$ をうまく選ぶことで, それらから構成される

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_{\mathfrak{m}p^r, \boldsymbol{\chi}\psi^{-1}\omega^{-1}, \psi} \in \mathcal{M}_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\mathfrak{n}p^r, \boldsymbol{\chi})$$

が

$$\langle \mathbf{f}_k, e\mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\rangle \neq 0$$

を満たすようにできる. ここで, $\mathfrak{m}$ は ψ の conductor から Theorem 1.10 の証明にあるように作られる整 ideal であり, $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ は L を $\mathcal{G}$ が定義されるくらいに大きく取り直したうえでの $P_k \subset \Lambda_\chi$ の延長である. また, $\mathbf{f}_k$ と $e\mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})$ はともに, $\bar{\mathbb{Q}}$ 上定義されているので, これらを $\mathbb{C}$ 上定義されているとみなしたうえで Petersson 内積をとっている.

この $\mathcal{G}$ の構成に際し, Theorem 1.10 の証明においては $\mathbf{h}$ を定義するための二つの characters ψ_1, ψ_2 について考察しており, それに基づけば, ある $\gamma \in \Lambda_{\mathcal{F}}[\psi_1, \psi_2]$ で

$$te\mathcal{G} = \gamma\mathcal{F}$$

を満たすものが存在する. $\mathbf{f}_k$ は $t\mathbf{f}_k \neq 0$ となる Hecke eigenform なので, Petersson 内積に関する t の adjoint 作用素 t^* について, ある $\lambda_k \neq 0$ が存在して,

$$t^*\mathbf{f}_k = \lambda_k\mathbf{f}_k$$

となる. よって,

$$\langle \mathbf{f}_k, te\mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\rangle = \langle t^*\mathbf{f}_k, e\mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\rangle = \lambda_k\langle \mathbf{f}_k, e\mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\rangle \neq 0$$

となり, とくに $\gamma \neq 0$ を得る. ここで, 今後議論を進める基礎体として, $K := M_\Lambda[\psi_1, \psi_2]$ をとっておく.

さて, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l をとる. $i = 1, 2$ に対し, ψ_i を conductor が l で割り切れる character であるとみなしたとき, $\psi_{i,l}$ で表すことにする. $\mathbf{h}_1 := \mathbf{h}$ が characters ψ_1, ψ_2 に対応する Eisenstein 級数であるように, $\mathbf{h}_2$ と $\mathbf{h}_3$ をそれぞれ charcters $\psi_{1,l}$, ψ_2 と ψ_1, $\psi_{2,l}$ に対応する weight 1 の Eisenstein 級数とし, $i = 1, 2, 3$ に対し,

$$\mathcal{G}_i := \mathbf{h}_i\mathcal{E}_{l\mathfrak{m}p^r, \boldsymbol{\chi}\psi^{-1}\omega^{-1}}(u^{-1}(1+T)-1) \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}_K}(l\mathfrak{n}p^r, \boldsymbol{\chi})$$

とおく．このとき，ある $\mathcal{H}_i \in \mathcal{S}_K^0(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}}$ と $\gamma_i, \gamma_i' \in K$ が存在して，

$$te\mathcal{G}_i = \gamma_i \mathcal{F} + \gamma_i' \mathcal{F}(lz) + \mathcal{H}_i$$

とかける．以下，l として，$\mathfrak{n}p$ と互いに素であるのみならず，t の定義に用いた level $\mathfrak{m}_i$ たちとも互いに素で，さらに Theorem 1.22 を level $\mathfrak{n}p$ で適用した際に現れる整数 M とも互いに素であるようにとっておく (この条件が Theorem 1.21 の主張にある「有限個を除く」にあたるものである)．記号として，l を省略して，$H_K(l), w_l, \mathfrak{a}_{K,l}$ をそれぞれ $H_K, w, \mathfrak{a}_K$ とかくことにする．γ_i と H_K の定義により，$\gamma_i \in \mathfrak{a}_K$，つまり $(\gamma_i)\mathfrak{a}_K^{-1} \subset \mathcal{O}_K$ となるので，

$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}_K) \leq \mathrm{div}(\gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

が成り立つ．γ_i たちの divisors を詳しく計算することで，この関係式を橋渡しとして求める不等式を入手するというのが，この証明の方針である．そのために，先に基礎体 K についての考察の中で現れた γ と γ_i $(i = 1, 2, 3)$ の関係を調べることにする．その調査にあたっては，γ が 0 でないことを示す際に用いた $\mathcal{F}$ の特殊化 $\mathbf{f}_k = \mathcal{F}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})$ を与える素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ に対し，

$$\gamma_k := \gamma(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}}), \quad \gamma_{i,k} := \gamma_i(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\ (i = 1, 2, 3),$$
$$\mathbf{g}_k := \mathcal{G}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}}), \quad \mathbf{g}_{i,k} := \mathcal{G}_i(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\ (i = 1, 2, 3)$$

とおき，無限個の適切な k に対して，γ_k と $\gamma_{i,k}$ $(i = 1, 2, 3)$ の関係がわかれば，そのまま γ と γ_i $(i = 1, 2, 3)$ の関係が復元されることに着目する．

上記の設定のもとで，$t\mathbf{f}_k \neq 0$ であることから $\mathbf{f}_k \neq 0$ であることに注意して，$te\mathbf{g}_k = \gamma_k \mathbf{f}_k$ と $t^* \mathbf{f}_k = \lambda_k \mathbf{f}_k$ により，

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k \langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_k \rangle}{\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k \rangle}$$

を得る．一方で，γ_k と $\gamma_{i,k}$ $(i = 1, 2, 3)$ の関係を知るために，$\gamma_{i,k}$ たちに対してもこれと似たような公式がほしい．そのために，関係式

$$te\mathbf{g}_{i,k} = \gamma_{i,k}\mathbf{f}_k + (\gamma_i'(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}}))\mathbf{f}_k(lz) + \mathcal{H}_i(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})$$

に着目して，$\mathbf{f}_k$ と $\mathbf{f}_k(lz)$ で生成される 2 次元ベクトル空間の直交基底を構成し，それを用いた Petersson 内積の計算を通じて $\gamma_{i,k}$ の公式を入手したいと思う．

まず，2 次方程式 $x^2 - c(l, \mathbf{f}_k)x + \chi_k(l)(Nl)^{k-1} = 0$ の根を α_k, β_k とし，そのうちの一つ α_k を用いて，

$$\mathbf{f}_\alpha := \mathbf{f}_k - \alpha_k \mathbf{f}_k(lz)$$

とおく．$\mathbf{f}_\alpha$ は $\mathbf{f}_k$ に付随した level $\mathfrak{n}l$ の Hecke eigenform である．一般に，二つの Hilbert modular forms $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in M_k(\mathfrak{n}, \chi_k)$ で積 $\mathbf{fg}$ が Hilbert cusp form となるものに対し, [24, Proposition 4.13] により, level にも Hilbert modular forms $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ にも依存しないある定数 c_k が存在して

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = c_k \mathrm{Res}_{s=k} D(s, \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{g})$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} \omega_k &:= 1 - \bar{\alpha}_k \beta_k (Nl)^{-k}, \\ \mathbf{f}_* &:= \bar{\omega}_k \mathbf{f}_k - \mathbf{f}_\alpha \end{aligned}$$

とおくと, Theorem 1.22 により $\beta_k \bar{\beta}_k = (Nl)^{k-1}$ が得られることと [23, Lemma 1] を合わせることで, $x := (1 + (Nl)^{-1})^{-1}$ とおいて,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_* \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}_\alpha \rangle &= \omega_k \bar{\omega}_k x \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k \rangle, \\ \langle \mathbf{f}_*, \mathbf{f}_* \rangle &= \omega_k \bar{\omega}_k (1 - x) \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k \rangle \end{aligned}$$

を得る. よって, $\mathbf{f}_k$ と $\mathbf{f}_k(lz)$ で生成される 2 次元ベクトル空間の直交基底 $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_*\}$ が得られたことになる.

次に, 直交基底 $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_*\}$ を用いて, $te\mathbf{g}_{i,k}$ を表すことを考える. ここから, 記号として k を省略して, $\alpha := \alpha_k$, $\beta := \beta_k$, $\bar{\alpha} := \bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta} := \bar{\beta}_k$ などと表すことにする. 上で定義した weight 1 の Eisenstein 級数 $\mathbf{h}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ に対し, それらに付随する二つの characters を表す記号 ξ_i, η_i を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= \psi_1, & \eta_1 &:= \psi_2, \\ \xi_2 &:= \psi_{1,l}, & \eta_2 &:= \psi_2, \\ \xi_3 &:= \psi_1, & \eta_3 &:= \psi_{2,l}. \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ と $j = 1, 2$ に対し,

$$\begin{aligned} E_{\bar{\alpha}\xi_i} &:= 1 - \bar{\alpha}\xi_i(l)(Nl)^{-(k-1)}, & E_{\bar{\alpha}\eta_i} &:= 1 - \bar{\alpha}\eta_i(l)(Nl)^{-(k-1)}, \\ E_{\bar{\beta}\xi_i} &:= 1 - \bar{\beta}\xi_i(l)(Nl)^{-(k-1)}, & E_{\bar{\beta}\eta_i} &:= 1 - \bar{\beta}\eta_i(l)(Nl)^{-(k-1)}, \\ E_{\bar{\alpha}\psi_j} &:= 1 - \bar{\alpha}\psi_j(l)(Nl)^{-(k-1)}, & E_{\bar{\beta}\psi_j} &:= 1 - \bar{\beta}\psi_j(l)(Nl)^{-(k-1)} \end{aligned}$$

とおく. さらに,

$$\begin{aligned} E &:= 1 - \bar{\alpha}\bar{\beta}\psi(l)(Nl)^{-2(k-1)}, \\ E_i &:= 1 - \bar{\alpha}\bar{\beta}(\xi_i\eta_i)(l)(Nl)^{-2(k-1)} \ (i = 1, 2, 3), \\ E_l &:= E_{\bar{\alpha}\psi_1} E_{\bar{\beta}\psi_1} E_{\bar{\alpha}\psi_2} E_{\bar{\beta}\psi_2}, \\ E_{li} &:= E_{\bar{\alpha}\xi_i} E_{\bar{\alpha}\eta_i} E_{\bar{\beta}\xi_i} E_{\bar{\beta}\eta_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \rho_i &:= \frac{E_{li}}{E_{\bar{\beta}\xi_i} E_{\bar{\beta}\eta_i}} = E_{\bar{\alpha}\xi_i} E_{\bar{\alpha}\eta_i} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

とおく. ここで, Theorem 1.22 により, $\bar{\beta}\xi_i(l)(Nl)^{-(k-1)}$ や $\bar{\beta}\eta_i(l)(Nl)^{-(k-1)}$ の絶対値は 1 と異なるので, $E_{\bar{\beta}\xi_i}E_{\bar{\beta}\eta_i} \neq 0$ であることに注意. 以上の記号のもと, Proposition 1.7 と [23, Lemma 1] により, weight k にのみ依存し l には依存しないある定数 δ が存在して, $i = 1, 2, 3$ に対し,

$$\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_{i,k} \rangle = \delta(1+Nl)^{-1}\frac{E_l}{E_{\bar{\beta}\xi_i}E_{\bar{\beta}\eta_i}}\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_k \rangle,$$
$$\langle \mathbf{f}_*, e\mathbf{g}_{i,k} \rangle = \delta(1+Nl)^{-1}\frac{E_l}{E_{li}}(\omega_k - \rho_i)\langle \mathbf{f}_k, e\mathbf{g}_k \rangle$$

が成立する. したがって, $i = 1, 2, 3$ に対し,

$$v_k^{(i)} := \frac{\delta(1+Nl)^{-1}E_l\rho_i\gamma_k}{\omega_k\bar{\omega}_k E_{li}x},$$
$$w_k^{(i)} := \frac{\delta(1+Nl)^{-1}E_l(\omega_k-\rho_i)\gamma_k}{\omega_k\bar{\omega}_k E_{li}(1-x)}$$

とおくことで, $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_*\}$ と直交する適切な Hilbert modular form j_i とともに,

$$te\mathbf{g}_{i,k} = v_k^{(i)}\mathbf{f}_\alpha + w_k^{(i)}\mathbf{f}_* + j_i$$

とかける. 一方, ここで情報を詳細に知りたい $\gamma_{i,k}$ なるものは, $te\mathbf{g}_{i,k}$ を基底 $\{\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k(lz)\}$ で表したときの $\mathbf{f}_k$ の係数であったので, 関係式

$$\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{f}_k - \alpha_k\mathbf{f}_k(lz),$$
$$\mathbf{f}_* = \bar{\omega}_k\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_\alpha = (\bar{\omega}_k - 1)\mathbf{f}_k + \alpha_k\mathbf{f}_k(lz)$$

を用いて, $i = 1, 2, 3$ に対し,

$$\begin{aligned} te\mathbf{g}_{i,k} &= v_k^{(i)}\mathbf{f}_\alpha + w_k^{(i)}\mathbf{f}_* + j_i \\ &= v_k^{(i)}(\mathbf{f}_k - \alpha_k\mathbf{f}_k(lz)) + w_k^{(i)}((\bar{\omega}_k-1)\mathbf{f}_k + \alpha_k\mathbf{f}_k(lz)) + j_i \\ &= (v_k^{(i)} + (\bar{\omega}_k-1)w_k^{(i)})\mathbf{f}_k + (-v_k^{(i)}\alpha_k + w_k^{(i)}\alpha_k)\mathbf{f}_k(lz) + j_i \end{aligned}$$

を得て, $1 - x = (1+Nl)^{-1}$ であることに注意して, 係数比較により,

$$\begin{aligned} \gamma_{i,k} &= v_k^{(i)} + (\bar{\omega}_k - 1)w_k^{(i)} \\ &= \frac{\delta E_l\gamma_k}{\omega_k\bar{\omega}_k E_{li}}(\rho_i x^{-1} + \omega_k\bar{\omega}_k - \omega_k - \bar{\omega}_k\rho_i) \end{aligned}$$

が得られる.

ここからは, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ と ω_l の divisor の関係を追究していく. Theorem 1.21 は $\mathfrak{a}_K$ と ω_l の divisor に関する主張であり, すでに得られている不等式

$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}_K) \leq \mathrm{div}(\gamma_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と今から得られる情報とを合わせることで Theorem 1.21 の主張にある不等式を得るという方針である. そのために, 2 次方程式 $x^2-c(l,\mathcal{F})x+\boldsymbol{\chi}(l)Nl=0$ の根を $\alpha(l,\mathcal{F})$, $\beta(l,\mathcal{F})$ とし, $L:=K(\alpha(l,\mathcal{F}))$ とおく. このとき, $\beta(l,\mathcal{F})=c(l,\mathcal{F})-\alpha(l,\mathcal{F})\in L$ であることに注意. また, $\omega_l=(\alpha(l,\mathcal{F})^2-\boldsymbol{\chi}(l))(\beta(l,\mathcal{F})^2-\boldsymbol{\chi}(l))$ であったことを思い出しておく. $\mathcal{O}_L$ を L における $\mathcal{O}_K$ の整閉包とし, 上でとっておいた十分大きい無限個の k に対して, 固定していた $\mathcal{O}_K$ の素 ideal $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ の $\mathcal{O}_L$ への延長を一つ取っておき, それを改めて同じ記号で $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ と表すことにする. このとき, 今までの議論で用いていた α_k について,

$$\alpha_k\equiv\alpha(l,\mathcal{F})\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})$$

が成り立つと仮定してよい. この状況のもと,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}&:=1-\beta(l,\mathcal{F})\alpha(l,\mathcal{F})^{-1}(Nl)^{-1},\\ \tilde{\bar{\omega}}&:=1-\alpha(l,\mathcal{F})\beta(l,\mathcal{F})^{-1}(Nl)^{-1}\end{aligned}$$

とおく. $\alpha(l,\mathcal{F})\beta(l,\mathcal{F})=\boldsymbol{\chi}(l)Nl$ であるので,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}\tilde{\bar{\omega}}&=1-\boldsymbol{\chi}(l)(\alpha(l,\mathcal{F})^{-2}+\beta(l.\mathcal{F})^{-2})+\boldsymbol{\chi}(l)^2(\alpha(l,\mathcal{F})\beta(l,\mathcal{F}))^{-2}\\ &=\omega_l(\boldsymbol{\chi}(l)Nl)^{-2}\in K\end{aligned}$$

となり, $\mathcal{O}_K$ の任意の高さ 1 の素 ideal P に対して,

$$v_P(\omega_l)=v_P(\tilde{\omega}\tilde{\bar{\omega}})$$

が成り立つ. また, $i=1,2,3$ と $j=1,2$ に対し,

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_{\bar{\alpha}\xi_i}:=1-\xi_i(l)\alpha(l,\mathcal{F}),\quad \tilde{E}_{\bar{\alpha}\eta_i}:=1-\eta_i(l)\alpha(l,\mathcal{F}),\\ &\tilde{E}_{\bar{\beta}\xi_i}:=1-\xi_i(l)\beta(l,\mathcal{F}),\quad \tilde{E}_{\bar{\beta}\eta_i}:=1-\eta_i(l)\beta(l,\mathcal{F}),\\ &\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_j}:=1-\psi_j(l)\alpha(l,\mathcal{F}),\quad \tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_j}:=1-\psi_j(l)\beta(l,\mathcal{F})\end{aligned}$$

とおく. さらに,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_l&:=\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2},\\ \tilde{E}_{li}&:=\tilde{E}_{\bar{\alpha}\xi_i}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\eta_i}\tilde{E}_{\bar{\beta}\xi_i}\tilde{E}_{\bar{\beta}\eta_i}\quad(i=1,2,3),\\ \tilde{\rho}_i&:=\tilde{E}_{\bar{\alpha}\xi_i}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\eta_i}\quad(i=1,2,3)\end{aligned}$$

とおく. 各 k について, Theorem 1.22 により $\alpha_k\bar{\alpha}_k=(Nl)^{k-1}$ なので,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(Nl)^{-(k-1)}&=\alpha_k^{-1}\\ &=\alpha(l,\mathcal{F})\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})\end{aligned}$$

が得られて, 十分に大きな無限個の k に対し,

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega}\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})=\omega_k,\quad \tilde{\bar{\omega}}\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})=\bar{\omega}_k,\quad \tilde{E}_l\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})=E_l,\\ &\tilde{E}_{li}\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})=E_{li},\quad \tilde{\rho}_i\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,1}})=\rho_i,\quad (i=1,2,3)\end{aligned}$$

が成立する. よって, ある $\tilde{\delta} \in L$ で, 各 k に対し $\delta \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}} = \delta_k$ となるようなものをとることで,

$$\gamma_i = \frac{\tilde{\delta}\tilde{E}_l\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}\tilde{E}_{li}}(\tilde{\rho}_i x^{-1} + \tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}} - \tilde{\omega} - \tilde{\tilde{\omega}}\tilde{\rho}_i)$$

が成り立つ. したがって,

$$\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}} = \omega_l(\boldsymbol{\chi}(l)Nl)^{-2} \in K$$

に注意すると, l に依存しないある $v \in \mathcal{O}_K$ が存在して γ_i $(i = 1, 2, 3)$ で生成される K の分数 ideal I に $\frac{(1+Nl)v}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}$ が含まれることが示されれば, $\mathcal{O}_K$ の任意の高さ 1 の素 ideal P に対して,

$$v_P(\mathfrak{a}_K) \leq \min\{v_P(\gamma_i) |\ i = 1, 2, 3\} = v_P(I) \leq v_P\left(\frac{(1+Nl)v}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}\right)$$

が得られて, Theorem 1.21 の証明は完結する. 実際には, 高さ 1 の素 ideal P ごとに局所化したもとで議論を進めることになる.

さて, $i = 1$ のとき, 上で得られた γ_1 の公式において, $\xi_1 = \psi_1$, $\eta_1 = \psi_2$ であることに注意して, $\lambda_1 := \tilde{\omega} - \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2} \in \mathcal{O}_L$ とおけば,

$$\gamma_1 = \frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_1\tilde{\tilde{\omega}})$$

を得る. 同様に, $i = 3$ のときは, γ_3 の公式で, $\xi_3 = \psi_1$, $\eta_3 = \psi_{2,l}$ であり, $\psi_{2,l}(l) = 0$ なので $\tilde{E}_{\bar{\alpha}\eta_3} = \tilde{E}_{\bar{\beta}\eta_3} = 0$ となることに注意して, $\lambda_3 := \tilde{\omega} - \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1} \in \mathcal{O}_L$ とおけば,

$$\gamma_3 = \frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_3\tilde{\tilde{\omega}}))$$

が成り立つ. 二つの $\mathcal{O}_L$ の元

$$\begin{aligned} w_1 &:= \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_1\tilde{\tilde{\omega}}, \\ w_3 &:= \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_3\tilde{\tilde{\omega}}) \end{aligned}$$

を用いた $\mathcal{O}_L$ の ideal $\mathfrak{d} := (w_1, w_3, \tilde{\tilde{\omega}})$ を考える. ここで, $x^{-1} = 1 + (Nl)^{-1} \in \mathcal{O}_L$ であること, また

$$\gamma_1 = \frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}w_1, \quad \gamma_3 = \frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}w_3$$

であることに注意. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}w_1 - w_3 \pmod{\mathfrak{d}} \\ &\equiv \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_1\tilde{\tilde{\omega}}) - \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_3\tilde{\tilde{\omega}}) \pmod{\mathfrak{d}} \\ &\equiv \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2} - 1)x^{-1} \pmod{\mathfrak{d}} \end{aligned}$$

となり, とくに, $\mathcal{O}_L$ の任意の高さ 1 の素 ideal P に対し,

$$v_P(\mathfrak{d}) \le v_P(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}-1)x^{-1})$$

が成り立つ.

Claim. 以上の記号のもと, $\mathcal{O}_L$ の任意の高さ 1 の素 ideal P が $v_P(\tilde{\tilde{\omega}}) > 0$ を満たすとき, 次の二つの主張が成り立つ:

(1) $v_P(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_i}) = 0$ $(i = 1, 2)$.

(2) もし $v_P(\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}) > 0$ でもあるならば, P は p の上にはない.

Proof. (1) もし $v_P(\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_i}) > 0$ であるならば, $\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_i} \equiv 0 \pmod P$ より,

$$\alpha(l, \mathcal{F}) \equiv 0 \pmod P$$

となり, また, $\tilde{\tilde{\omega}} \equiv 0 \pmod P$ より,

$$\beta(l, \mathcal{F}) \equiv \alpha(l, \mathcal{F})(Nl)^{-1} \equiv \psi_i(l)(Nl)^{-1} \pmod P$$

を得る. よって,

$$\boldsymbol{\chi}(l) \equiv \psi_i(l)^2(Nl)^{-2} \pmod P$$

となり,

$$\begin{aligned} w_1 &= \tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_1}\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2}x^{-1} - \tilde{\omega} + \lambda_1\tilde{\tilde{\omega}} \\ &\equiv -\tilde{\omega} \\ &\equiv (Nl)^{-2} - 1 \pmod P \end{aligned}$$

を得る. よって, P は p の上の素 ideal であり, かつ $Nl \equiv 1 \pmod p$ とならざるを得ない. しかし, $\boldsymbol{\chi}(l) = \chi(l)(1+T)^a$ という形であり, p の上の素 ideal P では, $\boldsymbol{\chi}(l) \equiv 1 \pmod P$ とはなり得ないので矛盾が生じる.

(2) $\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2} \equiv 0 \pmod P$ より,

$$\beta(l, \mathcal{F}) \equiv \psi_2(l) \pmod P$$

となり, また, $\tilde{\tilde{\omega}} \equiv 0 \pmod P$ より, (1) と同様に,

$$\alpha(l, \mathcal{F}) \equiv \psi_2(l)Nl \pmod P$$

を得る. よって,

$$\boldsymbol{\chi}(l) \equiv \psi_2(l)^2 \pmod P$$

となる. もし, P が p の上の素 ideal ならば, $\boldsymbol{\chi}(l) \equiv 1 \pmod P$ とはなり得ないので, P は p の上にはない. □

さらに,

$$\tilde{E}_{\bar{\alpha}\psi_2} - 1 = -\psi_2(l)\alpha(l, \mathcal{F})^{-1}$$

は, 任意の高さ 1 の素 ideal P に対して unit となるので, Claim と合わせると, $v_P(\tilde{\tilde{\omega}}) > 0$ なる p の上にある高さ 1 の素 ideal P に対して,

$$v_P(\mathfrak{d}) \le v_P(x^{-1}) = v_P(1 + Nl)$$

が成り立つ．よって, P で局所化したうえで考えると, $1+Nl \in \mathfrak{d} = (w_1, w_3, \tilde{\tilde{\omega}})$ であり, $1+Nl = a_1w_1 + a_3w_3 + b\tilde{\tilde{\omega}}$ と表しておいて, $\frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}$ をかけて v_P をとれば,

$$v_P\left(\frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}(1+Nl)\right) \geq v_P\left(\frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}(1+Nl) - \frac{\tilde{\delta}\gamma}{\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}}b\tilde{\tilde{\omega}}\right)$$
$$= v_P(a_1\gamma_1 + a_3\gamma_3) \geq v_P((\gamma_1, \gamma_3)) \geq v_P(\mathfrak{a}_{L,l}),$$

すなわち,

$$v_P(\mathfrak{a}_{L,l}) \leq -v_P(\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}) + v_P(1+Nl) + v_P(\tilde{\delta}\gamma)$$

が得られる．ここで, $\tilde{\delta}\gamma$ は l に依存しない元であり, また, 全く同様の議論で $v_P(\tilde{\omega}) > 0$ なる p の上の高さ 1 の素 ideal P に対しても, 同じ不等式が得られることに注意.

一方, p の上にない高さ 1 の素 ideal P で, $v_P(\tilde{\tilde{\omega}}) > 0$ かつ $v_P(\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2}) > 0$ なるものがあれば, p の上にない P に対して Theorem 1.21 の主張にある付値の不等式を証明する場合は用いる基礎体 K のとり方は自由なので, 改めて characters ψ_1 と ψ_2 を選び直して, 新たに構成された $\tilde{\tilde{\omega}}$ と $v_P(\tilde{E}_{\bar{\beta}\psi_2})$ に共通な高さ 1 の素因子が生じないように設定できる．そうすれば, $v_P(1+Nl) = 0$ であることに注意して, 不等式

$$v_P(\mathfrak{a}_{L,l}) \leq -v_P(\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}) + v_P(\tilde{\delta}\gamma)$$

が得られる．このことは, $v_P(\tilde{\omega}) > 0$ なる素 ideal P に対しても同様に成立するので, p の上にあるかどうかは問わず, 任意の高さ 1 の素 ideal P に対して,

$$v_P(\mathfrak{a}_{L,l}) \leq -v_P(\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}) + v_P(1+Nl) + v_P(\tilde{\delta}\gamma)$$

が成立する．ここで, $v_P(\tilde{\omega}\tilde{\tilde{\omega}}) = v_P(w_l)$ に注意し, とくに, $v_P(w_l) > 0$ なる高さ 1 の素 ideal P において, $\mathrm{Trace}_{L/M_{\mathcal{F}}}$ を施すことで, l に依存しない二つの整数 $c_{1,P}$, $c_{2,P}$ が存在して

$$v_P(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \leq -v_P(w_l) + c_{1,l}v_P(1+Nl) + c_{2,l}$$

が成り立つ. 有限個を除くすべての P に対しては $c_{1,P} = c_{2,P} = 0$ ととることができるので, $c_{1,P}$ を上から抑える $c \in \mathbb{Z}$ と, divisor が下から $\sum_P c_{2,P}P$ で評価される $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ がとれる．そもそも $\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}$ の定義により, $\mathrm{div}(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \leq 0$ であるから, Theorem 1.21 を示すためには, $v_P(w_l) > 0$ となる素 ideal P についてだけ付値に関する不等式を検証できればよいので, 以上をまとめて,

$$\mathrm{div}(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \leq -\mathrm{div}(w_l) + \mathrm{div}(v) + c\,\mathrm{div}(1+Nl)$$

を得る． □

2. Hilbert newforms に付随する Galois 表現

本節では, [27] の主結果である, ordinary な Hilbert newforms に付随する Galois 表現の存在定理 Theorem 0.2 とそれらの局所的な振る舞いを決定した Theorme 0.3 の証明の概説を行う. そのために, Hilbert newforms に付随する Galois 表現の存在を示すうえで重要な役割を果たす Λ-adic newforms に付随する Galois 表現については, それらが構成可能であり, さらに p での分解群に制限したときの振る舞いを決定できるということについて, ここでは定理の主張を述べるだけにとどめ, その証明の概説は Section 3 で行うことにする. すなわち, 次の定理を証明なしで一旦認めることとする. ここで, Section 1.7 の記号を用いることにする:

Theorem 2.1. *χ を condutor $\mathfrak{n}$ の strict ideal class character とする. L を F_{Λ_χ} の任意の有限次拡大とし, $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を level $\bar{\mathfrak{n}}$, character χ をもつ L 上定義された Λ-adic newform とする. このとき,*

(1) (=[27, Theorem 4 in Introduction=Theorem 2.2.1]) *$\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$, すなわち, L-係数の連続な 2 次元 Galois 表現*

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

で, 次の二つの条件

(i) $\mathfrak{n}p$ *の外不分岐である;*

(ii) $\mathfrak{n}p$ *を割らない $\mathcal{O}_F$ のすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,*

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}),$$
$$\det(\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \chi(\mathfrak{q}) N\mathfrak{q}$$

を満たすものが存在する. さらに,

(2) (=[27, Theorem 2.2.2]) *$\mathcal{O}_F$ の p を割る任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ において, ある二つの characters ε_1, ε_2 で, とくに ε_2 は不分岐で $\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ を満たすものにより,*

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

2.1. Theorem 0.2 (1) と Theorem 0.3 (2) の証明

早速, Theorem 2.1 を用いた Theorem 0.2 (1) と Theorem 0.3 (2) の証明の概説を行うことにしよう. 以下, Λ-adic forms にまつわるほとんどの記号は, Section 1 で用いていたものを断りなしに用いることにする.

$\mathbf{f}$ を Theorem 0.2 (1) あるいは Theorem 0.3 にあるように, weight k, level $\mathfrak{c}$, character ψ の Hilbert newform であって, Hecke 体 $K_{\mathbf{f}}$ の整数環 $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ の素 ideal λ で ordinary ものとする. p を λ の剰余標数とした

うえで, Definition 1.9 のように, $\mathbf{f}^* := e\mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ に付随する p-stabilized newform とすれば, これは $S_k^0(\mathfrak{c}, \psi)$ に属する Hecke eigenform である. $\mathbf{f}$ と $\mathbf{f}^*$ のそれぞれに Galois 表現が付随するとすれば, Chebotarev の稠密定理により, それらは同じ trace と determinant をもつことになるので, 求める $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ として, $\mathbf{f}^*$ に付随する Galois 表現を構成すればよいことになる.

Theorem 1.10 により, F_{Λ_ψ} の有限次拡大 L と Λ_ψ の素 ideal $P_{\nu_{k,1}} := (1+T-u^{k-2})$ の $\mathcal{O}_L$ への延長 $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ を適切にとることで, ある Λ-adic eigenform $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{c}}, \boldsymbol{\psi}\omega^{k-2})$ が存在して,

$$\mathbf{f}^* \equiv \mathcal{F} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}}$$

が成立する. Proposition 1.17 を通して, $\mathcal{F}$ に付随する Λ-adic newform $\mathcal{F}^*$ を取り出し, Theorem 2.1 (1) を適用することで, $\mathcal{F}^*$ と同時に $\mathcal{F}$ そのものに付随する Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

が存在する. このとき, L^2 内の $\rho_{\mathcal{F}}$ のもと不変な $\mathcal{O}_L$-lattace $\mathcal{L}$ をとることができ, $\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ は離散付値環であることから,

$$\mathcal{L}/\tilde{P}_{\nu_{k,1}}\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k,1}})^2$$

を得る. したがって, この $\mathcal{O}_L$-lattice を mod $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ することを通して, $\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ の商体 K を係数にもつ $\rho_{\mathcal{F}}$ の mod $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ 表現

$$\rho_{\mathbf{f},\lambda} := \rho_{\mathcal{F}} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(K)$$

が得られる. $\rho_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現であり, $\mathbf{f}^* \equiv \mathcal{F} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}}$ であることから, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ は係数を $K_{\mathbf{f},\lambda}$ の有限次拡大である K にもってはいるが, $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現となる. とくに, 複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して, $\det(\rho_{\mathbf{f},\lambda}(c)) = -1$ かつ $\rho_{\mathbf{f},\lambda}(c)^2 = 1$ であるから, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}(c)$ の固有値は ± 1 となる. したがって, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}(c)$ に対する固有ベクトルを基底として採用することで, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ の係数体を $K_{\mathbf{f},\lambda}$ に落とすことができるので, Theorem 0.2 (1) は証明された.

それと同時に, $\mathcal{O}_F$ の p の上の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して, Theorem 2.1 (2) で得られる $\mathcal{F}|_{D_\mathfrak{p}}$ の情報も mod $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ されているので, Theorem 0.3 (2) も証明されたことになる.

Remark 2.1. 上述の証明の中で, $\rho_{\mathbf{f},\lambda}$ が $\rho_{\mathcal{F}}$ の mod $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ 表現として得られていることから, Remark 0.1 により, $\rho_{\mathcal{F}}$ も既約であることが導かれる (cf. Lemma 3.1).

2.2. **Theorem 0.2** (2) **と Theorem 0.3** (1) **の証明**

次に, Hilbert newforms $\mathbf{f}$ に付随する Galois 表現 $\mathcal{F}_{\mathbf{f},\lambda}$ にまつわる主結果 Theorem 0.2 と Theorem 0.3 の残りの主張の証明を概説する. 記号は, 前節のものと Introduction での記号とを併用する.

まず, $\mathbf{f}$ が λ で ordinary なとき, $\mathcal{O}_F$ の p と互いに素な任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における $\mathcal{F}_{\mathbf{f},\lambda}|_{D_\mathfrak{q}}$ の振る舞いを決定する Theorem 0.3 (1) の証明を概観しよう. 証明の目的は,

$$\sigma_\mathfrak{q} \cong \sigma(\pi_\mathfrak{q})$$

を示すことである. $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{c}p$ と互いに素なときは, Theorem 0.2 (1) で得られる $\mathrm{Trace}(\rho_{\mathbf{f},\lambda}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}))$ と $\det(\rho_{\mathbf{f},\lambda}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}))$ の公式から, ある不分岐な二つの characters $\mu_1,\ \mu_2$ で,

$$\mu_1(\mathfrak{q})\mu_2(\mathfrak{q}) = \psi(\mathfrak{q}), \quad \mu_1(\mathfrak{q}) + \mu_2(\mathfrak{q}) = c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})$$

なるものが存在して, 具体的に

$$\sigma_\mathfrak{q} \cong \mu_1 \oplus \mu_2$$

となることが示される. いずれにしても, Carayol [2] により, $\pi_\mathfrak{q}$ が principal series 表現でない場合には証明されているので, ここでは, $\pi_\mathfrak{q}$ が principal series 表現であると仮定して, $\sigma_\mathfrak{q} \cong \sigma(\pi_\mathfrak{q})$ を示せばよい. ある適当な character で twist をとることで, そもそも $c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})$ は 0 でないと仮定してよい.

$\mathbf{f}$ に付随する p-stabilized newform $e\mathbf{f}$ に対し, Theorem 1.10 により, F_{Λ_ψ} の有限次拡大 L と $(1 + T - u^{k-2}) \subset \Lambda_\psi$ の $\mathcal{O}_L$ への延長 $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ を適切にとって, L 上定義されたある Λ-adic eigenform $\mathcal{F}$ で

$$e\mathbf{f} \equiv \mathcal{F} \pmod{\tilde{P}_{\nu_{k,1}}}$$

となるものが存在する. Proposition 1.17 を通して, $\mathcal{F}$ に付随する Λ-adic newform $\mathcal{F}^*$ をとれば, $\mathfrak{q}$ が $\mathcal{F}^*$ の level を割るとき,

$$U(\mathfrak{q})\mathcal{F}^* = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})\mathcal{F}^*$$

であり, $\mathfrak{q}$ が $\mathcal{F}^*$ の level と互いに素なときは, $\beta(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) := c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})^{-1}\boldsymbol{\psi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$ とおいて,

$$T(\mathfrak{q})\mathcal{F}^* = (c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) + \beta(\mathfrak{q}, \mathcal{F}))\mathcal{F}^*$$

となる. 次節で概説する Theorem 2.1 の証明において, $\mathcal{F}^*$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}^*}$ を構成する際に, 無限個の Λ-adic eigenforms との合同 $\{\mathcal{F}^* \equiv \mathcal{G}_i \pmod{P_i}\}_{i=1}^\infty$ で, 各 i に対し $\mathcal{G}_i$ の任意の特殊化 $\mathbf{g} = \mathcal{G}_i (\mathrm{mod}\ P)$ がある素点で special 表現をもつようなものが用いられることに注意して, とくに, ここでは $c(\mathfrak{q}, \mathbf{f}) \neq 0$ と仮定しているから, 各 i に対し, $c(\mathfrak{q}, \mathcal{G}_i) \neq 0$ が成り立つとしてよい. このとき, 各 $\mathcal{G}_i$ の任意の特殊化 $\mathbf{g}$ に対しては, Carayol [2] の結果が適用できるので, $\mathbf{g}$

に付随する $W'_{F_\mathfrak{q}}$ の表現 $\sigma_{\mathbf{g},\mathfrak{q}}$ に対し, ある二つの characters μ_1, μ_2 で, とくに μ_2 は不分岐で $\mu_2(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) = c(\mathfrak{q}, \mathbf{g})$ を満たし,

$$\mu_1\mu_2 = \boldsymbol{\psi}N \pmod{P_i}$$

となるものが存在して,

$$\sigma^{\mathrm{ss}}_{\mathbf{g},\mathfrak{q}} = \mu_1 \oplus \mu_2$$

が成り立つ. ここで, ss は semisimplification を表す. したがって, $\mathcal{G}_i$ 自身に対しても同様に, ある二つの characters $\mu_{i,1}$, $\mu_{i,2}$ で, とくに $\mu_{i,2}$ は不分岐で $\mu_{i,2}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{G}_i)$ を満たし,

$$\mu_{i,1}\mu_{i,2} = \boldsymbol{\psi}N$$

となるものが存在して,

$$\sigma^{\mathrm{ss}}_{\mathcal{G}_i,\mathfrak{q}} = \mu_{i,1} \oplus \mu_{i,2}$$

が成立する (cf. ここの議論については, Lemma 3.2 の証明を参考のこと). よって, $\mathcal{F}^*$ に対しても全く同様に, ある二つの characters μ_1^*, μ_2^* で, とくに μ_2^* は不分岐で $\mu_2^*(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) = c(\mathfrak{q}, \mathbf{f})$ を満たし,

$$\mu_1^*\mu_2^* = \boldsymbol{\psi}N \pmod{P}$$

となるものが存在して,

$$\sigma^{\mathrm{ss}}_{\mathcal{F}^*,\mathfrak{q}} = \mu_1^* \oplus \mu_2^*$$

が成立するので, これを mod $\tilde{P}_{\nu_{k,1}}$ することで $\sigma_\mathfrak{q}$ の形が得られる. 一方で, この場合に知られている $\sigma(\pi_\mathfrak{q})$ の具体的な表示と比較することにより,

$$\sigma_\mathfrak{q} \cong \sigma(\pi_\mathfrak{q})$$

が得られるので, Theorem 0.3 (1) の証明は完結した.

最後に, $\mathbf{f}$ の weight が $k = 1$ の場合には, ある素 ideal で ordinary であるということを仮定せずとも, $\mathbf{f}$ に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への Galois 表現で像が有限なものが構成可能であることを主張する Theorem 0.2 (2) の証明を概説する. $k = 1$ の場合での Galois 表現の構成は, $F = \mathbb{Q}$ のときは Deligne-Serre [5] により得られ, 彼らの仕事は $[F : \mathbb{Q}]$ が奇数の場合に, Rogawski-Tunnell [18] によって一般化されている. その際の重要なポイントは, $\mathbb{C}$-係数の Galois 表現を入手するために, まず, ある標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ を係数にもつ Galois 表現を構成するということであった.

さて, Theorem 0.2 (2) にある $\mathbf{f}$ について, $\mathfrak{c}$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal l に対し, その剰余標数を p として, $\mathcal{O}_\mathbf{f}$ の p の上の素 ideal λ を一つ取っておく. $\psi(l)$ が l-unit であることから, 2 次方程式 $x^2 - c(l, \mathbf{f})x + \psi(l) = 0$ の根も l-unit となり, とくに $\mathbf{f}$ は λ で ordinary

である．Theorem 0.2 (1) は $k=1$ でも適用できるので, $\mathbf{f}$ に付随する λ-adic 表現

$$\rho_{\mathbf{f},\lambda} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda})$$

が得られる．それを mod λ することで $\mathbf{f}$ に付随した $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda}/\lambda)$ への Galois 表現が得られるので, あとは上述した Rogawski-Tunnell の議論を適用することで, 求める $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ への Galois 表現が得られる (cf. [18, Proposition 3.6]).

3. Λ-adic newforms に付随する Galois 表現

本節では, 前節で省略した Theorem 2.1 の証明を概説する.

3.1. 擬表現

Theorem 2.1 の証明の概説に入る前に, そのために必要な "擬表現" に関する重要な Lemmas を二つ準備しておく (cf. 擬表現の理論については [29, Section 1.3] にも若干の説明がされている．[29, Section 1.3] では, 擬表現から表現を復元することが主なテーマとなっているが, ここでは, 無限個の Galois 表現を貼り合わせることが主題となる):

Lemma 3.1 (=[27, Lemma 2.2.3])**.** p を素数とし, $F_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ を $\mathbb{Z}_p$-係数の 1 変数形式的冪級数環 $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ の商体とする．L を $F_{\mathbb{Z}_p[\![T]\!]}$ の任意の有限次拡大とし, その中での $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ の整閉包を $\mathcal{O}_L$ とおく．$\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ を $\mathcal{O}_L$ の相異なる高さ 1 の素 ideals の集合とする．各 i に対し, $\widetilde{\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i}$ を $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$ の整閉包とし,

$$\rho_i : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\widetilde{\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i})$$

を連続な Galois 表現で, F のある analytic density が 0 である素点の集合 Σ_i の外不分岐であるものとする．$\mathcal{O}_F$ の各素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し, ある $a_{\mathfrak{q}}$, $\varepsilon_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{O}_L$ が存在して, 各 i に対し $\mathfrak{q} \notin \Sigma_i$ なる任意の素 ideal について,

$$\mathrm{Trace}(\rho_i(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = a_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{a}_i},$$
$$\det(\rho_i(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \varepsilon_{\mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{a}_i}$$

が成り立つと仮定する．さらに, ある複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ で, 各 i に対し $\det(\rho_i(c)) = -1$ となるものが存在すると仮定する．このとき, 連続で $\Sigma := \cup_i \Sigma_i$ の外不分岐な L-係数の Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

で,

$$\mathrm{Trace}(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = a_{\mathfrak{q}},$$
$$\det(\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = \varepsilon_{\mathfrak{q}}$$

を満たすものが存在する．もし, Σ の analytic density が 0 ならば, semisimplification ρ^{ss} はただ一つに定まり, ρ が既約であるための必要十分条件は, ある i で ρ_i が既約になることである.

Proof. $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ の中には, p の上の素 ideal は一つも無いと仮定してよい．このとき, 各 i に対し, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$ は $\mathbb{Q}_p$ 上のある有限次拡大の整数環となる.

(i) $p \neq 2$ のとき: 各 i について, $2 \in (\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i)^{\times}$ であることに注意して, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$ は離散付値環だから, $(\widetilde{\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i})^2$ の基底をうまく選ぶことで, $\rho_i(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるようにできる (cf. [29, Section 1.3])．この基底のもと, 各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$\rho_i(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$$

とおいて, 各 $\sigma,\ \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$x_{\sigma,\tau}^{(i)} := b_\sigma^{(i)} c_\tau^{(i)}$$

と定義する．以下, 記号として i を省略することにし, $\sigma, \tau, \gamma, \beta$ は $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の任意の元を表すとして, 以上の定義により, 次の data (I) と関係式 (II)-(IV) が得られる:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \text{cont. functions on } \mathrm{Gal}(\bar{F}/F):\ a_\sigma,\ d_\sigma,\ x_{\sigma,\tau}, \\
&\text{(II)} && a_{\sigma\tau} = a_\sigma a_\tau + x_{\sigma,\tau}, \quad d_{\sigma\tau} = d_\sigma a_\tau + x_{\tau,\sigma}, \\
& && x_{\sigma\tau,\gamma\beta} = a_\sigma a_\beta x_{\tau,\gamma} + a_\beta d_\tau x_{\sigma,\gamma} + a_\sigma d_\gamma x_{\tau,\beta} + d_\tau d_\gamma x_{\sigma,\beta}, \\
&\text{(III)} && a_1 = d_1 = 1, \quad x_{\sigma,1} = x_{1,\tau} = 0, \\
&\text{(IV)} && x_{\sigma,\tau} x_{\gamma,\beta} = x_{\sigma,\beta} x_{\gamma,\tau}.
\end{aligned}$$

一般に, 単位的可換環 R に値をもつ $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 上の data (I) とその関係式 (II)-(IV) を合わせて R への**擬表現**と呼ぶことにする. $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の R-係数の表現 ρ から, 上述の構成を通して誘導される R への擬表現を $\tilde{\rho}$ とかくことにする．また, R への擬表現 $\alpha = (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ に対して,

$$\mathrm{Trace}\,\alpha(\sigma) := a_\sigma + d_\sigma, \quad \det\alpha(\sigma) := a_\sigma d_\sigma - x_{\sigma,\sigma} \qquad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

とおく.

さて, 各 i に対し, 上で ρ_i から構成した $\widetilde{\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i}$ への擬表現 $\tilde{\rho}_i := (a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ については, $\rho_i(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるため,

$$\begin{aligned} a_\sigma &= \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma)) - \mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma c))), \\ d_\sigma &= \frac{1}{2}(\mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma)) + \mathrm{Trace}(\rho_i(\sigma c))), \\ x_{\sigma,\tau} &= a_{\sigma\tau} - a_\sigma a_\tau \end{aligned}$$

が成り立つので, 素点の集合 Σ_i が analytic density 0 であることに注意して Chebotarev の稠密定理により, $\tilde{\rho}_i$ は $\widetilde{\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i}$ のみならず $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$ への擬表現であることがわかる. ここで, $2 \in (\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i)^\times$ であることに注意.

以下, 求める Galois 表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$ を構成する手助けとして, まず, ρ から誘導されるものに相当する $\mathcal{O}_L$ への擬表現 α を構成する. そのために, 各 $r \geq 1$ に対し, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r$ への擬表現 α_r で, 任意の $i = 1, \ldots, r$ について,

$$\alpha_r \equiv \tilde{\rho}_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$$

を満たすものがあるとき, 同様の条件を満たす $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{r+1}$ への擬表現 α_{r+1} を構成する: $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_r \cup \Sigma_{r+1}$ に属さない任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\mathrm{Trace}\, \alpha_r(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv a_\mathfrak{q} \pmod{\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r}$$

であり, 一方,

$$\mathrm{Trace}\, \tilde{\rho}_{r+1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv a_\mathfrak{q} \pmod{\mathfrak{a}_{r+1}}$$

であるので,

$$\mathrm{Trace}\, \alpha_r(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \equiv \mathrm{Trace}\, \tilde{\rho}_{r+1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) \pmod{(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1})}$$

を得る. よって, Chebotarev の稠密定理により, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 上で

$$\mathrm{Trace}\, \alpha_r \equiv \mathrm{Trace}\, \tilde{\rho}_{r+1} \pmod{(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1})}$$

となる. したがって, $\mathcal{O}_L/(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1})$ への擬表現として

$$\alpha_r \equiv \tilde{\rho}_{r+1} \pmod{(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1})}$$

が得られて, 剰余環のなす完全列

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{a}_{r+1} &\xrightarrow{(1)} (\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r) \oplus (\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_{r+1}) \\ &\xrightarrow{(2)} \mathcal{O}_L/(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1}) \to 0 \end{aligned}$$

により, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_{r+1}$ への擬表現 α_{r+1} で

$$\alpha_{r+1}\equiv\alpha_r \pmod{\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r},\quad \alpha_{r+1}\equiv\tilde{\rho}_{r+1} \pmod{\mathfrak{a}_{r+1}}$$

を満たすものが定まる. ここで, 上の完全列を定める準同型 (1), (2) はそれぞれ

(1) $x(\bmod\ \mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r\cap\mathfrak{a}_{r+1})\mapsto(x(\bmod\ \mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r),x(\bmod\ \mathfrak{a}_{r+1}))$,

(2) $(x(\bmod\ \mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r),y(\bmod\ \mathfrak{a}_{r+1}))\mapsto(x-y)(\bmod\ (\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r,\mathfrak{a}_{r+1}))$

で与えられるものである. 以上の操作を繰り返すことで, 擬表現の無限列 $\{\alpha_r\}_r$ が入手できて, 射影極限 $\varprojlim_r$ をとれば, $\mathcal{O}_L=\varprojlim_r\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_r$ への擬表現 $\alpha=(a_\sigma,d_\sigma,x_{\sigma,\tau})$ で, Σ に属さない任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$\operatorname{Trace}\alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})=a_{\mathfrak{q}},\quad \det\alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})=\varepsilon_{\mathfrak{q}}$$

を満たすものが定まる.

すべての $\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して $x_{\sigma,\tau}=0$ ならば,

$$\rho(\sigma):=\begin{pmatrix}a_\sigma & 0\\ 0 & d_\sigma\end{pmatrix}\qquad(\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

と定義し, ある $\sigma_0,\tau_0\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ で $x_{\sigma_0,\tau_0}\neq 0$ となるときは, $\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して,

$$c_\sigma:=x_{\sigma_0,\sigma},\quad b_\sigma:=\frac{x_{\sigma,\tau_0}}{x_{\sigma_0,\tau}}$$

とおいて,

$$\rho(\sigma):=\begin{pmatrix}a_\sigma & b_\sigma\\ c_\sigma & d_\sigma\end{pmatrix}\qquad(\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$$

と定義すれば, ρ は $\tilde{\rho}=\alpha$ となる $\mathrm{GL}_2(L)$ への Galois 表現となり, とくに Lemma 3.1 の条件を満たすものである.

(ii) $p=2$ のとき: 各 i について, $2\notin(\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i)^\times$ であり, (i) の擬表現の data $(a_\sigma,d_\sigma,x_{\sigma,\tau})$ のままでは, trace ρ_i は $\mathcal{O}_L$ に値をもつが,

$$a_\sigma,\ d_\sigma\in\frac{1}{2}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i),\quad x_{\sigma,\tau}=a_{\sigma\tau}-a_\sigma a_\tau\in\frac{1}{4}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i)$$

となるので, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$ に値をもたせたまま (i) と同様の議論をするために, (i) で採用した擬表現の data (I) を次のように修正する:

$$(\mathrm{I})'\quad \text{cont. functions on }\ \mathrm{Gal}(\bar{F}/F):\ 2a_\sigma,\ 2d_\sigma,\ 4x_{\sigma,\tau},\ \operatorname{Trace}\sigma.$$

それに合わせて関係式 (II)-(IV) も修正し, もう一つの関係式

$$(\mathrm{V})\quad (2a_\sigma)+(2d_\sigma)=2\operatorname{Trace}\sigma$$

を付け加えておく. この修正した擬表現を用いて (i) と全く同様に論ずることで, 求める Galois 表現 $\rho:\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\to\mathrm{GL}_2(L)$ が得られる.

さらに, Lemma 3.1 の後半の Σ の analytic density が 0 であるときの主張については, semisimplification の一意性は Chebotarev の稠密定理による trace の一意性から従い, 既約性の必要十分条件については, Galois 表現 ρ のもと不変な $\mathcal{O}_L$-lattice と各 ρ_i のもと不変な $\mathcal{O}_L/\mathfrak{a}_i$-lattice とを比較することで得られる. □

Lemma 3.1 を用いて, 特別な場合に Theorem 2.1 を証明しておく. これは, 次節で一般の場合に Λ-adic newforms に付随する Galois 表現を構成する際に, level と互いに素な無限個の素 ideals l を用いて, l に関して new な Λ-adic eigenforms に付随する Galois 表現に議論を帰着させるうえで, 重要な役割を果たすものである:

Lemma 3.2 (=[27, Lemma 2.2.4]). Theorem 2.1 の記号を用いることにする. $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}, \boldsymbol{\chi})$ を level $\bar{\mathfrak{n}}$, character χ をもつ L 上定義された Λ-adic newform とする. 次の二つの条件のうちいずれかが満たされていると仮定する:

(I) $[F:\mathbb{Q}]$ は奇数;

(II) $A_{\mathcal{F}}$ のある無限個の元 (k,ζ) が存在して, $\mathcal{F}$ の (k,ζ) での特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ に付

随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π がある素点で special 表現か supercuspidal

表現をもつ.

このとき, $\mathcal{F}$ に対して Theorem 2.1 は成立する.

Proof. (1) $\rho_{\mathcal{F}}$ の存在について: 条件 (I) もしくは (II) が仮定されているので, Introduction で述べたとおり, (I) の場合は任意の $(k,\zeta) \in A_{\mathcal{F}}$ に対し, 一方, (II) の場合には, その条件の中に現れる各 (k,ζ) に対して, $\mathcal{F}$ の特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{k,\zeta} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\widetilde{\mathcal{O}_L/\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}})$$

が存在する. $\{\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}\}_{(k,\zeta)}$ は相異なる無限個の $\mathcal{O}_L$ の素 ideals の集合であり, Lemma 3.1 を適用して, 求める $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(L)$$

が得られる.

(2) $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の振る舞いについて: p を割る $\mathcal{O}_F$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ を一つ取る.

$$\alpha : D_{\mathfrak{p}} \to L^{\times}$$

を不分岐な character で, $\alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ となるものとする. ここで, $D_{\mathfrak{p}}$ の二つの 2 次元表現

$$\rho_{\mathcal{F}},\ (\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}} \oplus \alpha) : D_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{GL}_2(L)$$

を考えると, $D_{\mathfrak{p}}$ 上で

$$\det\rho_{\mathcal{F}} = \alpha^{-1}(\det\rho_{\mathcal{F}})\alpha = \det(\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\alpha)$$

であり, 一方で, (1) の意味でとった各 (k,ζ) に対し, $\alpha(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{q},\mathcal{F})$ を mod $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$ したものは, $\rho_{\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})$ の特性多項式の根であることから,

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})}) = (\alpha(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}))^{-1}(\det\rho_{\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})}) + \alpha(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}})$$

となり, $D_{\mathfrak{p}}$ 上

$$\mathrm{Trace}(\rho_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Trace}(\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\alpha)$$

を得る. したがって, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の semisimplification は $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}\oplus\alpha$ と同値であり, とくに, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ は $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ か α で作用する 1 次元の部分表現をもつ. ここで, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ が $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ で作用する 1 次元の部分表現をもつことが示されれば, 一方の α は Theorem 2.1 (2) の主張にある ε_2 と同じ性質をもつので, $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ を ε_1 と見立てることで Lemma 2.1 (2) が証明されたことになる.

もし, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}} = \alpha$ ならば何も示すことはない. したがって, $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}} \neq \alpha$, かつ α が作用する 1 次元の部分表現が存在すると仮定して, $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ で作用する 1 次元の部分表現も存在することを示せばよい.

このとき基底をうまく選ぶことで, 任意の $\sigma\in D_{\mathfrak{p}}$ に対し,

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix}, \quad a_\sigma = \alpha(\sigma)$$

とおくことができる. Lemma 3.2 の仮定により, 無限個の (k,ζ) に対して, 次の二つの条件が満たされている:

(i) $\rho_{\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F})}$ は Introduction で述べられた Case 1 か Case 2 のいずれかを満たす;

(ii) $\alpha \not\equiv \alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ (mod $\tilde{P}_{\nu_{k,\zeta}}$).

とくに, Proposition 1.16 により, weight を $k=2$ に限定しても無限個の特殊化を考えることができて, Remark 0.3 (2) により, $\rho_{\tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ は $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}(\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{2,\zeta}})$ で作用する 1 次元の部分表現をもつ. よって, 無限個の $(2,\zeta)$ に対し,

$$b_\sigma \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \tilde{P}_{\nu_{2,\zeta}}) \qquad (\sigma\in D_{\mathfrak{p}})$$

となり, 任意の $\sigma\in D_{\mathfrak{p}}$ に対して,

$$b_\sigma = 0$$

が得られる. したがって,

$$\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & 0 \\ 0 & d_\sigma \end{pmatrix} \qquad (\sigma\in D_{\mathfrak{p}})$$

となり, とくに $\alpha^{-1}\det\rho_{\mathcal{F}}$ で作用する 1 次元の部分表現が存在することが示された. □

3.2. Theorem 2.1 の証明

本節では以上の準備のもと, [27] の主結果の一つである, Λ-adic newforms に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の存在と, p を割る素 ideal $\mathfrak{p}$ における $\rho_{\mathcal{F}}|_{D_{\mathfrak{p}}}$ の振る舞いに関する Theorem 2.1 の証明を概説する.

$\mathcal{F}\in\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}},\boldsymbol{\chi})$ を Theorem 2.1 の主張にある Λ-adic newform とする. $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現を構成する手助けとして, 議論する状況をすでに Galois 表現の存在が知られている場合へと移し替えるために, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal l をとり, l に関して new な Λ-adic eigenforms に着目する. F_{Λ_χ} の有限次拡大 L は $\mathcal{S}^0_{\bar{F}_{\Lambda_\chi}}(\bar{\mathfrak{n}}l,\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}}$ に属するすべての Λ-adic eigenforms が定義されるくらいに十分大きいと仮定しておく. $\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l,\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}}$ の基底として, $\{\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij}z)|$ 各 i について $\mathcal{F}_i$ は l で割り切れる level $\mathfrak{m}_i$ の newform で $\mathfrak{a}_{ij}$ は $\mathfrak{a}_{ij}\bar{\mathfrak{m}}_i|\bar{\mathfrak{n}}l$ を満たす整 ideal$\}_{i,j}$ がとれて, l に関して new であるという性質と Lemma 1.14 (2) により, 各 i について, 有限個を除くすべての $(k,\zeta)\in\mathfrak{X}$ に対し, $\mathcal{F}_i$ の特殊化 $\tilde{\nu}_{k,\zeta}(\mathcal{F}_i)$ は l で special 表現をもつ. よって, $\mathcal{F}_i$ に Lemma 3.2 を適用することができて, $\mathcal{F}_i$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}_i}:\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)\to\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_L)$$

が存在する. 上でとった基底と同じ添え字 i,j を走る直積をとることで, L-ベクトル空間

$$A:=\prod_{i,j}L$$

を定義すると, $\rho_{\mathcal{F}_i}$ の直積 $\rho':=\oplus_{i,j}(\rho_{\mathcal{F}_i}\otimes L)$ により, $W:=A\oplus A=\prod_{i,j}(L\oplus L)$ 上に $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が作用する. ここで, l と互いに素なすべての整 ideal $\mathfrak{m}$ に付随する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{m})$ たちで $\mathcal{O}_L$ 上生成される $\mathrm{End}(\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l,\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}})$ の $\mathcal{O}_L$-subalgebra を $\boldsymbol{T}$ とおき, 基底 $\{\mathcal{F}_i(\mathfrak{a}_{ij})\}$ による線形結合の係数を対応させる L-線形同型 $A\cong\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l,\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}}$ と $\boldsymbol{T}$ の $\mathcal{S}_L^0(\bar{\mathfrak{n}}l,\boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}}$ への作用を通して, A を $\boldsymbol{T}$-加群とみなす. $x=(x_{ij})\in A$ を $\mathfrak{a}_{ij}\bar{\mathfrak{m}}_i=\bar{\mathfrak{n}}l$ のときは $x_{ij}=1$, それ以外では $x_{ij}=0$ であるような元とすれば, $\boldsymbol{T}$ が l の外で定義されていることから, $\boldsymbol{T}$-加群としての自然な同型 $\boldsymbol{T}\xrightarrow{\sim}\boldsymbol{T}x$ と, $\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L$-加群としての自然な同型 $\boldsymbol{T}x\otimes_{\mathcal{O}_L}L\xrightarrow{\sim}A$ が定まるので, $\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L$-加群としての同型

$$\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L\xrightarrow{\sim}A$$

を得る. このとき, $W=A\oplus A\cong(\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L)^2$ は $\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L$-加群であり, 上で導入した W 上の $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用と $\boldsymbol{T}\otimes_{\mathcal{O}_L}L$ の作用は可換となる. 以上により, level $\bar{\mathfrak{n}}l$ の Hecke 環を係数とした 2 次元の Galois 表

現 ρ' が得られたことになる．このとき, ρ' の作り方により, $\mathfrak{n}l$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して,

$$\mathrm{Trace}(\rho'(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})) = T(\mathfrak{q}) \quad \text{in } \boldsymbol{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

となることに注意．ここで得られた Galois 表現 ρ' は l に関して new である level $\bar{\mathfrak{n}}l$ の Hecke 作用素が trace の値となるものであるが, 本来 Theorem 2.1 の証明として構成したい Galois 表現は, level $\bar{\mathfrak{n}}$ の Λ-adic newform $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値が trace の値となるものである．したがって, 証明を進めるためには, 考える Hecke 作用素を l に関して new なものから $\bar{\mathfrak{n}}$ で new なものへと移行する議論が必要であり, Section 1.7 で考察した $\mathcal{F}$ に付随する congruence module $C_{\mathcal{F}}(l)$ がその橋渡しの役割を果たすことになる (cf. この考え方は, Taylor [25] による Hilbert eigenforms に付随する Galois 表現の構成においても使われている．このことについては, [29, Section 2] を参照のこと).

改めて, $C_{\mathcal{F}}(l)$ を $\mathcal{F}$ に付随する congruence module とし, $C_L(l)$ を Theorem 1.21 の証明で定義した L-係数の congruence module とする．$C_L(\mathcal{F})$ はその定義により $\boldsymbol{T}$-加群の構造が入り, $\boldsymbol{T}$ の ideal I を

$$I := \mathrm{Ann}(C_L(l))(= \{t \in \boldsymbol{T} |\ tx = 0,\ \forall x \in C_L(l)\})$$

とおけば, l と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の整 ideal $\mathfrak{m}$ について, 任意の $\mathcal{H} \in H_L(l)$ を $\mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$ と $u,\ v \in L$ を用いて $\mathcal{H} = \mathcal{G} - u\mathcal{F} - v\mathcal{F}(lz)$ と表しておけば,

$$(T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m}, \mathcal{F}))\mathcal{H} = (T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m}, \mathcal{F}))\mathcal{G} \in \mathcal{S}^0_L(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})^{\mathrm{new}} \cap \mathcal{S}^0_{\mathcal{O}_L}(\bar{\mathfrak{n}}l, \boldsymbol{\chi})$$

となるので, $T(\mathfrak{m}) - c(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) \in I$ となる．よって, $\mathcal{O}_L$-algebra としての構造射 $\mathcal{O}_L \to \boldsymbol{T}/I$ の kernel を $\mathfrak{b}_l$ とおけば, $\mathcal{O}_L$-algebras の同型

$$\boldsymbol{T}/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l, \quad T(\mathfrak{m}) \mapsto c(\mathfrak{m}, \mathcal{F})$$

が誘導される．これで, l に関して new である Hecke 作用素から $\bar{\mathfrak{n}}$ で new な $\mathcal{F}$ の Hecke 固有値への橋渡しがなされたことになる．ここで, 橋渡しの行先が $\mathcal{O}_L$ 自身ではなく, 剰余環 $\mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l$ とならざるを得ないことに注意. この同型を手掛かりに, Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ の構成に向けて議論を進めよう．

$\mathcal{O}_L$ の高さ 1 の素 ideal Q で $\mathfrak{b}_l$ を含むもの, すなわち $v_Q(\mathfrak{b}_l) > 0$ となるものをとる. 同型 $\boldsymbol{T}/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l$ により, $\mathcal{O}_L/\mathfrak{b}_l$ の素 ideal $Q/\mathfrak{b}_l$ を引き戻して得られる $\boldsymbol{T}$ の I を含む素 ideal を $\mathfrak{P}$ とおく. $\boldsymbol{T}$-加群 A, W を $\mathfrak{P}$ で局所化した $\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}}$-加群 をそれぞれ $A_{\mathfrak{P}}, W_{\mathfrak{P}}$ とかくことにする. W 上の Galois 作用 ρ' から自然に誘導される $W_{\mathfrak{P}}$ 上の Galois 作用 $\rho'_{\mathfrak{P}}$ について, 複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対する固有ベクトル w^+, w^- からなる $\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$-加群としての $W_{\mathfrak{P}}$ の基底に関して $\rho'_{\mathfrak{P}}$ を行列表示して得られる Galois 表現を

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\mathcal{O}_L} L)$$

とする．Chebotarev の稠密定理により, ρ から誘導される擬表現 $\tilde{\rho}$ は $\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}}$ に値をもち, それを mod I することで, $\mathcal{O}_L/I$ への擬表現 $\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ I)$ で, $\mathfrak{n}lp$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して,

$$\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ I))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})(\mathrm{mod}\ I),$$
$$\det(\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ I))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}(\mathrm{mod}\ I)$$

となるものが得られる．とくに, $P := Q \cap \Lambda_{\mathcal{F}}$ とおけば, $\tilde{\rho}$ は $\Lambda_{\mathcal{F},P}/\mathfrak{b}_l \cap \Lambda_{\mathcal{F},P}$ に値をとることがわかる．$\mathfrak{b}_l \subset Q$ であるから, $\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ I)$ を mod P することができて, $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P$ への擬表現 $\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ P)$ で $\mathfrak{n}lp$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して,

$$\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ P))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})(\mathrm{mod}\ P),$$
$$\det(\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ P))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}(\mathrm{mod}\ P)$$

となるものを得る．$\Lambda_{\mathcal{F},P}/P$ の中での $\Lambda_{\mathcal{F}}/P$ の整閉包を $\widetilde{\Lambda_{\mathcal{F}}/P}$ とすれば, これは $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P$ を商体にもつ離散付値環となるので, Lemma 3.1 の証明にあるように, $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P$ への擬表現 $\tilde{\rho}(\mathrm{mod}\ P)$ から, $\mathfrak{n}lp$ の外不分岐な 2 次元 Galois 表現

$$\rho_P : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\widetilde{\Lambda_{\mathcal{F}}/P})$$

で, $\mathfrak{n}lp$ と互いに素な素 ideal $\mathfrak{q}$ に対して, $\rho_P(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ の特性多項式が $(x^2 - c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q})(\mathrm{mod}\ P)$ で与えられるものが構成される．これは, 本来構成しようとしている $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ がもつべき $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}$ における特性多項式を mod P した形になっており, もし $\mathfrak{n}$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideals l を無限個動かすとき, それに伴って $v_Q(\mathfrak{b}_l) > 0$ なる $\mathcal{O}_L$ の高さ 1 の素 ideal Q について $P = Q \cap \Lambda_{\mathcal{F}}$ とおくことで, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の相異なる無限個の高さ 1 の素 ideals P が得られることが保証されれば, Lemma 3.1 を無限個の Galois 表現 $\{\rho_P : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\widetilde{\Lambda_{\mathcal{F}}/P})\}_P$ に適用して, $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(M_{\mathcal{F}})$$

が得られることになる．ここで, l を動かしたときに着目する素 ideal Q の条件として, $v_Q(\mathfrak{b}_l) > 0$ という不等式をそのまま用いるとなると, ideal $\mathfrak{b}_l$ がどちらかといえば抽象的なものであるため, 素 ideal Q における付値を評価しにくいきらいがある．そこで, Theorem 1.21 を用いて, $\mathfrak{b}_l$ の付値の評価からより具体的な対象の付値を評価する議論へと帰着させよう．

$\mathcal{F}$ に付随する conguruence modules の定義により, 自然な injection

$$C_{\mathcal{F}}(l) \otimes_{\Lambda_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_L \hookrightarrow C_L(l)$$

があり, 一方で, Lemma 1.19 (1) により, $F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}$ のある分数 ideal $\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}$ が存在して,

$$C_{\mathcal{F}}(l) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}/\Lambda_{\mathcal{F}}$$

が成り立つので, L における divisors の不等式

$$\mathrm{div}_L(\mathfrak{b}_l) \geq -\mathrm{div}_L(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}\mathcal{O}_L)$$

を得る. さらに, 2 次方程式 $x^2 - c(l,\mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(l)Nl = 0$ の根 $\alpha(l,\mathcal{F})$ と $\beta(l,\mathcal{F})$ を用いて,

$$\begin{aligned} w_l &:= (\alpha(l,\mathcal{F})^2 - \boldsymbol{\chi}(l))(\beta(l,\mathcal{F})^2 - \boldsymbol{\chi}(l)) \\ &= -\boldsymbol{\chi}(l)(c(l,\mathcal{F})^2 - \boldsymbol{\chi}(l)(1+Nl)^2) \end{aligned}$$

とおけば, Theorem 1.21 により, l に依存しないある $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ と $c \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$-\mathrm{div}_l(\mathfrak{a}_{\mathcal{F},l}) \geq \mathrm{div}_L(w_l) - \mathrm{div}_L(v) - c\mathrm{div}_L(1+Nl)$$

が成り立つので, 結果として

$$\mathrm{div}_L(\mathfrak{b}_l) \geq \mathrm{div}_L(w_l) - \mathrm{div}_L(v) - c\mathrm{div}_L(1+Nl)$$

が得られる. よって, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の有限個を除くすべての高さ 1 の素 ideals P に対し $v_P(v) = v_P(1+Nl) = 0$ であることに注意して, $\mathfrak{n}$ と互いに素な素 ideals l を動かしたときに, それに伴って $v_P(w_l) > 0$ となる相異なる P が無限個とれることが保証されれば, $\mathcal{O}_L$ の P の上の素 ideal Q は $v_Q(\mathfrak{b}_l) > 0$ を満たすことになるので, 上述の議論が機能して $\rho_{\mathcal{F}}$ が構成されることになる. 以下, l を動かしたときの $v_P(w_l) > 0$ となる素 ideal P の振る舞いについて考察する.

まず, ここで動かす素 ideals l について考える. Proposition 1.16 により, ある整数 $r \geq 1$ と 1 の p^r-乗根 ζ が存在して, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ と準同型 ν_{2,ζ^σ} の任意の延長 $\tilde{\nu}_{2,\zeta^\sigma}$ に対し, $\tilde{\nu}_{2,\zeta^\sigma}(\mathcal{F})$ は $S_2^0(\bar{\mathfrak{n}}, \chi_{\tilde{\nu}_{2,\zeta^\sigma}})$ に属する newform となる. とくに, $\mathbf{f} := \tilde{\nu}_{2,\zeta}(\mathcal{F})$ とおき, その character を $\chi_{\mathbf{f}}$ とする. $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l に対し, 2 次方程式 $x^2 - c(l,\mathbf{f})x + \chi_{\mathbf{f}}(l)N(l) = 0$ の根を α_l, β_l とする. これらは, $\bar{\mathbb{Q}}$ の中の代数的整数であることに注意. 正の整数 n に対し, $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の素 ideal l で次の三つの条件を満たすもののなす集合を S_n とおく:

(i) $Nl \equiv 1 \pmod{p^n}$;
(ii) $\chi_{\mathbf{f}}(l) = 1$;
(iii) $\alpha_l^2 \equiv \beta_l^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$.

Claim. このとき, S_n は正の analytic density をもつ.

Proof. F の $\bar{\mathbb{Q}}$ における $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包を F^{cl} とおき, F の F^{cl} への体の埋め込み全体を $T := \{\tau : F \hookrightarrow F^{\mathrm{cl}}\}$ とおく. Brylinski-Labesse

[1] により, 各素数 p とそれを剰余標数にもつ $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ の素 ideal λ に対し, ある 2^d 次元の Galois 表現

$$\rho_p : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_{2^d}(\mathcal{O}_{\mathbf{f},\lambda})$$

で, F^{cl} で完全分解するような $\mathcal{O}_F$ の有限個を除くすべての素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し, $\rho_p(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ のすべての固有値のなす集合が

$$E_l := \{\prod_{\tau\in T_1} \alpha_{\tau(\mathfrak{q})} \prod_{\tau\in T_2} \beta_{\tau(\mathfrak{q})} |\ T_1 \sqcup T_2 = T\}$$

で与えられるものが存在する. このとき, 素 ideal l として, 上の $\mathfrak{q}$ の条件を満たすもののうち, さらに, $F(\zeta_{p^n})$, $\mathrm{Ker}\,\chi_{\mathbf{f}}$ に対応する体, そして $\mathrm{Ker}(\rho_p(\mathrm{mod}\ p^{2^d n}))$ に対応する体において完全分解するものをとれば, そのような l たちのなす集合は正の analytic density をもち, 一方で, $Nl \equiv 1 \pmod{p^n}$ かつ $\chi_{\mathbf{f}}(l) = 1$ より, $\chi_{\mathbf{f}}(l)Nl = \alpha_l\beta_l \equiv 1 \pmod{p^n}$ となり,

$$\alpha_l^2 \equiv \beta_l^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$$

を得る. したがって, l は S_n の三つの条件を満たすので, S_n も正の analytic density をもつことが示された. $\square$

Remark 3.1. この S_n が正の analytic density をもつという考察と同様のことが, Taylor [25] による Galois 表現の構成においても重要な役割を果たす (cf. [29, Lemma 2.3]).

以下, 無限集合 S_n に属する素 ideal l に着目して, $v_P(w_l) > 0$ となる $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の素 ideal P について考察を進める. もし, 無限個の n について, $l \in S_n$ に対し $\tilde{\nu}_{2,\zeta}(w_l) = 0$ となるならば, $\chi_{\mathbf{f}}(l) = 1$ より $c(l,\mathbf{f}) = \pm(1+Nl)$ となるが, これは $\mathbf{f}$ が l で principal series 表現をもつことに矛盾する. したがって, n が十分大きいときは, 任意の $l \in S_n$ に対し, $\tilde{\nu}_{2,\zeta}(w_l) \neq 0$ を得る. ここで, $\tilde{\nu}_{2,\zeta}$ を $M_{\mathcal{F}}$ の $F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}$ 上の Galois 閉包 $M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{cl}}$ まで延長しておけば, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{cl}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}})$ に対して, $\tilde{\nu}_{2,\zeta}(w_l^{\sigma}) \neq 0$ も得られて,

$$\nu_{2,\zeta}(N_{M_{\mathcal{F}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(w_l)) \neq 0$$

が成立する. 十分に大きな n は自由に動いてもよいとしたうえで, 素 ideal $l \in S_n$ が任意に動いたとき, $\{w_l \in \Lambda_{\mathcal{F}}\}_l$ の divisor たちは有界である, すなわち l に依存しない $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の高さ 1 の素 ideals からなるある有限集合 Σ_1 と正の整数 N_1 が存在して, 十分に大きな n に対して素 ideal $l \in S_n$ を任意に動かしても, ある $P_i \in \Sigma_1$ と正の整数 r_i たちにより,

$$\mathrm{div}_{M_{\mathcal{F}}}(w_l) = \sum_i r_i P_i, \qquad \sum_i r_i \leq N_1$$

とできると仮定する．このとき, $\{N_{M_{\mathcal{F}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(w_l)\}_l$ についても同様に, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の高さ 1 の素 ideals からなるある有限集合 Σ_2 と正の整数 N_2 が存在して, 十分に大きな n に対して素 ideal $l \in S_n$ を任意に動かしても, ある $\theta_i \in \Sigma_2$ と正の整数 s_i たちにより,

$$\mathrm{div}(M_{\mathcal{F}}) = \sum_i s_i\theta_i, \qquad \sum_i s_i \leq N_2$$

とかける．よって, $\nu_{2,\zeta}$ で特殊化すれば, $\nu_{2,\zeta}(N_{M_{\mathcal{F}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(w_l)) \neq 0$ であることと合わせて, いま考察の対象になっている十分大きな n の中に, l に依存しないある κ が存在して,

$$\nu_{2,\zeta}(N_{M_{\mathcal{F}}/F_{\Lambda_{\mathcal{F}}}}(w_l)) \not\equiv 0 \pmod{p^\kappa}$$

となる．しかし, l としてとくに S_κ の元をとったとき,

$$\alpha^2 \equiv 1 = \chi_{\mathbf{f}}(l) \pmod{p^\kappa}$$

であるので,

$$\nu_{2,\zeta}(w_l) \equiv 0 \pmod{p^\kappa}$$

となり矛盾が生じる．したがって, $\{w_l\}_l$ の divisor たちは, 十分大きな n とそれに伴う素 ideal $l \in S_n$ を自由に動かしたとき有界にはなり得ない. つまり, 次の二つの場合のうち少なくとも一方が起こり得ることになる:

Case (i) ($\{w_l\}_l$ の divisors に現れる $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の素 ideals が無限個生じる場合): $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の相異なる無限個の高さ 1 の素 ideals P_i と $\mathfrak{n}p$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の (相異なるとは限らない) 素 ideals l_i の組 (P_i, l_i) で, $v_{P_i}(w_{l_i}) > 0$ となるものが存在する;

Case (ii) ($\{w_l\}_l$ の divisors に現れる素 ideals P の中に, 付値 $v_P(w_l)$ の大きさが非有界なものが存在する場合): $\Lambda_{\mathcal{F}}$ のある高さ 1 の素 ideal P が存在して, 任意の正の整数 κ と n ごとに, 正の analytic density をもつ S_n の部分集合 $\mathcal{D}_n$ がうまくとれて, すべての $l \in \mathcal{D}_n$ に対し $v_P(w_l) > \kappa$ が成り立つ.

以下, Case (i) において求めている $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ を構成することができることを示し, 一方, Case (ii) はそもそも起こり得ないことを示すことで, Theorem 2.1 の証明を終了したい.

まず, Case (i) において $\rho_{\mathcal{F}}$ を構成する． このとき, 上述の $\{w_l\}_l$ の divisors の非有界性を示す議論により, Case (i) の条件に現れる組 (P_i, l_i) からなるある集合 $A := \{(P_i, l_i) |\ v_{P_i}(w_{l_i}) > 0\}$ で, $S_A := \{l_i|$ ある P_i があって $(P_i, l_i) \in A\}$ の analytic density が 0 になるものがとれる．先に示した divisors の不等式

$$\mathrm{div}_L(\mathfrak{b}_l) \geq \mathrm{div}_L(w_l) - \mathrm{div}_L(v) - c\,\mathrm{div}_L(1 + Nl)$$

により, 有限個を除くすべての $(P_i, l_i) \in A$ に対して,

$$v_{P_i}(\mathfrak{b}_{l_i} \cap \Lambda_{\mathcal{F}}) > 0$$

が成立するので, 本節の前半で構成したように $\mathfrak{n}l_ip$ の外不分岐なある Galois 表現

$$\rho_i : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\widetilde{\Lambda_{\mathcal{F}}/P_i})$$

で, $\mathfrak{n}l_ip$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における $\rho_i(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ の特性多項式が

$$(x^2 - c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}) \pmod{P_i}$$

で与えられるものが存在する. よって Lemma 3.1 により, $S_{A\mathfrak{n}p} := S_A \cup \{\mathfrak{n}p$ の素因子 $\}$ の外不分岐で semisimple なある Galois 表現

$$\rho_A : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) \to \mathrm{GL}_2(M_{\mathcal{F}})$$

で, $S_{A\mathfrak{n}p}$ に属さない $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ における $\rho_A(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ の特性多項式が

$$x^2 - c(\mathfrak{q}, \mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$$

で与えられるものが構成できる. 任意の $l \in S_A$ について, $S_A \setminus \{l\}$ に対しても全く同様な, $S_{A\mathfrak{n}p} \setminus \{l\}$ の外不分岐で semisimple な Galois 表現 $\rho_{A\setminus\{l\}}$ が構成されて, S_A が analytic density 0 であることから, Chebotarev の稠密定理を適用して, $\rho_A \cong \rho_{A\setminus\{l\}}$ を得る. とくに ρ_A 自身, 任意の $l \in S_A$ においても不分岐となり, $\rho_A(\mathrm{Frob}_l)$ の特性多項式は

$$x^2 - c(l, \mathcal{F})x + \boldsymbol{\chi}(l)Nl$$

で与えられる. よって, $\mathcal{F}$ に付随する Galois 表現 $\rho_{\mathcal{F}}$ として ρ_A を採用することができ, Theorem 2.1 (1) は証明された. さらに, 有限個を除くすべての $(P_i, l_i) \in A$ について, $\rho_A (\mathrm{mod}\ P_i) = \rho_i$ が Lemma 3.2 を用いて構成されていることから, p を割る $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ において, $\rho_i|_{D_\mathfrak{p}}$ は可約であり, ある二つの characters $\varepsilon_{1,i}$, $\varepsilon_{2,i}$ で, とくに $\varepsilon_{2,i}$ は不分岐で $\varepsilon_{2,i}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F}) (\mathrm{mod}\ P_i)$ を満たすものが存在して,

$$\rho_i|_{D_\mathfrak{p}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,i} & * \\ 0 & \varepsilon_{2,i} \end{pmatrix}$$

とかけることが示される. よって, Lemma 3.2 の証明で, 有限個を除くすべての (k, ζ) での特殊化を用いて $D_\mathfrak{p}$ に制限したときの形を決定した議論を, いまの状況において $\{\rho_A (\mathrm{mod}\ P_i) = \rho_i\}_i$ に適用することで, $\rho_A|_{D_\mathfrak{p}}$ に対し, ある二つの characters ε_1, ε_2 で, とくに ε_2 は不分岐で $\varepsilon_2(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) = c(\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ を満たすものが存在して,

$$\rho_A|_{D_\mathfrak{p}} \cong \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & * \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

と表せることが示されて, Theorem 2.1 (2) も証明できた.

続いて, Case (ii) はそもそも起こり得ないことを示すことで, Theorem 2.1 の証明を完結したい. そのために, Case (ii) の条件に現れる $\Lambda_{\mathcal{F}}$ の高さ 1 の素 ideal P が実際に存在すると仮定して矛盾を導く. このとき, Theorem 1.21 の不等式に現れる l に依存しない $v \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ をとり, 任意の正の整数 m に対し $\kappa := m + v_P(v)$ とおき, 一方で, 正の整数 n を一つ選んでおく. $\mathcal{D}_n$ の analytic density が正であるという条件を保ったまま, 任意の $l \in \mathcal{D}_n$ に対して $v_P(1+Nl) = 0$ が成り立つと仮定してよい. この状況で, 任意の $l \in \mathcal{D}_n$ に対し, $v_P(w_l) > \kappa$ であることと Theorem 1.21 で得られた不等式

$$\mathrm{div}_L(\mathfrak{b}_l) \geq \mathrm{div}_L(w_l) - \mathrm{div}_L(v) - c\,\mathrm{div}_L(1+Nl)$$

を $\Lambda_{\mathcal{F}}$ に制限したものから,

$$v_P(\mathfrak{b}_l \cap \Lambda_{\mathcal{F}}) > \kappa - v_P(v) = m$$

を得る. 本節の前半における Hecke 環 $\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ を係数にもつ 2 次元 Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{T}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\mathcal{O}_L} L)$$

の構成を通して, $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^m$ に値をもつ擬表現 $\tilde{\rho}_m$ で, $\mathfrak{n}lp$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$(\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}_m))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}) \pmod{P^m},$$
$$(\det(\tilde{\rho}_m))(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) = \chi(\mathfrak{q}) N\mathfrak{q} \pmod{P^m}$$

を満たすものが得られる. ここで, 高さ 1 の素 ideal P が p の上にあるかどうかで場合分けをする:

(I) P が p の上にない場合: 各 m に対し, $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^m$ に値をもつもう一つの擬表現 $\tilde{\rho}'_m$ で,

$$\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}'_m) = \mathrm{Trace}(\tilde{\rho}_m), \quad \det(\tilde{\rho}'_m) = \det(\tilde{\rho}_m)$$

を満たし, $\tilde{\rho}'_m$ に付随する data $x_{\sigma,\tau}$ が任意の $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して,

$$x_{\sigma,\tau} = 0$$

となるものを構成できることを示す. ここでの狙いは, この擬表現の族 $\{\tilde{\rho}'_m\}_m$ を用いて, Remark 0.1 での考察, つまり Hilbert newforms に付随する Galois 表現が既約であることに矛盾する Galois 表現の存在を誘導することである.

$\{\tilde{\rho}'_m\}_m$ の構成に際し, 付随する data $x_{\sigma,\tau}$ について, $\Lambda_{\mathcal{F},P}$ において $(x_{\sigma,\tau} |\ \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) = P^t$ なる t に関する帰納法を用いる. そこで, ひとまず上述の性質を満たす擬表現 $\tilde{\rho}'_t$ で $(x_{\sigma,\tau} |\ \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) = P^t$ となるものが入手できたとする. 以下, この仮定のもとで, 同様の性質をもつ $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^{t+1}$ への擬表現 $\tilde{\rho}'_{t+1}$ で, 付随する data $x_{\sigma,\tau}$ が $(x_{\sigma,\tau} |\ \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) \subset P^{t+1}$ を満たすようなものを構成しよう. いま, $\tilde{\rho}'_t$ につい

て $(x_{\sigma,\tau}|\ \sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)) = P^t$ であるから, ある $\sigma_0, \tau_0 \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が存在して,

$$x_{\sigma_0,\tau_0} \not\equiv 0 \pmod{P^{t+1}}$$

が成り立つ. Lemma 3.1 の証明における擬表現から Galois 表現を復元する議論を適用して, $\tilde{\rho}'_t$ の data $(a_\sigma, d_\sigma, x_{\sigma,\tau})$ を手がかりにして, Galois 表現

$$\rho := \rho_{t+1} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^{t+1}), \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} \pmod{P^{t+1}}$$
$$\left(b_\sigma := \frac{x_{\sigma,\tau_0}}{x_{\sigma_0,\tau_0}},\ c_\sigma := x_{\sigma_0,\sigma}\right)$$

が定まり, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し, $c_\sigma \equiv 0 \pmod{P^t}$ が成り立つ. ここで, F_χ を $\mathrm{Ker}\,\chi$ に対応する F の拡大とし, $F' := F_\chi(\zeta_8)$ に制限することで, $\boldsymbol{\chi}$ の平方根 $\boldsymbol{\chi}^{\frac{1}{2}}$ を考えることができ,

$$\eta := \rho \otimes \boldsymbol{\chi}^{\frac{1}{2}} : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F') \to \mathrm{GL}_2(\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^{t+1})$$

とおく. このとき, 任意の $l' \in \mathcal{D}_n$ は F' で完全分解すると仮定しておいてよい. この状況のもとで, 任意の $l' \in \mathcal{D}_n$ における $\eta((\mathrm{Frob}_{l'})^2)$ の固有値の少なくとも一つは 1 であるので, Serre [19, Corollary 2 in Section I.2.2] により, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ の部分集合 $U := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F')|\ \eta(\sigma^2)$ の固有値の少なくとも一つは 1 である $\}$ は, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ の Haar 測度 μ に関して正の測度をもつ. したがって, 二つの部分集合 $U^+ := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F')|\ \eta(\sigma)$ の固有値の少なくとも一つは 1 である $\}$ と $U^- := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F')|\ \eta(\sigma)$ の固有値の少なくとも一つは -1 である $\}$ のうち, どちらか一方は必ず正の測度をもつことになる. 仮に, それが U^+ の方であるとしておく (以下の議論は, U^- が正の測度をもつ場合にも全く同様に機能するものである).

$l' \in \mathcal{D}_n$ で $\mathfrak{n}lp$ と互いに素なものをとり, $\tau := (\mathrm{Frob}_{l'})^2$ とおけば, $\det \eta(\tau) = (Nl')^2$ であり, とくに τ の位数は無限大となる. よって, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ の正の測度をもつ部分集合の無限列 $U^+, \tau U^+, \tau^2 U^2, \ldots$ の中で必ず overlap するところがあるはずなので, ある正の整数 i があって,

$$\mu(U^+ \cap \tau^i U^+) > 0$$

が成り立つ. P は p の上にないので, とくに $(Nl')^2 \equiv 1 \pmod{P}$ であるから, η の表現空間の基底として $\eta(\tau)$ の固有ベクトルからなるものをとれて, その基底のもとで表現行列をとれば,

$$\eta(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (Nl')^2 \end{pmatrix}$$

を得て, 一方で, $\sigma \in U^+ \cap \tau^i U^+$ に対しては, 表現行列

$$\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

において, $bc \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}$ が成り立つ. したがって, 正の測度をもつ集合 $U^+ \cap \tau^i U^+$ 上で, $b \equiv 0 \pmod{P}$ か $c \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}$ が成立することになる. これらの条件はそれぞれ $\mathrm{Image}(\eta)$ 内の有限な指数をもつ部分群を定義し, η を F のある有限次拡大 F'' に制限したとき, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$ の各元の η による像は, 二つの部分群 $\{b \equiv 0 \pmod{P}\}$ か $\{c \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}\}$ のいずれかに含まれる. η は ρ の twist であるから, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$ に制限した ρ についても同様のことがいえて, $\rho(\mathrm{mod}\ P)^{\mathrm{ss}}$ を $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$ に制限して二つの characters χ_1 と χ_2 により $\begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ と表したとき, χ_1 と χ_2 の商の位数は無限大なので, $\mathrm{Image}(\rho|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')})$ 自身が $\{b \equiv 0 \pmod{P}\}$ か $\{c \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}\}$ のいずれかに含まれてしまう. 仮に, $c \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}$ の方に含まれるとする. ここで採用している基底に関して, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$$

とおき,

$$c(\sigma) := \chi_1(\sigma) c_\sigma \in P^t/P^{t+1}$$

と定義すれば, c は $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$-右不変な $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 上の関数となる. もし, ある $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ で $c(\sigma) \neq 0$ となれば, 任意の $b \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$ に対して,

$$c(b\sigma) = (\chi_1^{-1}\chi_2)(b)c(\sigma)$$

であり, $\chi_1^{-1}\chi_2$ の位数は無限大であることから, b が動いたとき c は相異なる無限個の値をとることになる. これは, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')$ が $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 内で指数が有限であることに矛盾するので, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$c(\sigma) = 0$$

となる. $\mathrm{Image}(\rho|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')})$ が $\{b \equiv 0 \pmod{P}\}$ に含まれると仮定した場合でも, 同様の議論が機能し, いずれにしても, ρ に付随する $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^{t+1}$ への擬表現 $\tilde{\rho}$ をとれば, その data $x_{\sigma,\tau}$ は, 任意の σ, $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$x_{\sigma,\tau} \equiv 0 \pmod{P^{t+1}}$$

を満たすので, 擬表現 $\tilde{\rho}$ がここで求めていた $\tilde{\rho}'_{t+1}$ の役割を果たすものである. 以上の構成を繰り返すことで, 任意の正の整数 m に対し (I) の前半にあるような $\Lambda_{\mathcal{F},P}/P^m$ への擬表現 $\tilde{\rho}'_m$ で,

$$\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}'_m) = \mathrm{Trace}(\tilde{\rho}_m), \quad \det(\tilde{\rho}'_m) = \det(\tilde{\rho}_m)$$

を満たし, 付随する data $x_{\sigma,\tau}$ が任意の $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して,

$$x_{\sigma,\tau} = 0$$

となるものが構成できた. それらの m に関する射影極限 $\tilde{\rho}'_\infty := \varprojlim_m \tilde{\rho}'_m$ は, $\Lambda_{\mathcal{F}}$ への擬表現で, $\mathfrak{n}lp$ と互いに素な $\mathcal{O}_F$ の任意の素 ideal $\mathfrak{q}$ に対し,

$$(\mathrm{Trace}(\tilde{\rho}'_\infty))(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) = c(\mathfrak{q}, \mathcal{F}),$$
$$(\det(\tilde{\rho}'_\infty))(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}) = \boldsymbol{\chi}(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}$$

を満たし, 付随する data $x_{\sigma,\tau}$ は任意の $\sigma,\ \tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対し,

$$x_{\sigma,\tau} = 0$$

が成り立つものである. このとき, Lemma 3.1 の証明にあるように, $\tilde{\rho}'_\infty$ から復元される Galois 表現

$$\rho'_\infty : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\Lambda_{\mathcal{F}})$$

は可約であり, 一方で, trace と determinant は $\tilde{\rho}'_\infty$ のものと等しいので, $\mathcal{F}$ の newforms への特殊化をとったときに, それに付随する Galois 表現として可約なものがとれてしまい, Remark 0.1 での考察に矛盾する. 以上により, (I) の場合での背理法は完結した.

(II) P が p の上にある場合: Lemma 3.1 の証明にあるように, (I) との場合分けに入る前に入手できていた $\Lambda_{\mathcal{F},P}$ への擬表現 $\tilde{\rho}_1$ から復元される Galois 表現

$$\rho_1 : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\Lambda_{\mathcal{F},P}/P)$$

の存在そのものから矛盾が導かれることを示す. (I) と同じ記号を用いて, F' に制限することで $\eta := \rho \otimes \boldsymbol{\chi}^{\frac{1}{2}}$ を考える. Lemma 3.2 により, p を割る $\mathcal{O}_F$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ について,

$$(\rho_1|_{D_\mathfrak{p}})^{\mathrm{ss}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり, η に対してうまく基底をとることで, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ のある元 τ で, 表現行列が

$$\eta(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

の形になるものがとれる. とくに, $\eta(\tau)$ の固有値の位数は無限大となる. このとき, (I) と全く同様に, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ の部分集合 U, U^+, U^- をとって, U^+ が正の測度をもっていると仮定する (U^- が正の測度をもつと仮定しても全く同様の議論が機能する). ある正の整数 i が存在して,

$$\mu(U^+ \cap \tau^i U^+) > 0$$

が成立し, 任意の $\sigma \in U^+ \cap \tau^i U^+$ について,

$$\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$a_\sigma = 2(1 + \alpha^{-1})$$

が成り立つ．したがって, $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$ の部分集合

$$U_0 := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F') |\ a_\sigma = 2(1+\alpha^{-1})\}$$

は正の測度をもつことになる．さらに, 任意の正の整数 r に対し, U_0 の元に τ^r をかけて η を施すことで,

$$U_r := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F') |\ a_\sigma = 2\alpha^r(1+\alpha^{-1})\}$$

も正の測度をもつことになるが, これは, $r \neq r'$ のとき $U_r \cap U_{r'} = \emptyset$ であることに矛盾する．以上により, (II) の場合での背理法が完結し, Theorem 2.1 の証明は終了した.

References

[1] J.L. Brylinski and J.P. Labesse, Cohomologies d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) **17** (1984), 361-412.

[2] H. Carayol, Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Ec. Norm. Super.* (4) **19** (1986), 409-468.

[3] P. Deligne, Formes modulaires et représentations l-adiques, *Sém. Bourbaki*, exp. 335, 1969.

[4] P. Deligne and K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, *Invent. Math.* **59** (1980), 227-286.

[5] P. Deligne and J.-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) **7** (1974), 507-530.

[6] H. Hida, On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta fuctions, *Invent. Math.* **64** (1981), 221-262.

[7] H. Hida, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 4e série **19** (1986), 231-273.

[8] H. Hida, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[\![X]\!])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.

[9] H. Hida, On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields, *Ann. Math.* **128** (1988), 295-384.

[10] H. Hida, *Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series*, LMSST **26**, Cambridge University Press, 1993.

[11] N.M. Katz and G. Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.* **62** (1986), 145-202.

[12] R.P. Langlands, Modular forms and l-adic representations, pp. 362-499, *in* “Modular functions of one variable II,” Lecture Notes in Math. **349**, Springer-Verlag, New York, Heidelberg and Berlin, 1973.

[13] Y. Matsushima and G. Shimura, On the cohomology of groups attached to certain vector valued forms on the product of upper half planes, *Ann. of Math.* **78** (1963), 417-449.

[14] B. Mazur and A. Wiles, On p-adic analytic families of Galois representations, *Comp. Math.* **59** (1986), 231-264.

[15] M. Ohta, On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve, *Jpn. J. Math.* **9** (1983), 1-26.

[16] D. Ramakrishnan, Arithmetic of Hilbert-Blumenthal surfaces, Number theory, Proceedings of the Montreal Conference, CMS conference proceedings **7** (1987), 285-370.

[17] K. Ribet, Congruence relations between modular forms, *Proc. I.C.M.* (1983), 503-514.

[18] J.D. Rogawski and J.B. Tunnell, On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one, *Invent. Math.* **74** (1983), 1-42.

[19] J.-P. Serre, *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, New York, W.A. Benjamin Inc., 1986.

[20] J.-P. Serre, Quelques applications de théoréme de densité de Chebotarev, *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.* **54** (1981), 123-202.

[21] G. Shimura, An l-adic method in the theory of autmorphic forms, unpublished (1968) (in "Collected Papers," vol. **II**, pp. 237-272).

[22] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions* Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo-Princeton, 1971.

[23] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, *Commun. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 783-804.

[24] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, *Duke Math. J.* **45** (1978), 637-679.

[25] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, *Invent. Math.* **98** (1989), 265-280.

[26] A. Wiles, On p-adic representations for totally real fields, *Ann. of Math.* **123** (1986), 407-546.

[27] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), 529-573.

[28] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, *Ann. of Math.* **131** (1990), 493-540.

[29] 山上敦士, Taylor による Hilbert cusp forms に付随する Galois 表現の構成について, *in* this proceeding.

Department of Mathematics, Kyoto Sangyo University, Kyoto, 603-8555, Japan

E-mail address: ayama30@cc.kyoto-su.ac.jp