2017 年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」　山下担当回レポート問題

以下の$\boxed{1}$～$\boxed{6}$を出来る限り多く答えよ．ただし，「真に驚くべき証明を見つけたがそれを書くには余白が狭すぎる」という解答 (あるいはそれに類するもの) は認めない.

$\boxed{1}$ 1. Fermat の最終定理の主張を述べよ.
2. 志村・谷山予想の主張を述べよ.
3. Frey 曲線について Fermat の最終定理との関係を踏まえて説明せよ.

$\boxed{2}$ 楕円曲線の加法を利用して

$$x^3+y^3=9$$

のいくつかの有理数解を以下の手順に従って求めよ (整数解ではなく有理数解であることに注意):
1. $(x,y)=(2,1)$ は有理数解であることを確かめよ.
2. $x^3+y^3=9$ で定義される図形 E の $(x,y)=(2,1)$ での接線 L_1 の式を求めよ.
3. L_1 と E の, 点 $P:(x,y)=(2,1)$ 以外の交点 Q を求めよ.
4. Q の x 座標と y 座標を入れ替えた点を Q' とする時, P と Q' を通る直線 L_2 の式を求めよ.
5. L_2 と E の, 点 P,Q' 以外の交点 R を求めよ.
6. 興味があれば, $x^3+y^3=9$ の有理数解を P,Q,Q',R (および P と R に対して x 座標と y 座標をそれぞれ入れ替えた P', R') の他にも求めよ.

$\boxed{3}$ 保型形式を用いて不思議な等式

$$(*):\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{504}$$

を以下の手順に従って示せ:
1.

$$G_6(z):=\sum_{m,n:\text{整数},(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^6}$$

と置く. $G_6(z)$ は $ad-bc=1$ となる整数 a,b,c,d に対して保型性

$$G_6\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^6G_6\left(z\right)$$

を満たすことを示せ.
2. 余接関数 $\cot(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ の無限和展開

$$\pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n:\text{整数}\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

及び $\zeta(k):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ に対して

$$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

であることを用いて $\frac{1}{2\zeta(6)}G_6(z)$ の Fourier 展開

$$\frac{1}{2\zeta(6)}G_6(z)=1-504\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d:n\text{ の約数}}d^5\right)e^{2\pi i n z}$$

を示せ.
3. 上の 1 と 2 を使って式 $(*)$ を示せ.

裏面もあることに注意せよ.

$\boxed{4}$ 楕円曲線

$$y^2 - y = x^3 - x^2$$

と (重さ 2 レベル $\Gamma_0(11)$ の尖点的) 保型形式

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2$$

は互いに (志村・谷山予想の意味で) 対応していることが知られている．そのことを以下の手順に従って部分的に確かめよ:

1. 素数 p に対して, p 個の元からなる集合 $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ (あるいは, その各元を p で割ったが余りが同じになるような整数で置き換えたもの) に対して「p で割った余り」(あるいは, それを p で割ったが余りが同じになるような整数で置き換えたもの) を考えることで足し算・引き算・掛け算・(非零による) 割り算の構造を入れたものを位数 p の有限体と呼び $\mathbb{F}_p$ と書く．式 $y^2 - y = x^3 - x^2$ の $\mathbb{F}_p$ での解 $(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ の個数を a_p と置く．$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ の時, $x, y = 0, \ldots, p-1$(あるいは, それを p で割ったが余りが同じになるような整数で置き換えたもの) に対して $x^3 - x^2$ および $y^2 - y$ を p で割った余り (あるいは, それを p で割ったが余りが同じになるような整数で置き換えたもの) の表を作って a_p を計算し, $b_p := p - a_p$ を $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ に対して求めよ．
2. $q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ と置くとき, 左辺の無限積を (地道に) 展開することで

$$b_p = c_p$$

が $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ に対して成り立つことを確かめよ (実はすべての素数 p に対して $b_p = c_p$ が成り立つ).

$\boxed{5}$ あなたの好きな定理を述べ, その理由もあわせて書け (定理や理由は今回の講義内容と必ずしも関係しなくてもよい).

$\boxed{6}$ 講義について感想やコメントなどを書け (成績には影響しない).