剰余可約表現の保型性について

東京大学大学院数理科学研究科　新井 啓介 (Keisuke Arai)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1　序文

ここでは論文 [SW] の解説を行う。この論文では、大雑把に言うと、総実代数体の既約な p 進表現で、剰余表現が可約なものは、Hilbert modular form に伴っている、ということを証明している。原論文は非常に長く、すべてを記述することはできないが、証明の雰囲気が読者に伝わるように心掛けたい。また、原稿を読んでコメントをくださった安田氏、山下氏に感謝したい。

代数体 F に対し、$\mathrm{G}_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とおく。

定理 1.1. ([SW], Theorem A, p.74)
F を総実代数体で、$\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であるものとする。$p \geq 3$ を素数とし、$\rho : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ を既約な連続表現で、F の有限個の素点を除いて不分岐とする。ρ の法 p 還元の半単純化を $\overline{\rho}^{\mathrm{ss}}$ としたとき、$\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong \chi_1 \oplus \chi_2$

と仮定する。さらに

$$\begin{cases} \bullet \chi_1/\chi_2 \text{ の分解体 (つまり } \mathrm{Ker}\,(\chi_1/\chi_2) \text{ に対応する体) } F(\chi_1/\chi_2) \text{ は } \mathbb{Q} \text{ のアーベル拡大}, \\ \bullet \text{各複素共役 } z \text{ に対し、} (\chi_1/\chi_2)(z) = -1, \\ \bullet \text{各 } v|p \text{ に対し、} (\chi_1/\chi_2)|_{D_v} \neq 1, \\ \bullet \text{各 } v|p \text{ に対し、} D_v \text{ の指標 } \psi_1^{(v)}, \psi_2^{(v)} \text{ が存在し、} \psi_2^{(v)} \text{ は } D_v \text{ の pro-}p \text{ 商群を経由し、} \\ \psi_2^{(v)}|_{I_v} \text{ は位数有限で、} \rho|_{D_v} \cong \begin{pmatrix} \psi_1^{(v)}\widetilde{\chi}_1 & * \\ 0 & \psi_2^{(v)}\widetilde{\chi}_2 \end{pmatrix} \text{ となる} \\ \text{(ただし } \widetilde{\chi}_i \text{ は } \chi_i \text{ の Teichmüller リフト)}, \\ \bullet \det \rho = \psi\varepsilon^{\mu} \ (\mu \geq 1 \text{ は整数、} \psi \text{ は位数有限の指標}) \end{cases}$$

と仮定する。このとき、ρ は Hilbert modular newform に伴う表現である。

定理 1.1 の特別な場合として、次の定理が成り立つ。

定理 1.2. ([SW], Theorem, p.6)
$p \geq 3$ を素数とし、E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする。$\rho : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E)$ を既約な連続表現で、有限個の素点を除いて不分岐とする。$\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong 1 \oplus \chi$ (ここに "1" は自明な指標) とし、さらに

$$\begin{cases} (i) \ \chi|_{D_p} \neq 1, \\ (ii) \ \rho|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (iii) \ \det \rho = \psi\varepsilon^{\mu}, \ \det \rho(z_1) = -1, \end{cases}$$

ただし ψ は位数有限の指標、ε は p 進円分指標、$\mu \geq 1$ は整数、z_1 は複素共役とする。このとき、ρ は newform に伴う表現である。

論文 [SW] では定理 1.1 を次の主定理から導いている。

定理 1.3. ([SW], Main Theorem, p.73)
$[F : \mathbb{Q}]$ を総実代数体、$\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ を F に対する変形データとす

る。$\rho : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ をタイプ $\mathcal{D}$ の変形で、

$$\begin{cases} \bullet \rho \text{ は既約}, \\ \bullet \det\rho = \psi\varepsilon^\mu\text{、}\mu \geq 1 \text{ は整数、}\psi \text{ は位数有限の指標}, \\ \bullet \text{各 } 1 \leq i \leq t \text{ に対して } D_i \text{ の指標 } \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \text{ が存在して、} \psi_2^{(i)}|_{I_i} \text{ は位数有限} \\ \text{となり、また } \rho|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \widetilde{\chi}\psi_1^{(i)} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

を満たすものとする。総実代数体の有限次拡大 L/F で、

$$\begin{cases} (i)\ L' \text{ をの上のガロア閉包とすると、} \mathrm{Gal}(L'/F) \text{ は可解}, \\ (ii)\ [L:\mathbb{Q}] \text{ は偶数}, \\ (iii)\ L \text{ は } \mathcal{D} \text{ に対して permissible}, \\ (iv)\ (L, \mathcal{D}_L) \text{ は good pair} \end{cases}$$

を満たすものが存在すると仮定する。このとき、$\rho \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p$ は Hilbert modular newform に伴う表現である。

注 1.4. 定理 1.1 で F や $F(\chi_1/\chi_2)$ が $\mathbb{Q}$ 上アーベルという条件がついているが、これは $\mathbb{Q}$ 上アーベルな代数体の円分 $\mathbb{Z}_l$ 拡大 $(l \neq p)$ のイデアル類群の p-part の有界性に関する Washington の結果 [Wa] を用いるためである。

また、F や $F(\chi_1/\chi_2)$ が $\mathbb{Q}$ 上アーベルという条件を除いても、総実代数体のある種の拡大のイデアル類群についての仮定をすれば、定理 1.1 の結果は成立する ([SW], Theorem B, p.75)。

証明の方針は以下の通りである。

Washington による円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のイデアル類群の $l(\neq p)$ 部分についての定理 ([Wa]) を用いて可解な拡大の構成を行うことによって、定理 1.3 から定理 1.1 を導く。

定理 1.3 の証明は、次の 4 つに分けて行う。

1. (定義 5.5, 定義 5.14) 変形環 $R_\mathcal{D}$ の素イデアルについての性質である pro-modular、nice という概念を導入する。

2. (命題 5.9) $R_\mathcal{D}$ の nice な素イデアルに含まれる素イデアルは pro-modular であることを示す。

3. (命題 5.8) $R_\mathcal{D}$ の nice な素イデアルが存在することを示す。

4. (命題 5.7) $R_{\mathcal{D}}$ のすべての素イデアルは pro-modular であることを示す。

1. に関して。pro-modular という概念は、$R_{\mathcal{D}}$ の素イデアルから定まるガロア表現の変形が Hilbert modular form に伴うことと関係している。ただし、剰余可約表現の場合は変形環 $R_{\mathcal{D}}$ からヘッケ環 $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ への準同型はないので、擬表現の普遍変形環を補助的に用いることで pro-modular という概念を定義する。

2. は、Taylor-Wiles 系を用いた $R = \mathbb{T}$ 定理により証明される。ここでも擬表現の普遍変形環を補助的に用いる。肥田理論的なヘッケ環を用いるため、素イデアルで割った剰余環は一般に有限ではないので、Taylor-Wiles 系の patching argument を修正する。

3. は次のようにして示される。p 進 L 関数の特殊値が p を法として 0 になることより Eisenstein イデアル (後で出てくる permissible な極大イデアルのこと) が存在することが分かり、それを用いてあるコホモロジー類 $c_0 \in H^1(F_{\Sigma_0}/F, k'(\chi^{-1}))$ に対する nice な素イデアルを構成する。必要ならうまく c_0 を取り替えて、変形データ $\mathcal{D}$ の中に入っているコホモロジー類 c に対する nice な素イデアルを構成する。

4. は、可約な変形環の次元を上から評価し、Raynaud による Cohen-Macaulay 環の Spec の連結性についての命題 (命題 6.1) を用いて示す。

ここで使われている記号や用語は、以下で説明していく。

2　記号と定義

- F : 総実代数体、$d := [F : \mathbb{Q}]$.
- F の各素点 v に対し、体の埋め込み $\overline{F} \hookrightarrow \overline{F}_v$ を固定.
- v が有限素点のとき、$D_v \supseteq I_v$ をそれぞれ v での分解群、惰性群.
- $z_1, \cdots, z_d \in \mathrm{G}_F$ を複素共役.
- $\mathcal{P} := \{v \mid v$ は p を割る F の有限素点 $\} = \{v_1, \cdots, v_t\}$.
- $1 \leq i \leq t$ に対して、$D_i \supseteq I_i$ をそれぞれ v_i での分解群、惰性群.
- $d_i := [F_{v_i} : \mathbb{Q}_p]$.
- k_0 : 標数 p の有限体.

- $\chi:\mathrm{G}_F\longrightarrow k_0^\times$ は、$\chi|_{D_i}\neq 1$ $(1\leq i\leq t)$, $\chi(z_i)=-1$ $(1\leq i\leq d)$ を満たす指標.

- $\omega:\mathrm{G}_F\longrightarrow \mathbb{F}_p^\times\hookrightarrow k_0^\times$ は、1 の p 乗根のなす群への G_F の作用が定める指標.

- L_0 : $\mathcal{P}$ の外不分岐な F の最大アーベル pro-p 拡大.

- δ_F : 有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群 $\mathrm{Gal}(L_0/F)$ の rank.

- 環 R の素イデアル $\mathfrak{p}$ が 1 次元とは、剰余環 $R/\mathfrak{p}$ の環としての次元が 1 のこととする.

定義 2.1. (F に対する変形データ)

F **に対する変形データ**とは、4 つ組 $\mathcal{D}=(\mathcal{O},\Sigma,c,\mathcal{M})$ で条件

$$
\begin{cases}
\bullet\mathcal{O}\text{ は } k_0 \text{ を含む有限体 } k \text{ を剰余体とする局所体の整数環},\\
\bullet\Sigma\text{ は } F \text{ の有限素点の有限集合で } \Sigma\supseteq\{v\mid \chi|_{I_v}\neq 1\}\cup\mathcal{P},\\
\bullet 0\neq c\in\mathrm{Ker}\,(H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))\to\bigoplus_{i=1}^t H^1(D_i,k(\chi^{-1}))),\\
\bullet\mathcal{M}\text{ は } \Sigma\setminus\mathcal{P} \text{ の部分集合で } v\in\mathcal{M} \text{ ならば } \mathrm{Res}_{I_v}c\neq 0 \text{ または } \chi|_{I_v}\neq 1.
\end{cases}
$$

を満たすものを言う。

$H_\Sigma(F,k):=\mathrm{Ker}\,(H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))\to\bigoplus_{i=1}^t H^1(D_i,k(\chi^{-1})))$ とおく。コホモロジー類 $c\in H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))$ に対して、c **が admissible である**とは $c\in H_\Sigma(F,k)$ となることを言う。ここで F_Σ は、Σ の外不分岐で、$\overline{F}$ に含まれるような F の最大の拡大である。

指標 χ の分解体 (つまり $\mathrm{Ker}\,\chi$ に対応する体) を $F(\chi)$ とする。$\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F(\chi))$ への制限写像は、同型

$$H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))\cong H^1(F_\Sigma/F(\chi),k(\chi^{-1}))^{\mathrm{Gal}(F(\chi)/F)}$$

$$=\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F(\chi)),k(\chi^{-1}))^{\mathrm{Gal}(F(\chi)/F)}$$

を定める。以後これらを同一視し、コホモロジー類 $c\in H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))$ をコサイクルと呼ぶことにする。

コサイクル $c\in H^1(F_\Sigma/F,k(\chi^{-1}))$ に対して、連続表現

$$\rho_c:\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)\longrightarrow \mathrm{GL}_2(k)$$

で条件

$$\begin{cases} \bullet \rho_c = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \chi \end{pmatrix}, \\ \bullet \rho_c(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \bullet \text{任意の } \sigma \in \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F(\chi)) \text{ に対して} \rho_c(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & c(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

を満たすものが一意的に存在する。

c が admissible であることは、$\rho_c|_{D_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq t)$ と同値である。

定義 2.2. (ρ_c の変形)

ρ_c **の変形**とは、連続表現 $\rho : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ (A は完備局所環で、極大イデアル m_A、剰余体 $A/m_A = k$) で $\rho \bmod m_A = \rho_c$ を満たすものの

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{GL}_2(A) \xrightarrow{\mathrm{mod} m_A} \mathrm{GL}_2(A/m_A))$$

による共役類のことを言う。

$\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ を F に対する変形データとする。ρ_c の変形 ρ が**タイプ $\mathcal{D}$ である**とは、

$$\begin{cases} \bullet A \text{ は } \mathcal{O}\text{-algebra で、} A/m_A = k \text{ は } \mathcal{O} \text{ の作用と両立する}, \\ \bullet \rho \text{ が分岐する有限素点は } \Sigma \text{ に入る}, \\ \bullet \text{各 } 1 \leq i \leq t \text{ に対して指標 } \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} : D_i \longrightarrow A^\times \text{ が存在して、} \\ \rho|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \psi_1^{(i)} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix},\ \chi = \psi_1^{(i)} \bmod m_A \text{ となる}, \\ \bullet \rho|_{I_w} \cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \widetilde{\chi} \end{pmatrix},\ w \in \mathcal{M} \end{cases}$$

を満たすことを言う。ここで $\widetilde{\chi}$ は χ の A への Teichmüller リフトである。

$Q = \{w_1, \cdots, w_r\}$ を F の有限素点の有限集合であって、$Q \cap \Sigma = \emptyset$ を満たすものとする。**タイプ** $(\mathcal{O}, \Sigma \cup Q, c, \mathcal{M})$ **の変形** ρ **がタイプ** $\mathcal{D}_Q$ **である**とは、$\det \rho$ が各 $w_i \in Q$ で不分岐なことを言う。

変形データ $\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ に対して、L_Σ/F を Σ の外不分岐な F の最大アーベル pro-p 拡大として、N_Σ を $\mathrm{Gal}(L_\Sigma/F)$ の torsion 部分とする。**タイプ $\mathcal{D}_Q$ の変形 ρ が $\mathcal{D}_Q$ 極小である**とは、$\det \rho|_{N_\Sigma} = 1$ となることを言う。$Q = \emptyset$ のときには $\mathcal{D}_\emptyset$ 極小であることを $\mathcal{D}$ **極小である**と言う。

事実 2.3. ([SW], p.10,18)
任意の変形データ $\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ と有限素点の有限集合 $Q \cap \Sigma = \emptyset$ に対し、タイプ $\mathcal{D}_Q$ の普遍変形 $\rho_{\mathcal{D}_Q} : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R_{\mathcal{D}_Q})$ が、標準同型を除いて一意的に存在する。ここに、$R_{\mathcal{D}_Q}$ はタイプ $\mathcal{D}_Q$ の普遍変形環である。また、$\mathcal{D}_Q$ 極小な普遍変形 $\rho^{\min}_{\mathcal{D}_Q} : \mathrm{Gal}(F_{\Sigma \cup Q}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R^{\min}_{\mathcal{D}_Q})$ も一意的に存在する。 $\square$

$Q = \emptyset$ のときには

$$\rho_{\mathcal{D}_\emptyset} = \rho_{\mathcal{D}}, \qquad R_{\mathcal{D}_\emptyset} = R_{\mathcal{D}},$$
$$\rho^{\min}_{\mathcal{D}_\emptyset} = \rho^{\min}_{\mathcal{D}}, \qquad R^{\min}_{\mathcal{D}_\emptyset} = R^{\min}_{\mathcal{D}}$$

と書く。

定義 2.4. (可約な変形)
ρ_c **の可約な変形**とは、ρ_c の変形 ρ で

$$\rho \cong \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

となるものを言う。

事実 2.5. ([SW], p.15)
任意の変形データ $\mathcal{D}$ に対し、タイプ $\mathcal{D}$ の普遍可約変形 $\rho^{\mathrm{red}}_{\mathcal{D}} : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R^{\mathrm{red}}_{\mathcal{D}})$ が、標準同型を除いて一意的に存在する。ここに、$R^{\mathrm{red}}_{\mathcal{D}}$ はタイプ $\mathcal{D}$ の普遍可約変形環である。 $\square$

定義 2.6. (permissible な拡大)
F'/F を総実代数体の有限次拡大とする。**F' が $\mathcal{D}$ に対して permissible である**とは、

$$\begin{cases} \bullet \rho_c|_{\mathrm{G}_{F'}} \text{ は対角型に分解しない}, \\ \bullet v \in \mathcal{M},\ \chi|_{I_v} \neq 1 \text{ ならば } v \text{ を割る任意の } F' \text{ の素点 } w \text{ に対して } \chi|_{I_w} \neq 1, \\ \bullet v \in \mathcal{M},\ \rho_c|_{I_v} \neq 1,\ \chi|_{I_v} = 1 \text{ ならば } v \text{ を割る任意の } F' \text{ の素点 } w \text{ に対して } \rho_c|_{I_w} \neq 1, \\ \bullet p \text{ を割る任意の } F' \text{ の素点 } w \text{ に対して } \chi|_{D_w} \neq 1 \end{cases}$$

を満たすことを言う。

F' が $\mathcal{D}$ に対して permissible とする。Σ', $\mathcal{M}'$ をそれぞれ Σ, $\mathcal{M}$ の上にある F' の有限素点全部の集合とし、c' を c の F への制限とすると、$\mathcal{D}_{F'} := (\mathcal{O}, \Sigma', c', \mathcal{M}')$ は F' に対する変形データになる。さらに、$\rho : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ をタイプ $\mathcal{D}$ の変形とすると、$\rho|_{\mathrm{G}_{F'}}$ はタイプ $\mathcal{D}_{F'}$ の変形になる。

$$\Sigma_0 := \{v \mid \chi|_{I_v} \neq 1\} \cup \mathcal{P}$$

とおく。

定義 2.7. (good pair)
$\mathcal{D}$ を F に対する変形データとする。$(F, \mathcal{D})$ **が good pair である**とは、

$$\begin{cases} \bullet d = [F : \mathbb{Q}] \text{ は偶数}, \\ \bullet L_p(F, -1, \chi\omega) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^{\times}, \\ \bullet d > 2 + \delta_F + 8(\sharp\Sigma + \dim_k H_{\Sigma_0}(F, k)), \\ \bullet d_i > 2 + 2t + 7(\sharp\Sigma + \dim_k H_{\Sigma_0}(F, k)) \ (1 \leq i \leq t), \\ \bullet w \text{ が } p \text{ を割らず } \rho_c|_{I_w} \neq 1 \text{ なら、} \chi|_{I_w} \neq 1 \text{ または } \chi|_{D_w} = 1 \end{cases}$$

を満たすことを言う。

普遍変形環 $R_{\mathcal{D}}$ には岩澤 algebra が作用する。このことについて説明する。$I \subseteq \mathrm{Gal}(L_0/F)$ を I_i $(1 \leq i \leq t)$ の像たちで生成される部分群とする。I の自由部分 $\mathbb{Z}_p$ 加群で極大のもの I_0 を固定する。このとき $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} I_0 = \delta_F$ となる。I_0 を含む $\mathrm{Gal}(L_0/F)$ の極大自由部分 $\mathbb{Z}_p$ 加群 G_0 を固定する。このとき $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} G_0 = \delta_F$ となる。$\gamma_1, \cdots, \gamma_{\delta_F} \in \mathrm{G}_F$ で次のようなものを固定する。

$$\begin{cases} \bullet \ \mathrm{Gal}(L_0/F) \text{ での像が } G_0 \text{ を生成する。} \\ \bullet \ \text{整数 } r_1, \cdots, r_{\delta_F} \geq 0 \text{ が存在して、} \gamma_1^{p^{r_1}}, \cdots, \gamma_{\delta_F}^{p^{r_{\delta_F}}} \text{ が } I_0 \text{ を生成する。} \end{cases}$$

$1 \leq i \leq t$ に対し、$y_1^{(i)}, \cdots, y_{d_i}^{(i)} \in \mathcal{O}_{F,v_i}^{\times}$ で、rank d_i の自由部分 $\mathbb{Z}_p$ 加群を生成するものを固定する。ここで、$\mathcal{O}_{F,v_i}^{\times}$ は $\mathcal{O}_{F_{v_i}}^{\times}$ のことである。以下でも同様の表記をとる。

$$\Lambda_{\mathcal{O}} := \mathcal{O}[[T_1, \cdots, T_{\delta_F}, Y_1^{(1)}, \cdots, Y_{d_1}^{(1)}, Y_1^{(2)}, \cdots, Y_{d_2}^{(2)}, \cdots, Y_1^{(t)}, \cdots, Y_{d_t}^{(t)}]]$$

とおく。$R_{\mathcal{D}}$ に $\Lambda_{\mathcal{O}}$-algebra の構造を、

$$\begin{cases} T_i \longmapsto \det \rho_{\mathcal{D}}(\gamma_i) - 1 \ (1 \leq i \leq \delta_F), \\ Y_j^{(i)} \longmapsto \psi_2^{(i)}(y_j^{(i)}) - 1 \ (1 \leq i \leq t) \end{cases}$$

により定める。ここに $\rho_{\mathcal{D}}|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \psi_1^{(i)}\widetilde{\chi} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix}$ だが、局所類体論により $\mathcal{O}_{F,v_i}^{\times} \cong D_i^{\mathrm{ab}}$ を同一視している。

3　定理 1.3$\Longrightarrow$ 定理 1.1 の証明

$\rho_1 := \rho \otimes \widetilde{\chi}_2^{-1}$, $\chi := \chi_1/\chi_2$ とおく。$\Sigma := \{v \mid \rho_1$は v で分岐する $\} \cup \mathcal{P}$ とおく。$\mathbb{Q}_p$ のある有限次拡大 K が存在して、整数環を $\mathcal{O}$ とすると、ρ_1 は $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ に値をもつ。$\mathcal{O}$ の極大イデアルを λ とする。うまく基底をとって、$\overline{\rho}_1 := \rho_1 \bmod \lambda$ が $\overline{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$ (対角型には分解しない) とできる。よって、コサイクル $0 \neq c \in H^1(F_\Sigma/F, k(\chi^{-1}))$ が存在して、$\overline{\rho}_1 \cong \rho_c$ となる。また、c は admissible になる。必要なら ρ_1 を共役でとりかえて、ρ_1 はタイプ $\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \emptyset)$ の変形としてよい。

F の総実な有限次拡大 L で、

$$\begin{cases} (i)\ L \text{ の } F \text{ 上のガロア閉包は } F \text{ 上可解}, \\ (ii)\ [L:F] \text{ は偶数}, \\ (iii)\ L \text{ は } \mathcal{D} \text{ に対して permissible}, \\ (iv)\ (L, \mathcal{D}_L) \text{ は good pair} \end{cases}$$

を満たすものを構成すればよい。

総実代数体の拡大 E/F を次のようにとる。

$$\begin{cases} \bullet\ [E:F] \text{ は偶数}, \\ \bullet\ E \text{ は } \mathcal{D} \text{ に対して permissible}, \\ \bullet\ E/\mathbb{Q} \text{ はアーベル拡大}, \\ \bullet\ v|p \text{ なる } F \text{ の素点は } E \text{ で完全分解}, \\ \bullet\ w \text{ を } F \text{ の素点で、} \rho_c \text{ は } w \text{ で分岐するが } \chi \text{ は } w \text{ で不分岐とすると、} w'|w \\ \text{なる } E \text{ の各素点 } w' \text{ で } \chi|_{D_{w'}} = 1. \end{cases}$$

これは、例えば次のようにして作れる。E' を $\mathbb{Q}$ の実巡回拡大で、$[E':\mathbb{Q}]$ が十分多くの約数をもち、p が完全分解し、Σ の素点で割れる各素数 $q(\neq p)$ は惰性するものとすると、$E = F \cdot E'$ とすればよい。

素数 $l \geq 3$ を、$l \nmid \sharp k^\times$ かつ Σ のどの素点でも割れないようにとる。各 $n \geq 1$ に対し、E_n を E の円分 $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ 拡大とする。E_n は $\mathcal{D}$ に対し permissible である。$\Sigma_n, \mathcal{P}_n$ をそれぞれ $\Sigma, \mathcal{P}$ の上にある E_n の有限素点全部の集合とする。$\sharp\mathcal{P}_n = t$ $(\forall n \geq 1)$ であり、$s \geq 1$ が存在して n が十分大なら

$$\sharp\Sigma_n = s \tag{3.1}$$

である。r_n を $\chi|_{\mathrm{G}_{E_n}}$ の分解体 $E_n(\chi)$ のイデアル類群の p-part の χ^{-1} 成分の p-rank、p^{c_n} を E_n のイデアル類群の p-part の位数とする。[Wa], Theorem, p.87 より、$c \geq 0, r \geq 0$ が存在して、n が十分大なら、

$$c_n = c,\ r_n = r \tag{3.2}$$

となる。p^{e_n} を $E_n(\zeta_p)$ に含まれる 1 の p べき根の数とすると、$e \geq 1$ が存在して、$e_n = e$ $(\forall n \geq 1)$ となる。

各 $n \geq 1$ に対し、E_n の $e_n + c_n + 1$ 個の素点から成る集合 S_n で、Σ と交わらず、

$$\begin{cases} \bullet\ p^{e_n+c_n+1} | \mathrm{N}(w) - 1\ (\forall w \in S_n), \\ \bullet\ \chi(\mathrm{Frob}_w) = 1\ (\forall w \in S_n), \\ \bullet\ \text{アーベル拡大 } L_n/E_n \text{ が存在して、} [L_n : E_n] \leq p^{e_n+2c_n+1}\text{、} L_n \text{ は } S_n \text{ の外不分岐、} \\ \{I_w \mid w \in S_n\} \text{ により生成される } \mathrm{Gal}(L_n/E_n) \text{ の部分群は } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{e_n+c_n+1} \text{ と同型} \end{cases}$$

を満たすものをとる。

すると、$L_p(L_n, -1, \chi\omega) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times$ で、L_n は $\mathcal{D}$ に対して permissible になり、また $\dim_k H_{\Sigma_0}(L_n, k) \leq p^{e_n+2c_n+1}(r_n + e_n + c_n + 1)$ となる。n_0 を十分大きくとって、(3.1), (3.2) を満たし、また $l^{n_0/2} > 2 + 8(p^{e+2c+1}(s + r + e + c + 1)), l^{n_0} > t(2 + p^{e+2c+1}(t + 7(s + r + e + c + 1)))$ を満たすようにする。$L = L_{n_0}$ とおくと、L は求めるものである。

4 擬表現

定義 4.1. (擬表現)

A を位相環とする。G_F **の** A **への擬表現**とは、連続写像 $a, d : \mathrm{G}_F \longrightarrow A$, $x : \mathrm{G}_F \times \mathrm{G}_F \longrightarrow A$ から成る集合 $\rho = \{a, d, x\}$ で、

$$\begin{cases} \bullet a(\sigma\tau) = a(\sigma)a(\tau) + x(\sigma,\tau), \\ \bullet d(\sigma\tau) = d(\sigma)d(\tau) + x(\tau,\sigma), \\ \bullet x(\sigma,\tau)x(\alpha,\beta) = x(\sigma,\beta)x(\alpha,\tau), \\ \bullet x(\sigma\tau,\alpha\beta) = a(\sigma)a(\beta)x(\tau,\alpha) + a(\beta)d(\tau)x(\sigma,\alpha) + a(\sigma)d(\alpha)x(\tau,\beta) + d(\tau)d(\alpha)x(\sigma,\beta), \\ \bullet a(1) = 1 = d(1), \\ \bullet a(z_1) = 1 = -d(z_1), \\ \bullet g = 1 \text{ または } g = z_1 \text{ ならば } x(\sigma,g) = 0 = x(g,\sigma) \end{cases}$$

を満たすものを言う。

$\rho' : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ を連続表現で $\rho'(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たすものとする。$\rho'(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$ と書いて、a, b, x を $a(\sigma) := a_\sigma$, $d(\sigma) := d_\sigma$, $x(\sigma,\tau) := b_\sigma c_\tau$ により定めると、$\rho = \{a, b, x\}$ は擬表現になる。

連続表現 $1 \oplus \chi : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k)$ が定める擬表現を ρ_0 とする。(ρ_0 では $a = 1$, $d = \chi$, $x = 0$ である)。

定義 4.2. (擬変形)

ρ_0 **の擬変形**とは 2 つ組 $\rho = (A, \rho)$ で、

$$\begin{cases} \bullet A \text{ は完備局所ネーター環、極大イデアル } m_A\text{、剰余体 } A/m_A = k, \\ \bullet \rho \text{ は } \mathrm{G}_F \text{ の } A \text{ への擬表現で } \rho \bmod m_A = \rho_0 \end{cases}$$

を満たすものを言う。

F **に対する擬データ**とは 2 つ組 $\mathcal{D}^{\mathrm{ps}} = (\mathcal{O}, \Sigma)$ で、

$$\begin{cases} \bullet \mathcal{O} \text{ は } k \text{ を剰余体とする局所体の整数環}, \\ \bullet \Sigma \text{ は } F \text{ の有限素点の有限集合で } \Sigma \supseteq \mathcal{P} \cup \{v \mid \chi|_{I_v} \neq 1\} \end{cases}$$

を満たすものを言う。

ρ_0 **の擬変形** ρ **がタイプ** $\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}$ **である**とは、

$$\begin{cases} \bullet A\ \text{は}\ \mathcal{O}\text{-algebra で}\ A/m_A = k\ \text{は}\ \mathcal{O}\ \text{の作用と両立する}, \\ \bullet \rho\ \text{は}\ \Sigma\ \text{の外不分岐} \end{cases}$$

となることを言う。ここで ρ が Σ の外不分岐とは、a, d が $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$ を経由し、x が $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \times \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$ を経由することである。

$Q \cap \Sigma = \emptyset$ を F の有限素点の有限集合とする。**タイプ** $(\mathcal{O}, \Sigma \cup Q)$ **の擬変形** ρ **がタイプ** $\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}$ **である**とは、$\det \rho$ が各 $w \in Q$ で不分岐なことを言う。

事実 4.3. ([SW], p.21)
ρ_0 のタイプ $\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}$ の普遍擬変形 $(R_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}}, \rho_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}})$ が一意的に存在する。 □

$\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ を変形データ、$\mathcal{D}^{\mathrm{ps}} = (\mathcal{O}, \Sigma)$ を擬データ、$Q \cap \Sigma = \emptyset$ を F の有限素点の有限集合とする。このとき、タイプ $\mathcal{D}_Q$ の普遍変形 $\rho_{\mathcal{D}_Q}$ は、タイプ $\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}$ の擬変形 $(R_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}}, \rho_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}})$ を引き起こす。従って、環の準同型

$$r_{\mathcal{D}_Q} : R_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}} \longrightarrow R_{\mathcal{D}_Q}$$

を引き起こす。$Q = \emptyset$ のときには

$$R_{\mathcal{D}_\emptyset^{\mathrm{ps}}} = R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}, \qquad \rho_{\mathcal{D}_\emptyset^{\mathrm{ps}}} = \rho_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}, \qquad r_{\mathcal{D}_\emptyset} = r_{\mathcal{D}}$$

と書く。

5 ヘッケ環

$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ を F のアデール環とし、$\mathbb{A}_f$ を $\mathbb{A}$ の有限部分とする。コンパクト開部分群 $U \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ に対し、$M_2(U) := \{f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f\ \text{は重さ}\ (2, \cdots, 2)\text{、レベル}\ U\ \text{の Hilbert modular form}\}$, $S_2(U) := \{f \in M_2(U) \mid f\ \text{は cusp form}\}$ とする ([Y])。イデアル $(0) \neq \mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_F$ に対し、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ のコンパクト開部分群を

$$U_0(\mathfrak{n}) := \{X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F \otimes \hat{\mathbb{Z}}) \mid X \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{n}\},$$

$$U(\mathfrak{n}) := \{X \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F \otimes \hat{\mathbb{Z}}) \mid X \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{n}\}$$

と定める。$U_0(\mathfrak{n}) \supseteq U(\mathfrak{n})$ である。

今後、各コンパクト開部分群 $U \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ に対し、$U = \prod_{w\nmid\infty} U_w$, $U_w \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w})$ と仮定する。また、あるイデアル $(0) \neq \mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_F$ に対し $U(\mathfrak{n}) \subseteq U \subseteq U_0(\mathfrak{n})$ と仮定する。コンパクト開部分群 $U, U' \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ と $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ に対して $UgU' = \coprod_i Ug_i$ として、ヘッケ作用素 $[UgU'] : M_2(U) \longrightarrow M_2(U')$ を、$[UgU']f(x) := \sum_i f(xg_i^{-1})$ により定める。$[UgU']$ は $S_2(U)$ を $S_2(U')$ にうつす。

各素イデアル $\mathfrak{l} \subseteq \mathcal{O}_F$ に対し、$\lambda^{(\mathfrak{l})} \in \mathcal{O}_F \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ で $\lambda^{(\mathfrak{l})}_{\mathfrak{l}}$ は素元、$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}$ なら $\lambda^{(\mathfrak{l})}_{\mathfrak{p}} = 1$ なるものを固定する。$\mathfrak{p}|p$ ならさらに $\lambda^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_F$, $\chi(\lambda^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}}) \neq 1$ とし、また $\mathfrak{p}'|p$, $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ に対して $\lambda^{(\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}^{\times}_{F,\mathfrak{p}'}$ とする。

$$T(\mathfrak{l}) := [U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{(\mathfrak{l})} \end{pmatrix} U],$$

$$S(\mathfrak{l}) := [U \begin{pmatrix} \lambda^{(\mathfrak{l})} & 0 \\ 0 & \lambda^{(\mathfrak{l})} \end{pmatrix} U]$$

とおく。

$a \geq 0$ を整数として、$U_a^0 := U \cap U_0(p^a)$, $U_a := U \cap U(p^a)$ とおく。各 $v|p$ に対し、$U_v = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ と仮定する。$\mathbb{G}(U_a) := U_a^0 \cdot \mathcal{O}_F^{\times} / U_a \cdot \mathcal{O}_F^{\times}$ とおく。$x \cdot y \in \mathbb{G}(U_a)$ (ただし $x \in U_a^0$, $y \in \mathcal{O}_F^{\times}$) の $M_2(U_a)$ への作用を、$[U_a x U_a]$ と定める。

$1 \leq i \leq t$ に対し、素点 v_i に対応する素イデアルを $\mathfrak{p}_i$ とし、$T_0(\mathfrak{p}_i) := T(\mathfrak{p}_i)$ とおく。$\widetilde{p} \in \mathbb{A}_f$ を $v|p$ なら $\widetilde{p}_v = p$, $v \nmid p$ なら $\widetilde{p}_v = 1$ と定め、$T_0(p) := [U_a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} U_a]$ とおく。

$S_2^*(U_a) \subseteq S_2(U_a)$ を nearly ordinary form たちで生成される部分空間とする ([SW], p.31)。$S_2^*(U_a)$ は $T_0(p)$, $T_0(\mathfrak{p}_i)$ $(1 \leq i \leq t)$, $T(\mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l} \nmid p$, $U_{\mathfrak{l}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})$), $S(\mathfrak{l})$ ($\mathfrak{l} \nmid p$, $U_{\mathfrak{l}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})$), $[U_a x U_a]$ ($x \in U_a^0$) の作用で安定である。体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。さらに、これらと両立する体の同型 $\mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2^*(U_a)) \supseteq \mathbb{T}_2(U_a) := \mathbb{Z}_p[T_0(p), T_0(\mathfrak{p}_i)\ (1 \leq i \leq t), T(\mathfrak{l})\ (\mathfrak{l} \nmid p,\ U_{\mathfrak{l}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})), S(\mathfrak{l})\ (\mathfrak{l} \nmid p,\ U_{\mathfrak{l}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})), [U_a x U_a]\ (x \in U_a^0)]$ とおく。$\mathbb{T}_2(U_a)$ は有限平坦被約可換 $\mathbb{Z}_p$-algebra である。

K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし、その整数環を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ とする。

$$\mathbb{T}_2(U_a, \mathcal{O}) := \mathbb{T}_2(U_a) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O},$$

$$\mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O}) := \operatorname*{proj\,lim}_a \mathbb{T}_2(U_a, \mathcal{O}),$$

$$\mathbb{G}(U) := \operatorname{proj}\lim_a \mathbb{G}(U_a)$$

とおく。自然な環準同型 $\mathcal{O}[[\mathbb{G}(U)]] \longrightarrow \mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ がある。

$$U^f := U \cap (\mathbb{A}_f)^\times,\ U_a^f := U_a \cap (\mathbb{A}_f)^\times,$$

$$Z(U_a) := U^f \cdot \mathcal{O}_F^\times / U_a^f \cdot \mathcal{O}_F^\times,\ Z(U) := \operatorname{proj}\lim_a Z(U_a)$$

とおく。写像

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto (\prod_{v|p} (\alpha^{-1}\delta)_v, \alpha)$$

は同型

$$\mathbb{G}(U_a) \cong (\mathcal{O}_F/p^a)^\times \times Z(U_a),\ \mathbb{G}(U) \cong (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^\times \times Z(U)$$

を引き起こす。$(y,1),(1,x) \in \mathbb{G}(U)$ の $\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ での像をそれぞれ T_y, S_x とする。$\gamma_1^{p^{r_1}}, \cdots, \gamma_{\delta_F}^{p^{r_{\delta_F}}} \in \mathrm{G}_F$ の相互写像による像を $x_1, \cdots, x_{\delta_F} \in Z(U)$ とする。$x_1, \cdots, x_{\delta_F}$ は $Z(U)$ の極大自由 $\mathbb{Z}_p$ 部分加群を生成する。

$$\Lambda'_{\mathcal{O}} := \mathcal{O}[[X_1, \cdots, X_{\delta_F}, Y_1^{(1)}, \cdots, Y_{d_1}^{(1)}, \cdots, Y_1^{(t)}, \cdots, Y_{d_t}^{(t)}]]$$

とおく。$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ は $X_i \longmapsto S_{x_i} - 1$, $Y_j^{(i)} \longmapsto T_{y_j^{(i)}} - 1$ により $\Lambda'_{\mathcal{O}}$-algebra になる。$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ は $[F:\mathbb{Q}]$ が偶数なら $\Lambda'_{\mathcal{O}}$ 加群として有限生成 torsion free である。

肥田理論 ([H], Theorem II, p.546; [Wi], Theorem 2.2.1, p.562) により、$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ の商を係数環とする (巨大な) ガロア表現が構成される。$Q \subseteq \mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ を素イデアル、L を $\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})/Q$ の商体とする。$\mathfrak{n} := \prod_{U_\mathfrak{l} \neq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})} \mathfrak{l}$ とおく。

定理 5.1. ([SW], p.39)

半単純連続表現 $\rho_Q : \mathrm{G}_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{L})$ で、

$$\begin{cases} \bullet \rho_Q(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \bullet \rho_Q \text{ は } \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p \text{ なるすべての素イデアルで不分岐}, \\ \bullet \mathrm{Tr}\rho_Q(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) = T(\mathfrak{l}) \bmod Q \ (\forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p), \\ \bullet \det \rho_Q(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) = S(\mathfrak{l})\mathrm{N}(\mathfrak{l}) \bmod Q \ (\forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p), \\ \bullet \det \rho_Q(x) = S_x \varepsilon(x) \bmod Q \ (\forall x \in Z(U)), \\ \bullet \text{各 } 1 \leq i \leq t \text{ に対して } D_i \text{ の指標 } \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)} \text{ が存在して、} \\ \psi_2^{(i)}(y) = T_y \bmod Q \ (\forall y \in \mathcal{O}_{F,v_i}^{\times})\text{、}\psi_2^{(i)}(\lambda_{\mathfrak{p}_i}^{(\mathfrak{p}_i)}) = T_0(\mathfrak{p}_i) \bmod Q \text{ となり、} \\ \text{また } \rho_Q|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \psi_1^{(i)} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

を満たすものが存在する。 □

これより、G_F の $\mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O})/Q$ への擬表現 ρ_Q^{ps} が得られる。$\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O})$ を極大イデアルとする。$\prod_{Q \subseteq \mathfrak{m} \text{ 極小素イデアル}} \rho_Q^{\mathrm{ps}}$ は $\prod_{Q \subseteq \mathfrak{m} \text{ 極小素イデアル}} \mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O})/Q$ への擬表現を定め、これらを貼り合わせることで $\mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$ への擬表現 $\rho_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{mod}}$ で

$$\begin{cases} \bullet \forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p \text{ で不分岐}, \\ \bullet \mathrm{Tr}\rho_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) = T(\mathfrak{l}) \ (\forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p), \\ \bullet \det \rho_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{mod}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) = S(\mathfrak{l})\mathrm{N}(\mathfrak{l}) \ (\forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p) \end{cases}$$

を満たすものを得る。

定義 5.2. (permissible な極大イデアル)

$[F : \mathbb{Q}]$ は偶数とする。**極大イデアル $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{T}_\infty(U, \mathcal{O})$ が permissible であるとは、**

$$\begin{cases} \bullet \mathfrak{m} \cap \mathcal{O}[[\mathrm{G}(U)]] \text{ は指標} \\ \mathrm{G}(U) \longrightarrow Z(U) \xrightarrow{\chi\omega^{-1}} k^\times \\ \text{に対応する極大イデアル}, \\ \bullet \mathfrak{m} \ni T_0(\mathfrak{p}_i) - 1 \ (1 \leq i \leq t), \\ \bullet \mathfrak{m} \ni T(\mathfrak{l}) - 1 - \widetilde{\chi}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) \ (\forall \mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}p) \end{cases}$$

を満たすことを言う。

permissibleな極大イデアルは、存在すればただ1つである。$\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ をpermissibleな極大イデアルとすると、$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})_\mathfrak{m}$ は、$1+Y_j^{(i)} \longmapsto T_{y_j^{(i)}}$, $1+T_j \longmapsto \det \rho_\mathfrak{m}^{\mathrm{mod}}(\gamma_i)$ により $\Lambda_\mathcal{O}$-algebraになる。環準同型

$$\Lambda'_\mathcal{O} \longrightarrow \Lambda_\mathcal{O}\ ;\ 1+X_j \longmapsto (1+T_j)^{p^{r_j}}\varepsilon(\gamma_j^{-p^{r_j}})$$

は、$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})_\mathfrak{m}$ の $\Lambda'_\mathcal{O}$-algebraとしての構造と両立する。ここに ε は p 進円分指標である。

コンパクト開部分群

$$U^\chi = \prod_\mathfrak{l} U_\mathfrak{l}^\chi \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F \otimes_\mathbb{Z} \hat{\mathbb{Z}})$$

を、

$$U_\mathfrak{l}^\chi := \begin{cases} \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_\mathfrak{l}}) | c \in \mathfrak{l}^{r(\mathfrak{l})},\ a \bmod \mathfrak{l}^{r(\mathfrak{l})} \in \Delta_\mathfrak{l}\} & (\mathfrak{l} \mid \mathfrak{n}\text{ のとき}), \\ \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_\mathfrak{l}}) & (\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{n}\text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。

命題 5.3. ([SW], Proposition 3.18, p.47)

$L_p(F,-1,\chi\omega) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times$ ならば $\mathbb{T}_\infty(U^\chi,\mathcal{O})$ はpermissibleな極大イデアルをもつ。 □

$\Sigma := \{v \mid v$ は $\mathfrak{n}$ を割る $\} \cup \mathcal{P}$ とおき、$\mathcal{D}^{\mathrm{ps}} := (\mathcal{O},\Sigma)$ とおく。このとき $\rho_\mathfrak{m}^{\mathrm{mod}}$ は ρ_0 の擬変形となり、環準同型 $R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \longrightarrow \mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})_\mathfrak{m}$ が定まる。

変形データ $\mathcal{D}_Q$ より $U_{\mathcal{D}_Q}$ を定め、$\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}$ を定める。$\mathcal{D} = (\mathcal{O},\Sigma,c,\mathcal{M})$ を変形データ、Q を $Q \cap \Sigma = \emptyset$ となるような F の有限素点の有限集合とする。コンパクト開部分群

$$U_{\mathcal{D}_Q} = \prod_{w \nmid \infty} U_{\mathcal{D}_Q,w} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F \otimes \hat{\mathbb{Z}})$$

を、

$$U_{\mathcal{D}_Q,w} := \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w}) \ (w \notin (\Sigma \setminus \mathcal{P}) \cup Q), \\ \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w}) \mid c, a-1 \in \mathfrak{l}_w^{\max(2,r(w)+1)}\} \ (w \in \Sigma \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{M})), \\ \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w}) \mid c \in \mathfrak{l}_w^{\max(1,r(w))},\ a \bmod \mathfrak{l}_w^{\max(1,r(w))} \in \Delta_w\} \ (w \in \mathcal{M}), \\ \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w}) \mid c \in \mathfrak{l}_w,\ ad^{-1} \bmod \mathfrak{l}_w \in \Delta'_w\} \ (w \in Q) \end{cases}$$

により定める。ここで、$r(w) := \mathrm{cond}(\chi_w)$ で、$\mathfrak{l}_w$ は w に対応する素イデアルで、$\Delta_w \subseteq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{l}_w)^\times$ は p-Sylow 部分群、$\Delta'_w \subseteq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{l}_w)^\times$ は p と素な部分である。$(\mathcal{O}_F/\mathfrak{l}_w)^\times = \Delta_w \times \Delta'_w$ と分解する。$\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{T}_\infty(U_{\mathcal{D}_Q}, \mathcal{O})$ を permissible な極大イデアルとする。

$$\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q} := \mathbb{T}_\infty(U_{\mathcal{D}_Q}, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}},$$

$\rho_{\mathcal{D}_Q}^{\mathrm{mod}} := \rho_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{mod}}$ とおく。$Q = \emptyset$ のときは

$$\mathbb{T}_{\mathcal{D}_\emptyset} = \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$$

と書く。$(\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}, \rho_{\mathcal{D}_Q}^{\mathrm{mod}})$ はタイプ $\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}} = (\mathcal{O}, \Sigma)_Q$ の擬変形である。よって環準同型

$$\pi_{\mathcal{D}_Q} : R_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}} \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}$$

が定まる。$Q = \emptyset$ のときは

$$\pi_{\mathcal{D}_\emptyset} = \pi_{\mathcal{D}}$$

と書く。

命題 5.4. ([SW], Corollary 3.13, p.42)
$\pi_{\mathcal{D}_Q}$ は全射である。 □

$\mathcal{M}^{\min}(\mathcal{D}_Q) := \{\mathfrak{q} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}$ 極小素イデアル $\mid (\widetilde{\chi}^{-1} \det \rho_{\mathfrak{q}})|_{N_\Sigma} = 1\}$ とおくと、$\mathcal{M}^{\min}(\mathcal{D}_Q) \neq \emptyset$ が分かる。ここに、N_Σ は定義 2.2 に出てくるものである。

$$\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}^{\min} := \mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q} / \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{M}^{\min}(\mathcal{D}_Q)} \mathfrak{q}$$

と定める。

$[F:\mathbb{Q}]$ は偶数、$L_p(F,-1,\chi\omega) \in \mathcal{O}\setminus\mathcal{O}^\times$ と仮定する。このとき permissible な極大イデアル $\mathfrak{m} \subseteq \mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ が存在し、$\mathbb{T}_\mathcal{D}$ が定義される。

定義 5.5. (pro-modular)

$\mathcal{D}=(\mathcal{O},\Sigma,c,\mathcal{M})$ を変形データ、$\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}=(\mathcal{O},\Sigma)$ を擬データとする。$\mathfrak{q} \subseteq R_\mathcal{D}$ を素イデアルとする。合成写像

$$R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \xrightarrow{r_\mathcal{D}} R_\mathcal{D} \xrightarrow{\text{商}} R_\mathcal{D}/\mathfrak{q}$$

を $\varphi_\mathfrak{q}$ と書くことにする。**$\mathfrak{q}$ が pro-modular である**とは、$\varphi_\mathfrak{q}$ が $\pi_\mathcal{D}: R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \longrightarrow \mathbb{T}_\mathcal{D}$ を経由することを言う。つまり、環準同型 $\theta_\mathfrak{q}:\mathbb{T}_\mathcal{D} \longrightarrow R_\mathcal{D}/\mathfrak{q}$ が存在して、$\varphi_\mathfrak{q}=\theta_\mathfrak{q}\circ\pi_\mathcal{D}$ となることを言う。

$$\begin{tikzcd} R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \arrow[r, "r_\mathcal{D}"] \arrow[d, "\pi_\mathcal{D}"'] & R_\mathcal{D} \arrow[d, "\text{商}"] \\ \mathbb{T}_\mathcal{D} \arrow[r, "\theta_\mathfrak{q}"'] & R_\mathcal{D}/\mathfrak{q} \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Spec}R_\mathcal{D}$ **の既約成分 C が pro-modular である**とは、C に属するすべての素イデアルが pro-modular であることを言う。

$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ を $R_\mathcal{D}$ の素イデアルとすると、$\mathfrak{q}$ が pro-modular なら $\mathfrak{p}$ も pro-modular である。$\mathrm{Spec}R_\mathcal{D}$ の既約成分 C が pro-modular なことは、C に入る極小素イデアルが pro-modular なことと同値である。

命題 5.6. $(F,\mathcal{D})$ が good pair ならば、$R_\mathcal{D}$ のすべての素イデアルは pro-modular である。

命題5.6 より、定理1.3 が従う。まず ρ を G_L に制限したものが Hilbert modular newform に伴うことが命題5.6 により分かり、L/F のガロア閉包が可解より、base change の議論 ([GL], Theorem 2, p.118) により ρ 自身が Hilbert modular newform に伴うことが分かる。

変形データ $\mathcal{D}=(\mathcal{O},\Sigma,c,\mathcal{M})$ に対し、新しい変形データ

$$\mathcal{D}_c := (\mathcal{O},\Sigma_c,c,\mathcal{M}_c)$$

を考える。ここに、

$$\Sigma_c := \{v \mid \rho_c|_{I_v} \neq 1\} \cup \mathcal{P}, \qquad \mathcal{M}_c := \Sigma_c \setminus \mathcal{P}$$

である。Σ_c はできるだけ小さく、$\mathcal{M}_c$ はできるだけ大きくとっている。次の性質 (P1), (P2) を考える。

(P1) ：素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ が nice for $\mathcal{D}$ ならば、任意の素イデアル $Q \subseteq \mathfrak{p}_{\mathcal{D}} (\subseteq R_{\mathcal{D}})$ は pro-modular である。

(P2) ： $R_{\mathcal{D}_c}$ の pro-modular な素イデアルが存在して、対応する変形は nice となる。

これらの正確な意味はこの後述べる。命題 5.6 は、次の 3 つの命題より従う。

命題 5.7. ([SW], Proposition 4.1, p.64)
$(F, \mathcal{D})$ が good pair で、$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_c$ に対して (P1) と (P2) が成り立つとする。このとき、$R_{\mathcal{D}}$ のすべての素イデアルは pro-modular である。

命題 5.8. ([SW], Proposition 4.2, p.66)
$\mathcal{D} = (\mathcal{O}, \Sigma, c, \mathcal{M})$ を変形データで、$(F, \mathcal{D})$ は good pair とする。$\Sigma' \subseteq \Sigma$, $\mathcal{O}' \supseteq \mathcal{O}$ となるような任意の変形データ $(\mathcal{O}', \Sigma', c', \mathcal{M}')$ に対して (P1) が成り立つとすれば、$\mathcal{D}$ に対して (P2) が成り立つ。

命題 5.9. ([SW], Proposition 8.4, p.123)
各変形データ $\mathcal{D}$ に対して (P1) が成り立つ。

注 5.10. 命題 5.9 では、$(F, \mathcal{D})$ が good pair という仮定は必要ない。

定義 5.11. (nice な変形)
タイプ $\mathcal{D}$ の変形 $\rho : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ **が nice である**とは、

$$\begin{cases} \bullet A \text{ は標数 } p \text{ で } 1 \text{ 次元の整域}, \\ \bullet \rho \text{ はタイプ } \mathcal{D}_c \text{ の変形}, \\ \bullet \text{各 } 1 \leq i \leq t \text{ に対して } \rho|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \psi_1^{(i)} & * \\ 0 & \psi_2^{(i)} \end{pmatrix} \text{ となるが、さらに } \psi_1^{(i)}/\psi_2^{(i)} \text{ は位数無限} \end{cases}$$

が成り立つことを言う。

定義 5.12. (nice for $\mathcal{D}$)

$\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を素イデアル、$\dim \mathbb{T}_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p} = 1$、$\mathbb{T}_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p}$ の整閉包を A、A の商体を K とする。K は完備離散付値体である。$\rho_{\mathfrak{p}}$ が既約とする。このとき k の有限次拡大 k'、k' を剰余体とする局所体 $\mathcal{O}'$、コサイクル $0 \neq c' \ni H_{\Sigma}(F, k')$、連続表現 $\rho : \mathrm{Gal}(F_{\Sigma}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ が存在して、$\rho \otimes \overline{K} \cong \rho_{\mathfrak{p}}$ となり、さらに ρ はタイプ $(\mathcal{O}', \Sigma, c', \emptyset)$ の変形を定める (これは下の補題 5.15 による)。

$\mathfrak{p}$ **が nice for $\mathcal{D}$ である**とは、

$$\begin{cases} \bullet \dim \mathbb{T}_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p} = 1 \text{ (既に述べた)}, \\ \bullet \rho_{\mathfrak{p}} \text{ は既約 (既に述べた)}, \\ \bullet \mathfrak{p} \text{ は } \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c} \text{ のある素イデアルの逆像}, \\ \bullet \text{ある } \alpha \neq 0 \text{ が存在して、} c' = \alpha c \text{ となる}, \\ \bullet \rho \text{ のある共役は、タイプ } (\mathcal{O}', \Sigma, c, \mathcal{M}) \text{ の nice な変形を定める} \end{cases}$$

が成り立つことを言う。

注 5.13. ヘッケ環 $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ の定義には、$\mathcal{D}$ の中にあるコサイクル c は使われていない。したがって変形環 $R_{\mathcal{D}}$ からヘッケ環 $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ への自然な環準同型は定義されない。nice for $\mathcal{D}$ な $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ の素イデアルがコサイクル c や変形環 $R_{\mathcal{D}}$ と結び付く。

定義 5.14. (good, nice な素イデアル)

$\mathfrak{p} \subseteq R_{\mathcal{D}}$ を素イデアルとする。$\mathfrak{p}$ **が good である**とは、$\rho_{\mathcal{D}} \bmod \mathfrak{p}$ が nice な変形であるときに言う。$\mathfrak{p}$ **が nice である**とは、$\mathfrak{p}$ が good かつ $R_{\mathcal{D}_c}$ の pro-modular な素イデアルの逆像であるときに言う。

素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ が nice for $\mathcal{D}$ とすると、環準同型 $\phi_{\mathfrak{p}} : R_{\mathcal{D}} \longrightarrow A$ が定まる。

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}} := \mathrm{Ker}\, \phi_{\mathfrak{p}}$$

と定める。$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}} \subseteq R_{\mathcal{D}}$ は nice な素イデアルである。

補題 5.15. ([SW], Lemma 2.13, p.23)

K を完備離散付値体で、剰余体は k とする。$\rho : \mathrm{Gal}(F_{\Sigma}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(K)$ を既約な連続表現とし、$\overline{\rho}^{\mathrm{ss}} \cong 1 \oplus \chi$ とする。このとき、

(i) ガロア作用で安定な格子 $L \subseteq K^2$ が存在して、任意の σ に対して $\overline{\rho}_L(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & b_\sigma \\ 0 & \chi(\sigma) \end{pmatrix}$ となり、また $\overline{\rho}_L$ の中心化群はスカラーのみから成る。

(ii) $L_1,\ L_2$ を (i) における 2 つの格子とすると、$(\sigma \mapsto \chi(\sigma)^{-1}b_i(\sigma)) \in H^1(F_\Sigma/F, k(\chi^{-1}))$ $(i = 1, 2)$ は互いに 0 でないスカラー倍である。 □

注 5.16. $\overline{\rho} \cong 1 \oplus \chi$ の場合でも、格子をうまくとって（無理やり）b_σ が恒等的には 0 でないようにする。

系 5.17. ([SW], Corollary 2.14, p.24)
A を離散付値環で、剰余体は k とする。(A, φ) を ρ_0 の擬変形で、Σ の外不分岐とし、$x(\sigma, \tau)$ は恒等的には 0 でないとする。このとき、コサイクル $0 \neq c \in H^1(F_\Sigma/F, k(\chi^{-1}))$ と ρ_c の変形 $\rho_\varphi : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$ が存在して、ρ_φ が定める擬変形は φ となる。さらに、c は 0 でない定数倍を除いて一意的に定まる。 □

注 5.18. 系 5.17 では擬表現から表現を作っているが、表現空間の環が離散付値環 (特に 1 次元) というのが効いている。

6　命題 5.7 の証明

$\mathcal{C}_\mathcal{D}$ を $\mathrm{Spec} R_\mathcal{D}$ の既約成分全体から成る集合とし、$\mathcal{C}_\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}_\mathcal{D}^{\mathrm{mod}}$ を pro-modular な既約成分全体から成る部分集合とする。$\mathcal{C}_\mathcal{D} = \mathcal{C}_\mathcal{D}^{\mathrm{mod}}$ を示せばよい。

まず、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ とする。

ステップ 1。

$\mathrm{Spec} R_\mathcal{D}$ の既約成分で nice な素イデアルを含むものは、pro-modular であることを示す。$\mathfrak{p} \subseteq R_\mathcal{D}$ を nice な素イデアルとすると、環準同型 $\theta_\mathfrak{p}$ が存在して、$\varphi_\mathfrak{p} = \theta_\mathfrak{p} \circ \pi_\mathcal{D}$ となる。$\mathfrak{p}_1 := \mathrm{Ker}\, \theta_\mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{p}_1$ は nice for $\mathcal{D}$ である。$Q \subseteq \mathfrak{p}$ を極小素イデアルとすると、(P1) より Q は pro-modular である。よって、$\mathrm{Spec} R_\mathcal{D}$ の $\mathfrak{p}$ を含む既約成分は pro-modular である。また、(P2) より $R_\mathcal{D}$ は nice な素イデアルをもつので、$\mathcal{C}_\mathcal{D}^{\mathrm{mod}} \neq \emptyset$ も分かる。

ステップ 2。

$\mathcal{C}_\mathcal{D} = \mathcal{C}_\mathcal{D}^{\mathrm{mod}}$ を示す。$\mathcal{C}'_\mathcal{D} := \mathcal{C}_\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}_\mathcal{D}^{\mathrm{mod}}$ とおく。$\mathcal{C}'_\mathcal{D} \neq \emptyset$ だったとする。次の 2 つの命題を用いる。

命題 6.1. ([SW], Proposition A.1, Corollary A.2, p.123)

A を d 次元の局所 Cohen-Macaulay 環で、極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ とする。$I=(f_1,\cdots,f_r)\subseteq A$ をイデアルとする。$r\leq d-2$ と仮定する。このとき、$\mathrm{Spec}(A/I)\setminus\{\mathfrak{m}_A\}$ は連結である。さらに、$\mathcal{C}$ を $\mathrm{Spec}(A/I)$ の既約成分全体の集合として、$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\coprod\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2\neq\emptyset$ と分解されたとすると、$C_1\in\mathcal{C}_1$ と $C_2\in\mathcal{C}_2$ が存在して、$C_1\cap C_2$ は $d-r-1$ 次元の素イデアルを含む。 □

命題 6.2. ([SW], Proposition 2.4, p.13)

$\mathcal{D}=(\mathcal{O},\Sigma,c,\mathcal{M})$ を変形データとすると、$\mathcal{D}$ に依存した整数 $g,r\geq 0$ が存在して、$R_{\mathcal{D}}\cong\mathcal{O}[[x_1,\cdots,x_g]]/(f_1,\cdots,f_r)$ かつ $g-r\geq d+\delta_F-2t-3\sharp\mathcal{M}$ となる。 □

これらより、$C_1\in\mathcal{C}^{\mathrm{mod}}_{\mathcal{D}}$ と $C_2\in\mathcal{C}'_{\mathcal{D}}$ が存在して、$C_1\cap C_2\ni Q$, $\dim Q=d-2t+\delta_F-3\sharp\mathcal{M}$ となる。$I_1:=(p,\det\rho_c(\gamma_i)-1\mid 1\leq i\leq\delta_F)$ とおく。極小素イデアル $Q_1\subseteq R_{\mathcal{D}}/(Q,I_1)$ をとると、$\dim Q_1\geq d-2t-3\sharp\mathcal{M}-1>1+\delta_F+\sharp\Sigma+\dim_k H_{\Sigma_0}(F,k)$ となる。後ろの不等式は、$(F,\mathcal{D})$ が good pair であることから従う。次の補題により、$\rho_{\mathcal{D}}\bmod Q_1$ は既約であることが分かる。

補題 6.3. ([SW], Lemma 2.7, Lemma 2.8, p.17)

(1) $\dim R^{\mathrm{red}}_{\mathcal{D}}\leq 1+2\delta_F+\dim_k H_\Sigma(F,k)$ が成り立つ。

(2) $\mathfrak{q}\subseteq R_{\mathcal{D}}$ を素イデアルで $p\in\mathfrak{q}$、$\rho_{\mathcal{D}}\bmod\mathfrak{q}$ は可約、$\det\rho_{\mathcal{D}}\bmod\mathfrak{q}$ は位数有限とすると、$\dim R_{\mathcal{D}}/\mathfrak{q}\leq\delta_F+\dim_k H_\Sigma(F,k)$ が成り立つ。 □

$Q_1\in C_1$ より、Q_1 は pro-modular である。$Q^{\mathrm{mod}}_1:=\mathrm{Ker}\,(\theta_{Q_1}:\mathbb{T}_{\mathcal{D}}\longrightarrow R_{\mathcal{D}}/Q_1)$ とおく。$\rho_{\mathcal{D}}\bmod Q_1$ は既約より、$\dim\mathbb{T}_{\mathcal{D}}/Q^{\mathrm{mod}}_1\geq\dim R_{\mathcal{D}}/Q_1$ が分かる。

$\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ は $\Lambda_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}[[Y^{(1)}_1,\cdots,Y^{(t)}_{d_t},T_1,\cdots,T_{\delta_F}]]$ の整拡大である。$(F,\mathcal{D})$ は good pair なので、d_i に関する不等式を持つ。その不等式より、$Y^{(i)}_1\notin Q^{\mathrm{mod}}_1$ $(1\leq i\leq t)$ としてよい。

$\rho_{\mathcal{D}}$ の基底を $\rho_{\mathcal{D}}(z_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ となるようにとる。$\rho_{\mathcal{D}}(\sigma)=\begin{pmatrix}a_\sigma&b_\sigma\\c_\sigma&d_\sigma\end{pmatrix}$ と書く。$\rho_{\mathcal{D}}\bmod Q_1$ は既約より、$c_{\sigma_0}\notin Q_1$ となる σ_0 がある。$R_{\mathcal{D}}$ の 1 次元の素イデアル $\mathfrak{p}$ で、$\mathfrak{p}\supseteq Q_1$, $\mathfrak{p}\not\ni c_{\sigma_0},Y^{(1)}_1,\cdots,Y^{(t)}_1$ なるものをとる。

$\mathfrak{p}\in C_1$ より、$\mathfrak{p}$ は pro-modular である。$\mathfrak{p}$ は good を示す。つまり、$\rho:=\rho_{\mathcal{D}}\bmod\mathfrak{p}:\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)\longrightarrow\mathrm{GL}_2(R_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p})$ が nice な変形であることを示せばよい。$\rho|_{D_i}\cong\begin{pmatrix}\psi^{(i)}_1&*\\0&\psi^{(i)}_2\end{pmatrix}$ であり、$\psi^{(i)}_2=1+Y^{(i)}_1$ となる。$1+Y^{(i)}_1$ は

$R_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p}$ で位数無限大である。これより、$\psi_1^{(i)}/\psi_2^{(i)}$ は位数無限大と分かる。よって、ρ は nice な変形で、$\mathfrak{p}$ は good である。

よって $\mathfrak{p}$ は nice である。$\mathfrak{p} \supseteq Q_1 \supseteq Q$, $Q \in C_2$ より、$\mathfrak{p} \in C_2$ である。ステップ 1 より、$C_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{mod}}$ である。これは $C_2 \in \mathcal{C}'_{\mathcal{D}}$ に矛盾する。よって、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ の場合は示された。

一般の場合は、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ の場合に帰着することで示す。

ステップ 3 。

$\mathrm{Spec} R_{\mathcal{D}}$ の既約成分で、good な素イデアルを含むものは pro-modular であることを示す。$\mathfrak{p} \subseteq R_{\mathcal{D}}$ を good な素イデアルとする。$\mathfrak{p}$ はある素イデアル $\mathfrak{p}_1 \subseteq R_{\mathcal{D}_c}$ の、標準全射 $R_{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow R_{\mathcal{D}_c}$ による逆像である。$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ のときの命題より、$\mathfrak{p}_1$ は pro-modular である。よって、環準同型 $\theta_{\mathfrak{p}_1} : \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c} \longrightarrow R_{\mathcal{D}_c}/\mathfrak{p}_1 = R_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p}$ があって、$\varphi_{\mathfrak{p}_1} = \theta_{\mathfrak{p}_1} \circ \pi_{\mathcal{D}_c}$ となる。合成

$$\mathbb{T}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\text{標準全射}} \mathbb{T}_{\mathcal{D}_c} \xrightarrow{\theta_{\mathfrak{p}_1}} R_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p}$$

を $\theta_{\mathfrak{p}}$ と書く。$\mathfrak{p}_2 := \mathrm{Ker}\,\theta_{\mathfrak{p}}$ とすると、$\mathfrak{p}_2$ は nice for $\mathcal{D}$ で、(P1) より任意の素イデアル $Q \subseteq (\mathfrak{p}_2)_{\mathcal{D}} (\subseteq R_{\mathcal{D}})$ は pro-modular である。$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_2)_{\mathcal{D}}$ より、$\mathfrak{p}$ を含む $\mathrm{Spec} R_{\mathcal{D}}$ の任意の既約成分は pro-modular である。

ステップ 4 。

$R_{\mathcal{D}}$ の任意の素イデアルは pro-modular であることを示す。$Q \subseteq R_{\mathcal{D}}$ を任意の極小素イデアルとする。Q が pro-modular であることを示せばよい。$\rho_{\mathcal{D}}$ の基底を $\rho_{\mathcal{D}}(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となるようにとる。$\rho_{\mathcal{D}}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$, $\rho_c(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & u_\sigma \\ 0 & \chi(\sigma) \end{pmatrix}$ と書く。各素点 $v \in \Sigma \setminus \mathcal{P}$ に対し、v での馴分岐 (tame inertia) 群の pro-p 部分の生成元 $\tau_v \in I_v$ を固定する。$I_2 \subseteq R_{\mathcal{D}}$ を集合 $\{p,\ a_{\tau_v}-1,\ b_{\tau_v}-u_{\tau_v},\ c_{\tau_v},\ d_{\tau_v}-1,\ \det \rho_{\mathcal{D}}(\gamma_j)-1 \mid v \in \Sigma\setminus\mathcal{P},\ 1 \leq j \leq \delta_F\}$ により生成されるイデアルとする。極小素イデアル $Q_2 \subseteq R_{\mathcal{D}}/(Q, I_2)$ をとる。$(F, \mathcal{D})$ は good pair より、$d = [F : \mathbb{Q}]$ に関する不等式から $\rho_{\mathcal{D}} \bmod Q_2$ は既約であることが従う。また、$Q_2 \supseteq I_2$ なので、$\rho_{\mathcal{D}} \bmod Q_2$ はタイプ $\mathcal{D}_c$ の変形である。$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ のときの命題より、Q_2 は pro-modular である。ステップ 2 と同様にして、Q_2 は good な素イデアルに含まれることが分かる。$Q \subseteq Q_2$ より、Q も good な素イデアルに含まれる。ステップ 3 より、Q は pro-modular である。

7 命題5.8の証明

$(F,\mathcal{D})$ はgood pairより、$L_p(F,-1,\chi\omega)\in\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}^\times$ である。よって、命題5.3よりヘッケ環 $\mathbb{T}_\infty(U^\chi,\mathcal{O})$ はpermissibleな極大イデアル $\mathfrak{m}$ を(ただ1つ)持つ。$\mathbb{T}_\chi:=\mathbb{T}_\infty(U^\chi,\mathcal{O})_\mathfrak{m}$ とおく。$\mathbb{T}_\chi$ は $\Lambda_\mathcal{O}$-algebraである。

極小素イデアル $Q\subseteq\mathbb{T}_\chi/(p,T_1,\cdots,T_{\delta_F})$ をとり、$R:=\mathbb{T}_\chi/Q$ とおく。変形 ρ_Q は、タイプ $(\mathcal{O},\Sigma_0)$ の R への擬変形 $\widetilde{\rho}_Q$ を定める。ここに、$\Sigma_0=\{v\mid\chi|_{I_v}\neq 1\}\cup\mathcal{P}$ だった。$\widetilde{\rho}_Q=\{a,d,x\}$ とすると、x は恒等的には0でないことが分かる。$x(\sigma_0,\tau_0)\neq 0$ とする。

素イデアル $Q\subseteq\mathfrak{p}\subseteq\mathbb{T}_\chi$ で、$x(\sigma_0,\tau_0),Y_1^{(t)},\cdots,Y_t^{(t)}\notin\mathfrak{p},\dim\mathbb{T}_\chi/\mathfrak{p}=1,$ なるものをとる。A を $\mathbb{T}_\chi/\mathfrak{p}$ の(商体の中での)整閉包とする。A は完備離散付値環である。A の剰余体を k' とする。k' は k の有限次拡大である。$\mathcal{O}':=\mathcal{O}\otimes_{W(k)}W(k')$ とおく。$\varphi:=\widetilde{\rho}_Q \bmod \mathfrak{p}$ はタイプ $(\mathcal{O}',\Sigma_0)$ の A への擬変形となる。系5.17より、コサイクル $0\neq c_0\in H^1(F_{\Sigma_0}/F,k'(\chi^{-1}))$ と ρ_{c_0} の変形 $\rho_\varphi:\mathrm{Gal}(F_{\Sigma_0}/F)\longrightarrow\mathrm{GL}_2(A)$ が存在して、ρ_φ が定める擬変形は φ となる。

$\mathcal{M}_{c_0}:=\{v\mid\chi|_{I_v}\neq 1\}\backslash\mathcal{P}$ とおくと、ρ_φ はタイプ $\mathcal{D}_0=(\mathcal{O}',\Sigma_0,c_0,\mathcal{M}_{c_0})$ のniceな変形である。よって $\mathcal{D}_0$ に対して(P2)が成り立つ。

もし c が c_0 の(0でない)定数倍なら、$\rho_c\cong\rho_{c_0}$ となり、(P2)が成り立つ。

c が c_0 の定数倍ではないとする。$\mathcal{M}_1:=\{w\in\Sigma_c\mid\chi|_{I_w}\neq 1\}\setminus\mathcal{P}$, $\mathcal{D}_1:=(\mathcal{O}',\Sigma_c,c_0,\mathcal{M}_1)$ とおく。$(F,\mathcal{D})$ がgood pairより、$(F,\mathcal{D}_1)$ もgood pairである。$\mathcal{D}_0$ に対して(P2)が成り立つので、$\mathcal{D}_1$ に対しても(P2)が成り立つ。仮定より $\mathcal{D}_0$ と $\mathcal{D}_1$ に対して(P1)が成り立つので、命題5.7より $R_{\mathcal{D}_1}$ のすべての素イデアルはpro-modularである。

c, c_0 を使って、$R_{\mathcal{D}_1}$ のイデアル I を次のように作る。$F_0(\chi)$ を、すべてのコサイクル $c'\in H_{\Sigma_c}(F,k')$ が自明になるような最小の体とする。$s:=\dim_{k'}H_{\Sigma_c}(F,k')$ とおいて、$\mathrm{Gal}(F(\chi)/F)$ 上の生成元 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s\in\mathrm{Gal}(F_0(\chi)/F(\chi))$ を固定する。$\{\mathbf{a}_j=(\alpha_{1,j},\cdots,\alpha_{s,j})\in k'^s\mid 1\leq j\leq s-2\}$ を $s-2$ 個の1次独立なベクトルで、$\sum_{i=1}^s\alpha_{i,j}c_0(\sigma_i)=0,\sum_{i=1}^s\alpha_{i,j}c(\sigma_i)=0$ を満たすものとする。$\alpha_{i,j}\in k'$ の $\mathcal{O}'$ へのもちあげ $\widetilde{\alpha}_{i,j}$ をとる。$\rho_{\mathcal{D}_1}$ の基底で、$\rho_{\mathcal{D}_1}(z_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ となるものをとる。$\rho_{\mathcal{D}_1}(\sigma)=\begin{pmatrix}a_\sigma&b_\sigma\\c_\sigma&d_\sigma\end{pmatrix}$ と書く。$I\subseteq R_{\mathcal{D}_1}$ を、$\{p,\sum_{i=1}^s\widetilde{\alpha}_{i,j}b_{\sigma_i},\det\rho_{\mathcal{D}_1}(\gamma_l)\mid 1\leq j\leq s-2,\ 1\leq l\leq\delta_F\}$ により生成されるイデアルとする。不等式 $s-2\leq\sharp\Sigma_c+\dim_k H_{\Sigma_0}(F,k)$ と $(F,\mathcal{D})$ がgood pairの仮定に出てくる d についての不等式、命題6.2、補題6.3より、$R_{\mathcal{D}_1}/I$ の任意の極小素イデアルは、既約(でpro-modular)

な変形を定める。

$\widetilde{c}, \widetilde{c}_0$ をそれぞれ c, c_0 の代表元で、$\widetilde{c}(z_1) = \widetilde{c}_0(z_1) = 0$ なるものとする。連続表現 $\rho : \mathrm{Gal}(F_{\Sigma_c}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k'[[x]])$ を $\sigma \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \chi(\sigma)(\widetilde{c}_0(\sigma) + \widetilde{c}(\sigma)x) \\ 0 & \chi(\sigma) \end{pmatrix}$ により定める。ρ はタイプ $\mathcal{D}_1$ の変形を定める。

ρ は、$R_{\mathcal{D}_1}/I$ の 1 次元の素イデアル $\mathfrak{p}$ を定める。極小素イデアル $Q' \subseteq \mathfrak{p}(\subseteq R_{\mathcal{D}_1}/I)$ をとる。$r_{\mathcal{D}_1} : R_{\mathcal{D}_1^{\mathrm{ps}}} \longrightarrow R_{\mathcal{D}_1}$ による Q' の逆像を Q^{tr} とする。$A^{\mathrm{tr}} := R_{\mathcal{D}_1^{\mathrm{ps}}}/Q^{\mathrm{tr}}$ とおいて、A^{tr} の高さ 1 の素イデアル P_0 を次のようにとる。$\beta_1, \cdots, \beta_s \in k'$ を $\sum_{i=1}^s \beta_i c(\sigma_i) = 0$, $\sum_{i=1}^s \beta_i c_0(\sigma_i) \neq 0$ を満たすものとする。c が c_0 の定数倍ではないから、そのようなものが存在する。β_i の $\mathcal{O}'$ へのもちあげ $\widetilde{\beta}_i$ をとる。$\rho_{\mathcal{D}_1}$ の基底で、$\rho_{\mathcal{D}_1}(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ かつ $\sum_{i=1}^s \widetilde{\beta}_i b_{\sigma_i} = u_0 \in \mathcal{O}'^{\times}$ となるものをとる。ただし $\rho_{\mathcal{D}_1}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}$ と書いた。$x(\sigma, \tau) := b_\sigma c_\tau$ とおく。高さ 1 の素イデアル $P_0 \subseteq A^{\mathrm{tr}}$ で、$\{\sum_{i=1}^s \beta_i x(\sigma_i, \tau) \mid \tau \in \mathrm{Gal}(F_{\Sigma_c}/F)\} \subseteq P_0$ となるものが存在し、そのようなものをとる。c が c_0 の定数倍でないことなどを使うと、$x(\sigma', \tau') \notin P_0$ を満たす $\sigma', \tau' \in \mathrm{Gal}(F_{\Sigma_c}/F)$ が存在することが分かる。また、Q' が pro-modular であることと、$(F, \mathcal{D})$ が good pair という仮定にある d_i に関する不等式を使うと、$Y_1^{(i)}, \cdots, Y_{d_i}^{(i)}$ をうまく並べ変えて $Y_1^{(i)} \notin P_0$ とできることが分かる。

$\mathfrak{p}_1 \subseteq A^{\mathrm{tr}}$ を 1 次元の素イデアルで、$P_0 \subseteq \mathfrak{p}_1$ だが $Y_1^{(1)}, \cdots, Y_1^{(t)}, x(\sigma', \tau') \notin \mathfrak{p}_1$ となるものをとる。B を $A^{\mathrm{tr}}/\mathfrak{p}_1$ の整閉包とする。k'' を B の剰余体とする。系 5.17 より、コサイクル $0 \neq c_1 \in H^1(F_{\Sigma_c}/F, k''(\chi^{-1}))$ と ρ_{c_1} の変形 $\rho_1 : \mathrm{Gal}(F_{\Sigma_c}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(B)$ が存在して、ρ_1 が定める擬変形は $\rho_{\mathcal{D}_1^{\mathrm{ps}}} \bmod \mathfrak{p}_1$ となる。各 $1 \leq j \leq s-2$ に対して $\sum_{i=1}^s \alpha_{i,j} c_1(\sigma_i) = 0$ が分かる。また $\sum_{i=1}^s \beta_i c_1(\sigma_i) = 0$ も分かる。よって c と c_1 は $s-1$ 個の共通の関係式をもつことになり、このことより c_1 は c の (0 でない) 定数倍であることが分かる。また、ρ_1 はタイプ $\mathcal{D}_c$ の nice な変形となり、$\mathrm{Ker}\,(R_{\mathcal{D}_c} \longrightarrow B)$ は pro-modular な素イデアルとなることも分かる。

8 命題 5.9 の証明

方針は、以下の通りである。$\hat{\bullet}$ で完備化を表すことにする。

(1) 環の全射準同型 "$\hat{R}_{\mathcal{D},\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\mathcal{D},\mathfrak{p}}$" を構成する。($R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}$ から $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ への環

準同型は $\pi_{\mathcal{D}}$ があるが、$R_{\mathcal{D}}$ から $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ への環準同型は定義されていないことに注意)。実際は、$R_{\mathcal{D}}$ や $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を少し修正して全射を構成する。

(2) formal patching argument (Taylor-Wiles 系を用いた議論) により、全射 "$\hat{R}_{\mathcal{D},\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\mathcal{D},\mathfrak{p}}$" は同型であることをを示す。

擬変形から変形を作る、以下の命題が重要である。

命題 8.1. ([SW], Proposition 2.15, p.26)

$(R, \rho) = \{a, d, x\}$ をタイプ $(\mathcal{O}, \Sigma)$ の擬変形とする。$\mathfrak{p} \subseteq R$ を 1 次元の素イデアルで、$x \bmod \mathfrak{p}$ が恒等的には 0 でないものとする。$R/\mathfrak{p}$ の整閉包の剰余体を k' とする。このとき、以下のものが存在する。

$$\begin{cases} \bullet\ \text{コサイクル}\ 0 \neq c \in H^1(F_\Sigma/F, k'(\chi^{-1}))\ \text{(スカラー倍を除いて一意的)}, \\ \bullet\ \text{完備局所ネーター整域}\ R^+\ \text{で、剰余体が}\ k'\text{、}\dim R' = \dim R\ \text{なるもの}, \\ \bullet\ \mathcal{O}\text{-algebra の局所単射準同型}\ R \hookrightarrow R^+, \\ \bullet\ \mathfrak{p}\ \text{を延長する 1 次元の素イデアル}\ \mathfrak{p}^+ \subseteq R^+, \\ \bullet\ \rho_c\ \text{の変形}\ \rho^+ : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R^+)\ \text{で、}\rho^+\ \text{から定まる擬変形が}\ (R^+, \rho) \\ \text{であるようなもの}. \end{cases}$$

さらに、$\mathcal{M} \subseteq \Sigma \setminus \mathcal{P}$ と $Q \subseteq \Sigma \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{M})$ を部分集合で、$w \in \mathcal{M}$ なら $\rho_c|_{I_w} \neq 1$、$w \in Q$ なら $\rho_c|_{I_w} = 1$ を満たすものとする。$\mathfrak{m}^+$, $\mathcal{L}$ をそれぞれ R^+ の極大イデアル、商体として、

$$\begin{cases} (i)\ \rho^+ \otimes \mathcal{L}|_{D_i} \cong \begin{pmatrix} \widetilde{\chi}\psi_{1,i} & * \\ 0 & \psi_{2,i} \end{pmatrix},\ \psi_{j,i} \bmod m^+ = 1\ (1 \leq i \leq t,\ j = 1, 2), \\ (ii)\ \rho^+ \otimes \mathcal{L}|_{I_w} \cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \widetilde{\chi} \end{pmatrix}\ (\forall w \in \mathcal{M}), \\ (iii)\ \det \rho^+|_{I_w} = 1\ (\forall w \in Q) \end{cases}$$

が成り立つと仮定する。このとき、$\mathcal{O}' := \mathcal{O} \otimes_{W(k)} W(k')$、$\mathcal{D} := (\mathcal{O}', \Sigma \setminus Q, c, \mathcal{M})$ とおくと、ρ^+ はタイプ $\mathcal{D}_Q$ の変形となる。 □

$[F : \mathbb{Q}]$ を偶数とする。$\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を素イデアルとし、nice for $\mathcal{D}$ とする。自然な全射 $\mathbb{T}_{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}$ がある。$\mathfrak{p}$ はこの全射による $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}$ の素イデアル (これも $\mathfrak{p}$ と書く) の逆像である。合成

$$R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{D}}} \mathbb{T}_{\mathcal{D}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}$$

を $\pi_{\mathcal{D}}^{\min}$ と書く。$\mathfrak{p}$ は nice for $\mathcal{D}$ より、$\mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}/\mathfrak{p}$ は 1 次元で、$p \in \mathfrak{p}$ である。A を $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}/\mathfrak{p}$ の整閉包とすると、k のある有限次拡大 k' に対し、$A \cong k'[[\lambda]]$ となる。$\mathfrak{p}$ は nice for $\mathcal{D}$ より、$\rho_{\mathfrak{p}}|_{D_i}$ は対角成分に位数無限大の指標を少なくとも 1 つもつ。よって、合成 $\Lambda_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min}/\mathfrak{p} \hookrightarrow A$ に関して、A は $\Lambda_{\mathcal{O}}$ 加群として有限生成である。$\Lambda_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}[[z_1, \cdots, z_m]]$ と書く。$z_i \longmapsto \lambda^{r_i} u_i$ で、各 i に対し $u_i \in A^{\times}$ または $u_i = 0$ とする。各 i に対し $r_i > 0$ としてよい。必要なら番号をつけ変えて、$u_1 \in A^{\times}$ としてよい。$\mathcal{O}' := \mathcal{O} \otimes_{W(k)} W(k')$ とし、$\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}} := \mathcal{O}'[[W_1, \cdots, W_m]]$ とおく。$\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow A$ を、$W_1 \longmapsto \lambda_1$, $W_i \longmapsto 0$ $(2 \leq i \leq m)$ により定める。$\Lambda_{\mathcal{O}} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ を、$z_1 \longmapsto W_1^{r_1}\widetilde{u}_1$, $z_i \longmapsto -W_i + W_1^{r_i}\widetilde{u}_i$ $(2 \leq i \leq m)$ により定める。ここに $\widetilde{u}_i$ は u_i の $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ へのもちあげであり、そのようなものを固定する。$\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ は $\Lambda_{\mathcal{O}}$ 加群として有限生成自由であり、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min} & \longrightarrow & A \end{array}$$

$\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ は素イデアル $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}} \subseteq R_{\mathcal{D}}$ を定める。$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}} \subseteq R_{\mathcal{D}}$ は nice な素イデアルであり、特に 1 次元である。$\mathfrak{p}^{\mathrm{ps}} := (r_{\mathcal{D}})^{-1}(\mathfrak{p}_{\mathcal{D}})$ とおく。$\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}$ は $R_{\mathcal{D}}^{\min}$ の素イデアル (これも $\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}$ と書く) の $R_{\mathcal{D}} \longrightarrow R_{\mathcal{D}}^{\min}$ による逆像として得られる。合成

$$R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \xrightarrow{r_{\mathcal{D}}} R_{\mathcal{D}} \longrightarrow R_{\mathcal{D}}^{\min}$$

を $r_{\mathcal{D}}^{\min}$ と書く。

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min} := \mathbb{T}_{\mathcal{D}}^{\min} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}} \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}},$$
$$\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min} := R_{\mathcal{D}}^{\min} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}} \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}},$$
$$\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} := R_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}} \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$$

とおく。$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_{\mathcal{D}}, \mathfrak{p}^{\mathrm{ps}}$ を延長する $\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min}, \widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min}, \widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}$ の素イデアル $\widetilde{\mathfrak{p}}, \widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}, \widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}$ が存在する。$(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}, (\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}, (\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}}$ を、それぞれ $\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min}, \widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min}, \widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}$ を $\widetilde{\mathfrak{p}}, \widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}, \widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}$ で局所化してさらに完備化したものとする。

命題 8.2. ([SW], Proposition 2.11, p.21)

$\mathfrak{q} \subseteq R_{\mathcal{D}_Q}$ を 1 次元の素イデアルで、$\rho_{\mathcal{D}_Q} \bmod \mathfrak{q}$ が既約なものとする。$\mathfrak{q}' := r_{\mathcal{D}_Q}^{-1}(\mathfrak{q})$ とすると、自然な環準同型

$$\hat{R}_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}, \mathfrak{q}'} \longrightarrow \hat{R}_{\mathcal{D}_Q, \mathfrak{q}}$$

は全射である。 □

命題 8.2 より、全射 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}$ が定まる。
$P := (\pi, W_2, \cdots, W_m) \subseteq \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ とおく。$P = (\widetilde{\mathfrak{p}}$ の逆像$) \cap \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ である。

命題 8.3. ([SW], Lemma 7.1, p.100)
局所環の自然な全射

$$\psi(\mathcal{D}, \mathfrak{p}) : (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$$

があり、$\mathfrak{l} \notin \Sigma$ に対し $\mathrm{Tr}\rho^{\min}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) \longmapsto T(\mathfrak{l}) \otimes 1,\ \det \rho^{\min}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{l}}) \longmapsto S(\mathfrak{l})\mathrm{N}(\mathfrak{l}) \otimes 1$ となる。

証明. $\mathcal{Q}_0 := \{\mathfrak{q} \subseteq \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}} \mid \mathfrak{q}$ は 2 次元の素イデアル、$\mathfrak{q} \subseteq P$、$\Lambda/\mathfrak{q}$ は正則$\}$ とおく。$Q \subseteq \widetilde{\mathfrak{p}}(\subseteq \widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})$ なる極小素イデアルをとる。B を $\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}}/Q$ の整閉包とする。$\widetilde{\mathfrak{p}}$ の像を延長する B の素イデアルを $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$ とする。$1 \leq i \leq s$ に対して、$\mathcal{Q}_i := \{\mathfrak{Q} \subseteq B \mid \mathfrak{Q}$ は 2 次元の素イデアル、$\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{p}_i$、$\mathfrak{Q}$ は $\mathcal{Q}_0$ に含まれるある素イデアルを延長する$\}$ とおく。

$\mathfrak{Q} \in \mathcal{Q}_i$ をとり、$\mathbb{T} := B/\mathfrak{Q}$ とおく。R を $\mathbb{T}$ の整閉包とする。$\mathfrak{p}_i$ の像を延長する R の素イデアルを $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_{t_i}$ とする。命題 8.1 より、$1 \leq j \leq t_i$ に対して R の拡大 R^+_j、$\mathfrak{P}_j$ を延長する素イデアル $\mathfrak{P}^+_j \subseteq R^+_j$、$\mathcal{O}$ の拡大 $\mathcal{O}_j$、タイプ $(\mathcal{O}_j, \Sigma, c, \mathcal{M})$ 極小の変形 $\rho^+_j : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(R^+_j)$ が存在して、$X := \mathrm{Ker}\,(\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{T})$ とするとき、ρ^+_j が定める擬変形は $(R^+_j, \rho^{\mathrm{ps}}_X)$ となる。ここで出てくるコサイクル c は変形データ $\mathcal{D}$ に入っているものであるが、$\mathfrak{p}$ が nice for $\mathcal{D}$ という仮定のおかげである。これにより、環準同型 $R^{\min}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_j \longrightarrow R^+_j$ が定まる。

あとはこれらを貼り合わせる。自然な環準同型 $(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \prod_{j=1}^{t_i} \hat{R}^+_{j,\mathfrak{P}^+_j}$ が定まる。包含関係 $\hat{\mathbb{T}}_{\mathfrak{p}_i} \subseteq \prod_{j=1}^{t_i} \hat{R}_{\mathfrak{P}_j} \subseteq \prod_{j=1}^{t_i} \hat{R}^+_{j,\mathfrak{P}^+_j}$ に注意すると、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}} & \xrightarrow{\text{全射}} & (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mathbb{T}}_{\mathfrak{p}_i} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{j=1}^{t_i} \hat{R}^+_{j,\mathfrak{P}^+_j}
\end{array}$$

より、環準同型 $(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \hat{\mathbb{T}}_{\mathfrak{p}_i}$ を得る。

自然な環準同型 $\hat{\mathbb{T}}_{\mathfrak{p}_i} \longrightarrow \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{Q}$ が定まる。可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}} & \xrightarrow{\text{全射}} & (\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\hat{B}_{\mathfrak{p}_i} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{\mathfrak{Q}\in\mathcal{Q}_i} \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{Q}
\end{array}$$

より、環準同型 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}$ を得る。よって、環準同型 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{s} \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}$ を得る。

可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}} & \xrightarrow{\text{全射}} & (\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/Q & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{i=1}^{s} \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}
\end{array}$$

より、環準同型 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/Q$ を得る。よって、環準同型

$$(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \prod_{Q\subseteq\mathfrak{p},\ Q\text{ は極小素イデアル}} (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/Q$$

を得る。

可換図式

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ps}}} & \xrightarrow{\text{全射}} & (\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \\
{\scriptstyle\text{全射}}\downarrow & & \downarrow \\
(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}} & \xrightarrow{\subseteq} & \prod_{Q\subseteq\mathfrak{p},\ Q\text{ は極小素イデアル}} (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/Q
\end{array}$$

より、全射 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ を得る。

$\square$

後で、全射 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は同型であることが示される (命題 11.3)。

(P1) が成り立つことを示す。素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ が nice for $\mathcal{D}$ とする。$Q \subseteq \mathfrak{p}_{\mathcal{D}} (\subseteq R_{\mathcal{D}})$ を任意の極小素イデアルとして、Q が pro-modular であることを示せばよい。$\rho := \rho_{\mathcal{D}} \bmod Q$ とする。$R := R_{\mathcal{D}}/Q$ とおく。L_Σ を Σ の外不分岐な F の最大アーベル pro-p 拡大とし、N_Σ を $\mathrm{Gal}(L_\Sigma/F)$ の torsion 部分とする (定義 2.2)。位数 p べきの指標 $\psi : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow R^\times$

で、$\widetilde{\chi}^{-1}\cdot\det(\rho\otimes\psi)$ が N_Σ 上自明なものを固定する。変形 $\rho\otimes\psi$ から定まる環準同型 $R_{\mathcal{D}}\longrightarrow R$ は $R_{\mathcal{D}}^{\min}$ を経由する。$Q_1:=\mathrm{Ker}\,(R_{\mathcal{D}}\longrightarrow R)$ とすると、$Q_1\subseteq\mathfrak{p}_{\mathcal{D}}$ である。$(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}\cong(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ より、Q_1 が pro-modular であることが分かる。

補題 8.4. ([SW], Lemma 3.17, p.45)
$Q\subseteq\mathfrak{p}\subseteq\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ を２つの素イデアルとして、Q は極小とする。L を $\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})/Q$ の商体とし、$R\subseteq\overline{L}$ を $\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})/Q$ の整拡大で、加群として有限生成なものとする。$\psi:\mathrm{G}_F\longrightarrow R^\times$ を位数有限の指標とすると、２つの素イデアル $Q'\subseteq\mathfrak{p}'\subseteq\mathbb{T}_\infty(U\cap U_1(\mathrm{cond}^{(p)}(\psi)^2),\mathcal{O})$ で、Q' は極小、$\rho_{Q'}\cong\rho_Q\otimes\psi$, $\rho_{\mathfrak{p}'}\cong\rho_{\mathfrak{p}}\otimes\psi$ を満たすものが存在する。 □

補題8.4より、ρが定める擬変形を導く環準同型$\mathbb{T}_\infty(U_{\mathcal{D}}\cap U_1(\mathrm{cond}^{(p)}(\psi)^2),\mathcal{O})\longrightarrow R$ が存在する。$U_{\mathcal{D}}\subseteq U_1(\mathrm{cond}^{(p)}(\psi)^2)$ が分かり、これより Q が pro-modular であることが従う。

9 formal patching argument

まず $R=\mathbb{T}$ を示すための機構、いわゆる formal patching argument (互いに関係の無いものを寄せ集めてうまく逆極限をとって貼り合わせる) について説明する。

k を標数 p の有限体、$A:=k[[T]]$ とする。A の商体を K とする。$\mathcal{L}$ を 0 から始まる狭義単調増加 (無限) 数列で、0 以外は奇数なものとする。整数 $n>0$ を固定する (この n は、後の補題 10.1 に出てくる r にとる)。各 $N\in\mathcal{L}$ に対し、環

$$A_N:=A[[s_1,\cdots,s_n]]/(s_1^{N+1},\cdots,s_n^{N+1}),\ A_0=A,$$

$$B_N:=A[[t_1,\cdots,t_n]]/(t_1^{(N+1)/2},\cdots,t_n^{(N+1)/2}),\ B_0=A$$

を考える。A-algebra の準同型 $B_N\longrightarrow A_N$; $t_i\longmapsto(1+s_i)+(1+s_i)^{-1}-2$ により、B_N を A_N の部分 A-algebra とみなす。各 $N\in\mathcal{L}$ に対し、環 $R^{(N)}$ で

$$R^{(N)}=A[[x_1,\cdots,x_m]]/\mathfrak{a}^{(N)}$$

という形のものが与えられているとする。ここに m は N によらない整数で、$m\geq n$ である。また $R^{(N)}$ は次の性質をもつとする:

(i) $R^{(N)}$ は A 加群として有限生成自由,

(ii) $\mathfrak{a}^{(N)} \subseteq (x_1, \cdots, x_m)$,

(iii) A-algebra の全射 $R^{(N)} \twoheadrightarrow R^{(0)}$ が存在する,

(iv) $N > 0$ なら $R^{(N)}$ は B_N-algebra.

$(x_1, \cdots, x_m)$ に対応する $R^{(N)}$ の素イデアルを $\mathfrak{p}^{(N)}$ とする。$R^{(N)}$ はさらに次の性質をもつとする:

(i) ある整数 $d(0) > 0$ が存在して $(\mathfrak{p}^{(0)})^{d(0)} = (0)$ となる,

(ii) $\mathfrak{p}^{(N)}/(\mathfrak{p}^{(N)})^2 \cong A^n \oplus \mathrm{Tor}_{(N)}$, ただし A^n は $x_1, \cdots, x_n$ で生成され、$\mathrm{Tor}_{(N)}$ は有限群で位数は N が動いても有界.

0 または奇数であるような $0 \leq a \leq N$ に対し、B_N-algebra としての $R^{(N)}$ の商 $R_a^{(N)}$ で次の条件を満たすものが与えられているとする:

(i) $R_a^{(N)}$ は A 加群として有限生成自由,

(ii) $R_N^{(N)} = R^{(N)}$, $R_0^{(N)} = R^{(0)}$,

(iii) B_N-algebra の全射 $R^{(N)} = R_N^{(N)} \twoheadrightarrow R_{N-2}^{(N)} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow R_3^{(N)} \twoheadrightarrow R_1^{(N)} \twoheadrightarrow R_0^{(N)}$ が存在する,

(iv) $R_a^{(N)}$ は $B_N \twoheadrightarrow B_a$ と両立する B_a-algebra で、$a > 1$ なら $(R_a^{(N)} \otimes_A K)/(t_1^{(a-1)/2}, \cdots, t_n^{(a-1)/2}) \cong R_{a-2}^{(N)} \otimes_A K$,

(v) $R_a^{(N)} \otimes_A K$ は $A_a \otimes_A K$-algebra で、(iii) の写像により $R_a^{(N)} \otimes_A K/(s_1, \cdots, s_n) \twoheadrightarrow R_0^{(N)} \otimes_A K$.

$(x_1, \cdots, x_m)$ に対応する $R_a^{(N)}$ の素イデアルを $\mathfrak{p}_a^{(N)}$ とする。$R_a^{(N)}$ はさらに次の性質をもつとする:

(i) N によらない整数 $d(a) > 0$ が存在して $(\mathfrak{p}_a^{(N)})^{d(a)} = (0)$ となる,

(ii) $\mathfrak{p}_a^{(N)}/(\mathfrak{p}_a^{(N)})^2 \cong A^n \oplus \mathrm{Tor}_{(N,a)}$, ただし A^n は $x_1, \cdots, x_n$ で生成され、$\mathrm{Tor}_{(N,a)}$ は有限群で位数は N, a が動いても有界.

部分 A-algebra $R^{\mathrm{tr}(N)} \subseteq R^{(N)}$ で次を満たすものが与えられているとする:

(i) $R^{\mathrm{tr}(N)} = A[[y_1, \cdots, y_m]]/\mathfrak{b}^{(N)}$, $\mathfrak{b}^{(N)} \subseteq (y_1, \cdots, y_m)$ (ただし m は $R^{(N)}$ に出てくるものと同じ),

(ii) $N>0$ なら $R^{\mathrm{tr}(N)}$ は $R^{(N)}$ の部分 B_N-algebra.

$\mathfrak{q}^{(N)}:=\mathfrak{p}^{(N)}\cap R^{\mathrm{tr}(N)}$ とおく。$\mathfrak{q}^{(N)}$ は $(y_1,\cdots,y_m)$ に対応する素イデアルとなる。さらに次の性質を仮定する:

•Coker $(\mathfrak{q}^{(N)}/(\mathfrak{q}^{(N)})^2 \longrightarrow \mathfrak{p}^{(N)}/(\mathfrak{p}^{(N)})^2)$ の位数は N が動いても有界.

0 または奇数であるような $0\le a\le N$ に対し、

$$R_a^{\mathrm{tr}(N)}:=\mathrm{Im}\,(R^{\mathrm{tr}(N)}\longrightarrow R_a^{(N)})$$

とおく。

N に依存しない整数 $r>0$ と有限生成 $R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群 $M^{(N)}$ で、次の性質をみたすものが与えられているとする:

(i) $M^{(N)}$ は有限生成自由 A 加群で、$\mathrm{rank}_A M^{(N)}=\mathrm{rank}_A A_N^r$,

(ii) $M^{(N)}$ は A_N 加群で、$R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群としての構造から定まる B_N 加群としての構造と両立する,

(iii) $R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群の準同型 $M^{(N)}\longrightarrow M^{(0)}$ がある.

0 または奇数であるような $0\le a\le N$ に対し、$R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群としての商 $M_a^{(N)}$ で、次の性質をみたすものが与えられているとする:

(i) $M_a^{(N)}$ は有限生成自由 A 加群で、$\mathrm{rank}_A M_a^{(N)}=\mathrm{rank}_A A_a^r$,

(ii) $M_N^{(N)}=M^{(N)}$, $M_0^{(N)}\subseteq M^{(0)}$ で、N に依存しないある $z\in R^{\mathrm{tr}(0)}$ があって、$\mathrm{ord}_T(z \bmod \mathfrak{q}^{(0)})\neq 0$ かつ $z\cdot M^{(0)}\subseteq M_0^{(N)}$ となる,

(iii) $R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群としての全射 $M^{(N)}=M_N^{(N)}\twoheadrightarrow M_{N-2}^{(N)}\twoheadrightarrow\cdots\twoheadrightarrow M_3^{(N)}\twoheadrightarrow M_1^{(N)}\twoheadrightarrow M_0^{(N)}$ がある.

(iv) $M_a^{(N)}$ は $R_a^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群で、$R^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群としての構造と両立する,

(v) $M_a^{(N)}$ は A_a 加群で (iv) より導かれる B_a 加群としての構造と両立し、(iii) の全射は $A_N\twoheadrightarrow A_{N-2}\twoheadrightarrow\cdots\twoheadrightarrow A_3\twoheadrightarrow A_1\twoheadrightarrow A_0$ と両立し、$R_a^{\mathrm{tr}(N)}$ と A_a の $M_a^{(N)}$ への作用は可換である,

(vi) $M_a^{(N)}\otimes_A K$ は自由 $A_a\otimes_A K$ 加群で、$M_a^{(N)}\otimes_A K/(s_1,\cdots,s_n)\cong M_0^{(0)}\otimes_A K$ が成り立つ.

さらに、$x^{(N)} \in R^{\mathrm{tr}(N)}$ が存在して次を満たすとする:

(i) $x^{(N)} \cdot \mathrm{Ker}\,(M_a^{(N)}/(s_1, \cdots, s_n) \twoheadrightarrow M_0^{(N)}) = 0$,

(ii) $\mathrm{ord}_T(x^{(N)} \bmod \mathfrak{q}^{(N)}) = t < \infty$ で、t は N に依存しない.

このとき、次のことが分かる。

補題 9.1. ([SW], Lemma 5.2, p.82)

$$R_a^{\mathrm{tr}(N)} \otimes_A K = R_a^{(N)} \otimes_A K$$

が成り立つ。 □

R や M を貼り合わせるために、次のようなレベル構造を導入する。

定義 9.2. レベル (a, c) **構造** $J(N, a, c)$ とは、次のようなデータである:

(i) B_a-algebra $R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)} = R_a^{\mathrm{tr}(N)}/T^c$ と $R_{a,c}^{(N)} = R_a^{(N)}/T^c$,

(ii) A_a 加群 $M_{a,c}^{(N)} = M_a^{(N)}/T^c$ で $R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群でもあるもの,

(iii) B_a-algebra の準同型 $R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)} \longrightarrow R_{a,c}^{(N)}$,

(iv) $R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)}$ 加群の準同型 $M_{a,c}^{(N)}/(s_1, \cdots, s_n) \longrightarrow M^{(0)}/T^c$ で $A_a \twoheadrightarrow A$ を通じて A_a, A の作用と両立するもの,

(v) $x_1, \cdots, x_m \in R_{a,c}^{(N)}$ で $R_{a,c}^{(N)}/(x_1, \cdots, x_m) \cong A$ となるもの,

(vi) $y_1, \cdots, y_m \in R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)}$ で $R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N)}/(y_1, \cdots, y_m) \cong A$ となるもの.

$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$ とする。$\mathcal{L}_1(0) := \mathcal{L}_0$ とし、(無限) 部分列 $\mathcal{L}_1(c) \subseteq \mathcal{L}_1(c-1)$ を帰納的に次のように定めていく (１通りとは限らないが、そのうちの１つをとる): $N', N'' \in \mathcal{L}_1(c)$ なら $J(N', 1, c) = J(N'', 1, c)$ となるようにとる。ここに $J(N', 1, c) = J(N'', 1, c)$ とは、２つのレベル構造が (non-canonical に) 同一視されるということである。a, c を固定したときに、同一視されないレベル構造は有限個しかないので、きちんと $\mathcal{L}_1(c)$ がとれる。$\mathcal{L}_1 := \{N_i \mid N_i \in \mathcal{L}_1(i)\}$ とおく。ここに、N_i は $\mathcal{L}_1(i)$ の i 番目の数である。$\mathcal{L}_1$ は狭義単調増加 (無限) 数列になる。奇数 $a \geq 3$ に対しては、$\mathcal{L}_a$ を次のように定める。$\mathcal{L}_a(0) := \mathcal{L}_{a-2}$ とおいて、$\mathcal{L}_a(c) \subseteq \mathcal{L}_a(c-1)$ を帰納的に、$N', N'' \in \mathcal{L}_a(c)$ なら $J(N', a, c) = J(N'', a, c)$ となるようにとっていく。

$$R_a^{\mathrm{tr}} := \operatorname*{proj\,lim}_{N_c \in \mathcal{L}_a} R_{a,c}^{\mathrm{tr}(N_c)},\ R_a := \operatorname*{proj\,lim}_{N_c \in \mathcal{L}_a} R_{a,c}^{(N_c)},\ M_a := \operatorname*{proj\,lim}_{N_c \in \mathcal{L}_a} M_{a,c}^{(N_c)}$$

とおく。

$$R'_a := R_a \otimes_A K,\ M'_a := M_a \otimes_A K$$

として、

$$R_\infty := \operatorname*{proj\,lim}_{a} R'_a,\ M_\infty := \operatorname*{proj\,lim}_{a} M'_a$$

とおく。M'_a は R'_a 加群となり、M_∞ は R_∞ 加群となる。

補題 9.3. ([SW], Lemma 5.6, p.85)
(i) $R_\infty = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ が成り立つ。
(ii) M_∞ は有限生成自由 R_∞ 加群である。 □

命題 9.4. ([SW] Proposition 5.8, Proposition 5.9, p.86,87)
(i) $e := \operatorname{rank}_{R_\infty} M_\infty$ とすると、$M^{(0)} \otimes_A K \cong (R^{(0)} \otimes_A K)^e$ が成り立つ。特に、$M^{(0)} \otimes_A K$ は有限生成自由 $R^{(0)} \otimes_A K$ 加群である。
(ii) $R^{(0)} \otimes_A K$ は K-algebra として完全交叉である。 □

10 セルマー群の評価

$A := k[[\lambda]]$ として、連続表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(A)$$

を考える。K を A の商体とする。ρ が $w \nmid p$ で分岐するとき、$\rho \otimes \overline{K}$ が w でタイプ A またはタイプ B ということを、以下のように定める。

タイプ A : $(\rho \otimes \overline{K})|_{I_w} \cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, * \neq 0.$

タイプ B : $(\rho \otimes \overline{K})|_{I_w} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi_w \end{pmatrix}$, ψ_w は位数有限の指標で、$\psi_w \neq 1.$

$\overline{\rho} := \rho \bmod \lambda$ とおく。次を仮定する。

$$\begin{cases} (i)\ \rho\otimes\overline{K} \text{ は既約で、各 } w\nmid p \text{ に対しタイプ A、タイプ B または不分岐,} \\ (ii)\ \text{ある } 0\neq c\in H_\Sigma(F,k) \text{ に対し } \overline{\rho}=\rho_c, \\ (iii)\ \Sigma\supseteq\{v\mid \overline{\rho}|_{I_v}\neq 1\}\cup\mathcal{P}, \\ (iv)\ \rho \text{ がタイプ A と } \overline{\rho} \text{ がタイプ A は同値、} \rho \text{ がタイプ B と } \overline{\rho} \text{ がタイプ B は同値,} \\ (v)\ \det\rho=\chi, \\ (vi)\ \text{各 } v|p \text{ に対し } \rho|_{D_v}\cong\begin{pmatrix}\chi_1 & * \\ 0 & \chi_2\end{pmatrix} \text{ で、} \chi_1/\chi_2 \text{ は位数無限大.} \end{cases}$$

ρ の表現空間を $\mathcal{U}$ とする。$\mathcal{U}$ は A 上の階数 2 の自由加群である。

$$\mathrm{ad}\rho := \mathrm{Hom}_A(\mathcal{U},\mathcal{U})$$

とおく。$\mathrm{ad}\rho$ への $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$ の作用を $\sigma(f) := \sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$ ($f\in\mathrm{ad}\rho$, $\sigma\in\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$) により定める。つまり次の図式が可換となるように定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{U} \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow[\sigma(f)]{} & \mathcal{U} \end{array}$$

$\mathcal{T} := \mathrm{ad}^0\rho := \{f\in\mathrm{ad}\rho \mid \mathrm{Tr}f=0\}$ とおく。また、$\mathcal{T}_n := \mathcal{T}/\lambda^n$ とおく。$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_n$ にも自然に $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$ の作用が導かれる。

セルマー群の局所条件を定めるため、次のようなフィルトレーションを考える。

$v|p$ のとき、D_v の作用で安定な階数 1 の自由部分 A 加群 $\mathcal{U}_{1,v}\subseteq\mathcal{U}$ で、$\mathcal{U}_{1,v}/\lambda$ に D_v が χ として作用するものをとる。$\mathcal{U}_{2,v} := \mathcal{U}/\mathcal{U}_{1,v}$ とおく。$\mathcal{U}_{2,v}$ は階数 1 の自由 A 加群であり、D_v は $\mathcal{U}_{2,v}/\lambda$ に自明に作用する。$\mathcal{T}_v^{\mathrm{ord}} := \{f\in\mathcal{T}\mid f(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}_{1,v}\}$, $\mathcal{T}_{n,v}^{\mathrm{ord}} := \mathcal{T}_v^{\mathrm{ord}}/\lambda^n$, $H_v(\mathcal{T}_n) := H^1(I_v,\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_{n,v}^{\mathrm{ord}})$ とおく。

$w\nmid p$ とする。$\rho\otimes\overline{K}$ が w でタイプ A のとき、$\mathcal{U}_1^w\subseteq\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}$ の I_w 不変部分 $\mathcal{U}^{I_w}$ とする。$\mathcal{U}_1^w$ は階数 1 の自由部分 A 加群である。$\mathcal{U}_2^w := \mathcal{U}/\mathcal{U}_1^w$ とおくと、$\mathcal{U}_2^w$ は階数 1 の自由 A 加群であり、I_w は $\mathcal{U}_2^w$ に自明に作用

する。$\rho \otimes \overline{K}$ が w でタイプ B のとき、$\mathcal{U}_1^w := \mathcal{U}^{I_w}$, $\mathcal{U}_2^w := \{x \in \mathcal{U} \mid$ 任意の $\sigma \in I_w$ に対して$\sigma(x) = \chi(\sigma)x\}$ とおくと、$\mathcal{U}_1^w, \mathcal{U}_2^w$ はともに階数 1 の自由部分 A 加群で、$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1^w \oplus \mathcal{U}_2^w$ となる。タイプ A、B いずれの場合でも、$\mathcal{T}^w := \{f \in \mathcal{T} \mid f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}_1^w\}$, $\mathcal{T}_n^w := \mathcal{T}^w/\lambda^n$,

$$H_w(\mathcal{T}_n) := \begin{cases} H^1(I_w, \mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^w) & (\rho \otimes \overline{K} \text{ が } w \text{ でタイプ A またはタイプ B のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

とおく。

$w \in \Sigma$ に対して ($w = v|p$, $w \nmid p$ 両方の場合がある)、$L_w(\mathcal{T}_n) := \operatorname{Ker}(H^1(D_w, \mathcal{T}_n) \longrightarrow H_w(\mathcal{T}_n))$ とおく。$\mathcal{T}_n$ に対するセルマー群を、

$$H_\Sigma(\mathcal{T}_n) := \{\alpha \in H^1(F_\Sigma/F, \mathcal{T}_n) \mid \text{各 } v \in \Sigma \text{ に対して } \mathrm{Res}_w \alpha \in L_w(\mathcal{T}_n)\}$$

と定める。$L_w^*(\mathcal{T}_n) \subseteq H^1(D_w, \mathcal{T}_n(1))$ を、局所双対性による $L_w(\mathcal{T}_n)$ の直交補空間とし、$\mathcal{T}_n$ に対する双対セルマー群を、

$$H_\Sigma^*(\mathcal{T}_n) := \{\alpha \in H^1(F_\Sigma/F, \mathcal{T}_n(1)) \mid \text{各 } v \in \Sigma \text{ に対して } \mathrm{Res}_w \alpha \in L_w^*(\mathcal{T}_n)\}$$

と定める。$\Sigma_0' := \{v \in \Sigma \mid \rho|_{I_v} \neq 1\} \cup \mathcal{P}$ とおく。

補題 10.1. ([SW], Lemma 6.8, p.94)
整数 $r \geq 0$ と有限群 X, X^* が存在して、

$$\operatorname*{inj\,lim}_n H_{\Sigma_0'}(\mathcal{T}_n) \cong (K/A)^r \oplus X, \qquad \operatorname*{inj\,lim}_n H^*_{\Sigma_0'}(\mathcal{T}_n) \cong (K/A)^r \oplus X^*$$

となる。 □

F' を、$\det \rho$ の分解体に 1 の p べき乗根全部を添加した体とする。

命題 10.2. ([SW], Lemma 6.3, p.90; Proposition 6.10, p.97)
$\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\Sigma/F')$ で、$\rho(\sigma)$ の固有値が位数無限大の A の元であるようなものが存在する。そのような σ をとる。また $r \geq 0$ を、補題 10.1 に出てくるものとする。このとき、任意の $m > 0$ に対し、F の有限素点の集合 $Q = \{w_1, \cdots, w_r\}$ で次を満たすものが無限個存在する。

$$\begin{cases} \text{(i) 各 } i \text{ について } \mathrm{N}(w_i) \equiv 1 \bmod p^m, \\ \text{(ii) 各 } i \text{ について } \rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Frob}_{w_i}) \equiv \rho_{\mathfrak{p}}(\sigma) \bmod \lambda^m, \\ \text{(iii) } \operatorname{inj\,lim}_n H_{\Sigma_Q}(\mathcal{T}_n) \cong (K/A)^r \oplus X_{\Sigma_Q}. \end{cases}$$

ここに、$\Sigma_Q := \Sigma_0' \cup Q$ であり、また σ, r のみに依存する定数 $C(\sigma, r) > 0$ が存在して、$\sharp X_{\Sigma_Q} < C(\sigma, r)$ となる。 □

注 10.3. 命題 10.2 で、$\rho(\sigma)$ の固有値が位数無限大というところには、ρ に対する仮定 (vi) (χ_1/χ_2 は位数無限大) が効いている。

11　ヘッケ加群

ヘッケ加群を定める。$[F:\mathbb{Q}]$ を偶数とする。このとき、F 上の 4 元数体 D で、各無限素点で分岐し、各有限素点で不分岐なものが (同型を除いて) ただ 1 つ存在する。G^D を F 上の代数群で $G^D(F)=D^\times$ なる唯一のものとする。$U\subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)\cong G^D(\mathbb{A}_f)$ をコンパクト開部分群として、$X(U):=D^\times\backslash G^D(\mathbb{A}_f)/U$ とおく。$X(U)$ は有限集合である。

$$H^0(X(U),\mathbb{Z}):=\{\,\text{写像}\ f:X(U)\longrightarrow\mathbb{Z}\}$$

とおく。$\mathbb{Z}$ 加群 R に対し、$H^0(X(U),R):=H^0(X(U),\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}R$ とおく。m を十分約数をもつ正の整数とすると、$e=\lim_{n\to\infty}[U_a\begin{pmatrix}1&0\\0&\widetilde{p}\end{pmatrix}U_a]^{p^n(p^m-1)}\in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(H^0(X(U_a),\mathcal{O}))$ が存在する。

$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(H^0(X(U_a),\mathcal{O}))\supseteq\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O}):=\mathcal{O}[T_0(p),\,T_0(\mathfrak{p}_i)\ (1\le i\le t),$
$T(\mathfrak{l})\ (\mathfrak{l}\nmid p,\,U_{\mathfrak{l}}=\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})),\,S(\mathfrak{l})\ (\mathfrak{l}\nmid p,\,U_{\mathfrak{l}}=\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{l}})),\,[U_axU_a]\ (x\in U_a^0)]$ とおく。$\mathbb{T}_2(U_a,\mathcal{O})$ は $e\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O})$ と同一視される。

$$H_\infty(U):=\operatorname*{inj\,lim}_a eH^0(X(U_a),K/\mathcal{O})$$

とおく。$H_\infty(U)$ は $\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ 加群である。

$\overline{U}:=U/U\cap F^\times$ とおく。$\mathbb{A}_p$ をアデール $\mathbb{A}$ の p 部分とし、$x\in G^D(\mathbb{A}_p)$ に対し $c_U(x):=\sharp\{x\in\overline{U}\mid xu=x\}$ とおく。R を $\mathcal{O}$-algebra とし、各 $c_U(x)$ は R で可逆とする。ペアリング

$$\langle,\rangle_U:H^0(X(U),R)\times H^0(X(U),R)\longrightarrow R$$

を $\langle f,g\rangle_U:=\sum_{x\in X(U)}c_U(x)^{-1}f(x)g(x)$ で定める。$\langle,\rangle_U$ は非退化で、同型

$$H^0(X(U),R)\cong\mathrm{Hom}_R(H^0(X(U),R),R)\ ;\ f\longmapsto\langle\cdot f,\cdot\rangle_U$$

を導く。$\langle,\rangle_U$ はヘッケ環の作用と両立しない。各 $g\in G^D(\mathbb{A}_f),\ f,h\in H^0(X(U),R)$ に対し、$\langle[UgU]f,h\rangle_U=\langle f,[Ug^{-1}U]h\rangle_U$ が成り立つ。各 $t\in\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O})$ に対して、$t^+\in\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(H^0(X(U_a),\mathcal{O}))$ で、任意の $f,h\in$

$H^0(X(U_a),\mathcal{O})$ に対して $\langle t\cdot f,h\rangle_{U_a}=\langle f,t^+\cdot h\rangle_{U_a}$ を満たすものがただ1つ存在する。$\mathrm{End}(H^0(X(U_a),\mathcal{O}))\supseteq\mathbb{T}^+(U_a,\mathcal{O}):=\{t^+\mid t\in\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O})\}$ とおく。R を $\mathcal{O}$ 加群とする。$H^0(X(U_a),R)^+$ を $H^0(X(U_a),R)$ で、$t\in\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O})$ が t^+ として作用するものと定める。

$$H^+_\infty(U):=\operatorname*{inj\,lim}_a eH^0(X(U_a),K/\mathcal{O})^+,$$

$$M_\infty(U):=\operatorname*{proj\,lim}_a eH^0(X(U_a),\mathcal{O})^+,$$

$$M^+_\infty(U):=\operatorname*{proj\,lim}_a eH^0(X(U_a),\mathcal{O})$$

とおく。$\mathbb{T}_\infty(U,\mathcal{O})$ 加群の同型

$$M_\infty(U)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(H_\infty(U),K/\mathcal{O})$$

が成り立つ。

コンパクト開部分群

$$U^{\min}_{\mathcal{D}_Q}=\prod_{w\nmid\infty}U^{\min}_{\mathcal{D}_Q,w}\subseteq\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F\otimes\hat{\mathbb{Z}})$$

を、

$$U^{\min}_{\mathcal{D}_Q,w}:=\begin{cases}U_{\mathcal{D}_Q,w}\ (w\in\mathcal{P}\cup\mathcal{M}\cup Q\ \text{または}\ w\notin\Sigma),\\ U_{\mathcal{D}_Q,w}\cdot\{\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w})\mid a\bmod\mathfrak{l}_w^{\max(1,r(w))}\in\Delta_w\}\ (w\in\mathcal{M}_c\setminus\mathcal{M}),\\ \{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w})\mid c\equiv0\bmod\mathfrak{l}_w^2\}\ (\text{その他のとき})\end{cases}$$

により定める。permissible な極大イデアル $\mathfrak{m}\subseteq\mathbb{T}_\infty(U_{\mathcal{D}_Q})$ に対し、

$$M_{\mathcal{D}_Q}:=M_\infty(U^{\min}_{\mathcal{D}_Q})_{\mathfrak{m}}$$

と定める。$M_{\mathcal{D}_Q}$ は $\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}\longrightarrow\mathbb{T}_\infty(U^{\min}_{\mathcal{D}_Q})_{\mathfrak{m}}$ により $\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}$ 加群である。$Q=\emptyset$ のときは

$$M_{\mathcal{D}_\emptyset}=M_{\mathcal{D}}$$

と書く。

命題 11.1. ([SW], Proposition 3.23, p.55)
$\Lambda_{\mathcal{O}}$-algebra としての同型 $\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}_Q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}[N_{\mathcal{D}}]\cong\mathbb{T}_{\mathcal{D}_Q}$ が成り立つ。 □

命題 11.1 により、$M_{\mathcal{D}_Q}$ は $\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}_Q}$ 加群でもある。

$w\in Q$ に対し、Δ_w の $M_{\mathcal{D}_Q}$ への作用を定める。$U\subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ をコンパクト開部分群とする。$w\nmid p$, $U_w=\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w})$ とする。

$$U'_w:=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,w})\mid c\in\mathfrak{l}_w\},$$

$$U''_w:=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in U'_w\mid ad^{-1}\bmod\mathfrak{l}_w\in\Delta'_w\}$$

とおく。U''_w は $w\in Q$ のときの $U_{\mathcal{D}_Q,w}$ と一致する。

$$U':=U'_w\cdot\prod_{v\neq w}U_v,\ U'':=U''_w\cdot\prod_{v\neq w}U_v,$$

$$U'_a:=U'\cap U(p^a),\ U''_a:=U''\cap U(p^a)$$

とおく。$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\longmapsto((ad^{-1})_w$の像$)$ は同型 $U'_a/U''_a\cong\Delta_w$ を定める。U'_a/U''_a の $H^0(X(U''_a),\mathcal{O})=\{$ 写像 $f:D^\times\backslash G^D(\mathbb{A}_f)/U''_a\longrightarrow\mathcal{O}\}$ への作用を、

$$(gf)(x):=f(xg)$$

$(g\in U'_a/U''_a)$ として定める。Δ_w の作用は $\mathbb{T}(U_a,\mathcal{O})$ の作用と可換である。これより、$w\in Q$ に対し、Δ_w の $M_{\mathcal{D}_Q}$ への作用で、$\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}_Q}$ の作用と可換なものが定まる。

$\mathfrak{p}\subseteq\mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を素イデアルで、nice for $\mathcal{D}$ とする。$\mathfrak{p}$ は全射 $\mathbb{T}_{\mathcal{D}}\twoheadrightarrow\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}}$ による $\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}}$ の素イデアル (これも $\mathfrak{p}$ と書く) の逆像である。A を $\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}}/\mathfrak{p}$ の整閉包とする。

$\widetilde{M}_{\mathcal{D}}:=M_{\mathcal{D}}\otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}}\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ とおく。$(\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ を、$\widetilde{M}_{\mathcal{D}}$ を $\widetilde{\mathfrak{p}}\subseteq\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}}$ で局所化してさらに完備化したものとする。

$$N^{(0)}:=\mathrm{Im}\,(\widetilde{M}_{\mathcal{D}}\longrightarrow(\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P)$$

とおく。$F_0:=\mathrm{Fitt}(\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}\subseteq(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}$ をフィッティングイデアルとする。標準写像 $\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}}\longrightarrow(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/(\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}\cdot F_0,P)$ を φ_2 と書き、合成

$$\widetilde{R}_{\mathcal{D}^{\mathrm{ps}}}\xrightarrow{r^{\min}_{\mathcal{D}}\otimes 1}\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}}\xrightarrow{\varphi_2}(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/(\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}\cdot F_0,P)$$

を φ_1 と書くことにする。

$$R^{(0)} := \mathrm{Im}\,\varphi_2,\ R^{\mathrm{tr}(0)} := \mathrm{Im}\,\varphi_1$$

とおく。$R^{\mathrm{tr}(0)} \subseteq R^{(0)}$ である。

各奇数 $N \geq 1$ に対し、F の有限素点の集合 $Q_N = \{w_1^{(N)}, \cdots, w_r^{(N)}\}$ で、$\mathrm{N}(w_i^{(N)}) \equiv 1 \bmod p^N$ と命題 10.2 の (ii),(iii) を満たすものが存在する。さらに、Q_N たちは互いに交わらず、Σ とも交わらないようにとれる。

各 $w_i = w_i^{(N)} \in Q = Q_N$ に対し、$\sigma_{w_i} \in I_{w_i}$ を馴分岐群の p 部分とする。局所類体論により、σ_{w_i} を $\mathcal{O}_{F,w_i}^{\times}$ の元と同一視する。$\delta_{w_i} := ($ $\begin{pmatrix} \sigma_{w_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の像$) \in \Delta_{w_i}$ とおく。δ_{w_i} は $\mathrm{End}_{\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}_Q}}(\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q})$ の元を定める (これも同じ記号 δ_{w_i} で表す)。ここに、$\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q} := M_{\mathcal{D}_Q} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}} \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ である。$s_i := \delta_{w_i} - 1$ とおく。奇数 $1 \leq a \leq N$ に対し、

$$M_a^{(N)} := \mathrm{Im}\,(\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q} \longrightarrow (\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/(P, s_1^{a+1}, \cdots, s_r^{a+1}))$$

とおく。$M_a^{(N)}$ は $A_a = A[[s_1, \ldots, s_r]]/(s_1^{a+1}, \cdots, s_r^{a+1})$ 上の加群である。

$$M^{(N)} := M_N^{(N)}$$

とおく。

$\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}[[t_1, \cdots, t_r]] \longrightarrow \widetilde{R}_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}} = R_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}} \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}} \widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ を、$t_i \longmapsto (\mathrm{Tr}\rho_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}}(\sigma_{w_i}) - 2) \otimes 1$ により定める。$F_N := \mathrm{Fitt}(\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q})_{\widetilde{\mathfrak{p}}} \subseteq (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}_Q})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}_Q}}$ をフィッティングイデアルとする。標準写像 $\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}_Q} \longrightarrow (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}_Q})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}_Q}}/(\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}_Q} \cdot F_N, P, t_1^{(a+1)/2}, \cdots, t_r^{(a+1)/2})$ を $\varphi_{2,a}^{(N)}$ と書き、合成

$$\widetilde{R}_{\mathcal{D}_Q^{\mathrm{ps}}} \xrightarrow{r^{\min}_{\mathcal{D}_Q} \otimes 1} \widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}_Q} \xrightarrow{\varphi_{2,a}^{(N)}} (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}_Q})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}_Q}}/(\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}_Q} \cdot F_N, P, t_1^{(a+1)/2}, \cdots, t_r^{(a+1)/2})$$

を $\varphi_{1,a}^{(N)}$ と書くことにする。

$$R_a^{(N)} := \mathrm{Im}\,\varphi_{2,a}^{(N)},\ R_a^{\mathrm{tr}(N)} := \mathrm{Im}\,\varphi_{1,a}^{(N)}$$

とおく。$R_a^{\mathrm{tr}(N)} \subseteq R_a^{(N)}$ である。$R_a^{(N)}, R_a^{\mathrm{tr}(N)}$ は $B_a = A[[t_1, \cdots, t_r]]/(t_1^{(a+1)/2}, \cdots, t_r^{(a+1)/2})$ 上の algebra である。

$$R^{(N)} := R_N^{(N)},\ R^{\mathrm{tr}(N)} := R_N^{\mathrm{tr}(N)},$$

$$M^{(0)} := \bigoplus_{i=1}^{2^r} N^{(0)},$$

$$R_0^{(N)} := R^{(0)},\ R_0^{\mathrm{tr}(N)} := R^{\mathrm{tr}(0)}$$

とおく。

$\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q} \longrightarrow (\widetilde{M}_{\mathcal{D}})^{2^r}$ を次のように定める。$\mathcal{D}_0 := \mathcal{D},\ \mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{\pi_i},\ \pi_i := \{w_1^{(N)}, \cdots, w_i^{(N)}\}$ として、$0 \le i \le r$ に対し $H_\infty(U_{\mathcal{D}_i}^{\min})^2 \longrightarrow H_\infty(U_{\mathcal{D}_{i+1}}^{\min})$ を $(f_1(g), f_2(g)) \longmapsto f_1(g) + f_2(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^{(\mathfrak{l}_{w_{i+1}})}\end{pmatrix})$ により定める。これらを合成して、$H_\infty(U_{\mathcal{D}}^{\min})^{2^r} \longrightarrow H_\infty(U_{\mathcal{D}_Q}^{\min})$ を得る。Pontryagin 双対をとって完備化して $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O}}$ をテンソルして、$\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q} \longrightarrow (\widetilde{M}_{\mathcal{D}})^{2^r}$ を得る。

$$M_0^{(N)} := \mathrm{Im}\,(\widetilde{M}_{\mathcal{D}_Q} \longrightarrow (\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}^{2^r}/P)$$

とおく。

これらのものは、第 9 節で述べた仮定を満たすことがチェックできる。

命題 11.2. ([SW], Proposition 7.3, p.111)

$[F:\mathbb{Q}]$ を偶数とし、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ とする。$\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を素イデアルで nice for $\mathcal{D}$ とする。このとき、

(i) $\psi(\mathcal{D}, \mathfrak{p})$ は同型である。また、$(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}$ は被約で、$\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O},P}$ 上完全交叉である。

(ii) $(\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は $(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ 上自由である。

証明. 次の同一視ができる。

$$R^{(0)} \otimes_A K = (\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/(\widetilde{\mathfrak{p}} \cdot F_0, P),$$

$$R^{\mathrm{tr}(0)} \otimes_A K \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P,$$

$$N^{(0)} \otimes_A K = (\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P, \qquad M^{(0)} \otimes_A K = \bigoplus_{i=1}^{2^r} (N^{(0)} \otimes_A K).$$

補題 9.1 より、自然な写像 $R^{\mathrm{tr}(0)} \otimes_A K \longrightarrow R^{(0)} \otimes_A K$ は同型である。命題 9.4 より、$M^{(0)} \otimes_A K$ は $R^{(0)} \otimes_A K$ 上の自由加群である。$R^{(0)} \otimes_A K$ の $M^{(0)} \otimes_A K$ への作用は合成 $R^{(0)} \otimes_A K \cong R^{\mathrm{tr}(0)} \otimes_A K \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P$ を経由するので、$M^{(0)} \otimes_A K$ は $(\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P$ 上自由であり、$\psi(\mathcal{D}, \mathfrak{p})$ は同型 $(\widetilde{R}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/(\widetilde{\mathfrak{p}} \cdot F_0, P) \cong (\widetilde{\mathbb{T}}_{\mathcal{D}}^{\min})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P$ を導く。$M^{(0)} \otimes_A K = \bigoplus_{i=1}^{2^r} (\widetilde{M}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}/P$ の

生成元をとって $(\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ にもちあげることにより、全射 $(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})^{s}_{\widetilde{\mathfrak{p}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ で $\mathrm{mod}P$ すると同型になるものを得る。$(\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O},P}$ 上自由より、全射 $(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})^{s}_{\widetilde{\mathfrak{p}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は同型である。よって、$(\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は $(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ 上自由である。特に $(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O},P}$ 上自由である。$\psi(\mathcal{D},\mathfrak{p})$ が導く写像

$$(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/(\widetilde{\mathfrak{p}} \cdot F_0) \longrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}} \tag{11.1}$$

は、$\mathrm{mod}P$ すると同型である。$(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ が $\widetilde{\Lambda}_{\mathcal{O},P}$ 上自由であることより、(11.1) は同型であることが分かる。$(\widetilde{M_{\mathcal{D}}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ は $(\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ 上自由より、(11.1) で F_0 は 0 にうつる。よって $F_0/(\widetilde{\mathfrak{p}} \cdot F_0) = 0$ であり、$F_0 = 0$ が分かる。従って $\psi(\mathcal{D},\mathfrak{p})$ は同型である。$\mathbb{T}^{\min}_{\mathcal{D}}$ は被約より、$(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \cong (\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$ も被約である。命題 9.4 より $(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}/P$ は完全交叉で、従って $(\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}}$ も完全交叉である。

□

$\mathcal{D}$ が一般のときは、$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}_c$ の間にフィルトレーションを作り、$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c$ の場合に帰着する。

命題 11.3. ([SW], Proposition 8.1, p.112)
$[F:\mathbb{Q}]$ を偶数とし、$\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{D}}$ を素イデアルで nice for $\mathcal{D}$ とすると、

$$\psi(\mathcal{D},\mathfrak{p}) : (\widetilde{R}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}_{\mathcal{D}}} \twoheadrightarrow (\widetilde{\mathbb{T}}^{\min}_{\mathcal{D}})_{\widetilde{\mathfrak{p}}}$$

は同型である。 □

参考文献

[GL] P. Gérardin, J.-P. Labesse, *The solution of a base change problem for* GL(2) *(following Langlands, Saito, Shintani)*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 115–133, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[H] H. Hida, *Galois representations into* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[x]])$ *attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85 (1986), no. 3, 545–613.

[SW] C. Skinner, A. Wiles, *Residually reducible representations and modular forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 89 (1999), 5–126 (2000).

[Wa] L. Washington, *The non-p-part of the class number in a cyclotomic* $\mathbb{Z}_p$*-extension*, Invent. Math. 49 (1978), no. 1, 87–97.

[Wi] A. Wiles, *On ordinary* λ*-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94 (1988), no. 3, 529–573.

[Y] 山上敦士, *TAYLOR* **による** *HILBERT CUSP FORMS* **に付随する** *GALOIS* **表現の構成について**, 本報告集.