整 p 進 Hodge 理論入門

望月哲史

概 要

本ノートの目的は、[Bible] Mark Kisin, "*Crystalline representations and F-crystal*" の解説である。潜在的 Barsotti-Tate 表現についての Kisin の保型性持ち上げ定理ではトージョン版の理論を用いるが、ここでは主に自由加群版の理論の解説をし、トージョン版は軽く触れるにとどめた。尚、定理等の番号付けは全て原論文に合わせた。

0 序 [Bible] のテーマ

Mark Kisin, "*Crystalline representations and F-crystal*" (以後 [Bible] と呼ぶ。) では、(φ, N_∇) 加群なる "p 進微分方程式" の特別なクラスを確立し、Kedlaya の傾斜フィルトレイションの理論等を駆使して、Fontaine 予想 (weakly admissible は admissible) の再証明や Breuil 予想 [Bre99, p.202] の解決をしている。又、更に Grothendieck-Messing 理論を用いて、Fontaine 予想 [Fon79, 5.2.5]、Breuil 予想 [Bre98, 2.2.1] をも解決している。この様に、(φ, N_∇) 加群の概念の導入によって、予想と呼ばれていた諸問題が非常に見通しよく取り扱えるようになったと言っていいだろう。本拙筆では、

準安定表現は (φ, N_∇) 加群を用いて分類出来る

というスローガンを基軸にして整 p 進 Hodge 理論の入門を与えたい。さらに詳しく説明する為に次の様に記号を設定しよう。(この設定は本拙筆で一貫して用いる。)

設定

- k: 標数 $p > 0$ の完全体
- $W := W(k)$

- $K_0 := W[\frac{1}{p}]$
- K/K_0: 有限次完全分岐拡大
- $\mathcal{O}_K$: K の整数環
- $K \ni \pi$: 素元
- $E(u) \in K_0[u]$: π の Eisenstein 多項式、$c_0 = E(0) \in K_0$ とする。
- $(\pi_n)_{n \geqq 0}$: $\pi_0 = \pi$, $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ なる系
- $K_{n+1} := K(\pi_n)$
- $K_\infty = \bigcup_{n \geqq 1} K_n$
- $\mathfrak{S} := W[[u]]$
- $\mathfrak{S} := W[[u]]$ 上の Frobenius φ を $\varphi(u) = u^p$, W には W の Frobenius として定める
- $(\mathbf{Mod}\,/\,\mathfrak{S})$: p 冪零, 射影的次元 1 の有限 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と φ 半線形写像 $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ の組で、$\mathrm{Coker}(\varphi^* \mathfrak{M} \to \mathfrak{M})$ が $E(u)$ 倍で消えるもののなす圏
- $(p\text{-Gr}\,/\,\mathcal{O}_K)$: $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームのなす圏

さて、冒頭で述べた 4 つの予想とは次の事を指していた。

定理 (2.1.5) (Fontaine 予想)
弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群 D は認容的。（より詳しい記述は後述。）

定理 (2.1.14) (Breuil 予想 [Bre99, p.202])
制限射 $\mathbf{Rep}_{G_K}^{\mathrm{cris}} \to \mathbf{Rep}_{G_{K_\infty}}$ は充満忠実。

定理 (2.2.6) (Fontaine 予想 [Fon79, 5.2.5])
凡ての Hodge-Tate 重みが 0 か 1 に等しい G_K のクリスタリン表現 V に対して或る p 可除群 G が存在して、$V \xrightarrow{\sim} T_p(G) \otimes_{Zp} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$ となる。

定理 (2.3.5) (Breuil 予想[1][Bre98, 2.2.1])
$p > 2$ に対して、$(\mathbf{Mod}\,/\,\mathfrak{S})$ と $(p\text{-Gr}\,/\,\mathcal{O}_K)$ は反変圏同値。

何故これらの予想が見通しよく解決されるのかをこの序に於いて簡素に説明する為に、(φ, N_∇) 加群が次の 2 つの特筆的な性質を持つ “p 進微分方程式” のクラ

[1]Breuil が予想したのはこの特別な場合であるがこれを Breuil 予想と呼ぶ事にする。尚この定理は Beilinson によって証明されたらしい。

スである事に着目しておく。

性質 A (E 高度有限な) (φ, N_∇) 加群のパラメータ $u=0$ の近傍での振る舞いは、フィルトレイション付き (φ, N) 加群の様な線形代数的データと等価である。

性質 B (E 高度有限な) (φ, N_∇) 加群は、パラメータ $u=0$ の近傍での情報で大域的なデータを復元出来る。

結果的に、(φ, N_∇) 加群のこの 2 つの性質を併せて、前述した**「準安定表現を (φ, N_∇) 加群を用いて分類する」**という結果を得る事が出来るのである。更に、**性質 A** は

性質 A+α フィルトレイション付き (φ, N) 加群の弱認容性や Hodge-Tate 重みのような性質や情報は、対応する (φ, N_∇) 加群の傾斜や E 高度といったデータと等価である。

と精密化する事が出来る。**性質 A+α** は、2 つの Fontaine 予想 **(2.1.5)**, **(2.2.6)** の証明の鍵となる。又、**性質 B** は、Galois 表現側の言葉に翻訳すると、

性質 B' G_K のクリスタリン表現 (の間の射) は G_{K_∞} 作用の情報で、復元出来る。

なる事を意味し、つまりは Breuil 予想 **(2.1.14)** に対応している。以上を踏まえると、本ノートの主目的は、上述**性質 A**、**性質 B** 及びその変種の仕組みの解説に焦点を置いた整 p 進 Hodge 理論の入門であると謂う事が出来るであろう。さて、序の最後に、本ノートの構成を述べておこう。概要にも述べたように定理等の番号付けは全て原論文 [Bible] に合わせた。具体的には次のようになっている。

目 次

本ノートのメインは、4, 5, 6 章であり、8, 9 章に応用が纏めてある。残念ながら、有限平坦群スキームの分類については序文で紹介した以上に述べる余裕がなかったのが残念に思う。

謝辞　このノートを執筆するにあたり、中村健太郎氏の数えきれない程の助言が役に立った事を有難く思っている。又 2008 年 2 月に広島大学で開かれた workshop「**最近の変形理論の現状について**」で学んだ事が非常に活用された。そもそも、本ノートは、その workshop の筆者の講演レジュメが叩き台になっている。講演の際に、戴いた様々なコメントを本ノートでは反映させたつもりである。Workshop に参加された方々に、この場を借りて感謝の意を表したいと思う。最後に本ノートの大半は Marco Porta 氏宅で執筆された。執筆に都合のよい環境を提供してくれた Marco Porta 氏に敬愛の念を表したい。又、著者が体調を崩して締め切りに大幅に遅れて編集の方々に著しく迷惑をかけたことをこの場でお詫びしたい。

1　整でない場合

この章で、[Bible] に言及されている "整" でない場合の理論を簡単に復習、説明しておこう。φ-$\mathfrak{S}$ 加群の理論が所謂 "整"p 進 Hodge 理論と呼ばれる所以の説明は、本ノートの構成の都合上、第 7 章まで御預けとなる。

設定その二

- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を $\mathfrak{S}[\frac{1}{u}]$ の p 進完備化、$\mathcal{E}$ をその商体とする。$\mathcal{E}$ は離散的付値環となり、$k((u))$ が剰余体となる。$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}$ に自然に φ が延長される。
- K の代数的閉包 $\overline{K}$ の整数環 $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ を考えて、射影的極限 $R := \varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p$ を取ろ

う。ここで、逆極限を与える射は Frobenius で与えられている。R の商体は $\mathrm{Fr}\,R$ で表される。$\mathrm{Fr}\,R$ は代数閉体である事が知られている。([Fon91, A.3.1.6])

- $\underline{\pi} := (\pi_n)_{n\geqq 0} \in R$ と書いて、$[\underline{\pi}] \in W(R)$ を Teichmüller 持ち上げとする。対応 $W[u] \ni u \mapsto [\underline{\pi}] \in W(R)$ から、$\mathfrak{S} \hookrightarrow W(R)$ 及び $\mathcal{E} \hookrightarrow W(\mathrm{Fr}\,R)$ が引き起こされる。

- $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}} \hookrightarrow W(\mathrm{Fr}\,R)[\frac{1}{p}]$ に於ける $\mathcal{E}$ の最大不分岐拡大拡大として、$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ はその整数環とする。$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の剰余体は $k((u))^{\mathrm{sep}}$ である。

- $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ を $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ の p 進完備化とする。或いは、$W(\mathrm{Fr}\,R)$ に於ける $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ の閉包と言ってもよい。$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ を $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の整数環とする。

- $\mathfrak{S}^{\mathrm{ur}} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}} \cap W(R) \subset W(\mathrm{Fr}\,R)$ と置く。

さて、愈々、$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$、$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ の定義を述べる時が来た。

定義 (2.1.11) (φ-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群)

- φ-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群とは有限生成自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群 $\mathcal{M}$ と同型 $\varphi^{*}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ の組とする。

- $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ で φ-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群の圏を表し、$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}}$ で対応する同種 (isogeny) 圏を表す。

定義 (1.3.12) ((φ, N)-$\mathfrak{S}$ 加群)

- (φ, N)-$\mathfrak{S}$ 加群とは有限自由 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と、φ 半線形写像 $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ 線形写像 $N : \mathfrak{M}/u\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}} \to \mathfrak{M}/u\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}}$ で、$N\varphi = p\varphi N$ を満たすものの組である。

- (φ, N)-$\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ の E 高度が有限であるとは、$\mathrm{Coker}(\varphi^{*}\mathfrak{M} \to \mathfrak{M})$ が $E(u)$ の或る冪で消える事である。E 高度が有限の (φ, N)-$\mathfrak{S}$ 加群の圏を $\mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}}$ と書く。又、対応する同種圏を $\mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}}$ と表す。

- **(2.1.3)** $\mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}}$ の対象であって $N = 0$ を満たすもののなす充満部分圏を $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ [2] と書いて φ-$\mathfrak{S}$ 加群の圏と呼ぶ事にする。

まず、$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ と $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ は次の命題に示されるように結びついている。

命題 (2.1.12)

[2] [Bible] の Introduction には次のような興味深い記述がある。
The characteristic p analogues of modules in $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ *are sort of local version of a "shtuka" in the sense of Drinfeld.* (中略) *Lafforgue pointed out to us that the modules in our theory could be regarded as analogues of local shtukas in the case of mixed characteristic.*

函手

$$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \to \mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}};\ \ \mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$$

は充満忠実。

次の定理は、序文で述べた**性質 B** を**性質 B'** に翻訳する作業に於いて (Breuil 予想 **(2.1.14)** の証明に於いて）鍵となる。

定理 (**[Fon91, A.1.2.7]**)

圏同値

$$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{G_{K_\infty}};\ \ \mathcal{M} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}})$$

が存在する。

この定理の謂わば整 (integral) 版 **(2.1.15)** が、φ-$\mathfrak{S}$ 加群と G_{K_∞} 安定格子の対応として後に述べられる。

2　(φ, N_∇) 加群

この章では、(φ, N_∇) 加群なる概念を導入する。この概念を用いて、クリスタリン表現にとどまらず、準安定表現を分類しようというのが、[Bible] の第 1 章のテーマである。まず Kisin の理論に於いては、微分方程式の解空間（(φ, N_∇) 加群の係数環）として、$\mathfrak{S}$ よりも大きな Bézout 整域[3] $\mathcal{O}$ を採用する。$\mathcal{O}$ とその上の Frobenius や N_∇ を紹介する所から話を始めよう。

設定その三

- 区間 $I \subset [0,1)$ に対して、

$$\mathcal{O}_I := \{f(u) \in K_0[[u]] \mid |x| \in I \text{ を満たす任意の } x \in \overline{K} \text{ に対して } f \text{ は } x \text{ で収束する}\}$$

と置く。$\mathcal{O}_I$ は、座標 u 半径 1 の剛 (rigid) 解析的開円板 $D[0,1)$ において、半径が I に入るような点に対応する認容的開集合 $D(I)$ の函数環ともみなすことができる。$\mathcal{O}_{[0,1)}$ は $\mathcal{O}$ と略記する。

- $\mathcal{O}$ 上には 2 種類の Frobenius が存在する (後者は同型である)。

$$\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}\quad \varphi(\Sigma a_n u^n) = \Sigma \varphi(a_n) u^{pn}$$

[3] 単位的可換環が Bézout であるとは、任意の有限生成イデアルが単項になる事であった。つまり、Bézout 整域という単位的可換環のクラスを考える事は PID から Noether 性の条件を取り除いたクラスを考える事を意味している。

$$\varphi_W : \mathcal{O} \to \mathcal{O} \quad \varphi(\Sigma a_n u^n) = \Sigma \varphi(a_n) u^n$$

- $E(u) \in K_0[u]$: π の Eisenstein 多項式、$c_0 = E(0) \in K_0$ とする。
- $\lambda := \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\frac{E(u)}{c_0})$ と定めると、この無限積は $\mathcal{O}$ の Fréchet 位相[4]で収束する。
- $N_\nabla : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を $N_\nabla := -u\lambda \frac{d}{du}$ と定める。

重要な関係式

$$\lambda = \frac{E(u)}{c_0}\varphi(\lambda)$$

$$\frac{pE(u)}{c_0}\varphi N_\nabla = N_\nabla \varphi$$

さて、[Bible] の主役である (φ, N_∇) 加群の定義を述べよう。

定義 (1.1.3) ((φ, N_∇) 加群)

- (φ, N_∇) 加群とは 3 つ組 $(\mathcal{M}, \varphi, N_\nabla^{\mathcal{M}})$ の事である。ここで、$\mathcal{M}$ は、有限自由 $\mathcal{O}$ 加群、$\varphi : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}$ は φ 半線形単射で、$N_\nabla^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ は次の 2 条件を満たす写像である。($N_\nabla^{\mathcal{M}}$ は以後、N_∇ と略記される。)

$$N_\nabla(f(u)m) = N_\nabla(f(u))m + f(u)N_\nabla(m)$$

$$\frac{pE(u)}{c_0}\varphi N_\nabla = N_\nabla \varphi$$

- **(1.2.4)** (φ, N_∇) 加群 $\mathcal{M}$ の E 高度が有限であるとは、ある k が存在して、

$$E(u)^k \operatorname{Coker}(1 \otimes \varphi : \varphi^* \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}) = 0$$

となる事である。E 高度が有限の (φ, N_∇) 加群の圏を $\mathbf{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\varphi, N_\nabla}$ とかく。

序文でも述べたように、

(有限 E 高度な)(φ, N_∇) 加群は、フィルトレイション付き (φ, N) 加群の様な線形代数的なデータと等価である

[4]可算個の半ノルム (semi-norm) の定義された線形位相空間で半ノルムに関する分離公理（ここでは復習しない）を満たすものを Fréchet 空間と呼んだ。T_1 分離公理を満たす位相の事ではない。尚原論文で $\mathcal{O}$ の Fréchet 位相について言及している個所は、**(1.2.6)** の証明の中だけである。各 $r \in (0,1)$ に対して、ノルム $|\cdot|_r$ は、$|f|_r := \sup_{x \in D[0,r)} |f(x)|$ で定義されている。Fréchet 空間と呼びたいのなら有理数 r についてだけ $|\cdot|_r$ を考えておけばよい。

というのが [Bible] の最初の目標である。(精密な定式化は後程。) 詳しく説明する為にフィルトレイション付き (φ, N) 加群の定義を復習しよう。

定義 (1.1.2) (フィルトレイション付き (φ, N) 加群)

• [Fon94] に倣って、Frobenius (K_0) 加群 (或いは φ 加群) D とは、有限次元 K_0 線形空間と、Frobenius 半線形全単射 $\varphi : D \to D$ の組 (D, φ) (といってもいつもの様に φ は表示から省略することが多い。以下同様) の事である。

• 更に、(φ, N) 加群であるとは、この他に、冪零線形写像 $N : D \to D$ で条件 $N\varphi = p\varphi N$ を満たすものとの 3 つ組である。

• フィルトレイション付き (φ, N) 加群 (resp. φ 加群) とは、(φ, N) 加群 (resp. φ 加群) D が更に $D_K := D \otimes_{K_0} K$ 上に減少、分離的、包括的 (exhaustive) なフィルトレイションを持つ事である。本拙筆では効果的 (effective) つまり $\mathrm{Fil}^0 D = D$ なものしか扱わないので、以下フィルトレイションと言ったら効果的である事を仮定する。フィルトレイション付き (φ, N) 加群の圏を $\mathbf{MF}_{/K}^{\varphi,N}$ と書く事にする。これは $\otimes$ 完全圏である。[5]

• フィルトレイション付き (φ, N) 加群 D が弱認容的であるとは、

★ $t_H(D) = t_N(D)$ が成立し、尚且つ

★ 凡ての部分 (φ, N) 加群 $D' \subset D$ に対して、(D'_K には D_K からの誘導フィルトレイションを考えて) $t_H(D') \leqq t_N(D')$
が成立する事であった。ここで、$t_N(D)$, $t_H(D)$ を復習しておこう。

$$t_N(D) := \begin{cases} \alpha \text{ の } p \text{ 進付値} & \text{if } \dim D = 1 \text{ かつ } \varphi \text{ が } \alpha \text{ 倍写像} \\ t_N(\overset{d}{\wedge} D) & \text{if } \dim D = d \end{cases}$$

$$t_H(D) := \begin{cases} \mathrm{gr}^i D_K \neq 0 \text{ なる } i & \text{if } \dim D = 1 \\ t_H(\overset{d}{\wedge} D) & \text{if } \dim D = d \end{cases}$$

弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群の圏なす充満部分圏を $\mathbf{MF}_{\mathrm{wa}/K}^{\varphi,N}$ と書く事にする。

さて、いよいよ精密な主張を述べる事が出来る。

定理 (1.2.15)

[5] Kisin は Tannakian category という言葉が好きなようで至る所で使っているが、その多くは別に Abel 圏ではないので誤用だし、淡中双対も考える訳でもない。だから、$\otimes$ が定義できてそれと両立する完全列も自然に考えられる圏ぐらいの意味にとっておいたらよいと思われる。

• 互いに、擬逆同値を与える $\otimes$ 完全函手 $\mathcal{M}: \mathbf{MF}^{\varphi,N}_{/K} \to \mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}}$ 及び $\mathcal{D}$: $\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}} \to \mathbf{MF}^{\varphi,N}_{/K}$ が存在する。

• **(1.3.8)** 更にこの対応は、部分圏に制限して圏同値 $\mathbf{MF}^{\varphi,N}_{\mathrm{wa}\,/K} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}}$ を引き起こす。但し、$\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}}$ とは $\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}}$ の傾斜 0（定義は後述）な (φ, N_∇) 加群のなす充満部分圏である。

3　傾斜フィルトレイション

上で宣言したように、傾斜 (slope) の定義を復習しておく必要が生じた。まずは、Robba 環の復習から始める事にする。

復習 (1.3.1) ((有界)Robba 環と $\mathcal{R}$ 加群の傾斜集合)

• (有界)Robba 環 $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^b$) はそれぞれ、

$$\mathcal{R} := \lim_{r\uparrow 1} \mathcal{O}_{(r,1)}$$

$$\mathcal{R}^b := \lim_{r\uparrow 1} \mathcal{O}^b_{(r,1)}$$

で定義される。ここで、$\mathcal{O}^b_{(r,1)} \subset \mathcal{O}_{(r,1)}$ とは、有界な函数の為す部分環である。$\mathcal{R}$ は $\varphi : \mathcal{O}_{(r,1)} \to \mathcal{O}_{(r^{\frac{1}{p}},1)}$ から誘導される Frobenius を持ち、更に $\mathcal{R}^b$ にも $\mathcal{R}$ から誘導されて Frobenius 構造を持つ。従って、Frobenius $\mathcal{R}$ 加群、Frobenius $\mathcal{R}^b$ 加群 (或いは、φ-$\mathcal{R}$ 加群等) というのが意味をなす。

• 正確には、Frobenius $\mathcal{R}$ 加群 (resp. $\mathcal{R}^b$ 加群) とは組 $(\mathcal{M}, \varphi)$ で、$\mathcal{M}$ は有限自由 $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^b$) 加群、$\varphi : \varphi^* \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ なる同型の組である。φ-$\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^b$) 加群の圏は、$\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{R}}$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{R}^b}$) と書かれる。

• 実は $\mathcal{R}^b$ は離散的付値体で、その付値 $v_{\mathcal{R}^b}$ は次で与えられる。

$$v_{\mathcal{R}^b}(f) = -\log_p \lim_{r\uparrow 1} \sup_{x\in D(r,1)} |f(x)|$$

• [Ked04, 4.16] に倣って、φ-$\mathcal{R}$ 加群 $\mathcal{M}$ の傾斜集合とは、φ の固有値の p 進付値の集合である。正確に言うとまず、Kedlaya はまず、次の性質をもつ $\mathcal{R}$ 代数 $\mathcal{R}^{\mathrm{alg}}$ を定義した。

★ $\mathcal{R}^{\mathrm{alg}}$ は $W(\bar{k})$ を含む。

★ $\mathcal{R}^{\mathrm{alg}}$ は $\mathcal{R}$ の Frobenius の持ち上げを持つ。

★ 任意の φ-$\mathcal{R}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、或る $W(\bar{k})[1/p]$ の有限次拡大 E が存在して、$\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{\mathrm{alg}}\otimes_{W(\bar{k})[1/p]}E$ は、固有ベクトル基底 $v_1,\cdots,v_n$ を持つ。
上で、$\psi(v_i)=\alpha_i v_i$ $(\alpha_i\in E)$ とすると、α_i の p 進付値の集合は、E の取り方に依らず、$\mathcal{M}$ にのみ依存して決まる。この集合を $\mathcal{M}$ の傾斜集合という。

• 傾斜がすべて一定の値 s となる φ-$\mathcal{R}$ (reps. $\mathcal{R}^b$) 加群を純傾斜 s と呼び、そのような加群からなる $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{R}}$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{R}^b}$) の充満部分圏を $\mathbf{Mod}^{\varphi,s}_{/\mathcal{R}}$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\varphi,s}_{/\mathcal{R}^b}$) と書く。

傾斜に関しては次の傾斜フィルトレイション定理が著しく重要である。

定理 (1.3.2) ([Ked04, 6.10], [Ked05, 6.3.3])

• 函手　$\mathcal{M}\mapsto\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}^b}\mathcal{R}$ は圏同値

$$\mathbf{Mod}^{\varphi,s}_{/\mathcal{R}^b}\xrightarrow{\sim}\mathbf{Mod}^{\varphi,s}_{/\mathcal{R}}$$

を誘導する。

• 任意の φ-$\mathcal{R}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、傾斜フィルトレイションと呼ばれる標準的な φ 安定な $\mathcal{R}$ 部分加群のフィルトレイション

$$0=\mathcal{M}_0\hookrightarrow\mathcal{M}_1\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\mathcal{M}_r=\mathcal{M}$$

で各 $\mathcal{M}_i\,/\,\mathcal{M}_{i-1}$ が有限自由 $\mathcal{R}$ 加群で純傾斜 s_i となり、更に $s_1<s_2<\cdots<s_r$ となるものが一意的に存在する。

(φ,N_∇) 加群の傾斜フィルトレイションは次の命題によって考える事が出来る。

命題 (1.3.7)
$\mathcal{M}$ を (φ,N_∇) 加群として $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}:=\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{R}$ と置く。$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ の傾斜フィルトレイションを

$$0=\mathcal{M}_{0,\mathcal{R}}\subset\mathcal{M}_{1,\mathcal{R}}\subset\mathcal{M}_{2,\mathcal{R}}\subset\cdots\subset\mathcal{M}_{r,\mathcal{R}}=\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$$

とすると、各 i について、有限自由 $\mathcal{O}$ 部分加群 $\mathcal{M}_i\subset\mathcal{M}$ で、

• $\mathcal{M}\,/\,\mathcal{M}_i$ も自由 $\mathcal{O}$ 加群[6]

• $\mathcal{M}_i$ は φ と N_∇ で安定

• $\mathcal{M}_{i,\mathcal{R}}=\mathcal{M}_i\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{R}$

なるものが存在する。

[6] **(1.3.3)** に依るとこの様な部分加群を飽和的であるという。詳しい定義を述べると、$\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{O}_I$) 加群 $\mathcal{M}$ の部分加群 $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ が飽和的 (saturated) であるとは、$\mathcal{N}$ かつ $\mathcal{M}\,/\,\mathcal{N}$ が有限自由 $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{O}_I$) 加群となる事である。

4　函手 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{D}$ の構成

それでは、**(1.2.15)** の証明の粗筋を順に追って行こう。まずは、函手 $\mathcal{M}$ の構成から説明する。フィルトレイション付き (φ, N) 加群 D に対して、$\mathcal{M}(D)$ は、$\mathcal{O}$ に "形式的" な $\log u$ である所の l_u と λ の可逆元を添加した環 $\mathcal{O}[l_u, \frac{1}{\lambda}]$ を係数拡大して得られる加群 $\mathcal{O}[l_u, \frac{1}{\lambda}] \otimes_{K_0} D$ の部分加群として得られる。厳密な定義を与える為に幾らかの記号の準備を要する。

設定その四 (1.1.1)

- $\widehat{\mathfrak{S}_n}$ を $K_{n+1} \otimes_W \mathfrak{S}$ の極大イデアル $(u - \pi_n)$ による完備化とする。$\widehat{\mathfrak{S}_n}$ 及びその商体 $\widehat{\mathfrak{S}_n}\left[\frac{1}{u-\pi_n}\right]$ には、$(u - \pi_n)$ 進フィルトレイションが定まっている。又、ここには、$\mathcal{O} \to \widehat{\mathfrak{S}_n} = K_n[[u - \pi_n]]$ という自然な射がある。

- l_u を $\log u$ に見立てた不定元として、$\mathcal{O}[l_u]$ を考える。N_∇ や φ を次のように定義して[7] [8]、$\mathcal{O}[l_u]$ に拡張する。

$$N_\nabla(l_u) := -\lambda$$

$$\psi(l_u) = -pl_u$$

- $\mathcal{O}[l_u] \to \widehat{\mathfrak{S}_n}$ を

$$l_u \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \left(\frac{u - \pi_n}{\pi_n} \right)^i$$

と定める。[9]

- $\mathcal{O}[l_u]$ には l_u を不定元と見做した $\mathcal{O}$ 微分 N もある。(つまり、$N(l_u) = 1$)

- **(1.2)** D をフィルトレイション付き (φ, N) 加群として、$\iota_n : \mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D \to \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_K D_K$ を

$$\iota_n : \mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D \overset{\varphi^{-n} \otimes \varphi^{-n}}{\to} \mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D \to \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_{K_0} D = \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_K D_K$$

と定める。$\iota_n(\lambda)$ が可逆元と $u - \pi_n$ の積である事が判り、この射は、

$$\iota_n : \mathcal{O}\left[l_u, \frac{1}{\lambda}\right] \otimes_{K_0} D \to \widehat{\mathfrak{S}_n}\left[\frac{1}{u - \pi_n}\right] \otimes_K D_K$$

にまで拡張される。この様にして、$\mathcal{O}[l_u, \frac{1}{\lambda}] \otimes_{K_0} D$ の元は、各 ι_n を通して $\widehat{\mathfrak{S}_n}\left[\frac{1}{u-\pi_n}\right] \otimes_K D_K$ の中で、$u - \pi_n$ 展開されて実現される。

---

[7] $-u\lambda \frac{d}{du} \log u = -\lambda$ という計算を意識している。
[8] $\psi(\log u) = \log u^p = p \log u$ という計算を意識している。
[9] $\log u = \log \left[\frac{u-\pi_n}{\pi_n} + 1\right] = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \left(\frac{u-\pi_n}{\pi_n}\right)^i$ という計算を意識している。

• $\mathcal{O}[l_u, 1/\lambda]\otimes_{K_0} D$ には、$N = N\otimes 1 + 1\otimes N$ で定まる微分がある。さて、$\mathcal{M}(D)$ は $(\mathcal{O}[l_u, 1/\lambda]\otimes_{K_0} D)^{N=0}$ の各 ι_n を通して、$\widehat{\mathfrak{S}_n}\left[\frac{1}{u-\pi_n}\right]\otimes_K D_K$ のフィルトレイションで記述される制約を満たす元のなす部分加群として次のように定められる。

$$\mathcal{M}(D) := \{x \in (\mathcal{O}[l_u, 1/\lambda]\otimes_{K_0} D)^{N=0} : \iota_n(x) \in \mathrm{Fil}^0(\widehat{\mathfrak{S}_n}[1/(u-\pi_n)]\otimes_K D_K), n \geqq 0\}$$

次の補題が、$\mathcal{M}(D)$ が (φ, N_∇) 加群である事を保証する。更に D の Hodge-Tate 重みと $\mathcal{M}(D)$ の E 高度の関係も言及されている。

補題 (1.2.2)
$(\mathcal{O}[l_u, 1/\lambda]\otimes_{K_0} D)^{N=0}$ 上の φ と N_∇ が、$\mathcal{M}(D)$ に (φ, N_∇) 加群の構造を与える。(つまり、$\mathcal{M}(D)$ は、有限自由 $\mathcal{O}$ 加群である事も判る。[10])　更に、$h_i = \dim_K \mathrm{gr}^i D_K$ とすると、

$$\mathrm{Coker}(1\otimes\varphi : \varphi^*\mathcal{M}(D) \to \mathcal{M}(D)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\geqq 0}(\mathcal{O}/E(u)^i)^{h_i}$$

なる $\mathcal{O}$ 加群同型がある。

次に函手 $\mathcal{D}$ の定義を述べる。当面 $\mathcal{M}$ は (φ, N_∇) 加群とする。**(1.2.5)** に依ると、K_0 線形空間 $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ は、

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) := \mathcal{M}/u\,\mathcal{M}$$

で定義され、(つまり、$u = 0$ への制限) $\mathcal{M}$ 上の φ と N_∇ から誘導される作用で、$\mathcal{D}(\mathcal{M})$ は (φ, N) 加群になる。$\mathcal{D}(\mathcal{M})_K$ にフィルトレイションを定めるには幾らかの準備が必要である。

記法 (1.2.5)
$J \subset I \subset [0, 1)$ として $\xi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ を $\mathcal{O}_I$ 加群の間の準同型とする。この時に、$\mathcal{M}_J := \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_I}\mathcal{O}_J$ $\xi_J := \xi\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{O}_J} : \mathcal{M}_J \to \mathcal{M}'_J$ の様な記法を以後よく用いる。

第一段 (1.2.7)
まず、$\varphi^*\mathcal{M}$ のフィルトレイションは **(1.2.2)** を鑑みると

$$\mathrm{Fil}^i\,\varphi^*\mathcal{M} := \{x \in \varphi^*\mathcal{M} : 1\otimes\varphi(x) \in E(u)^i\,\mathcal{M}\}$$

と定めるのが自然である。ここから、$(1\otimes\varphi)(\varphi^*\mathcal{M})$ 更には、$(1\otimes\varphi)(\varphi^*\mathcal{M})_{[0,r)}$ 等にフィルトレイションが誘導される。ここで、$(1\otimes\varphi)(\varphi^*\mathcal{M})_{[0,r)}$ のフィルト

[10] この部分は、Bézout 環の一般論、**(1.1.4)** 「有限自由 $\mathcal{O}_I$ 加群 $\mathcal{M}$ の部分 $\mathcal{O}_I$ 加群 $\mathcal{N}$ について、閉である事、有限生成である事、有限自由である事が同値である」という補題と、$\mathcal{M}(D)$ が $\lambda^{-r}(\mathcal{O}[l_u, 1/\lambda]\otimes_{K_0} D)^{N=0}$ という有限自由 $\mathcal{O}$ 加群の閉部分加群であるという事実を用いて示される。ここに r は $\mathrm{Fil}^r D_K \neq 0$, $\mathrm{Fil}^{r+1} D_K = 0$ となる自然数。

レイションと $D(\mathcal{M})_K$ のフィルトレイションを結び付ける為に次の補題が重要になってくる。

補題 (1.2.6) [11]
次の条件を満たす $\mathcal{O}$ 線形、φ 同変な射

$$\xi : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O} \to \mathcal{M}$$

が一意的に存在する。

- $\xi \mod u$ は $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ 上の恒等射
- ξ は単射で、$\mathrm{Coker}\,\xi$ は λ 冪零
- 任意の $r \in (|\pi|, |\pi|^{1/p})$ に対して、

$$\mathrm{Im}(\xi_{[0,r)} : (\mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O})_{[0,r)} \to \mathcal{M}_{[0,r)}) = \mathrm{Im}((1 \otimes \varphi)_{[0,r)} : (\varphi^* \mathcal{M})_{[0,r)} \to \mathcal{M}_{[0,r)})$$

第二段 (1.2.7)
(1.2.6) を用いて、$r \in (|\pi|, |\pi|^{1/p})$ なる r について、$(\mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O})_{[0,r)}$ にフィルトレイションが定まる。これから自然な射

$$(\mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O})_{[0,r)} \to \mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O} / E(u) \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K = \mathcal{D}(\mathcal{M})_K$$

を通じて、$\mathcal{D}(\mathcal{M})_K$ に所望のフィルトレイションが備わる。

5　函手 $\mathcal{M}$、$\mathcal{D}$ が互いに擬逆函手である事

この章では、表題通り函手 $\mathcal{M}$、$\mathcal{D}$ が互いに擬逆函手である事を検証する。

第一段 (1.2.8)

まず、D をフィルトレイション付き (φ, N) 加群として、$\mathcal{D}(\mathcal{M}(D)) \xrightarrow{\sim} D$ である事を考察しよう。これは序文で、**性質 A** と呼んでいた事柄で、D から得られた (φ, N_∇) 加群 $\mathcal{M}(D)$ を $u = 0$ に制限すると (フィルトレイション付き (φ, N) 加群

[11] この補題では、N_∇ は全く使わない。原論文では、Frobenius $\mathcal{O}$ 加群の補題として書かれている。実際、ξ はまず、K_0 線形切断 $s_0 : D(\mathcal{M}) = \mathcal{M} / u \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を適当に選び、それを φ 半線形になる様に次のように加工して

$$s = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi^i \circ s_0 \circ \varphi^{-i} - \varphi^{i-1} \circ s_0 \circ \varphi^{1-i})$$

$s : D(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ を作り、それを係数拡大して得られる。

として）元の D と同型であるという事を意味している。基本的には、“l_u を無視する射” で同型が得られる。正確に言うと、

$$\eta : \mathcal{D}(\mathcal{M}(D)) = \mathcal{M}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \,/u\, \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} (K_0[l_u] \otimes_{K_0} D)^{N=0} \xrightarrow{l_u \mapsto 0} D$$

という対応で得られる。線形空間として同型である事はまず単射である事を示して、両辺の次元比較という常套手段で分かる。さて、η と N の両立性であるが、まず左辺は $N_\nabla \otimes 1$ の $u = 0$ への制限で定まっていたことを思い出そう。$d \in (K_0[l_u] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ を l_u の多項式として $d = \sum_{j \geqq 0} d_j l_u^j$ と表すと、$N(d) = 0$ という制約から、$N(d_0) + d_1 = 0$ が判る。一方で定義に立ち返った計算で、$\eta(N_\nabla \otimes 1(d)) = -d_1$ が判るので、

$$\eta(N_\nabla \otimes 1(d)) = N(d_0) = N(\eta(d))$$

を得る。η がフィルトレイション付き加群としての同型であることを見るには、次の補題を用いる。

補題 (1.2.1)

$\widehat{\mathfrak{S}_n}$ を $\varphi_W^{-n} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ と $\mathcal{O} \to \mathfrak{S}$ の合成を通じて $\mathcal{O}$ 代数と見做すと次の同型が存在する。

- $\widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D)^{N=0} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_K D_K$ (ι_n から誘導される射)
- $\widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}(D) \xrightarrow{\sim} \sum_{j \geqq 0} (u - \pi_n) \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_K \mathrm{Fil}\, D_K = \sum_{j \geqq 0} \varphi^n_{\mathfrak{S}/W}(E(u))^{-j} \widehat{\mathfrak{S}_n} \otimes_K \mathrm{Fil}\, D_K$

再び議論を続けよう。記述を簡単にする為に、$\mathcal{D}_0 := (\mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ と置くと、$u = 0$ で $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{M}(D)$ は同型である。次の 3 点に注意しよう。

- **(1.2.1)** から ι_0 によって誘導される同型 (これも ι_0 と書く。)

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}(D))_K = \mathcal{D}_0 \,/E(u)\, \mathcal{D}_0 \xrightarrow{\iota_0} \widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_K D_K/(u - \pi)\widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_K D_K = D_K$$

が存在する。

- $\mathcal{M}(D)$ のフィルトレイションの定義から、$d \in \mathcal{D}_0$ について、

$$d \in E(u)^i\, \mathcal{M}(D) \Leftrightarrow \iota_0(d) \in \mathrm{Fil}^i(\widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_K \mathcal{D}_K)$$

- 合成

$$D \xrightarrow{\eta^{-1}} \mathcal{D}(\mathcal{M}(D)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}(D))_K \xrightarrow{\iota_0} D_K$$

は包含射。

最初の 2 つの主張から、ι_0 を通じて、$\mathcal{D}(\mathcal{M}(D))$ と D のフィルトレイションは両立する事が分かり最後の主張から η を通じて両立する事も判る。

第二段

話の流れからいうと、$\mathcal{M}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$ の証明を解説する事になる。これは、序文で述べた**性質 B** に対応している。つまり、与えられた (有限 E 高度) (φ, N_∇) 加群を $u = 0$ に制限しても、フィルトレイション付き (φ, N) 加群構造のデータを覚えておけば、それを利用すると、元の (φ, N_∇) 加群が復元出来るという事を意味している。まず、N_∇ が復元出来るのは何故かを説明しよう。それにはフィルトレイション付き加群としての構造は全く用いない。命題として端的に示されているのは、**(1.3.10)** であるからその解説の為の記号の準備から始める。

定義 (1.3.9) **((φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群)**

• (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群とは Frobenius $\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{M}$ と、K_0 線形写像 $N : \mathcal{M}/u\mathcal{M} \to \mathcal{M}/u\mathcal{M}$ で関係式 $N\varphi = p\varphi N$ を満たすものの組である。

• $\mathcal{M}$ が傾斜 0 であるとか、有限 E 高度であるなどの言い回しは以前と同様である。(傾斜 0) 有限 E 高度な (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群の圏を $\mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathcal{O}}$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\varphi,N,0}_{/\mathcal{O}}$) と書く。

• 自然な函手

$$\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}} \to \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathcal{O}};\ (\mathcal{M}, \varphi, N_\nabla) \mapsto (\mathcal{M}, \varphi, N_\nabla \mod u)$$

がある。

次の補題が示すように、有限 E 高度 (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{M}$ 上の N は $\mathcal{M}[\frac{1}{\lambda}]$ 上には何時でも N_∇ として拡張出来る。

補題 (1.3.10)

• 任意の有限 E 高度 (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、$\mathcal{M}[\frac{1}{\lambda}]$ は次の 2 条件を満たす N_∇ を持つ。

★ $N_\nabla\varphi = \frac{pE(u)}{c_0}\varphi N_\nabla$

★ $N_\nabla|_{u=0} = N$

• 函手 $\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}} \to \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathcal{O}}$ は充満忠実であり、(φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{M}$ が像に含まれる為の必要十分条件は $\mathcal{M}[\frac{1}{\lambda}]$ 上の N_∇ に関して安定な事である。

• 特に $\mathcal{O}$ 階数 1 の (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群は、$\mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla}_{/\mathcal{O}} \to \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathcal{O}}$ の像である。

(1.3.10) の一つ目の主張の証明の核心は、**(1.2.12)** (3)(の証明) に於いて与え

られている。これが**性質** B の仕組みの鍵の一つであるから詳しく復習しよう。まず、(φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対しても (φ, N_∇) 加群と同様に $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ が定義出来る。表記を簡単にする為に $\mathcal{D}_0 := (\mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{M}))^{N=0}$ と置こう。$\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{O}[l_u]$ から誘導された N_∇ を持つ。この時に、合成射

$$\mathcal{D}_0 = (K_0[l_u] \otimes_{K_0} \mathcal{D}(\mathcal{M}))^{N=0} \otimes_{K_0} \mathcal{O} \stackrel{\eta\otimes 1}{\to} \mathcal{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathcal{O} \stackrel{\xi}{\to} \mathcal{M}$$

を考える。ここで、η は **(1.2.8)** の証明 (第一段の議論)、ξ は **(1.2.6)** で登場した ξ である。つまり、この合成から同型 $\mathcal{D}_0[\frac{1}{\lambda}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}[\frac{1}{\lambda}]$ が誘導される。そこで問題は、上の合成射が φ や $\mod u$ したら N と両立するかという問題になるが、**(1.2.8)** の証明で見た様に η は N と両立するし、$\xi \mod u = \mathrm{id}$ であった。[12]

第三段 (1.2.13)

有限 E 高度 (φ, N_∇) 加群 $\mathcal{M}$ に対して、$\mathcal{M}(\mathcal{D}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ という自然な同型がある事を示そう。付加構造の両立性については第二段で検討したので、問題は、$\mathcal{M}' := \mathcal{M}(\mathcal{D}(\mathcal{M}))$ と置いた時に、$\mathcal{O}$ 加群として、$\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ であるかという事になる。これは、この分野では常套手段の謂わば

Frobenius を使って "解析接続" する。

という議論によってなされる。(例えば、**(1.2.2)** の証明参照。) 冗長にならない程度にもう少しだけ詳しく述べると、次の 2 つのステップを踏む事になる。

1. $r \in (|\pi|, |\pi|^{\frac{1}{p}})$ に対して、$\mathcal{M}'_{[0,r)} = \mathcal{M}_{[0,r)}$ を示す。

すると、凡ての正整数 i に対して、Frobenius の i 回引き戻しを考える事によって（ここで、$\mathcal{M}$ 及び $\mathcal{M}'$ が有限 E 高度である事を用いる。）

2. $\mathcal{M}'_{[0,r^{1/p^i})} = \mathcal{M}_{[0,r^{1/p^i})}$ が従う。

これによって、結論を得るという仕組みになっている。肝心の 1. であるが、イデアル $(E(u)) \in \mathcal{O}$ に対応する点 $x_0 \in [0, r)$ 以外では明らかに成立している。x_0 に於いての一致は、

$$\widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_{\mathcal{O}} (1 \otimes \varphi)\varphi^* \mathcal{M} = \widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_{\mathcal{O}} (1 \otimes \varphi)\varphi^* \mathcal{M}'$$

を意味するが、これは基本的には **(1.2.1)** から従う。

[12] 上の状況で、$\mathcal{M}$ が有限 E 高度 (φ, N_∇) 加群であった場合に上述の合成射 $\xi \circ \eta \otimes 1$ は $\mathcal{M}$ の元々の N_∇ と両立する事を検証しよう。つまり、$\sigma = N_\nabla \circ (\xi \circ \eta \otimes 1) - (\xi \circ \eta \otimes 1) \circ N_\nabla$ と置いた時に、$\sigma = 0$ を示したい。上の議論から $\sigma(\mathcal{D}_0) \subset u\mathcal{M}$ は判っているのだが、

- $\sigma\varphi = \frac{pE(u)}{c_0}\varphi\sigma$
- 全ての正整数 i に対して、$\sigma(\mathcal{D}_0) = \sigma\varphi^i(\mathcal{D}_0)$

である事に注意すると、全ての正整数 i について、$\sigma(\mathcal{D}_0) \subset u^{p^i}\mathcal{M}$ が判るので所望の結果を得る。

6　弱認容性と傾斜 0 条件の対応

この章では、弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群と傾斜 0 の (φ, N_∇) 加群が対応している事 **(1.3.8)** を見よう。これは、序文で、**性質 A**$+\alpha$ と呼んでいた性質の一部である。要となるのは、D をフィルトレイション付き (φ, N) 加群として、$\mathcal{M} := \mathcal{M}(D)$ と置くと、$\mathcal{M}$ は φ, N_∇ で安定な飽和的 $\mathcal{O}$ 部分加群のフィルトレイション

$$0 = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{M}_r = \mathcal{M}$$

で、$\mathcal{R}$ を $\mathcal{O}$ 上テンソルすると、傾斜フィルトレイションになっているものがとれた事である。(**(1.3.7)** 参照）ここで、各 i について、$\mathcal{M}_{i,\mathcal{R}} \,/\, \mathcal{M}_{i+1,\mathcal{R}}$ の傾斜を s_i、$\mathcal{R}$ 階数を d_i とする。この時次の 2 点に注意しよう。

- $\overset{d_1}{\wedge}\mathcal{M}_1$ の傾斜は $d_1 s_1$ になる。([Ked04, 5.13] 参照）

- D の階数が 1 の場合定義に立ち戻った計算で、$\mathcal{M}$ の傾斜は、$t_N(D) - t_H(D)$ である事が判る。

これから次の公式を得る。

$$\sum_{i=1}^{r} d_i s_i = t_N(D) - t_H(D)$$

この公式を用いると、D が弱認容的ならば $\mathcal{M}$ の傾斜が 0 である事が分かる。逆に、$\mathcal{M}$ の傾斜が 0 の時、任意の部分 (φ, N_∇) 加群 $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ の傾斜は非負である。([Ked04, 4.4] 参照)。これを言い換えると、任意の部分 (φ, N) 加群 $D' \subset D$ について、$t_N(D') - t_H(D') \geqq 0$ が判る。

7　“整”p 進 Hodge 理論と呼ばれる所以

この章では、φ-$\mathfrak{S}$ 加群の理論が何故 “整”p 進 Hodge 理論と呼ばれるのかを象徴した命題を集めてみた。まずは、φ-$\mathfrak{S}$ 加群の同種圏と傾斜 0 の (φ, N)-$\mathcal{O}$ 加群の圏の関係を述べよう。

補題 (1.3.13)

$\otimes$ 完全圏としての圏同値

$$\Theta : \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\varphi,N,0}_{/\mathcal{O}};\ \mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}$$

が存在する。

ここまでの事柄を総括すると次のような図式で表わされる。

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{MF}^{\varphi,N}_{/K} \arrow[r, "\sim", "(\mathbf{1.2.15})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N\nabla}_{/\mathcal{O}} \\
& \mathbf{MF}^{\varphi,N}_{\mathrm{wa}/K} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim", "(\mathbf{1.3.8})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N\nabla,0}_{/\mathcal{O}} \arrow[u, hook] \arrow[d, hook, "(\mathbf{1.3.10})"] \\
& \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} \arrow[r, "\sim", "(\mathbf{1.3.13})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N,0}_{/\mathcal{O}}
\end{tikzcd}$$

つまり次の命題を得る。

命題 (1.3.15) [13]

$\otimes$ 完全充満忠実函手

$$\mathbf{MF}^{\varphi,N}_{\mathrm{wa}/K} \hookrightarrow \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$$

が存在する。

次に、まさに、“整構造” について取り扱った函手 $V_{\mathfrak{S}}$ の定義と基本性質を述べよう。

記法 (2.1.4)

• 任意の $\mathfrak{M} \in \mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ に対して、$V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}})$ と定める。この時、$V_{\mathfrak{S}}$ は次のような性質を持つ。(c.f. [Fon91, A.1.2, B.1.3.8.4] [Bible, 2.1.2, 2.2.2])

★ $V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$ は階数 $\mathrm{rk}_{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{M}$ の自由 $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$ 加群。

★ $\mathfrak{M} \mapsto V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$ は $\mathfrak{M}$ について完全。

★ 自然な射

$$V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\varphi}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}})$$

は全単射。

★ **(2.1.15)** $V := V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$, $\mathcal{M} := \mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ と置くと $\mathfrak{N} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{N}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}})$ によって次の 2 つの集合の間に全単射対応が得られる。

□ 有限自由 φ 安定 $\mathfrak{S}$ 部分加群 $\mathfrak{N} \subset \mathcal{M}$ で、$\mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ かつ $\mathfrak{N}/\varphi^*\mathfrak{N}$ が E 冪零なものの集合。

□ G_{K_∞} 安定 $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$ 格子 $L \subset V$ の集合。

[13] [Bible, 1.3.15] では、更に函手の像も決定しているがその部分は省略した。

8 Galois 表現への応用

この章では、今までの理論が Galois 表現の問題に如何に応用されるかを見る。その為には、どうしても周期環の復習は避けて通れないので、速やかにそれを行う事から始めよう。

設定その五

- $C := \widehat{\overline{K}}$ を $\overline{K}$ の p 進完備化、$\mathcal{O}_C$ をその整数環とする。

- 次の全射 $W(\overline{k})$ 準同型 θ を考える。[14]

$$\theta : W(R) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C;\ (a_0, a_1, \cdots) \mapsto \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} p^k \tilde{a}_{k,m}^{p^{m-k}}$$

ここで、$R \ni a_n = (a_{n,m})_{m\geqq 0}$ に対して、$\tilde{a}_{n,m} \in \mathcal{O}_K$ を $a_{n,m}$ の持ち上げとしている。

- θ に W 上 K をテンソルして得られる射を $\theta_K : W(R)\otimes_W K \to C$ とし、B_{dR}^+ を $W(R)\otimes_W K$ の $\ker\theta_K$ 進完備化とすると、次の基本的な性質を持つ。

★ B_{dR}^+ は完備離散的付値環で C を剰余体に持つ。

★ 又自然に G_K が作用している。

- B_{dR} を B_{dR}^+ の商体とすると、次の基本的な性質を持つ。

★ $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} := \{x \in B_{\mathrm{dR}}; v_{B_{\mathrm{dR}}}(x) \geqq i\}$ で B_{dR} には自然なフィルトレイションが定まる。

★ 又、G_K も自然に作用している。

- $W^{\mathrm{PD}}(R)$ を $\ker\theta$ に関する $W(R)$ の分母付き冪級数包絡代数 (divided power envelope) とする。

- A_{cris} を $W^{\mathrm{PD}}(R)$ の p 進完備化とする。

- $B_{\mathrm{cris}}^+ := A_{\mathrm{cris}}[1/p]$ とおくと次の性質を持つ。

★ 包含射 $\mathfrak{S} \hookrightarrow B_{\mathrm{cris}}^+$ は一意的に連続拡張されて、B_{cris}^+ は $\mathcal{O}$ 代数と見做せる。更にこの包含射 $\mathcal{O} \hookrightarrow B_{\mathrm{cris}}^+$ は $E(u) \mapsto E([\underline{\pi}]) \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}^+$ である事に注意すると、$\widehat{\mathfrak{S}_0} \to B_{\mathrm{dR}}^+$ にまで拡張される。

★ $B_{\mathrm{cris}}^+ \otimes_{K_0} K$ は包含射で B_{dR}^+ から誘導されるフィルトレイションを持つ。

[14] $\overline{k} \hookrightarrow R;\ a \mapsto (a, a^{p^{-1}}, a^{p^{-2}}, \cdots)$ から誘導される射 $W(\overline{k}) \hookrightarrow W(R)$ によって、$W(R)$ は $W(\overline{k})$ 代数と見做している。

- B_{st}^{+} (resp. B_{st}) は B_{cris}^{+} (resp. B_{cris}) に形式的に $\log[\underline{\pi}]$ を添加して得られる。従って次の同型を得る。

★ $\mathcal{O}[l_u] \otimes_{\mathcal{O}} B_{\mathrm{cris}}^{+} \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{st}}^{+};\ l_u \mapsto \log[\underline{\pi}]$

★ B_{st} には、G_K, Frobenius 作用以外に、B_{cris} 微分 N が上の同型から定まる。[15]

次の命題が [Bible] 第 2 章の一つ目の華である。

命題 (2.1.5)

D を弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群、$\mathfrak{M} \in \mathbf{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi,N}$ を $\mathbf{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\varphi,N} \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}}$ への像が、**(1.3.15)** の函手に依る D の像と一致する (φ, N)-$\mathfrak{S}$ 加群とする。この時 G_{K_∞} 作用と両立する自然な全単射

$$V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B_{\mathrm{st}}^{+})$$

が存在する。

略証. 一度、G_{K_∞} 作用と両立する単射

$$V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathrm{p}}} \mathbb{Q}_{\mathrm{p}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B_{\mathrm{st}}^{+})$$

が出来てしまえば、両者の次元比較で、同型である事が分かる。[16] 写像の構成について述べよう。まず、$\mathcal{M} := \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}$ と置く。従って、$D = \mathcal{D}(\mathcal{M})$ である。更にいつものように、$\mathcal{D}_0 := (\mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ と置く。すると、**(1.2.1)** から、同型 $\widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathfrak{S}_0} \otimes_K D_K$ を得る。この同型を通じて、右辺のフィルトレイションから左辺にフィルトレイションが誘導される。さて、目標の単射の構成であるが、次の 4 つの射の合成によって自然に得られる。

$$\begin{array}{rcl} V_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}) & = & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}) \\ & \underset{\mathbf{I}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\varphi}(\mathcal{M}, B_{\mathrm{cris}}^{+}) \\ & \underset{\mathbf{II}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\mathrm{Fil},\varphi}(\varphi^{*}\mathcal{M}, B_{\mathrm{cris}}^{+}) \\ & \underset{\mathbf{III}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\mathrm{Fil},\varphi}(\mathcal{D}_0, B_{\mathrm{cris}}^{+}) \\ & \underset{\mathbf{IV}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B_{\mathrm{st}}^{+}) \end{array}$$

[15] 比較定理での両立性を持たせる為に流儀によっては、$N(l_u) = -1$ で定義された微分を採用して B_{st} に N を誘導させる場合もある。

[16] 左辺は、**(2.1.4)** に依って、$\mathbb{Q}_{\mathrm{p}}$ 次元が $d := \dim_{K_0} D$ が判り、右辺の次元も d 以上が判るが、実はきっかり d である事が従ってしまう。[CF00, 4.5]

ここで、それぞれの射は次のようにして構成されている。

- **I** は係数拡大である。

- **II** は $1 \otimes \varphi : \varphi^* \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ の合成で得られる。単射である事は、$\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi)$ は λ 冪零であるが、B^+_{cris} は整域である事から判る。

- **III** は **(1.2.12)** で登場した射 $\xi \circ (\eta \otimes 1)$ の合成で得られる。

- **IV** は $f : \mathcal{D}_0 \to B^+_{\mathrm{cris}}$ に対して、合成

$$D \hookrightarrow \mathcal{O}[l_u] \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[l_u]_{\mathcal{O}} \mathcal{D}_0 \overset{1\otimes f}{\to} \mathcal{O}[l_u] \otimes_{\mathcal{O}} B^+_{\mathrm{cris}} \underset{l_u \mapsto \log[\pi]}{\xrightarrow{\sim}} B^+_{\mathrm{st}}$$

を対応させる射である。 □

さて、Fontaine 予想を述べる為に認容性を復習しよう。

復習

- $\sharp = \mathrm{dR}$、cris 或いは st とする。

- $V \in \mathbf{Rep}_{G_K}$ に対して、$D_\sharp(V) := (B_\sharp \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ と定める。

- $V \in \mathbf{Rep}_{G_K}$ が $\sharp$ 表現であるとは、$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} D_\sharp(V)$ が成立する事である。$\sharp$ 表現の為す $\mathbf{Rep}_{G_K}$ の充満部分圏を $\mathbf{Rep}^\sharp_{G_K}$ で表す。

- フィルトレイション付き (φ, N) 加群 D が認容的であるとは、或る $V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{st}}_{G_K}$ が存在して、$D \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{st}}(V)$ となる事である。

本ノートでは先に、弱認容性の定義が与えられていたが、その定義は (φ, N) 加群の言葉だけで与えられていた事を思い出そう。実は、字義通り認容的なら弱認容的である事が従うのであるが、今までの議論を総括すると、次のように、その逆の主張が従っている !!

系 (2.1.5) (Fontaine 予想)
弱認容的 (φ, N) 加群 D は認容的。

この章の最後に、今までの議論の応用として次の予想を証明しよう。

系 (2.1.14) (Breuil 予想 [Bre99, p.202]**)**
制限射 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris}}_{G_K} \to \mathbf{Rep}_{G_{K_\infty}}$ は充満忠実。

証明. $\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris,eff}}_{G_K} \hookrightarrow \mathbf{Rep}^{\mathrm{cris}}_{G_K}$ を有効的 (effective) なクリスタリン表現の為す充満部分圏とする。今までの議論を総括すると次の図式が得られる (図式の中の $\rightarrowtail$、$\xrightarrow{\sim}$

はそれぞれ充満忠実、圏同値を表わす。) ので問題はその可換性だけである。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep}^{\mathrm{cris,eff}}_{G_K} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{Rep}_{G_{K_\infty}} \\
\mathbf{MF}^{\varphi,N=0}_{\mathrm{wa}}{}_{/K_0} \arrow[d, hook, "(\mathbf{1.3.15})"'] & \\
\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[r, hook, "(\mathbf{2.1.12})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \arrow[uu, "\wr"', "{[\mathrm{Fon91}, A.1.2.7]}"]
\end{tikzcd}$$

次のように設定しよう。

- $V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{cris,eff}}_{G_K}$ に対応する弱認容的フィルトレイション付き φ 加群を D とする。
- D に **(1.3.15)** で対応する $\mathfrak{M} \in \mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とする。

この時に反時計回りに V に対応する元を書き出してみると

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\varphi}(\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}) \underset{(\mathbf{2.1.4})}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}[1/p]) \underset{(\mathbf{2.1.5})}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fil},\varphi,N}(D, B^+_{\mathrm{st}}) = V|_{G_{K_\infty}}$$

となって確かに上の図式は可換である事が判る。 □

9 p 可除群への応用

この章では、今までの議論の p 可除群の分類への応用等を簡素に紹介する。まず、Barsotti-Tate S 加群の話から始めよう。その為にまず、係数環 S の復習を行う。

復習 (A.5)

- S を $W[u]$ のイデアル $E(u)$ に対する分母付き冪級数包絡代数の p 進完備化とする。
- S は W の Frobenius と $\varphi(u) = u^p$ によって誘導された自己準同型 φ を持つ。
- $\mathrm{Fil}^1 S \subset S$ を $E(u)$ で生成されるイデアルの S での閉包とする。
- $\varphi_1 := \frac{\varphi}{p}|_{\mathrm{Fil}^1 S}$ と定める。[17]

定義 (A.5) (Barsotti-Tate S 加群)

[17] $\varphi(\mathrm{Fil}^1 S) \subset pS$ である事に注意。

- Barsotti-Tate S 加群とは有限自由 S 加群 $\mathcal{M}$ と S 部分加群 $\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ と φ 半線形写像 $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ の 3 つ組で次の条件を満たすものである。

★ $(\mathrm{Fil}^1 S)\,\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}$。

★ $\mathcal{M} \,/\, \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}$ は自由 $\mathcal{O}_K$ 加群。

★ $1 \otimes \varphi_1 : \varphi^*(\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ は全射。

- Barsotti-Tate S 加群の圏を $\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ で表す。

- Barsotti-Tate 加群 $\mathcal{M}$ は次で定まる Frobenius 半線形写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を持つ。

$$\varphi(x) := \frac{\varphi_1(E(u)x)}{\varphi(E(u))^{-1}}$$

Barsotti-Tate S 加群を用いて、p 可除群を分類するというのが [Bible] 付録の主目的であって次の命題に纏められる。以後、$\mathcal{O}_K$ 上の p 可除群の為す圏を $(p\text{-divGR}_{/\,\mathcal{O}_K})$ で表す。

命題 (A.6)

反変完全函手

$$\mathcal{M} : (p\text{-divGR}_{/\,\mathcal{O}_K}) \to \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/S};\ G \mapsto \mathcal{M}(G) := \mathbb{D}(G)(S)$$

が存在して、$p > 2$ では反変圏同値、$p = 2$ では対応する同種圏が反変圏同値。

[Bible] の第 2 章では、Barsotti-Tate 型の φ-$\mathfrak{S}$ 加群を導入して、**(A.6)** と同様の定理を得ている。以下にそれを解説していこう。まず、**(1.2.2)** に依って、フィルトレイション付き (φ, N) 加群の Hodge-Tate 重みと対応する (φ, N_∇) 加群の E 高度が対応していた事を鑑みると、Barsotti-Tate 型の φ-$\mathfrak{S}$ 加群は次のように定義される。

定義 (2.2.1) (Barsotti-Tate 型 φ-$\mathfrak{S}$ 加群)

- $\mathfrak{M} \in \mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ が Barsotti-Tate 型であるとは、$E(u)(\mathfrak{M} \,/ \varphi^* \mathfrak{M}) = 0$ が成立する事である。

- Barsotti-Tate 型 φ-$\mathfrak{S}$ 加群のなす $\mathbf{Mod}^{\varphi}_{/\mathfrak{S}}$ の充満部分圏を $\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ で表す。

$\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/S}$ と $\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ は次のように関係している。

定義 (2.2.3)

- 函手

$$\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \to \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/S};\ \mathfrak{M} \mapsto (\mathcal{M}, \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M}, \varphi_1)$$

を次のように定める事が出来る。

★ $\mathcal{M} := S \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ ここで、tensor 積は $\mathfrak{S} \to S;\ u \mapsto u^p$ によって取られている。

★ $\mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} := \{m \in \mathcal{M}; 1 \otimes \varphi(m) \in \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$ と置く。

★ $\varphi_1 : \mathrm{Fil}^1 \mathcal{M} \overset{1\otimes\varphi}{\to} \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \overset{\varphi_1\otimes 1}{\to} S \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M} = \mathcal{M}$ と定める。

- **(2.2.8)** 上の $\mathfrak{M}$ と $\mathcal{M}$ に対して、$\varphi : \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}} \to A_{\mathrm{cris}}$ から誘導される射

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}) \to \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil},\varphi}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}})$$

は同型。

次に Barsotti-Tate 型 弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群を導入して、Barsotti-Tate 型 φ-$\mathfrak{S}$ 加群との関係を述べよう。

定義 (2.2.1) (Barsotti-Tate 型弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群)

- 弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群 D が Barsotti-Tate 型であるとは、次の 2 条件が成立する事である。

★ $i \neq 0, 1$ に対して、$\mathrm{gr}^i D_K = 0$ が成立する。

★ $N = 0$

- Barsotti-Tate 型の弱認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群の圏を $\mathbf{MF}^{\varphi}_{\mathrm{BT}/K}$ で表す。

予告していた主張は次である。

命題 (2.2.2) [18]

(1.3.15) によって誘導される函手

$$\mathbf{MF}^{\varphi}_{\mathrm{BT}/K} \to \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

で圏同値が得られる。

今までの議論を総括すると下の図式を得た。

[18] 今までの結果を総括すると充満忠実性は明らかである。問題は、本質的全射性であるが、
- **(1.3.10)** によって、像が決定されている事。
- Barsotti-Tate 型のフィルトレイション付き (φ, N) 加群は $N = 0$ である事。
- **(1.2.2)** に依って Hodge-Tate 重みと E 高度が対応していた事

に注目すると判る。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{MF}^{\varphi}_{\mathrm{BT}/K} \arrow[r, tail] \arrow[d, "(\mathbf{2.2.2})", "\wr"'] & \mathbf{MF}^{\varphi,N}_{\mathrm{wa}/K} \arrow[r, "\sim", "(\mathbf{1.3.8})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}} \arrow[d, tail, "(\mathbf{1.3.10})"] \\
\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} \arrow[r, tail] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} \arrow[r, "\sim", "(\mathbf{1.3.13})"'] & \mathbf{Mod}^{\varphi,N,0}_{/\mathcal{O}}
\end{tikzcd}$$

さて愈々、$\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ を用いた p 可除群の分類定理を紹介する時が来た。

定理 (2.2.7)

完全函手

$$G : \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \to (p\text{-divGR}_{/\mathcal{O}_K})$$

が存在して、$p>2$ では、圏同値。$p=2$ では対応する同種圏が圏同値。

略証. まず次の補題を準備する。

補題 (2.2.4) ([Fal99, Theorem 7])

G を $\mathcal{O}_K$ 上の p 可除群とする。この時自然な単射

$$T_p(G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil},\varphi}(\mathcal{M}(G), A_{\mathrm{cris}})$$

(ここで、A_{cris} は $S \to A_{\mathrm{cris}};\ u \mapsto [\underline{\pi}]$ で自然に S 代数と見做している。) は、$p>2$ で同型、$p=2$ の時、Coker は p で消える。

さて証明に戻ろう。簡単の為、$p>2$ として、函手 G の定義とその逆函手 $\mathfrak{M}$ の対象の対応を述べよう。函手 G は、合成 $\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \to \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/S} \to (p\text{-divGR}_{/\mathcal{O}_K})$ として定める。函手 $\mathfrak{M}$ の対象の対応は、Barsotti-Tate 表現 $V_P(G) = T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$ に **(2.2.2)** と **(2.1.15)** を適用して、$\mathfrak{M} \in \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ で、$T_p(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}})$ なるものが同型を除いて一意的に存在する事が判るので、$G \mapsto \mathfrak{M}(G) := \mathfrak{M}$ と定める。すると次の同型が存在して、

$$\begin{aligned}
T_p(G(\mathfrak{M}(G))) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(\mathfrak{M}(G), \mathfrak{S}^{\mathrm{ur}}) \\
&\xrightarrow[(\mathbf{2.2.4})]{\sim} \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil},\varphi}(\mathcal{M}(G), A_{\mathrm{cris}}) \\
&\xrightarrow[(\mathbf{2.2.8})]{\sim} T_p(G)
\end{aligned}$$

Tate の定理より $G\,\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$ が判る。 □

最後に Fontaine 予想を紹介して本拙筆を締め括ろう。

定理 (2.2.6) (Fontaine 予想 [Fon79, 5.2.5])
凡ての Hodge-Tate 重みが 0 か 1 に等しい G_K のクリスタリン表現 V に対して或る p 可除群 G が存在して、$V \xrightarrow{\sim} T_p(G) \otimes_{Zp} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$ となる。

証明. まず次のように設定する。

- V に対応する認容的フィルトレイション付き (φ, N) 加群を $D := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}[G_K]}(V, B^+_{\mathrm{cris}})$ とする。
- $\mathfrak{M} \in \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ を **(2.2.2)** で D に対応する φ-$\mathfrak{S}$ 加群とする。(正確には、$\mathfrak{M} \in \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p}$ が対応していて、その $\mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/\mathfrak{S}}$ での対象を考えている。)
- $\mathcal{M} := S \otimes_{\varphi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \in \mathbf{BT}^{\varphi}{}_{/S}$ を考える。
- G を **(A.6)** で $\mathcal{M}$ に対応する p 可除群とする。

この時に次の G_{K_∞} 作用と両立する同型を得る。

$$\begin{array}{rcl} T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} & \underset{\mathbf{(2.2.4)}}{\xrightarrow{\sim}} & \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil},\varphi}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}}) \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} \\ & \underset{\mathbf{I}}{\xrightarrow{\sim}} & \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil},\varphi}(D, B^+_{\mathrm{cris}}) \\ & = & V \end{array}$$

ここで、$\mathbf{I}$ は、**(1.2.6)** から、$\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}_\mathrm{p}} \mathbb{Q}_\mathrm{p} \xrightarrow{\sim} D \otimes_W S$ なる Frobenius とフィルトレイションと両立する同型がある事から判る。最後に、この同型は、Breuil 予想 **(2.1.14)** から G_K 作用とも両立する事が判り所望の結果を得る。 □

10　付録　有限平坦表現に関する Breuil 予想について

この章では、[Azumino] の定理 **(3.4.3)** について簡単に解説する。まず主張を述べよう。主張の形自体は、[Bible, 2.1.14] の類似である。

定理 ([Azumino, 3.4.3])
制限射 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{ff}}_{G_K} \to \mathbf{Rep}_{G_{K_\infty}}$ は充満忠実。
但し、ここで、$\mathbf{Rep}^{\mathrm{ff}}_{G_K}$ は有限平坦 G_K 表現の圏である。

という訳で、有限平坦 G_K 表現の復習からしよう。有限長 $\mathbb{Z}_\mathrm{p}$ 加群への G_K 作用が有限平坦であるとは、或る p 冪で消える $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦可換群スキーム G

が存在して、G_K の $G(\overline{K})$ への作用と同型である事である。このような表現の圏は、Abel 圏になる事、更に部分や商を取る操作で閉じている事が知られている。([Ray74] 参照) 従って、螺子回しの議論が出来るので、問題は $\mathbb{F}_p$ 線形空間の表現の場合に帰着される。[Azumino, 3.4.3] の証明の姿勢は、基本的には、クリスタリン表現の時の [Bible, 2.1.14] と同じである。つまり、有限次元 $\mathbb{F}_p$ 線形空間上の G_{K_∞} の連続表現の圏と、$(p, \ldots, p)$ 型群スキームの圏を結び付けるの事によって、問題を翻訳してしまうのである。処で、群スキームが $(p, \ldots, p)$ 型であるとは、有限平坦可換群スキームであって、p で消えるものの事であった。

この翻訳作業の中間を埋める為には次の概念を要する。

- ノルム体 $K((\underline{\pi}))$ という体の導入。
- (高さ 1 の) エタール $(\psi, K((\underline{\pi})))$ 加群

これらは、本編で述べた、(φ, N_∇) 加群の暫定版であり又定義を繰り返す事はしない。

そこで、これらの記号を使わないで、[Azumino, 3.3.1, 3.3.2] を述べて、それを用いる事によって、[Azumino, 3.4.3] は [Bible, 2.1.14] と同様にして示される事を指摘して本付録を締めくくる。

定理 [Azumino, 3.3.1, 3.3.2] $\mathcal{O}_K$ 上の $(p, \ldots, p)$ 型群スキームの圏は有限次元 $\mathbb{F}_p$ 線形空間上の G_{K_∞} の連続表現の圏に充満忠実に埋め込める。

参考文献

[Azumino] C. Breuil, *Integral p-adic Hodge theory*, Algebraic geometry, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., **36** (2000), 51–80,

[Bre98] C. Breuil, *Schéma en groupes et corps des normes*, unpublished (1998).

[Bre99] C. Breuil, *Une application du corps des normes*, Compositio Math. **117** (1999), p.189-203.

[CF00] P. Colmez and J. M. Fontaine, *Construction des representations p-adiques semi-stable*, Invent. Math. **140** (2000), p. 1-43.

[Fal99] G. Faltings, *Integral crystaline cohomology over very ramified valuation rings*, JAMS **12** (1999), p.117-144.

[Fon79] J. M. Fontaine, *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, Journées de Géométrie Algebraique de Rennes (Orsay 1978), Astérisque **65** (1979), p.3-80.

[Fon91] J. M. Fontaine, *Repréntaitons p-adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, Prog. Math. **87**, Birkhauser (1991), p.249-309.

[Fon94] J. M. Fontaine, *Repréntaitons p-adiques semi-stables, Périodes p-adiques*, Astérisque **223** Société Mathématique de France (1994), p. 113-184.

[Ked04] K. Kedlaya, *A p-adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. (2004), p. 93-134.

[Ked05] K. Kedlaya, *Slope filtration revisited*, preprint (2005).

[Bible] M. Kisin, *crystalline representations and F-crystals*

[Ray74] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. de France **102** (1974), p. 241-280.