2018 年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」　山下担当回レポート問題

以下の$\boxed{1}$〜$\boxed{7}$を出来る限り多く答えよ．

$\boxed{1}$ 1. 合同ゼータ関数の定義を述べよ．

2. $\mathbb{F}_q$ 上の d 次元射影空間 $\mathbb{P}^d$ の合同ゼータ関数 $Z_{\mathbb{P}^d}(T)$ が関数等式

$$Z_{\mathbb{P}^d}(1/q^dT) = (-1)^{d+1}q^{\frac{d\chi}{2}}T^{\chi}Z_{\mathbb{P}^d}(T)$$

を満たすことを示せ．ここで $\chi := d+1$ と置いた ($\mathbb{P}^d$ の Euler 数)．

3. Weil 予想の主張の 1 つである Riemann 予想の類似の主張を述べよ．

$\boxed{2}$ p を素数とする．集合 $\mathbb{F}_p := \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ に「常に p で割った余りで考える」ことで加減乗除を定義する．$\mathbb{F}_p$ において 0 でない元による割り算が常に可能であることを示せ．

$\boxed{3}$ 1. 閉区間 $[0,1] := \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \le a \le 1\}$ から自分自身への連続関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ は常に固定点 (つまり $f(a) = a$ となる点 $0 \le a \le 1$) を持つことを示せ．

2. f が連続であるという条件を落とすと常に固定点をもつか否か (理由とともに) 答えよ．

3. f の定義域・値域が有界であるという性質が無い場合を考えてみる．f が $\mathbb{R}$ から自分自身への連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の時, 常に固定点をもつか否か (理由とともに) 答えよ．

4. f の定義域・値域が閉であるという性質が無い場合を考えてみる．f が開区間 $(0,1) := \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$ から自分自身への連続関数 $f : (0,1) \to (0,1)$ の時, 常に固定点をもつか否か (理由とともに) 答えよ．

5. 2 次元閉円盤 $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ から自分自身への連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は固定点を常に持つことを示せ．また, f の固定点がすべて孤立点と仮定した時, 固定点の個数は 1 個であることを示せ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{F}_5$ 上の楕円曲線

$$E : y^2 = x^3 - x$$

を考える (無限遠点 "$(x,y) = (\infty, \infty)$" も入っていることに注意)．

1. $E(\mathbb{F}_5)$ を求めよ．

2. $m \ge 1$ に対して $\#E(\mathbb{F}_{5^m})$ を求めよ．

3. $\mathbb{F}_{25}$ の表示の 1 つ $\mathbb{F}_{25} = \{a + b\alpha \mid a, b = 0, \pm 1, \pm 2\}$ (ここで $\alpha^2 = 2$) を用いて $E(\mathbb{F}_{25})$ を求め, $\#E(\mathbb{F}_{25})$ が 2 で求めた値と一致することを確かめよ．

4. E の合同ゼータ関数 $Z_E(T)$ は関数等式

$$Z_E(1/5T) = Z_E(T)$$

を満たすことを示せ．

5. E の合同ゼータ関数 $Z_E(T)$ は Riemann 予想の類似を満たすことを示せ．

$\boxed{5}$ q は素数 p の冪 $q = p^k$ で n は $q-1$ を割る自然数とし, $\mathbb{F}_q$ 上の一般化 Artin-Schreier 被覆 (あるいは Artin-Schreier-Kummer 曲線)

$$C : t^p - t = x^n$$

を考える (無限遠点 "$(x,t) = (\infty, \infty)$" も入っていることに注意)．$\mathbb{F}_q$ の乗法群を $\mathbb{F}_q^{\times} := \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ と置く．

裏面もあることに注意せよ．

1. $a \in \mathbb{F}_q^\times$ に対して,

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q \mid x^n = a\} = \sum_{\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times,\, \chi^n = 1} \chi(a)$$

を示せ. ここで和は $\chi^n = 1$ となる ($\mathbb{F}_q^\times$ の掛け算に関する) 準同型写像 (すなわち $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ となる写像) $\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ を走る.
2. $\mathbb{F}_q$ から $\mathbb{F}_p$ への $\mathbb{F}_p$ 線形写像 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ を $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a) := a + a^p + \cdots + a^{p^{k-1}}$ で定義する (トレース写像という). $a \in \mathbb{F}_q$ に対して,

$$\#\{t \in \mathbb{F}_q \mid t^p - t = a\} = \sum_{\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times} \psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))$$

を示せ. ここで和は ($\mathbb{F}_p$ の足し算に関する) 準同型写像 (すなわち $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$ となる写像) $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ を走る.
3. 準同型写像 $\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ に対して $G_\psi(\chi) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \chi(a)\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))$ と置く (Gauss 和という).

$$\#C(\mathbb{F}_q) = q + 1 + \sum_{\chi^n=1,\, \chi \neq 1} \sum_{\psi \neq 1} G_\psi(\chi)$$

を示せ. ここで 2 つの和はそれぞれ $\chi^n = 1$ となる非自明な準同型写像 $\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ および非自明な準同型写像 $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ を走る.
4. $m \geq 1$ に対して, $\mathbb{F}_{q^m}^\times$ から $\mathbb{F}_q^\times$ への準同型写像 $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}$ を $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}(a) := a \cdot a^q \cdots a^{q^{m-1}}$ で定義する (ノルム写像という). Hasse-Davenport 関係式 $-G_\psi(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}) = (-G_\psi(\chi))^m$ を用いて C の合同ゼータ関数 $Z_C(T)$ が

$$Z_C(T) = \frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq1} \prod_{\psi\neq1} (1 + G_\psi(\chi)T)}{(1-T)(1-qT)}$$

となることを示せ. ここで 2 つの積はそれぞれ $\chi^n = 1$ となる非自明な準同型写像 $\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$ および非自明な準同型写像 $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ を走る.
5. C の種数を g とする. Riemann-Hurwitz 公式を $C \to \mathbb{P}^1$ ($(x,t) \mapsto t$) に対して用いて

$$2g = \deg\left(\prod_{\chi^n=1,\chi\neq1} \prod_{\psi\neq1} (1 + G_\psi(\chi)T) \right)$$

を示せ.
6. $Z_C(T)$ が関数等式

$$Z_C(1/qT) = q^{1-g} T^{2-2g} Z_C(T)$$

を満たすことを示せ.
7. $Z_C(T)$ が Riemann 予想の類似を満たすことを示せ.

$\boxed{6}$ あなたの好きな定理を述べ, その理由もあわせて書け. 定理や理由は今回の講義内容と必ずしも関係しなくてもよい (定理や理由は成績には影響しないが, 定理の主張がおかしいなどの数学的内容に不備がある場合は成績に影響する).

$\boxed{7}$ 講義について感想やコメントなどを書け (成績には影響しない).