有限平坦群スキームのモジュライ

今井 直毅

概 要

本稿では，Kisin によって構成された有限平坦群スキームのモジュライの定義と諸性質，及び普遍局所変形環との関係について解説する．

0　はじめに

本稿で解説する有限平坦群スキームのモジュライとは，大雑把に言うと，局所体の Galois 表現の変形に Kisin 加群の情報を付加したもののモジュライである．ただし Galois 群を考える局所体の剰余体の標数は，Galois 表現の基礎体の標数と同じであるとする．Kisin 加群とは，本稿で出てくる $\mathfrak{S}$ 加群のことであり，有限平坦群スキームの情報を持っている．有限平坦群スキームのモジュライは普遍局所変形環上の射影的なスキームで，普遍局所変形環の特異点解消のようなものになっており，このモジュライを調べることによって，普遍局所変形環の性質を導き出すのが目標である．

第 1 節では，有限平坦群スキームのモジュライの構成について説明する．応用上重要なのは，普遍局所変形環上のモジュライであるが，ここではもう少し一般的な状況での構成を述べる．第 2 節では，第 1 節で構成したモジュライの局所的な性質について解説し，その性質を用いて，有限平坦群スキームのモジュライの特殊ファイバーに現れる有限平坦モデルのモジュライと普遍局所変形環を関係付ける．第 3 節では有限平坦モデルのモジュライの連結成分を調べることによって，普遍局所変形環の性質を導き出す．第 4 節では局所体の剰余体の標数が，変形する Galois 表現の基礎体の標数と異なる場合の普遍局所変形環の性質について述べる．付録では圏上の亜群に関する言葉についてまとめた．

謝辞

「R=T の最近の発展についての勉強会」を企画し，今回筆者に報告集執筆の機会を与えて下さった，安田正大さん，山下剛さんに感謝いたします．また，山下さんはこの原稿の初稿を読んで多くの有益なコメントを下さいました．ここに改めて感謝の意を表したいと思います．

記法

本稿では以下の記法を用いる．p は3以上の素数とする．一般に，環 R に対して，R の Witt 環を $W(R)$ で表し，局所環 R に対して，その極大イデアルを $\mathfrak{m}_R$ で表し，整域 R に対して，その商体を $\mathrm{Fr}(R)$ で表す．k は $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大とし，$W = W(k)$，$K_0 = W[1/p]$ とおく．K は K_0 の有限次完全分岐拡大とする．K の整数環を $\mathcal{O}_K$ で表し，$\mathcal{O}_K$ の素元 π を固定する．K の代数的閉包 $\overline{K}$ を固定し，K の絶対 Galois 群を G_K で表す．G_K の惰性部分群を I_K と書く．

1　有限平坦群スキームのモジュライ

本稿では Galois 表現の変形として圏上の亜群を考える．圏上の亜群の言葉については付録にまとめた．まず変形を考える二つの圏を定義する．$\mathcal{O}$ を局所 $\mathbb{Z}_p$ 代数とし，$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}_A$ となる有限局所 Artin $\mathcal{O}$ 代数 A の圏とする．$\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}$ 代数 A と $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} \subset I$ となる A の冪零イデアル I の組 (A, I) のなす圏とする．ただし，この圏における射 $(A, I) \to (B, J)$ は環準同型 $f : A \to B$ で $f(I) \subset J$ となるものとする．$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ は自然に $\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}}$ の充満部分圏と思える．

$\mathbb{F}_p$ の有限次拡大 $\mathbb{F}$ を固定し，d を正の自然数とする．$V_{\mathbb{F}}$ を $\mathbb{F}$ 上の d 次元連続 G_K 表現とし，$V_{\mathbb{F}}$ は $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの一般ファイバーに現れる表現であるとする．このような表現を有限平坦表現と言う．

$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D_{V_{\mathbb{F}}}$ を以下のように定義する．$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A に対し，$D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象を，連続 G_K 作用付きの有限自由 A 加群 V_A と $\mathbb{F}$ 線型 G_K 同型 $\psi : V_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}$ の組 (V_A, ψ) とする．射 $A \to A'$ 上の射 $(V_A, \psi) \to (V_{A'}, \psi')$ とは ψ, ψ' と両立する A' 線型 G_K 同型 $V_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} V_{A'}$ の同型類とする．ただし二つの同型は A' の単数倍だけ違う時に同値であるとする．

$D_{V_{\mathbb{F}}}$ の充満部分圏 $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体を $D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象 (V_A, ψ) のうち V_A が $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの一般ファイバーに現れる表現であるもの全体として定義する．$\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_K]} V_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$ である時，$D_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現され，$D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現される．

次に $D_{V_{\mathbb{F}}}$ を $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群に延長する．$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 (A, I) に対して，$\mathfrak{AR}^{A,I}_{W(\mathbb{F})}$ を $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A' と $W(\mathbb{F})$ 代数の単射準同型 $i : A' \to A$ で $i(\mathfrak{m}_{A'}) \subset I$ となるものの組のなす圏とする．$\mathfrak{AR}^{A,I}_{W(\mathbb{F})}$ の対象全体は自然に有向集合をなす．$D_{V_{\mathbb{F}}}(A, I)$ の対象全体を

$$D_{V_{\mathbb{F}}}(A, I) = \varinjlim_{A' \in \mathfrak{AR}^{A,I}_{W(\mathbb{F})}} D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$$

と定義し，射 $f : (A, I) \to (B, J)$ と $\eta \in D_{V_{\mathbb{F}}}(A, I), \xi \in D_{V_{\mathbb{F}}}(B, J)$ に対し f 上の射 $\eta \to \xi$ 全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_{D_{V_{\mathbb{F}}}}(\eta, \xi)_f = \varprojlim_{A'} \varinjlim_{B'} \mathrm{Hom}_{D_{V_{\mathbb{F}}}}(V_{A'}, V_{B'})_f$$

と定義する．ここで A' は $\mathfrak{AR}^{A,I}_{W(\mathbb{F})}$ の十分大きな元を動き，B' は $f(A') \subset B'$ となるような $\mathfrak{AR}^{B,J}_{W(\mathbb{F})}$ の十分大きな元を動き，$V_{A'} \in D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$ は η の代表元，$V_{B'} \in D_{V_{\mathbb{F}}}(B')$ は ξ の代表元とし，右辺の添え字 f は f から誘導された $A' \to B'$ 上の射を考えていることを意味する．同様に $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ も $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群に延長しておく．

ここで Galois 表現と ϕ 加群の対応について簡単に復習する．$\mathfrak{S} = W[[u]]$ と置き，$\mathfrak{S}[1/u]$ の p 進完備化を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ と書く．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ は離散付置環であり，その剰余体は $k((u))$ である．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ の商体を $\mathcal{E}$ とする．$R = \varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ とおく．ただし推移写像は p 乗写像を考えている．$n \geq 0$ に対して，$\pi_n \in \overline{K}$ を $\pi_0 = \pi$，$\pi_n = \pi_{n+1}^p$ となるように取って，固定する．$\underline{\pi} = (\pi_n)_{n\geq 1} \in R$ とおき，$[\underline{\pi}] \in W(R)$ を $\underline{\pi}$ の Teichmüller 持ち上げとする．$\mathfrak{S} \to W(R)$ を $u \mapsto [\underline{\pi}]$ で定まる射とする．これにより埋め込み $\mathcal{E} \to W(\mathrm{Fr}R)[1/p]$ が定まる．$W(\mathrm{Fr}R)[1/p]$ に含まれる $\mathcal{E}$ の最大不分岐拡大を $\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}$ と書く．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の剰余体は $k((u))$ の分離閉包となっている．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}$ の p 進完備化を $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ と書く．$W(\mathrm{Fr}R)$ 上の Frobenius 写像から $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \subset W(\mathrm{Fr}R)$ によって $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ に誘導される作用を ϕ と書く．

$K_\infty = \bigcup_{n\geq 0} K(\pi_n)$ とおき，G_{K_∞} を K_∞ の絶対 Galois 群とする．G_{K_∞} は $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \subset W(\mathrm{Fr}R)$ によって $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ に作用する．連続 G_{K_∞} 作用のある有限 $\mathbb{Z}_p$ 加群の圏を $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty})$ で表す．

誘導する $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 線型写像 $\phi^*(M) \to M$ が同型になるような ϕ 半線型写像 $M \to M$ 付きの有限 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群の圏を $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ で表す．ϕ 半線型写像 $M \to M$ も ϕ で表す．

すると，関手

$$T : \Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}); M \mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M)^{\phi=\mathrm{id}}$$

は Abel 圏の同値を与える．準逆関手は

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}) \to \Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}; V \mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{K_\infty}}$$

で与えられる．$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A に対して，A の作用付きの $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ の対象のなす圏を $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},A}$ と書き，A の作用付きの $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty})$ の対象のなす圏を $\mathrm{Rep}_A(G_{K_\infty})$ と書くと，T は圏同値

$$T_A : \Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},A} \to \mathrm{Rep}_A(G_{K_\infty})$$

を与える．r を正の整数とすると，階数 r の自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群である $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},A}$ の対象と，階数 r の自由 A 加群である $\mathrm{Rep}_A(G_{K_\infty})$ の対象が，T_A で対応している．

$T_{\mathbb{F}}$ によって $V_{\mathbb{F}}(-1)$ と対応する $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathbb{F}}$ の対象 $M_{\mathbb{F}}$ をとる．ここで (-1) は Tate 捻りの逆を表している．$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D_{M_{\mathbb{F}}}$ を以下のように定める．$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A に対して，$D_{M_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 上自由であるような $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},A}$ の対象 M_A と $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathbb{F}}$ における同型 $\psi : M_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{F}}$ の組 (M_A, ψ) とする．射 $A \to A'$ 上の射 $(M_A, \psi) \to (M_{A'}, \psi')$ は ψ, ψ' と両立するような $\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},A'}$ における同型 $M_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} M_{A'}$ の同値類とする．ただし二つの同型は A' の単数倍だけ違う時に同値であるとする．$D_{V_{\mathbb{F}}}$ の時と同じようにして，$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群に延長しておく．

π の K_0 上のモニック最小多項式を $E(u)$ とする．$\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と誘導される $\mathfrak{S}$ 線型写像 $\phi^*(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ の余核が $E(u)$ 倍で消えるような ϕ 半線型写像 $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ の組のなす圏を $'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ で表す.

$\mathfrak{S}$ 加群として $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{S}/p^{n_i}\mathfrak{S}$ という形の加群と同型になる $'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ の対象全体のなす充満部分圏を $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})$ と表す．ただしここで I は有限集合を表し，n_i は正の整数を表しているとする.

さらに，p 倍で消える $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})$ の対象全体を含み，拡大で閉じているような $'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ の最小の充満部分圏を $(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ と表す.

次に係数付きの $\mathfrak{S}$ 加群を考える．$\mathbb{Z}_p$ 代数 A に対して，$\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ とおく．$'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ の対象 $\mathfrak{M}$ と $\mathbb{Z}_p$ 代数の射 $\iota : A \to \mathrm{End}\,\mathfrak{M}$ の組 $(\mathfrak{M}, \iota)$ のなす圏を $'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})_A$ と表す．また，$\mathfrak{S}_A$ 上有限射影的な対象全体のなす $'(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})_A$ の充満部分圏を $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_A$ で表す．$(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{Z}_p}$ と $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})$ は異なることに注意.

ここで $\mathfrak{S}$ 加群と $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの関係について簡単に復習する．$(\mathrm{Mod}\,/S)$ を Breuil 加群の圏とし，$(p\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{O}_K)$ を位数が p 冪である $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームのなす圏とする．このとき，忠実充満関手

$$(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S}) \to (\mathrm{Mod}\,/S)$$

と圏同値

$$\mathrm{Gr}_D : (\mathrm{Mod}\,/S) \to (p\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{O}_K)$$

が存在する．これらの合成を

$$\mathrm{Gr}_{\mathfrak{S},D} : (\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S}) \to (p\text{-}\mathrm{Gr}/\mathcal{O}_K)$$

と書くことにする．Breuil 加群の定義や上の関手の構成 [Kis, (1.1)] についてはここでは述べない．重要なのは次の事実である.

命題 1.1. $\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S}$ の対象 $\mathfrak{M}$ に対して，G_{K_∞} 表現としての標準的な同型

$$T(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})(1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{\mathfrak{S},D}(\mathfrak{M})(\overline{K})|_{G_{K_\infty}}$$

が存在する．ただしここで (1) は *Tate* 捻りを表している.

証明は [Kis, Proposition 1.1.13] を参照．この命題から，Kisin 加群とそれに対応する有限平坦群スキームをとったときに，加群側で係数 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ をテンソルすることと，群スキーム側で一般ファイバーを取ることが Tate 捻りの差を除いて対応している事がわかる．Galois 表現を G_{K_∞} に制限して考えているが，有限平坦表現に関しては次の定理 [Br2, Theorem 3.4.3] が成り立つ.

定理 1.2. G_K の有限平坦表現の圏から G_{K_∞} の表現の圏への制限関手は忠実充満関手である.

また係数付きの $\mathfrak{S}$ 加群に関しては，次のように p 可除加群との関係が知られている.

定理 1.3. $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{Z}_p}$ と $\mathcal{O}_K$ 上の p 可除加群の圏の間に圏同値が存在する．

証明は [Kis, Corollary 2.2.22] を参照．対応は，忠実充満関手

$$(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{Z}_p} \to (\mathrm{Mod\,FI}/S)_{\mathbb{Z}_p}$$

に，Breuil 加群と有限平坦群スキームの間の反変圏同値から極限をとることで得られる $(\mathrm{Mod\,FI}/S)_{\mathbb{Z}_p}$ と p 可除加群の間の反変圏同値を合成しさらに Cartier 双対をとることで得られる．一つ目の忠実充満関手が，実は圏同値であることを示すのが主な部分である．

次に $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$ を以下のように定める．$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 (A,I) に対して，$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}(A,I)$ の対象を $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_A$ の対象 $\mathfrak{M}_A$ と $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A/I$ 加群の同型 $\psi : (\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A \otimes_A A/I) \xrightarrow{\sim} M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A/I$ で両辺の ϕ 半線型写像と両立するもの組とする．射 $(A,I) \to (A',I')$ 上の射 $(\mathfrak{M}_A,\psi) \to (\mathfrak{M}_{A'},\psi')$ は ψ,ψ' と両立するような $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{A'}$ における同型 $\mathfrak{M}_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{A'}$ の同値類とする．ただし二つの同型は A' の単数倍だけ違う時に同値であるとする．

命題 1.4. $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の圏の射

$$D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}} \to D_{M_{\mathbb{F}}}; V_A \mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_A(-1))^{G_{K_\infty}}$$

は忠実充満関手になる．さらに $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}} \to D_{M_{\mathbb{F}}}$ には自然な射が誘導され，

$$\begin{tikzcd}
D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}} \arrow[r] & D_{M_{\mathbb{F}}} \\
& D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}} \arrow[ul, "\Theta_{V_{\mathbb{F}}}"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

が自然同値を除いて可換になるような $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の圏の射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ が自然同値を除いて一意的に存在する．

証明の概略． $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}} \to D_{M_{\mathbb{F}}}$ が忠実充満関手であることは，Galois 表現と ϕ 加群の圏同値と定理 1.2 からわかる．$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}(A,I)$ の対象 $\mathfrak{M}_A$ に対して，$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A$ を考えると，これが十分大きな Artin 環 A' 上定義されることが示され，

$$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}} \to D_{M_{\mathbb{F}}}; \mathfrak{M}_A \mapsto M_{A'}$$

が誘導される．また $\mathfrak{M}_{A'} = M_{A'} \cap \mathfrak{M}_A \subset M_A$ とおくと，$\mathfrak{M}_{A'}$ が $(\mathrm{Mod}\,/\mathfrak{S})$ の対象となることが示され，$M_{A'}$ が有限平坦群スキームから来ていることが命題 1.1 からわかる． $\square$

A を $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ の対象とし，$\xi = V_A \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}(A)$ に対し，付随する $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群を考えそれを再び ξ と記す．$\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ を用いて，2 ファイバー積

$$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi} = \xi \times_{D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathrm{fl}}} D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$$

を考え，$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群とみなす．

命題 1.5. 記号は上記の通りとする．この時，ある射影的 A スキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ が存在して，$\mathfrak{Aug}_A$ の任意の対象 (B,I) に対して自然な全単射

$$|D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi}|(B,I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi})$$

が存在する．

証明の概略. $M_A = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_A(-1)\right)^{G_{K_\infty}}$ とおき，$\mathfrak{Aug}_A$ の対象 (B,I) に対して，$M_B = M_A \otimes_A B$ とおく．定義より $|D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi}|(B,I)$ は，階数 d の射影的 $\mathfrak{S}_B$ 部分加群 $\mathfrak{M}_B \subset M_B$ であって，$\mathfrak{S}_B[1/u]$ 加群 M_B を生成し，M_B の ϕ 半線型写像で安定で，それから誘導される $\phi^*(\mathfrak{M}_B) \to \mathfrak{M}_B$ の余核が $E(u)$ 倍で消えるようなもの全体の集合と同一視される．

$\mathfrak{S}_B$ の p 進完備化を $\widehat{\mathfrak{S}}_B$ と書き，$\widehat{M}_B = M_B \otimes_{\mathfrak{S}_B} \widehat{\mathfrak{S}}_B$ とおく．すると [BL] の主結果より $\mathfrak{M}_B \mapsto \mathfrak{M}_B \otimes_{\mathfrak{S}_B} \widehat{\mathfrak{S}}_B$ は，M_B を生成するような，階数 d の射影的 $\mathfrak{S}_B$ 部分加群 $\mathfrak{M}_B \subset M_B$ 全体の集合と，$\widehat{M}_B$ を生成するような，階数 d の射影的 $\widehat{\mathfrak{S}}_B$ 部分加群 $\widehat{\mathfrak{M}}_B \subset \widehat{M}_B$ 全体の集合の間の全単射を与える．後者の集合はアファイン Grassman 多様体で表現されるので，ϕ 半線型写像で安定であるという条件と誘導される射の余核が $E(u)$ 倍で消えるという条件で定まるアファイン Grassman 多様体の閉部分帰納スキームを $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ とおけばよい．さらに，課された二つの条件から考えている部分加群の範囲が絞られ，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ がスキームであることも確かめられる． □

剰余体が $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ であるような完備局所 $\mathcal{O}$ 代数のなす圏を $\widehat{\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}}$ で表す．$D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $\widehat{\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}}$ 上に延長しておく．$\xi \in D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を固定する．$i \geq 1$ に対して，$\xi_i \in D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(R/\mathfrak{m}_R^i)$ を ξ の像とし，$\mathfrak{Aug}_{R/\mathfrak{m}_R^i}$ 上の亜群 $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi_i}$ を考える．$\mathfrak{Aug}_R$ 上の亜群 $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi}$ を $\mathfrak{Aug}_R$ の対象 (B,I) に対して

$$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi}(B,I) = \varprojlim_i D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi_i}(B,I)$$

とすることで定める．

命題 1.6. 記号は上記の通りとする．この時，ある射影的 R スキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ が存在して，$\mathfrak{Aug}_R$ の任意の対象 (B,I) に対して自然な全単射

$$|D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi}|(B,I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,R}(\mathrm{Spec}\,B, \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi})$$

が存在する．

証明の概略. $A = R/\mathfrak{m}_R^i$ に対して，命題 1.5 を適用することで射影的 $R/\mathfrak{m}_R^i$ スキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi_i}$ を得る．$\left(\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi_i}\right)_{i\geq 1}$ から得られる形式的スキーム $\widehat{\mathscr{GR}}_{V_{\mathbb{F}},\xi_i}$ を考えると，アファイン Grassman 多様体の性質から $\widehat{\mathscr{GR}}_{V_{\mathbb{F}},\xi_i}$ が射影的 R スキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ に代数化できることが示される．この $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ が命題の条件を満たすことは簡単にわかる． □

定義 1.7. $V_{\mathbb{F}}$ の有限平坦モデルとは，$\mathbb{F}$ ベクトル空間の構造を持つような $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキーム $\mathcal{G}$ と $\mathbb{F}[G_K]$ 加群としての同型 $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\overline{K})$ の組のことをいう．

系 1.8. ある射影的 $\mathbb{F}$ スキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が存在して，$\mathbb{F}$ の任意の有限次拡大体 $\mathbb{F}'$ に対して，$V_{\mathbb{F}'} = V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ の有限平坦モデルの同型類の集合と $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ の間に自然な全単射がある．

証明の概略. $R = \mathbb{F}$，$\xi = V_{\mathbb{F}} \in D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathbb{F})$ に対して命題 1.6 を適用して得られる射影的 $\mathbb{F}$ スキームを $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ とすればよい． □

2 モジュライの局所的性質

各 $\mathbb{Q}_p$ 代数埋め込み $\psi : K \to \overline{K}_0$ に対して $v_\psi \in [0, d]$ を選び，$\mathbf{v} = (v_\psi)_\psi$ とおく．各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ に対して，σ の $\mathrm{Gal}(\overline{K}_0/\mathbb{Q}_p)$ への持ち上げ $\tilde{\sigma}$ を固定する．$F_\sigma \subset \overline{K}_0$ を G_{K_0} の部分群

$$\left\{\tau \in G_{K_0} \;\middle|\; \psi|_{K_0} = \sigma \text{ となる } \psi \text{ に対して } v_{\tilde{\sigma}\circ\tau\circ\tilde{\sigma}^{-1}\circ\psi} = v_\psi\right\}$$

に対応する体とする．全ての $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ に対して $F_\sigma \subset F$ となるような $\mathbb{Q}_p$ の有限次 Galois 拡大体 F をとる．$\mathcal{O}_F$ の剰余体が $\mathbb{F}$ であるとする．

E を F の有限次拡大とする．$\xi = V_{\mathcal{O}_E} \in D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O}_E)$ に対して，$V_\xi = V_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ とおく．V_ξ は $\mathcal{O}_K$ 上の p 可除群の一般ファイバーとして現れる表現になることがわかる．特に V_ξ はクリスタリン表現である．E 上のクリスタリン G_K 表現のなす圏を $\mathrm{Rep}^{\mathrm{crys}}_E$ と書き，E の作用付きの K 上のフィルター付き弱許容 ϕ 加群のなす圏を $(\mathrm{Mod}\,/K_0)_E$ と書く．[CF] の主結果より，圏同値

$$D_{\mathrm{crys}} : \mathrm{Rep}^{\mathrm{crys}}_E \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Mod}\,/K_0)_E;\ V \mapsto (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

を得る．任意の $a \in K$ に対して

$$\det_E\bigl(a\big|D_{\mathrm{crys}}(V_\xi)_K/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{crys}}(V_\xi)_K\bigr) = \prod_\psi \psi(a)^{v_\psi}$$

が成り立つ時 ξ が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であるという．ただしここで $D_{\mathrm{crys}}(V_\xi)_K$ は $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 加群として考えている．

R を剰余体が $\mathbb{F}$ であるような完備局所 Noether $\mathcal{O}_F$ 代数とする．$\xi \in D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(R)$ を固定する．E が F の有限次拡大体であるとき，$\mathcal{O}_F$ 代数の準同型 $y : R \to \mathcal{O}_E$ が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であるとは，y から誘導される $D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(R) \to D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O}_E)$ による ξ の像が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であることをいう．

$\mathrm{Spf}\, R$ に付随する p 進解析空間 [deJ, §7] を $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ で表す．$\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ の点は $R[1/p]$ の極大イデアルと対応している．y の核から定まる $R[1/p]$ の極大イデアルに対応する $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ の点を再び y で表す．y の p 進 Hodge 型を $(v_{\psi,y})_\psi$ とする．[Sen] の主結果より，

各 $\mathbb{Q}_p$ 代数埋め込み $\psi : K \to \overline{K}_0$ に対して $X^{d-v_{\psi,y}}(X-1)^{v_{\psi,y}}$ の係数は $y \in \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ に関する解析関数になる．さらに $X^{d-v_{\psi,y}}(X-1)^{v_{\psi,y}}$ の係数は整数なので，$\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ の連結成分上で定数となり，関数 $y \mapsto v_{\psi,y}$ も $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ の連結成分上で定数となる．

また，$\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ の連結成分と $\operatorname{Spec} R[1/p]$ の連結成分は一対一に対応しているので，$\operatorname{Spec} R[1/p]$ の連結成分の集合の部分集合で，y が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であることと y がその部分集合に含まれるある連結成分上にあることが同値となるようなものが存在する．この部分集合に含まれる連結成分全体の $\operatorname{Spec} R$ における閉包に対応する R の商を $R^{\mathbf{v}}$ とする．

$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$ を $\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}_F}$ 上に制限した亜群を $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}|_{\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}_F}}$ と書く．$D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}|_{\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}_F}}$ の充満部分亜群 $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$ を次のように定める．$\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}_F}$ の対象 (A,I) に対し，$D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}(A,I)$ の対象全体を $D_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}(A,I)$ の対象 $\mathfrak{M}_A$ のうち，$a \in \mathcal{O}_K$ に対して $\mathcal{O}_K$ 上の多項式関数として

$$\det_A\Big(a \;\Big|\; (1\otimes\phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_A)\big)/E(u)\mathfrak{M}_A\Big) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

が成り立つようなもの全体とする．ただし $\mathcal{O}_K$ 上の多項式関数として上の等式が成り立つとは，$\mathcal{O}_K$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{ne}$ をとって上の式の a に $\sum_{i=1}^{ne} \alpha_i X_i$ を代入した時，$X_1,\ldots,X_{ne}$ の多項式として上の等式が成り立つことをいう．この等式の条件を，p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ の条件と呼ぶことにする．さらに

$$D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}},\xi} = \xi \times_{D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}|_{\mathfrak{Aug}_{\mathcal{O}_F}}} D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$$

とおく．$D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$ は $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ のある閉部分スキーム $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ によって，命題 1.6 の意味で表現されることがわかる．

$V_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 上の基底 $\beta_{\mathbb{F}}$ を固定する．$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を以下のように定義する．$\mathfrak{AR}^{\square}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 A に対し，$D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象を，連続 G_K 作用付きの有限自由 A 加群 V_A と $\mathbb{F}$ 線型 G_K 同型 $\psi : V_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{F}}$ と ψ によって $\beta_{\mathbb{F}}$ の持ち上げとなるような V_A の A 上の基底 β_A の組 (V_A,ψ,β_A) とする．射 $A \to A'$ 上の射 $(V_A,\psi,\beta_A) \to (V_{A'},\psi',\beta_{A'})$ とは ψ,ψ' と両立し β_A を $\beta_{A'}$ に送るような A' 線型 G_K 同型 $V_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} V_{A'}$ の同型類とする．ただし二つの同型は A' の単数倍だけ違う時に同値であるとする．

$D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の充満部分圏 $D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体を $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象 (V_A,ψ,β_A) のうち V_A が $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの一般ファイバーに現れる表現であるもの全体として定義する．$D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現され，$D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現される．

この節の残りと第 3 節では $R = R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_F$ とし，ξ を $D^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}(R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}})$ の普遍対象から誘導される対象とする．このとき $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ 上の亜群の射 $\xi \to D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ は形式的に滑らかである．

$\mathcal{O}_{\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}}$ の p 冪捩れ切断のなすイデアル層に対応する $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の閉部分スキームを $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ と表し，$\overline{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} = \mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathbb{F}$ とおく．

ここで，$\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の局所的性質を導く上で必要になるモジュライ $M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ の定義と性質について述べる．Λ を階数 d の自由 $\mathcal{O}_K$ 加群とする．$\mathcal{O}_F$ スキーム T に対して，$M_{\mathbf{v}}(T)$ を，以下の条件をみたすような $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$ 部分加群 $L \subset \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$ の集合とする．

- L は T 上局所的に，$\mathcal{O}_T$ 加群として $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$ の直和因子である．
- $a \in \mathcal{O}_K$ に対して，$\mathcal{O}_K$ 上の多項式関数として

$$\det{}_{\mathcal{O}_T}(a|L) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

  が成り立つ．

関手 $M_{\mathbf{v}}$ は $\mathcal{O}_F$ 上射影的なスキームで表現されるので，このスキームを再び $M_{\mathbf{v}}$ と書く．また $M_{\mathbf{v}} \otimes_{\mathcal{O}_F} F$ の $M_{\mathbf{v}}$ におけるスキーム論的閉包を $M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ と書く．[PR, §5] の結果から次の命題が容易に従う．

命題 2.1. $\overline{M}^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}} = M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathbb{F}$ とおく．このとき以下が成り立つ．

1. $M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ は正規かつ *Cohen-Macaulay* である．

2. $\overline{M}^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ は被約で有理特異性をもつ．

3. 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ に対し，$\psi|_{K_0} = \sigma$ となるようなどの二つの整数 v_ψ の差も高々1 であるとする．このとき，各 ψ に対して v_ψ が 0 か 1 である，$e \leq 2$ である，のどちらかが成り立つならばならば，$M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}}$ である．

次に $\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ と $M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ を結びつける上で必要になる $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ 上の三つの亜群を定義する．まず，$a \in \mathcal{O}_K$ に対して，多項式関数として

$$\det{}_{\mathbb{F}}\Big(a \;\Big|\; (1 \otimes \phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}})\big)/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}\Big) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

が成り立つ $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}}$ の対象 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ を固定する．さらに $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$ 加群としての同型

$$\iota : \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$$

を固定する．以下で $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ 上の亜群 $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$，$\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$，$\bar{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ を定める．A, A' を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ の対象とし，$A \to A'$ を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ における射とする．

$D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体は，$a \in \mathcal{O}_K$ に対して多項式関数として

$$\det{}_A\Big(a \;\Big|\; (1 \otimes \phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_A)\big)/E(u)\mathfrak{M}_A\Big) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

が成り立つ $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_A$ の対象 $\mathfrak{M}_A$ と $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}}$ における同型 $\psi_A : \mathfrak{M}_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ の組全体とする．$(1 \otimes \phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_A)\big)/E(u)\mathfrak{M}_A$ が有限自由 A 加群になる

ことが確かめられるので，上の式の左辺は意味を成している．射 $A \to A'$ 上の射は，同型 $\mathfrak{M}_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{A'}$ で $\psi_A, \psi_{A'}$ と両立するものとする．

$\tilde{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体は，$D^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象 $(\mathfrak{M}_A, \psi_A)$ と $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群の同型 $\iota_A : \mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ の組で図式

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A\big) \otimes_A \mathbb{F} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\iota_A \otimes 1"'] & \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \arrow[d, "\iota"] \\
& \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

を可換にするもの全体とする．射 $A \to A'$ 上の射は，同型 $\mathfrak{M}_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{A'}$ で $\psi_A, \psi_{A'}, \iota_A, \iota_{A'}$ と両立するものとする．

$\bar{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体は，$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群 L と $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群の単射 $\epsilon_A : L \hookrightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ の組であって以下の条件をみたすもの全体とする．

- L は A 加群として $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ の直和因子である．
- $a \in \mathcal{O}_K$ に対して，$\mathcal{O}_K$ 上の多項式関数として
$$\det_{\mathcal{O}_T}(a|L) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$
が成り立つ．
- 合成
$$L \otimes_A \mathbb{F} \overset{\iota_A \otimes 1}{\hookrightarrow} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F} \xrightarrow{\iota^{-1}} \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$$
の像が $(1 \otimes \phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}})\big)/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ である．

射 $A \to A'$ 上の射は，同型 $L_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} L_{A'}$ で $\epsilon_A, \epsilon_{A'}$ と両立するものとする．

命題 2.2. $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ 上の亜群の射

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}} \to D^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}; (\mathfrak{M}_A, \psi_A, \iota_A) \mapsto (\mathfrak{M}_A, \psi_A), \\
&\tilde{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}} \to \bar{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}; (\mathfrak{M}_A, \psi_A, \iota_A) \mapsto \Big(\iota_A\big((1 \otimes \phi)\phi^*(\mathfrak{M}_A)/E(u)\mathfrak{M}_A\big), \epsilon_A\Big)
\end{aligned}$$

を考える．ただし二つ目の射において ϵ_A は自然な埋め込みを考えている．このとき，一つ目の射は相対的に副表現可能であり，二つの射はどちらも形式的に滑らかである．

証明の概略. A を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ の対象とし，$\xi = (\mathfrak{M}_A, \psi_A)$ を $D^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象とする．$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ の対象 A' に対して，$\tilde{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi}(A')$ の対象は，射 $A \to A'$ と $D^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A')$ の対象 $\mathfrak{M}_{A'}$ と同型 $\mathfrak{M}_A \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{A'}$ と同型 $\mathfrak{M}_{A'}/E(u)\mathfrak{M}_{A'} \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A'$ からなる．よって $\tilde{D}^{\mathsf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi}$ は A' 値点が

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A'}\Big(\big(\mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A\big) \otimes_A A', \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A'\Big) \\
&\qquad\qquad \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}}\big(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/E(u)\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}\big)
\end{aligned}$$

による ι の逆像になるような完備局所 A 代数 R で表現される．$\mathrm{Spf}\, R$ は，A' 値点が

$$\mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}_p}A'}(\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}_p}A')\to\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}}(\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F})\bigr)$$

になる形式群 G 上の捻子になるので，R は A 上形式的に滑らかである．これにより一つ目の射に関する主張が示された．

二つ目の射が形式的に滑らかであることは，定義に従って容易に示される．□

ここまで準備したことを用いて，次の命題を証明する．

命題 2.3. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ と $\overline{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ に関して以下が成り立つ．

1. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ は正規かつ *Cohen-Macaulay* である．
2. $\overline{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ は被約で有理特異性をもつ．
3. 任意の $\sigma\in\mathrm{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ に対し，$\psi|_{K_0}=\sigma$ となるようなどの二つの整数 v_ψ の差も高々1 であるとする．このとき，各 ψ に対して v_ψ が 0 か 1 である，$e\leq 2$ である，のどちらかが成り立つならばならば，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}=\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ である．

証明の概略． 主張は全て $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ 上局所的なので $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の閉点 y の近傍で示せばよい．y の剰余体を $\mathbb{F}'$ とする．$\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}'$ に，R を $R\otimes_{W(\mathbb{F})}W(\mathbb{F}')$ に取りかえることによって $\mathbb{F}'=\mathbb{F}$ としてよい．y に対応する $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}}$ の対象を $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ とし，$\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}$ 加群としての同型

$$\iota:\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}\xrightarrow{\sim}\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}$$

を固定する．

A を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ の対象とし，$(\mathfrak{M}_A,\psi_A)$ を $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象とすると，$(\mathfrak{M}_A,\psi_A)$ は自然に $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象を定める．これにより $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}_F}$ 上の亜群の射 $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}\to D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}$ が定まる．この射と命題 2.2 の射から得られる次の図式を考える．

$$\begin{CD}
\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi} @>>> \tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}} @>>> \bar{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}\\
@VVV @VVV\\
D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi} @>>> D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}\\
@VVV @VVV\\
\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} @>>> D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{S},M_{\mathbb{F}}}\\
@VVV @VV{\Theta_{V_{\mathbb{F}}}}V\\
\xi @>>> D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}
\end{CD}$$

ここで一番下の四角図式はファイバー積になっており，残りの二つの四角図式がファイバー積になるように $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi}$，$\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi}$ を定義している．

モジュライの定め方から，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の y での局所化の完備化は亜群 $D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}},\xi}$ を副表現する．この完備 R 代数を $R^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ とおく．命題 2.2 より $\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}} \to D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ は相対的に副表現可能なので，$\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ はある完備 R 代数 $\tilde{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ で副表現される．$R^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$，$\tilde{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ のそれぞれを p 冪捩れ元のなすイデアルで割ったものを $R^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$，$\tilde{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ と書く．命題 2.2 より $\tilde{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}} \to D^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ は形式的に滑らかなので，$\tilde{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y} = R^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y} \otimes_{R^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}} \tilde{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ となり，$\tilde{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ は $R^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ 上形式的に滑らかとなる．また $R^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ は $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の y での局所化の完備化になっている．

一方 $\bar{D}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ は $M_{\mathbf{v}}$ の $\iota\big((1 \otimes \phi)\phi^*(\mathfrak{M}_F)/E(u)\mathfrak{M}_F\big)$ に対応する点での完備局所環 $\bar{R}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ で表現される．$\bar{R}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ を p 冪捩れ元のなすイデアルで割ったものを $\bar{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ と書くと，これは $M^{\mathrm{loc}}_{\mathbf{v}}$ の $\iota\big((1 \otimes \phi)\phi^*(\mathfrak{M}_F)/E(u)\mathfrak{M}_F\big)$ に対応する点での完備局所環になる．$\xi \to D^{\mathrm{fl}}_{V_{\mathbb{F}}}$ が形式的に滑らかであることと命題 2.2 より $\tilde{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ は $\bar{R}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ 上形式的に滑らかである．よって $\tilde{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y} = \tilde{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},y} \otimes_{\bar{R}^{\mathbf{v}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}} \bar{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ となり，$\tilde{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},y}$ は $\bar{R}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}$ 上形式的に滑らかである．

これらと命題 2.1 をあわせると主張が示される． □

命題 2.4. 命題 *1.4* の $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}$ は $\mathcal{O}_F$ スキームの間の射影的な射

$$\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} : \mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi} \to \operatorname{Spec} R^{\mathbf{v}}$$

を誘導する．さらに

$$\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p] : \mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p] \to \operatorname{Spec} R^{\mathbf{v}}[1/p]$$

は同型になる．

証明の概略. 射が定まることを示すには，

$$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p] \hookrightarrow \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p] \xrightarrow{\Theta_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p]} \operatorname{Spec} R[1/p]$$

が $\operatorname{Spec} R^{\mathbf{v}}[1/p]$ を経由することを示せばよい．さらに，$\operatorname{Spec} R^{\mathbf{v}}[1/p]$ は $R^{\mathbf{v}}$ の定義から，$\operatorname{Spec} R[1/p]$ の連結成分なので，F の有限次拡大体 E に対して $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}(E)$ の像が $\operatorname{Spec} R^{\mathbf{v}}(E)$ に入ることを示せばよい．

$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}(E)$ の像から，点 y をとってくる．y は $R \to \mathcal{O}_E$ を定めるが，固有射の付置判定法から，これは $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}(E)$ の $\mathcal{O}_E$ 値点を定める．$\operatorname{Spec} R$ の $\mathcal{O}_E$ 値点は G_K が連続に作用する有限自由 $\mathcal{O}_E$ 加群を定め，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}(E)$ の $\mathcal{O}_E$ 値点は $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathcal{O}_E}$ の対象 $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ を定める．

$\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ を $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{Z}_p}$ の対象と見たときに，定理 1.3 によって $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}$ に対応する p 可除加群を $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ とする．p 可除加群 $\mathcal{G}$ に対して $T(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ の Tate 加群を表すとし，$V(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおくことにする．このとき次の同型が存在する．

$$\begin{aligned}
&D_{\mathrm{crys}}(V_E)_K/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{crys}}(V_E)_K \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{crys}}\big(V_p(\mathcal{G}_{\mathfrak{M}})(-1)\big)_K/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{crys}}\big(V_p(\mathcal{G}_{\mathfrak{M}})(-1)\big)_K \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} \Big((1 \otimes \phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E})\big)/E(u)\mathfrak{M}_{\mathcal{O}_E}\Big) \otimes_{\mathcal{O}_K} K.
\end{aligned}$$

一つ目の同型は，命題 1.1 と定理 1.2 から従う．二つ目の同型は，フィルター付弱許容 ϕ 加群と p 可除加群の Tate 加群の関係 [Br1, Lemme 5.3.1] から従う．上の同型から Galois 表現に関する p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ の条件と Kisin 加群に関する p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ の条件が対応していることがわかり，y が $\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}(E)$ に入ることが証明される．

命題より $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p]$ は正規であり，[Ya, 命題 3.4.1] より $\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}[1/p]$ は正則なので，p を可逆にしたところで同型になることを示すには，F の任意の有限次拡大体 E に対して $\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ が $\mathcal{O}_E$ 値点の間に全単射を引き起こすことを見ればよい．

まず全射性を見る．y を $\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}$ の $\mathcal{O}_E$ 値点とし，対応する G_K 表現を $V_{\mathcal{O}_E}$ とする．任意の正の整数 n に対して $V_{\mathcal{O}_E}/p^n V_{\mathcal{O}_E}$ は有限平坦表現なので，[Ray, Proposition 2.3.1] より $V_{\mathcal{O}_E} = T_p(\mathcal{G})$ となる p 可除加群 $\mathcal{G}_V$ が一意的に存在する．定理 1.3 より，$\mathcal{G}_V$ に対応する $(\mathrm{Mod}\,\mathrm{FI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{Z}_p}$ の対象 $\mathfrak{M}_V$ が定まる．$V_{\mathcal{O}_E}$ への $\mathcal{O}_E$ の作用から誘導される $\mathfrak{M}_V$ への $\mathcal{O}_E$ の作用によって，$\mathfrak{M}_V$ が $(\mathrm{Mod}\,\mathrm{FI}/\mathfrak{S})_{\mathcal{O}_E}$ の対象を定めている事が確かめられ，全射性がわかる．

単射性は Galois 表現を p 可除加群に延ばす方法が一意的であるという Tate の結果 [Tat, Theorem 4] の帰結である． □

$\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}$ の閉点の $\Theta^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ によるファイバーを $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ で表す．次の系によって，$\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}[1/p]$ の連結成分を調べることが $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の連結成分を調べることに帰着される．

系 2.5. 位相空間 X に対して，X の連結成分の集合を $H_0(X)$ で表すとすると，全単射

$$H_0(\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}[1/p]) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},0})$$

が存在する．

証明の概略. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p]$ のある連結成分を考え，e_0 をその連結成分上で 1 となり，他の連結成分上では 0 となるような $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p]$ の大域切断とする．$\pi_F \in \mathcal{O}_F$ を F の素元とし，$\pi_F^n e_0$ が $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ 上の大域切断に延びるような最小の非負整数 n をとる．$(\pi_F^n e_0)^2 = \pi_F^n(\pi_F^n e_0)$ となっている．もし $n \geq 1$ なら，$\pi_F^n e_0$ は $\overline{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ の 0 でない冪零大域切断を定めるが，これは $\overline{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ が被約であることに反する．よって $n=0$ であり，このことから全単射

$$H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}[1/p]) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi})$$

が存在することがわかる．また $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ を $m_{R^{\mathbf{v}}}$ に沿って完備化して得られる形式的スキームを $\widehat{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}$ とすると，

$$H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},0}) \xrightarrow{\sim} H_0(\widehat{\mathscr{GR}}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi}) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},\xi})$$

がわかる．これらと命題 2.4 をあわせることで

$$H_0(\mathrm{Spec}\, R^{\mathbf{v}}[1/p]) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}_{V_{\mathbb{F}},0})$$

が得られる． □

定義 2.6. A を $\mathbb{Z}_p$ 代数とし，$\mathfrak{M}_A$ を $(\mathrm{Mod\,FI}/\mathfrak{S})_A$ の対象とする．$\phi^*\mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_A$ の像が $E(u)\mathfrak{M}_A$ となるとき $\mathfrak{M}_A$ はエタールであるといい，$\phi^*\mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_A$ が同型であるとき $\mathfrak{M}_A$ は乗法的であるという．

$\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ を $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ 上の普遍的な $\mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}}$ 加群の層とする．$\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ の最大エタール商加群層 $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc},\text{ét}}$ と最大乗法的部分加群層 $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc},\mathrm{m}}$ が存在し，これらの階数は $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ の連結成分上で一定となることが示される．

非負整数の組 $\mathbf{d} = \{d_{\text{ét}}, d_{\mathrm{m}}\}$ に対して，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc},\mathbf{d}}$ を $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc},\text{ét}}$ の階数が $d_{\text{ét}}$ となり $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v},\mathrm{loc},\mathrm{m}}$ の階数が d_{m} となるような $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ の連結成分全ての合併とする．

3　モジュライの連結成分

この節では $d=2$ とし，全ての ψ に対して $v_\psi = 1$ とする．この場合 $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}} = \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}^{\mathbf{v}}$ であった．以下では $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{loc}}$ のことを $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}$ と書く．また $\mathrm{Spec}\,R^{\mathbf{v}} \neq \emptyset$ であると仮定する．この仮定から I_K の $\det V_{\mathbb{F}}$ への作用は p 進円分指標の p を法とした還元になることがわかる．

$V_{\mathbb{F}}$ を一般ファイバーに持つような $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームを $V_{\mathbb{F}}$ の有限平坦モデルという．$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}$ は構成から，$V_{\mathbb{F}}$ の p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ である有限平坦モデルのモジュライである．ただし，有限平坦モデルが p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ であるとは，対応する Kisin 加群が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ の条件を満たすことをいう．

普遍局所変形環の性質を導くために，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}$ の連結成分について調べる．まず $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\{1,1\}}$ について調べる．$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\{1,1\}}$ は対応する有限平坦群スキームが通常である点全体となるので，以下では $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ と書くことにする．有限体上の 2 次元ベクトル空間の構造を持つ有限平坦群スキームが通常であるとは，エタール群スキームの乗法的群スキームによる拡大になっていることである．$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ の連結成分は次のようになる．

命題 3.1. $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}} \neq \emptyset$ とする．このとき，$V_{\mathbb{F}} \sim \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ となる不分岐指標 χ_1, χ_2 が存在しなければ，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ は 1 点である．もしそのような不分岐指標 χ_1, χ_2 が存在するならば，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ は次のようになる．

1. $\chi_1 \neq \chi_2$ ならば，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ は 2 点になる．

2. $\chi_1 = \chi_2$ ならば，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$ になる．

証明の概略. $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$ の点は，エタールな加群の乗法的な加群による拡大になるので，Galois 表現のどの 1 次元部分空間が乗法的な群スキームから来ているかを決めることで定まることがわかる．このことから主張が示される．□

以下では

$$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord}} = \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}} \setminus \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}$$

とおいて，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結になることを示す．$\mathbb{F}$ の有限次拡大体 $\mathbb{F}'$ に対して，$V_{\mathbb{F}'}=V_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'$ とおくと

$$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}'},0}=\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}}\operatorname{Spec}\mathbb{F}'$$

となるので，$\mathbb{F}$ をその有限次拡大に取り替えてから $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結であることを示せばよい．よって $\mathbb{F}_{q^2}\subset\mathbb{F}$ と仮定してよい．

埋め込み $k\hookrightarrow\mathbb{F}$ を固定する．同型

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}&\cong k((u))\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}\\ &\xrightarrow{\sim}\prod_{\sigma\in\operatorname{Gal}(k/\mathbb{F}_p)}\mathbb{F}((u))\ ;\ \Big(\sum a_iu^i\Big)\otimes b\mapsto\Big(\sum\sigma(a_i)bu^i\Big)_{\sigma}\end{aligned}$$

を考え，$\epsilon_\sigma\in k((u))\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}$ を σ に対応する冪等元とする．$\sigma_{i+1}=\sigma_i\circ\phi^{-1}$ となるような $\sigma_1,\cdots,\sigma_n\in\operatorname{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ をとる．ここで ϕ は p 乗 Frobenius として考えており，また $\sigma_{n+i}=\sigma_i$ とみなしている．以下でもしばしば，n を法として添え字を考える．すると $\phi(\epsilon_{\sigma_i})=\epsilon_{\sigma_{i+1}}$ となるので，$\phi:M_{\mathbb{F}}\to M_{\mathbb{F}}$ は $\phi:\epsilon_{\sigma_i}M_{\mathbb{F}}\to\epsilon_{\sigma_{i+1}}M_{\mathbb{F}}$ を定める．$(A_i)_{1\le i\le n}\in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ に対し，$\phi\begin{pmatrix}e_1^i\\ e_2^i\end{pmatrix}=A_i\begin{pmatrix}e_1^{i+1}\\ e_2^{i+1}\end{pmatrix}$ となるような $\epsilon_{\sigma_i}M_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}((u))$ 上の基底 $\{e_1^i,e_2^i\}$ があるとき

$$M_{\mathbb{F}}\sim(A_1,A_2,\ldots,A_n)=(A_i)_i$$

と書くことにする．部分格子 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}\subset M_{\mathbb{F}}$ に対しても同様の記法を使うことにする．この節で部分格子といえば，$\mathfrak{S}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}$ 加群になっているものを指すことにする．

部分格子 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}\subset M_{\mathbb{F}}$ とその基底 $\{e_1^i,e_2^i\}_{1\le i\le n}$ と

$$B=(B_i)_{1\le i\le n}\in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$$

に対して，$\left\langle B_i\begin{pmatrix}e_1^i\\ e_2^i\end{pmatrix}\right\rangle$ の成分を基底とする加群を $B\cdot\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ で表す．$B\cdot\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ は $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ の基底の選び方によっていることに注意.

レベル m の基本指標を

$$\omega_m:I_K\to\overline{k}^{\times};\ g\mapsto\frac{g(\sqrt[p^m-1]{\pi})}{\sqrt[p^m-1]{\pi}}\bmod m_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$$

で定める．

$V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約である時の $M_{\mathbb{F}}$ の構造は次のようになる．

補題 3.2. $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約であるとする．$\mathbb{F}'$ が $\mathbb{F}$ の 2 次拡大ならば，ある $\alpha_i\in(\mathbb{F}')^{\times}$ と $(q+1)\nmid s$ となるようなある正の整数 s に対して

$$M_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'\sim\left(\begin{pmatrix}0&\alpha_1\\ \alpha_1u^s&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_2&0\\ 0&\alpha_2\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_n&0\\ 0&\alpha_n\end{pmatrix}\right)$$

となる．

証明の概略. q 乗 Frobenius の G_K への持ちあげを一つとって，その $V_{\mathbb{F}}$ への作用に注目することで，$(q+1)\nmid s$ となるような，ある正の整数 s に対して

$$V_{\mathbb{F}}|_{I_K} \sim \omega_{2n}^{s} \oplus \omega_{2n}^{qs}$$

となることが示される．これを用いて $V_{\mathbb{F}}(-1)$ の構造を決定し，圏同値を与える関手で ϕ 加群側に移ることで，補題が示される． $\square$

$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の点は Kisin 加群を用いて次のように記述される．

補題 3.3. $\mathbb{F}'$ を $\mathbb{F}$ の有限次拡大体とすると，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ の元は，以下の条件をみたすような階数 2 の自由 $k[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}'$ 部分加群 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}\subset M_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'$ と自然に対応する．

1. $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$ は ϕ の作用で安定である．
2. $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$ の $k[[u]]\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}'$ 上のある基底と，各 $\sigma\in\mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ に対して，射

$$\phi : \epsilon_{\sigma}\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'} \to \epsilon_{\sigma\circ\phi^{-1}}\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$$

の行列式はある $\alpha\in\mathbb{F}'[[u]]^{\times}$ に対して αu^{e} となる．

証明の概略. この場合，p 進 Hodge 型 $\mathbf{v}$ の条件は，$(1\otimes\phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'})\big)/u^e\mathrm{M}_{\mathbb{F}'}$ が $k\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}$ 上階数 e の自由加群であるという条件になる．この条件と，Kisin 加群の条件

$$u^e\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}\subset(1\otimes\phi)\big(\phi^*(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'})\big)\subset\mathrm{M}_{\mathbb{F}'}$$

をあわせると補題の条件が得られる． $\square$

$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結であることは，任意に取った 2 点をいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結ぶことによって示される．$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ 上の 2 点を $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結ぶ際には次の補題を用いる．

補題 3.4. $x_1,x_2\in\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ をとり，それぞれに対応する $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}}$ の対象 $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}},\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}}$ とする．$M_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ のある冪零元 $N=(N_i)_{1\le i\le n}$ に対して $\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}}=(1+N)\cdot\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ となるとする．$A=(A_i)_{1\le i\le n}$ を $GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ の元で $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}\sim A$ となるようなものとする．もし全ての i に対し $\phi(N_i)A_iN_{i+1}\in M_2\big(\mathbb{F}[[u]]\big)$ となるならば，射 $\mathbb{P}^1\to\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ で，0 を x_1 に送り，1 を x_2 に送るものが存在する．

証明の概略. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の点の $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ の変数 t による媒介変数表示を

$$t\mapsto(1+tN)\cdot\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$$

によって与える．条件 $\phi(N_i)A_iN_{i+1}\in M_2\big(\mathbb{F}[[u]]\big)$ により，この媒介変数表示が $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ からの射を与えることがわかる．$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は $\mathbb{F}$ 上固有なので，この射は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ 上に延びる． $\square$

定理 3.5. $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は連結である．

証明の概略. $n=1$ の場合は [Kis], $n\geq 2$ の場合は [Ima] を参照. また $n\geq 2$ で $V_{\mathbb{F}}$ が自明表現の場合は [Gee] で証明されており, 保型性の持ち上げ定理への応用上は $V_{\mathbb{F}}$ が自明表現の場合で十分である. ここでは $n\geq 2$ で $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約である場合の証明の概略を説明する.

$\mathbb{F}$ の有限次拡大体 $\mathbb{F}'$ と $x_1,x_2\in\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ をとり, それぞれに対応する $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}'}$ の対象を $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}'},\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}'}$ とする. x_1 と x_2 が同じ連結成分の点であることを示せばよい. $V_{\mathbb{F}}$ を $V_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'$ で置き換えることによって $\mathbb{F}=\mathbb{F}'$ としてよい. $e<p-1$ の時は [Ray, Theorem 3.3.3] より $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ は 1 点なので, $e\geq p-1$ としてよい.

まず, 補題 3.2 を用いることによって, $s_i+t_i=e$ を満たすような $0\leq s_i,t_i\leq e$ と $\alpha_i\in\mathbb{F}^\times$ に対して

$$M_{\mathbb{F}}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}'\sim\left(\alpha_1\begin{pmatrix}0&u^{s_1}\\u^{t_1}&0\end{pmatrix},\alpha_2\begin{pmatrix}u^{s_2}&0\\0&u^{t_2}\end{pmatrix},\dots,\alpha_n\begin{pmatrix}u^{s_n}&0\\0&u^{t_n}\end{pmatrix}\right)$$

となるような $M_{\mathbb{F}}$ の基底を見つけることができる. ただし, ここで必要なら $\mathbb{F}$ を 2 次拡大で取り替える. この基底によって定まる部分格子を $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ とおく. $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ は $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ の点に対応している.

以下では, $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ がいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結べることを示す. $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}}$ についても同様に示される.

岩澤分解と行列式の条件を用いて, $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}=B\cdot\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ となる $B=(B_i)_{1\leq i\leq n}\in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ で $B_i=\begin{pmatrix}u^{-a_i}&v_i\\0&u^{a_i}\end{pmatrix}$ の形のものが取れる. ただし $a_i\in\mathbb{Z}$, $v_i\in\mathbb{F}((u))$ である. $r_i=v_u(v_i)$ とおく. 計算すると

$$\begin{aligned}\phi(B_1)\begin{pmatrix}0&u^{s_1}\\u^{t_1}&0\end{pmatrix}B_2^{-1}&=\begin{pmatrix}\phi(v_1)u^{t_1+a_2}&u^{s_1-pa_1-a_2}-\phi(v_1)v_2u^{t_1}\\u^{t_1+pa_1+a_2}&-v_2u^{t_1+pa_1}\end{pmatrix},\\ \phi(B_i)\begin{pmatrix}u^{s_i}&0\\0&u^{t_i}\end{pmatrix}B_{i+1}^{-1}&=\begin{pmatrix}u^{s_i-pa_i+a_{i+1}}&\phi(v_i)u^{t_i-a_{i+1}}-v_{i+1}u^{s_i-pa_i}\\0&u^{t_i+pa_i-a_{i+1}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. ただし $2\leq i\leq n$. 部分格子 $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ は ϕ の作用で安定なので, 右辺の行列の成分は全て $\mathbb{F}[[u]]$ に入る.

まず $t_1+pa_1+a_2\leq e$ となる場合を考える. このときは

$$\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}=\left(\begin{pmatrix}u^{-a_i}&0\\0&u^{a_i}\end{pmatrix}\right)_i\cdot\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$$

とおくと, $\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ は ϕ の作用で安定となり, $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ の点を定める. すると

$$\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}=\left(\begin{pmatrix}1&v_iu^{-a_i}\\0&1\end{pmatrix}\right)_i\cdot\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$$

となるので，$\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ が $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結べることが，補題 3.4 からわかる．さらに $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ がいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結べることも，比較的容易にわかる．

あとは，$t_1 + pa_1 + a_2 > e$ となる場合を，$t_1 + pa_1 + a_2 \leq e$ となる場合に帰着すればよい．次のような操作を考える．

$B \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ の ϕ 安定性を保ったまま，ある i に関して，
a_i を $a_i - 1$ に，v_i を uv_i に取り替える．

この操作を行ったあとの点は，操作を行う前の点と $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結べることが補題 3.4 からわかる．よってこの操作を行った後の $B \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ について主張を示せばよい．

これらの操作を続けることができれば，$t_1 + pa_1 + a_2 \leq e$ となる場合に帰着できることがわかる．よって全ての i について，上記の操作ができないようになって，かつ $t_1 + pa_1 + a_2 > e$ であると仮定する．この仮定から，初等的な議論によって，B の可能性を絞り込み，矛盾を導くことができる．これによって証明が完了する． □

系 3.6. *E を F の有限次拡大体とし，$x_1, x_2 \in (\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{v}})(E)$ とする．もし x_1 と x_2 が $\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{v}}$ のある一つの既約成分上にあるならば，対応する G_K の E 上の表現 V_{x_1}, V_{x_2} はどちらも通常であるか，どちらも通常でないか，のいずれかである．さらに次の二つの場合には逆が成り立つ．*

1. *V_{x_1} と V_{x_2} がどちらも通常でない．*
2. *V_{x_1} と V_{x_2} がどちらも通常であり，$L_1 \subset V_{x_1}$ と $L_2 \subset V_{x_2}$ を I_K が円分指標で作用するような 1 次元 E 部分空間とすると，G_K の L_1, L_2 への作用は π_E を法として還元すると等しくなるような $\mathcal{O}_K^\times$ 値指標となる．*

証明の概略．系 2.5，命題 3.1，定理 3.5 から従う． □

4 ℓ 進体の Galois 表現の変形環

この節では，Galois 群を考える局所体の剰余体の標数が p でない場合の普遍局所変形環の性質について述べる．この節の内容は，前節までの有限平坦群スキームのモジュライの理論を使わない話であり，代わりに表現空間の中の 1 次元部分空間のモジュライを使う．

$\ell \neq p$ を素数とし，L を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体とする．L の代数的閉包 $\overline{L}$ を固定する．$G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ とし，G_L の惰性部分群を I_L と書く．

$\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体とし，$V_{\mathbb{F}}$ を $\mathbb{F}$ 上の 2 次元連続 G_L 表現とする．$V_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 上の基底 $\beta_{\mathbb{F}}$ を固定しておく．さらに次の二つを仮定する

1. $\det V_{\mathbb{F}}$ は G_L の p 進円分指標 χ を p を法としてみたものと等しい．
2. $V_{\mathbb{F}}(-1)^{G_L} \neq \{0\}$ となる．

$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を以前と同様に定義し，$D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の充満部分圏 $D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象全体を $D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ の対象 (V_A, ψ, β_A) のうち $\det_A V_A = \chi$ となるもの全体として定義する．$D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$，$D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は $\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上に延長しておく．$D^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現され，$D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で副表現される．

$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ 上の亜群 $L^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を次のように定義する．$\mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ の対象 (A, I) に対して，$L^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A, I)$ の対象を $D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(A, I)$ の対象 V_A と G_L が χ で作用するような階数 1 の射影的部分 A 加群 $L_A \subset V_A$ であって V_A/L_A が A 上射影的になるようなものの組 (V_A, L_A) 全体として定める．

自然な射 $|L^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}| \to |D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}|$ は射影的な射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathcal{L}^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \operatorname{Spec} R^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ によって表現されることがわかる．

E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする．連続な環の射 $\xi : R^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathcal{O}_E$ に対して，誘導される $D^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}(\mathcal{O}_E)$ の対象を $V_{\mathcal{O}_E}$ とおき，$V_\xi = V_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ とおくことにする．このとき，モジュライ $\mathcal{L}^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の性質を調べることによって次の命題が示せる．

命題 4.1. $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : \mathcal{L}^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \operatorname{Spec} R^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ のスキーム論的像を $\operatorname{Spec} R^{\chi,1,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $R^{\chi,1,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ は 4 次元の整域で，$R^{\chi,1,\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ は $W(\mathbb{F})$ 上形式的に滑らかである．
2. $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 E に対して，連続な環の射 $\xi : R^{\chi,\square}_{V_{\mathbb{F}}} \to \mathcal{O}_E$ が $R^{\chi,1,\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ を経由することと V_ξ が E の $E(1)$ による拡大になることは同値である．

命題 4.1 から次が容易に示せる．

系 4.2. $\mathcal{O}$ を $W(\mathbb{F})[1/p]$ の有限次拡大体の整数環とし，$\gamma : G_L \to \mathcal{O}^\times$ を連続不分岐指標とする．$R^{\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}} = R^{\square}_{V_{\mathbb{F}}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}$ とすると，$R^{\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}}$ の商 $R^{\chi\gamma,\gamma,\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}}$ で以下をみたすものが存在する．

1. $R^{\chi\gamma,\gamma,\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}}$ は 4 次元整域で，$R^{\chi\gamma,\gamma,\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}}[1/p]$ は $\mathcal{O}$ 上形式的に滑らかである．
2. $\mathcal{O}[1/p]$ の有限次拡大体 E に対して，連続な環の射 $\xi : R^{\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}} \to E$ が $R^{\chi\gamma,\gamma,\square}_{V_{\mathbb{F}},\mathcal{O}}$ を経由することと V_ξ が γ の $\gamma(1)$ によるに拡大になることは同値である．ただし ξ に対し V_ξ は，先程と同様に定めている．

付録　圏上の亜群

この付録の目的は，Galois 表現の変形で必要になる圏上の亜群に関する用語をまとめることである．

圏 $\mathcal{E}$ に対して，$\mathcal{E}$ の対象全体を $\mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ で表し，$\mathcal{E}$ の射全体を $\mathrm{Mor}(\mathcal{E})$ で表す．$\mathcal{E}$ 上の圏とは，圏 $\mathcal{F}$ と関手 $\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ の組のことである．$T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ に対して，$\Theta(\xi) = T$ となる ξ 全体を対象とし，$\Theta(\alpha) = \mathrm{id}_T$ となる α 全体を射とする圏を $\mathcal{F}$ の部分圏を $\mathcal{F}(T)$ と表す．

$\mathcal{E}$ 上の圏 $\mathcal{F}$ は，$T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ に対し圏 $\mathcal{F}(T)$ を定め，$f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{E})$ に対し $\Theta(\alpha) = f$ となる α 全体を定めることで定義される．

定義 4.3. $\alpha : \eta \to \xi$ を $\mathcal{F}$ の射とし，$T = \Theta(\eta)$，$S = \Theta(\xi)$，$f = \Theta(\alpha)$ とおく．このとき α が余カルテシアンであるとは，任意の $\xi' \in \mathrm{Ob}\big(\mathcal{F}(S)\big)$ と $\Theta(u) = f$ となるような任意の射 $u : \eta \to \xi'$ に対して $u = \bar{u} \circ \alpha$ となるような $\mathcal{F}(S)$ の射 $\bar{u} : \xi \to \xi'$ が一意的に存在することをいう．

定義 4.4. 次の二つの条件が成り立つとき $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}$ 上の亜群であるという．

1. $\mathcal{F}$ の全ての射は余カルテシアンである．
2. $\mathcal{E}$ の任意の射 $f : T \to S$ と $\mathcal{F}$ の任意の対象 η に対して，$\Theta(\alpha) = f$ となる $\mathcal{F}$ の射 $\alpha : \eta \to \xi$ が存在する．

$\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ と $\Theta' : \mathcal{F}' \to \mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上の圏とする．$\mathcal{E}$ 上の圏の間の射 $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ とは $\Theta' \circ \Psi = \Theta$ となるような関手のことである．

$\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$，$\Theta' : \mathcal{F}' \to \mathcal{E}$，$\Theta'' : \mathcal{F}'' \to \mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上の圏とし，$\mathcal{E}$ 上の圏の間の射 $\Phi' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$，$\Phi'' : \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}$ が与えられているとする．このとき 2 ファイバー積 $\mathcal{F}' \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}''$ を以下のような圏として定義する．

- $\mathcal{F}' \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}''$ の対象とは $\xi' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F}')$，$\xi'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F}'')$ と $\Theta(\alpha)$ が恒等射になるような同型 $\alpha : \Phi'(\xi') \xrightarrow{\sim} \Phi''(\xi'')$ の組 (ξ', ξ'', α) のことである．
- 射 $(\xi', \xi'', \alpha) \to (\eta', \eta'', \beta)$ とは $\beta \circ \Phi'(\gamma') = \Phi''(\gamma'') \circ \alpha$ となるような $\gamma' : \xi' \to \eta'$ と $\gamma'' : \xi'' \to \eta''$ の組のことである．

$\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$，$\mathcal{F}''$ が $\mathcal{E}$ 上の亜群ならば，$\mathcal{F}' \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}''$ も $\mathcal{E}$ 上の亜群となる．

$\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上の亜群とし，η を $\mathcal{F}$ の対象とする．η に付随する圏 $\tilde{\eta}$ を以下のように定義する．

- $\tilde{\eta}$ の対象とは，射 $\alpha : \eta \to \xi$ のことである．
- 射 $(\eta \xrightarrow{\alpha} \xi) \to (\eta \xrightarrow{\alpha'} \xi')$ とは $\mathcal{F}$ における射 $\beta : \xi \to \xi'$ であって $\alpha' = \beta \circ \alpha$ となるもののことである．

$\eta \to \xi$ を $\Theta(\xi)$ に送ることによって関手 $\tilde{\eta} \to \mathcal{E}$ が定まり，$\tilde{\eta}$ は $\mathcal{E}$ 上の亜群となる．さらに，$\eta \to \xi$ を ξ に送ることによって定まる関手 $\tilde{\eta} \to \mathcal{F}$ は $\mathcal{E}$ 上の亜群の射となる．η に付随する圏を，単に η と書くこともある．

定義 4.5. 亜群 $\Theta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ が表現可能であるとは，ある $\mathcal{F}$ の対象 η が存在して自然な関手 $\tilde{\eta} \to \mathcal{F}$ が圏同値となることである．

$\mathcal{E}$ 上の亜群の射 $\Phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ と $\mathcal{F}$ の任意の対象 η に対して，2 ファイバー積 $\tilde{\eta} \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}'$ のことを $\mathcal{F}_\eta$ と書く．

定義 4.6. $\Phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ 上の亜群の射とする．このとき，Φ が相対的に副表現可能であるとは，$\mathcal{F}$ の任意の対象 η に対して，$\mathcal{F}_\eta$ が表現可能であることである．

$\mathcal{E}$ の全ての対象 T に対して，$\mathcal{F}(T)$ の対象の同型類全体が集合になると仮定する．このとき，T を $\mathcal{F}(T)$ の対象の同型類のなす集合に送ることによって定まる集合値関手を $|\mathcal{F}|$ と書く．

定義 4.7. $\Phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ 上の亜群の射とする．$\mathcal{E}$ の全ての対象 T に対して，$\mathcal{F}(T)$，$\mathcal{F}'(T)$ の対象の同型類全体が集合になると仮定する．このとき，Φ が形式的に滑らかであるとは，誘導される関手 $|\mathcal{F}'|$ が形式的に滑らかであること，つまり，$\mathcal{E}$ の任意の射 $T \to S$ に対して，写像

$$|\mathcal{F}'|(T) \to |\mathcal{F}'|(S) \times_{|\mathcal{F}|(S)} |\mathcal{F}|(T)$$

が全射となることである．

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ 上の亜群とし，$\mathcal{E}$ は圏 $\mathcal{E}'$ の充満部分圏であるとする．$\mathcal{F}$ の $\mathcal{E}'$ への延長とは，$\mathcal{E}'$ 上の亜群 $\mathcal{F}'$ への充満忠実な埋め込み $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ で，$\mathcal{E}$ の任意の対象 T に対して，誘導される射 $\mathcal{F}(T) \to \mathcal{F}'(T)$ が圏同値を与えるようなものである．

$\mathcal{O}$ を剰余体が $\mathbb{F}$ である完備局所環とする．$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ を剰余体が $\mathbb{F}$ である有限局所 Artin $\mathcal{O}$ 代数の圏とし，$\widehat{\mathfrak{AR}}_{\mathcal{O}}$ を剰余体が $\mathbb{F}$ である完備局所 $\mathcal{O}$ 代数の圏とする．$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ 上の亜群 $\mathcal{F}$ を以下のようにして $\widehat{\mathfrak{AR}}_{\mathcal{O}}$ 上の亜群 $\widehat{\mathcal{F}}$ に延長する．R を $\widehat{\mathfrak{AR}}_{\mathcal{O}}$ の対象とする．$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^R \subset \mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ を $i \geq 1$ に対する $R/\mathfrak{m}_R^i$ を対象とし自然な射影を射とする部分圏とする．圏 $\widehat{\mathcal{F}}(R)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}}(\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^R, \mathcal{F})$ として定める．$\widehat{\mathfrak{AR}}_{\mathcal{O}}$ における射 $h : (R, \mathfrak{m}_R) \to (R', \mathfrak{m}_{R'})$ に対して，$R/\mathfrak{m}_R^i$ を $R'/\mathfrak{m}_{R'}^i$ に送ることによって定まる関手 $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^h : \mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^R \to \mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^{R'}$ を考える．このとき，h の上にある $\widehat{\mathcal{F}}$ における射

$$(\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^R \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}) \to (\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^{R'} \xrightarrow{\eta'} \mathcal{F})$$

とは，$\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ に値を持つ $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^R$ 上の関手の間の h から誘導される自然な射 $\mathrm{id} \to \mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^h$ の上にある自然変換 $\eta \to \eta' \circ \mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}^h$ のことである．

定義 4.8. $\mathcal{F}$ を $\mathfrak{AR}_{\mathcal{O}}$ 上の亜群とする．$\widehat{\mathcal{F}}$ が表現可能であるとき，$\mathcal{F}$ は副表現可能であるという．

定義 4.9. $\Phi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ 上の亜群の射とする．誘導される関手 $\widehat{\Phi} : \widehat{\mathcal{F}}' \to \widehat{\mathcal{F}}$ が副表現可能であるとき，Φ は相対的に副表現可能であるという．

参考文献

[BL] A. Beauville, Y. Laszlo, *Un lemma de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 3, 335–340.

[Br1] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), no. 2, 489–549.

[Br2] C. Breuil, *Integral p-adic Hodge Theory*, Algebraic Geometry 2000, Azumino, Adv. Stud. in Pure Math. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp.51-80.

[CF] P. Colmez, J.-M. Fontaine, *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Invent. Math. **140** (2000), no. 1, 1–43.

[deJ] A.J. de Jong, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **82** (1995), 5–96.

[Gee] T. Gee, *A modularity lifting theorem for weight two Hilbert modular forms*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 5, 805–811.

[Ima] N. Imai, *On the connected components of moduli spaces of finite flat models*, arXiv: 0801.1948, to appear in Amer. J. of Math.

[Kis] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, to appear in Ann. of Math.

[PR] G. Pappas, M. Rapoport, *Local models in the ramified case. I. The EL-case*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 1, 107–145.

[Ray] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280.

[Sen] S. Sen, *The analytic variation of p-adic Hodge structure*, Ann. of Math. **127** (1988), no. 2, 647–661.

[Tat] J. Tate, *p-divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Springer-Verlag, 1967, pp. 158–183.

[Ya] 山下剛, Kisin の修正 Taylor-Wiles 系, 本報告集.