2017年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」　山下担当回レポート問題の講評と解説

$\boxed{\text{講評}}$:

テーマについて: 講義中にも言及したが, Wiles による Fermat の最終定理の証明はその後改良され多くの代数幾何的議論が可換環論に置き換わり不要になった (配布資料 6.1 節参照). そのことにより, 現在では学部生でも理解できるレベルになっていると思うために今回のテーマを選んだ.

講義について: 大講義室がほぼ満席で思った以上に人が来たという印象だった. 意欲的な高校生や大学院生・ポスドクなども来ていた. 講義中及び講義末の質疑応答では質問がなかったため学生の理解度を十分把握できなかった. また, 講義で使用したスライドは
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/DOCUMENTS/Kagoshima2012small.pdf
に置いてある.

レポートについて: 問題は (1) 高校生にも解ける (2) 具体的な (3) 楽しさ・不思議さが伝わる問題を出すことにした. レポート提出 25 名 (1 回生 10 名, 2 回生 9 名, 3 回生 3 名, 4 回生以上 3 名).
受講者の多さに対してレポートを提出した人数は少ないと感じた.
配点 : $\boxed{1}$: 各 2 点, $\boxed{2}$: 1〜5 は各 2 点, 6 は 4 点, $\boxed{3}$: 各 5 点, $\boxed{4}$: 各 5 点, $\boxed{5}$: 5 点の 50 点満点.
評価 : A(優) : 41〜50 点, B(良) : 26〜40 点, C(可) : 1〜25 点, D(不可) : 0 点.
集計 : A : 2 名, B : 11 名, C : 12 名. 高校生向けの問題として楽しんでもらうことを趣旨として作成したので簡単すぎるだろうと思っていたが, 満点が 2 名というのは難易度はちょうどよいぐらいだったのだろうか.

$\boxed{1}$: 小問 2 で楕円曲線が有理数体上定義されているという条件が書かれていない解答も散見された. 小問 2 や小問 3 で「楕円曲線」を「楕円関数」と混同している人が少しいた. また, 小問 3 で志村・谷山予想に言及していない解答や論理的関係が理解できていない解答もあった.

$\boxed{2}$: 小問 1〜4 はよく出来ていたが小問 5 が意外に計算間違いしている人が多かった. 小問 6 を解答した人は多くなかった. 非自明な有理点がどんどん生まれる様 を手を動かして楽しんで欲しい.

$\boxed{3}$: 小問 2 と小問 3 を解答した人が意外に少なかった.

$\boxed{4}$: 小問 1 はそこそこ出来ていた. 小問 2 できちんと計算したのか疑わしいのもちらほらいた. 実際に手を動かして 数値的「一致」を見て不思議さ を味わって欲しい.

$\boxed{5}$: 興味深く読ませてもらった. 定理の主張がおかしい場合は減点したが, 「理由」の中身は採点対象にはしていない.

$\boxed{6}$: 理解できるようになりたい, や講義に刺激を受けた, という人が多かった. スライドが (英語であるという理由も含め) 読みにくかったという人も多かった. レポート問題 $\boxed{4}$ での数値的「一致」に感動したという人もいた.

総評 : 提出した人はよく手を動かして計算したと思う. 手を動かして計算した後, 一度立ち止まって「一体何が起こっているのだろう」と 落ち着いて考える時間をもつ のが大事だと思う. この講義で数学に, あるいは数論に興味をもった人 (さらには専門にしようと思う人) が 1 人でも生まれたらこれに勝る喜びはない.

(次ページに続く.)

$\boxed{\text{解説}}$：

$\boxed{1}$ 1. n が 3 以上の自然数の時, $x^n + y^n = z^n$ を満たす整数 x, y, z で $xyz \neq 0$ となるものは存在しない.

2. $\mathbb{Q}$ 上のすべての楕円曲線に対して対応する保型形式が存在する (ここで「対応する」の意味では, 「両者の L 関数が一致する」とか「楕円曲線にモジュラー曲線から全射が存在する」等の同値な定式化がある).

3. 素数 $p > 2$ に対して $x^p + y^p = z^p$ を満たす非自明な整数解 $(x, y, z) = (a, b, c)$ で共通因子を持たないものが存在したとする. この時に考える (仮想的な) 準安定な楕円曲線 $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$ を Frey 曲線という. (準安定な楕円曲線に対する) 志村・谷山予想及び Ribet のレベル下げ定理を使うと, Frey 曲線の p 等分点の Galois 表現には重さ 2 レベル $\Gamma_0(2)$ の尖点的保型形式が対応する. そのような尖点的保型形式は存在しないので, Frey 曲線も存在しないことになる. このことから (準安定な楕円曲線に対する) 志村・谷山予想及び Ribet のレベル下げ定理から Fermat の最終定理が従うことが分かる.

$\boxed{2}$ 1. $2^3 + 1^3 = 8 + 1 = 9$.

2. $x^3 + y^3 = 9$ より $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$ なので $(x, y) = (2, 1)$ での傾きは -4. 求める接線 L_1 の式は $y = -4(x - 2) + 1 = y = -4x + 9$.

3. $y = -4x + 9$ を $x^3 + y^3 = 9$ に代入して整理すると $7x^3 - 48x^2 + 108x - 80 = 0$. ($x = 2$ で重解を持つことに注意して) これを因数分解すると $(x - 2)^2(7x - 20) = 0$ なので, 点 Q は $(x, y) = (\frac{20}{7}, -\frac{17}{7})$.

4. 点 P と Q' はそれぞれ $(2, 1)$, $\left(-\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$ なので, 点 P と Q' を通る直線 L_2 の式は $y = \frac{\frac{20}{7} - 1}{-\frac{17}{7} - 2}(x - 2) + 1 = -\frac{13}{31}x + \frac{57}{31}$.

5. $y = -\frac{13}{31}x + \frac{57}{31}$ を $x^3 + y^3 = 9$ に代入して整理すると $3066x^3 + 3211x^2 - 14079x - 9214 = 0$. (解 $x = 2, -\frac{17}{7}$ を持つことに注意して) これを因数分解すると $(x - 2)(7x + 17)(438x + 271) = 0$ なので, 点 R は $(x, y) = \left(-\frac{271}{438}, \frac{919}{438}\right)$.

6. 有理点 A, B に対して A, B を通る直線 ($A = B$ の時は A での接線) と E との, A, B 以外の交点はまた有理点になる (何故だか考えてみよ). それの x 座標と y 座標を入れ替えたものが楕円曲線の加法のもとでの $A + B$ である (結合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$ が成立することを確かめてみよ). この加法のもとで $P' = -P$, $Q' = 2P := P + P (= -Q)$, $R' = 3P := P + P + P (= -R)$ であり, $4P := P + P + P + P$ 以降も計算すると, 他の有理数解

$$
\begin{aligned}
(x, y) = {} & \left(\frac{188479}{90391}, -\frac{36520}{90391}\right), \left(-\frac{152542262}{53023559}, \frac{169748279}{53023559}\right), \left(\frac{676702467503}{348671682660}, \frac{415280564497}{348671682660}\right), \\
& \left(\frac{14546930068742329}{714352239600649}, -\frac{14541760311678322}{714352239600649}\right), \\
& \left(\frac{487267171714352336560}{609623835676137297449}, \frac{124361773399009483 6481}{609623835676137297449}\right), \cdots
\end{aligned}
$$

などが得られる.

$\boxed{3}$ 1. $ad-bc=1$ となる整数 a,b,c,d に対して $G_6\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^6\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(m(az+b)+n(cz+d))^6}=(cz+d)^6\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{((am+cn)z+(bm+dn))^6}$. ここで対応 $(m,n)\mapsto(am+cn,bm+dn)=(m,n)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して $(m,n)\mapsto(m,n)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=(m,n)\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=(dm-cn,-bm+an)$ が逆対応になるので, (m,n) が $(0,0)$ 以外の整数の組を動く時 $(am+cn,bm+dn)$ も $(0,0)$ 以外の整数の組を動く. 従って, $(cz+d)^6\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{((am+cn)z+(bm+dn))^6}=(cz+d)^6\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^6}=(cz+d)^6G_6(z)$.

2. $\frac{1}{z}+\sum_{n\neq0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\pi\cot(\pi z)=\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}=\pi i\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}=-\pi i\frac{1+e^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}=-\pi i-\frac{2\pi ie^{2\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}=-\pi i-2\pi i\sum_{n\geq1}e^{2\pi inz}$ を z について 5 回微分すると $-120\sum_{n:\text{整数}}\frac{1}{(z-n)^6}=-(2\pi i)^6\sum_{n\geq1}n^5e^{2\pi inz}$, つまり $\sum_{n:\text{整数}}\frac{1}{(z-n)^6}=-\frac{8\pi^6}{15}\sum_{n\geq1}n^5e^{2\pi inz}$ を得る. これより, $\frac{1}{2\zeta(6)}G_6(z)=\frac{1}{2\zeta(6)}\Bigg(2\sum_{n\geq1}\frac{1}{(0\cdot z+n)^6}$
$+2\sum_{m\geq1}\sum_{n:\text{整数}}\frac{1}{(mz+n)^6}\Bigg)=1-\frac{1}{\zeta(6)}\frac{8\pi^6}{15}\sum_{m\geq1}\sum_{n\geq1}n^5e^{2\pi imnz}=1-\frac{945}{\pi^6}\frac{8\pi^6}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d:n\text{ の約数}}d^5\right)e^{2\pi inz}=1-504\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d:n\text{ の約数}}d^5\right)e^{2\pi inz}$.

3. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ に対して保型性を使い $z=i$ とすると $G_6\left(\frac{0\cdot i+(-1)}{1\cdot i+0}\right)=(1\cdot i+0)^6G_6(i)$. つまり $G_6(i)=-G_6(i)$. 従って $G_6(i)=0$. これより $1-504\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d:n\text{ の約数}}d^5\right)e^{-2\pi n}=0$ となる. これを書き換えると $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{504}$ を得る.

$\boxed{4}$ 1. $p=2$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0

より $\mathbb{F}_2$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ の 4 個. 従って, $a_2=4$, $b_2=2-4=-2$.

$p=3$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0
-1	$-2\equiv1$	-1	2

より $\mathbb{F}_3$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ の 4 個. 従って, $a_3=4$, $b_3=3-4=-1$.

$p=5$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0
-1	-2	-1	2
2	$4\equiv-1$	2	2
-2	$-12\equiv-2$	-2	$6\equiv1$

より $\mathbb{F}_5$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ の 4 個. 従って, $a_5=4$, $b_5=5-4=1$.

$p=7$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0
-1	-2	-1	2
2	$4\equiv -3$	2	2
-2	$-12\equiv 2$	-2	$6\equiv -1$
3	$18\equiv -3$	3	$6\equiv -1$
-3	$-36\equiv -1$	-3	$12\equiv -2$

より $\mathbb{F}_7$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(-1,-3),(-2,-1),(-2,2),(-3,-2),(-3,3)$ の 9 個. 従って, $a_7=9$, $b_7=7-9=-2$.

$p=11$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0
-1	-2	-1	2
2	4	2	2
-2	$-12\equiv -1$	-2	$6\equiv -5$
3	$18\equiv -4$	3	$6\equiv -5$
-3	$-36\equiv -3$	-3	$12\equiv 1$
4	$48\equiv 4$	4	$12\equiv 1$
-4	$-80\equiv -3$	-4	$20\equiv -2$
5	$100\equiv 1$	5	$20\equiv -2$
-5	$-150\equiv 4$	-5	$30\equiv -3$

より $\mathbb{F}_{11}$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(-1,-4),(-1,5),(-3,-5),(-4,-5),(5,-3),(5,4)$ の 10 個. 従って, $a_{11}=10$, $b_{11}=11-10=1$.

$p=13$ の時, 表

x	x^3-x^2	y	y^2-y
0	0	0	0
1	0	1	0
-1	-2	-1	2
2	4	2	2
-2	$-12\equiv 1$	-2	6
3	$18\equiv 5$	3	6
-3	$-36\equiv 3$	-3	$12\equiv -1$
4	$48\equiv -4$	4	$12\equiv -1$
-4	$-80\equiv -2$	-4	$20\equiv -6$
5	$100\equiv -4$	5	$20\equiv -6$
-5	$-150\equiv 6$	-5	$30\equiv 4$
6	$180\equiv -2$	6	$30\equiv 4$
-6	$-252\equiv -5$	-6	$42\equiv 3$

より $\mathbb{F}_{13}$ での解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,-5),(2,6),(-3,-6),(-5,-2),(-5,3)$ の 9 個. 従って, $a_{13}=9$, $b_{13}=13-9=4$.

2. $q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2 = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^n+(q^n)^2)(1-2q^{11n}+(q^{11n})^2)$ で

q^2 の係数は, $-2q^1$ の項の寄与より $c_2=-2$.

q^3 の係数は, $-2q^2$ と $(q^1)^2$ の項の寄与より $c_2=(-2)+1=-1$.

q^5 の係数は, $-2q^4$ と $(-2q^3)(-2q^1)$ と $(-2q^2)(q^1)^2$ と $(q^2)^2$ の項の寄与より $c_5=(-2)+(-2)^2+(-2)+1=1$.

q^7 の係数は, $-2q^6$ と $(-2q^5)(-2q^1)$ と $(-2q^4)(-2q^2)$ と $(-2q^4)(q^1)^2$ と $(-2q^3)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(q^1)^2(q^2)^2$ と $(q^3)^2$ の項の寄与より $c_7=(-2)+(-2)^2+(-2)^2+(-2)+(-2)^3+1+1=-2$.

q^{11} の係数は, $-2q^{10}$ と $(-2q^9)(-2q^1)$ と $(-2q^8)(-2q^2)$ と $(-2q^8)(q^1)^2$ と $(-2q^7)(-2q^3)$ と $(-2q^7)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(-2q^6)(-2q^4)$ と $(-2q^6)(-2q^3)(-2q^1)$ と $(-2q^6)(q^2)^2$ と $(-2q^6)(-2q^2)(q^1)^2$ と $(-2q^5)(-2q^4)(-2q^1)$ と $(-2q^5)(-2q^3)(-2q^2)$ と $(-2q^5)(q^2)^2(-2q^1)$ と $(-2q^5)(-2q^3)(q^1)^2$ と $(-2q^4)(-2q^3)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(-2q^4)(q^3)^2$ と $(-2q^4)(q^2)^2(q^1)^2$ と $(-2q^2)(q^4)^2$ と $(-2q^2)(q^3)^2(q^1)^2$ と $(q^5)^2$ と $(q^4)^2(q^1)^2$ と $(q^3)^2(q^2)^2$ の項の寄与より $c_{11}=(-2)+(-2)^2+(-2)^2+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^3+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^4+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+1+1+1=1$.

q^{13} の係数は, $-2q^{12}$ と $(-2q^{11})(-2q^1)$ と $(-2q^{10})(-2q^2)$ と $(-2q^{10})(q^1)^2$ と $(-2q^9)(-2q^3)$ と $(-2q^9)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(-2q^8)(-2q^4)$ と $(-2q^8)(-2q^3)(-2q^1)$ と $(-2q^8)(-2q^2)(q^1)^2$ と $(-2q^8)(q^2)^2$ と $(-2q^7)(-2q^5)$ と $(-2q^7)(-2q^4)(-2q^1)$ と $(-2q^7)(-2q^3)(-2q^2)$ と $(-2q^7)(-2q^3)(q^1)^2$ と $(-2q^7)(q^2)^2(-2q^1)$ と $(-2q^6)(-2q^5)(-2q^1)$ と $(-2q^6)(-2q^4)(-2q^2)$ と $(-2q^6)(-2q^4)(q^1)^2$ と $(-2q^6)(-2q^3)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(-2q^6)(q^3)^2$ と $(-2q^6)(q^2)^2(q^1)^2$ と $(-2q^5)(-2q^4)(-2q^3)$ と $(-2q^5)(-2q^4)(-2q^2)(-2q^1)$ と $(-2q^5)(-2q^3)(q^2)^2$ と $(-2q^5)(-2q^3)(-2q^2)(q^1)^2$ と $(-2q^5)(q^3)^2(-2q^1)$ と $(-2q^4)(-2q^3)(q^2)^2(-2q^1)$ と $(-2q^4)(q^3)^2(-2q^2)$ と $(-2q^4)(q^3)^2(q^1)^2$ と $(-2q^3)(q^4)^2(-2q^1)$ と $(-2q^2)(q^5)^2$ と $(-2q^2)(q^4)^2(q^1)^2$ と $(q^6)^2$ と $(q^5)^2(q^1)^2$ と $(q^4)^2(q^2)^2$ と $(q^3)^2(q^2)^2(q^1)^2$ と $(-2q^1)(-2q^{11})$ の項の寄与より $c_{13}=(-2)+(-2)^2+(-2)^2+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^4+(-2)+(-2)+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+(-2)^2+(-2)+(-2)+1+1+1+1+(-2)^2=4$.

したがって, $b_2=c_2(=-2)$, $b_3=c_3(=-1)$, $b_5=c_5(=1)$, $b_7=c_7(=-2)$ $b_{11}=c_{11}(=1)$, $b_{13}=c_{13}(=4)$ が成り立っていることが確認できた.

(興味のある人は $c_{17}=c_{17}(=-2), b_{19}=c_{19}(=0), b_{23}=c_{23}(=-1), b_{29}=c_{29}(=0), b_{31}=c_{31}(=7), b_{37}=c_{37}(=3), b_{41}=c_{41}(=-8), b_{43}=c_{43}(=-6), b_{47}=c_{47}(=8), b_{53}=c_{53}(=-6), \ldots$ なども確認してみるといい.)

参考:

$c(2)=-2,\ c(3)=-1,\ c(5)=1,\ c(7)=-2,\ c(11)=1$
$c(13)=4,\ c(17)=-2,\ c(19)=0,\ c(23)=-1,\ c(29)=0,$
$c(31)=7,\ c(37)=3,\ c(41)=-8,\ c(43)=-6,\ c(47)=8,$
$c(53)=-6,\ c(59)=5,\ c(61)=12,\ c(67)=-7,\ c(71)=-3,$
$c(73)=4,\ c(79)=-10,\ c(83)=-6,\ c(89)=15,\ c(97)=-7,$
$c(101)=2,\ c(103)=-16,\ c(107)=18,\ c(109)=10,\ c(113)=9,$
$c(127)=8,\ c(131)=-18,\ c(137)=-7,\ c(139)=10,\ c(149)=-10,$
$c(151)=2,\ c(157)=-7,\ c(163)=4,\ c(167)=-12,\ c(173)=-6,$
$c(179)=-15,\ c(181)=7,\ c(191)=17,\ c(193)=4,\ c(197)=-2,$
$c(199)=0,\ c(211)=12,\ c(223)=19,\ c(227)=18,\ c(229)=15,$
$c(233)=24,\ c(239)=-30,\ c(241)=-8,\ c(251)=-23,\ c(257)=-2,$
$c(263)=14,\ c(269)=10,\ c(271)=-28,\ c(277)=-2,\ c(281)=-18,$
$c(283)=4,\ c(293)=24,\ c(307)=8,\ c(311)=12,\ c(313)=-1,$
$c(317)=13,\ c(331)=7,\ c(337)=-22,\ c(347)=28,\ c(349)=30,$
$c(353)=-21,\ c(359)=-20,\ c(367)=-17,\ c(373)=-26,\ c(379)=-5,$
$c(383)=-1,\ c(389)=-15,\ c(397)=-2,\ c(401)=2,\ c(409)=-30,$
$c(419)=20,\ c(421)=22,\ c(431)=-18,\ c(433)=-11,\ c(439)=40,$
$c(443)=-11,\ c(449)=35,\ c(457)=-12,\ c(461)=12,\ c(463)=-11,$
$c(467)=-27,\ c(479)=20,\ c(487)=23,\ c(491)=-8,\ c(499)=20,$
$c(503)=-26,\ c(509)=15,\ c(521)=-3,\ c(523)=-16,\ c(541)=-8,\ldots$