2018 年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」　山下担当回レポート問題の講評と解説

$\boxed{\text{講評}}$:
テーマについて: Weil 予想は数論幾何学という分野の誕生に深く関係する予想であり, それを解決するために行われた Grothendieck らによる代数幾何の革新的な基礎付けおよびエタール・コホモロジー論は現代的な数論を切り開いた. (今となってはだいぶ古いが) Weil 予想の解決は数論幾何学の最初の大きな到達点であるために本講義のテーマに選んだ.

講義について: 今年は初回ではなかったためか, 出席人数はそれほど多くはなかった. 去年は意欲的な高校生も来ていたが今年は少なくとも確認はされなかった. 去年難しかったという声が多かったため, 今年は (より一層) 丁寧に講義した.

レポートについて: 計算して楽しめる問題を出した. レポート提出 25 名 (1 回生 14 名, 2 回生 8 名, 3 回生 0 名, 4 回生以上 3 名). レポート提出数は去年と同数だったので, 去年よりも提出率はだいぶ高いことになる. 解けそうと思える問題が多かったのだろうと推測する.
配点: $\boxed{1}$: 各 4 点, $\boxed{2}$ 4 点, $\boxed{3}$: 1 と 5 が各 5 点, 2, 3, 4 が各 4 点. $\boxed{4}$: 2 と 3 が各 5 点, 1, 4, 5 が各 4 点. $\boxed{5}$: 各 5 点 $\boxed{6}$: 5 点の 100 点満点.
評価: A(優): 41〜100 点, B(良): 26〜40 点, C(可): 1〜25 点, D(不可): 0 点.
集計: A: 2 名, B: 13 名, C: 10 名. 最高点が 100 点満点中 47 点というのは, ちょっと問題が難しかったのだろうか.

$\boxed{1}$: 小問 3 で $P_i(T)$ が何者なのか説明している人がほとんどいなかった (が大目に見て正解とした). 小問 2 が意外に解答者数が少なかった.
$\boxed{2}$: おおむね良く出来ていた.
$\boxed{3}$: 小問 4 まではおおむね良く出来ていた. 本講義ではトポロジーとの関連性を強調したので本問のような問題を加えてみた. 定理の条件を落としたらどうなるか考えることで 1 つの数学的現象に本質的に何が関わっているのかを把握することはとても重要である.
$\boxed{4}$: 小問 1 は解答している人はそこそこいたが, 小問 2 以降はあまりいなかった. 小問 3 は手を動かして計算してもらいたいところだった. 講義中に Lefschetz 跡公式及び Poincaré 双対性を説明したが, それらを使えば $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線 E に対して $\#E(\mathbb{F}_q)$ から直ちに $\#E(\mathbb{F}_{q^m})$ が分かるということを講義中に説明する時間がなかった.
$\boxed{5}$: 解答者がほとんどいなかった. 残念である.
$\boxed{6}$: 興味深く読ませてもらった. 定理の名前のみで主張の書かれていないものは採点しなかった.
$\boxed{7}$: 講義の内容が難しかったという意見が多かった. 講義のスピードが速かったという意見も少しあった. 今年は字が読みにくかったという意見はなかった. 難しいけど面白かった, 理解できるようになりたい, という意見も少しあった. 数論幾何に興味をもったという意見もあったのが嬉しいところだ.

総評: 数論的な問題ではない $\boxed{3}$ の解答が多く, 他の数論的な問題の解答は少なかった. $\boxed{4}$ の小問 3 のような手を動かした計算をもっとしてもらいたい. この講義で数論幾何に興味をもった人 (さらには専門にしようと思う人) が 1 人でも生まれれば十分である.

(次ページに続く)

$\boxed{1}$ 1. $\mathbb{F}_q$ 上の有限型スキーム X に対して, $Z_X(T) := \exp(\sum_{m>0} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^m})}{m} T^m)$.
(あるいは $\zeta_X(s) := \prod_{x\in|X|} \frac{1}{1-(\#\kappa(x))^{-s}}$ でもよい.)

2. $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_{q^m}) = (\mathbb{F}_{q^m}^{d+1} \setminus \{(0,\dots,0)\})/\mathbb{F}_{q^m}^\times$ なので, $\#\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_{q^m}) = \frac{q^{m(d+1)}-1}{q-1} = 1 + q^m + q^{2m} + \cdots + q^{dm}$. よって $Z_{\mathbb{P}^d}(T) = \frac{1}{(1-T)(1-qT)\cdots(1-q^dT)}$ となる. これより $Z_{\mathbb{P}^d}(1/q^dT) = \frac{1}{(1-1/q^dT)(1-1/q^{d-1}T)\cdots(1-1/T)} = q^{1+2+\cdots+d}T^{d+1}\frac{1}{(q^dT-1)(q^{d-1}T-1)\cdots(T-1)} = (-1)^{d+1}q^{d\chi/2}T^\chi Z_{\mathbb{P}^d}(T)$.

3. $\mathbb{F}_q$ 上固有滑らかな d 次元代数多様体 X に対してその合同ゼータ関数 $Z_X(T)$ は定数項が 1 となる整数係数の多項式 $P_i(T)$ $(0 \le i \le 2d)$ でその根の逆数が任意の $\mathbb{C}$ への埋め込みに関して絶対値が $q^{i/2}$ となるものを用いて $Z_X(T) = \frac{P_1(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2d}(T)}$ と表される.

$\boxed{2}$ $0 < a < p$ とする. a と p は互いに素なので Euclid の互除法により $na + mp = 1$ となる整数 n, m が存在する. この時, $na \equiv 1 \pmod p$ である (存在). もし他にも $n'a \equiv 1 \pmod p$ となる n' が存在した時, $n' \equiv n'(na) \equiv n(n'a) \equiv n \pmod p$ より, n と n' は p で割った余りが一致する (一意性). n を p で割った余りが $\mathbb{F}_p$ での a の逆数になる. a による割り算はその a の逆数を掛けることで得られる.

$\boxed{3}$ 1. $g(x) := f(x) - x$ と置く. $f(0) = 0$ あるいは $f(1) = 1$ の時はそれぞれ $0, 1$ が固定点なので $f(0) > 0$, $f(1) < 1$ としてよい. つまり $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ である. $g(x)$ も連続関数なので, 中間値の定理より $g(a) = 0$ となる $0 < a < 1$ が存在する. よって $f(a) = a$.
別解: $[0,1]$ は可縮なので, そのコホモロジーは $H^0([0,1],\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H^q([0,1],\mathbb{Q}) = 0\ (q \neq 0)$. Lefschetz 跡公式より固定点の個数は $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(f^* : H^i([0,1],\mathbb{Q})) = \mathrm{Tr}(f^* : H^0([0,1],\mathbb{Q})) = 1$ 個である.

2. 常に固定点を持つとは限らない. たとえば, $[0,1]$ を $[0,\frac{1}{2}]$ と $(\frac{1}{2},1]$ に分割し, $[0,\frac{1}{2}]$ 上では $x \mapsto x + \frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2},1]$ 上では $x \mapsto 1 - x$ で定義するとこれは固定点を持たない (連続でない) 写像である.

3. 常に固定点を持つとは限らない. たとえば, $f(x) := x + 1$ は固定点を持たない連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である.

4. 常に固定点を持つとは限らない. たとえば, $f(x) := x^2$ は固定点を持たない連続写像 $f : (0,1) \to (0,1)$ である.

5. 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ が固定点を持たないとする. $x \in D^2$ に対して, $f(x)$ から x へ引いた半直線が D^2 の境界 $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と交叉する点を $g(x) \in S^1$ とする. $f(x) \neq x$ と仮定したのでこれはきちんと定義されて連続写像 $g : D^2 \to S^1$ を与える. g を S^1 に制限すると定義より恒等写像である. よって自然な埋め込み $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$ と $g : D^2 \to S^1$ が誘導するコホモロジーの射の合成 $H^1(S^1,\mathbb{Q}) \xrightarrow{g^*} H^1(D^2,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\iota^*} H^1(S^1,\mathbb{Q})$ は恒等写像である. 一方 D^2 は可縮のため $H^1(D^2,\mathbb{Q}) = 0$ なので上の合成写像は零写像であり, これは ($H^1(S^1,\mathbb{Q}) \neq 0$ なので) 矛盾である.
　固定点がすべて孤立点の時, Lefschetz 跡公式より固定点の個数は $\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(f^* : H^i(D^2,\mathbb{Q})) = \mathrm{Tr}(f^* : H^0(D^2,\mathbb{Q})) = 1$ 個である.

$\boxed{4}$ 1. $E(\mathbb{F}_5)=\{(\infty,\infty),(0,0),(1,0),(-1,0),(2,1),(2,-1),(-2,2),(-2,-2)\}$

2. Lefschetz 跡公式より, $\#E(\mathbb{F}_{5^m})=1+5^m-\alpha^n-\beta^m$ と書ける．1 より $\#E(\mathbb{F}_5)=8$ なので $\alpha+\beta=-2$. 一方, Poincaré 双対性より $\alpha\beta=5$. よって, $\alpha,\beta=-1\pm 2\sqrt{-1}$. したがって $\#E(\mathbb{F}_{5^m})=1+5^m-\alpha^n-\beta^m=1+5^m-(-1+2\sqrt{-1})^m-(-1-2\sqrt{-1})^m$.

3. 表

x	0	±1	±2	$\pm\alpha$	$\pm2\alpha$	$\pm(\alpha+1)$	$\pm(\alpha-1)$	$\pm(\alpha+2)$	$\pm(\alpha-2)$
x^2	0	1	-1	2	-2	$2\alpha-2$	$-2\alpha-2$	$-\alpha+1$	$\alpha+1$
x^3	0	±1	∓2	$\pm2\alpha$	$\pm\alpha$	±2	∓2	$\mp\alpha$	$\mp\alpha$

x	$\pm(2\alpha+1)$	$\pm(2\alpha-1)$	$\pm(2\alpha+2)$	$\pm(2\alpha-2)$
x^2	$-\alpha-1$	$\alpha-1$	$-2\alpha+2$	$2\alpha+2$
x^3	$\pm2\alpha$	$\pm2\alpha$	±1	∓1

より $E(\mathbb{F}_{25})=\{(\infty,\infty),(0,0),(1,0),(-1,0),(2,1),(2,-1),(-2,2),(-2,-2),(\alpha+1,\alpha+2),(\alpha+1,-(\alpha+2)),(-(\alpha+1),2\alpha-1),(-(\alpha+1),-(2\alpha-1)),(\alpha-1,2\alpha+1),(\alpha-1,-(2\alpha+1)),(-(\alpha-1),\alpha-2),(-(\alpha-1),-(\alpha-2)),(\alpha+2,\alpha-1),(\alpha+2,-(\alpha-1)),(-(\alpha+2),2\alpha-2),(-(\alpha+2),-(2\alpha-2)),(\alpha-2,2\alpha+2),(\alpha-2,-(2\alpha+2)),(-(\alpha-2),\alpha+1),(-(\alpha-2),-(\alpha+1)),(2\alpha+1,2),(2\alpha+1,-2),(-(2\alpha+1),1),(-(2\alpha+1),-1),(2\alpha-1,1),(2\alpha-1,-1),(-(2\alpha-1),2),(-(2\alpha-1),-2)\}$. したがって $\#E(\mathbb{F}_{25})=32$ であるが, これは2での値 $\#E(\mathbb{F}_{25})=1+5^2-(-1+2\sqrt{-1})^2-(-1-2\sqrt{-1})^2=32$ と一致する.

4. $Z_E(T)=\frac{1+2T+5T^2}{(1-T)(1-5T)}$ なので $Z_E(1/5T)=\frac{1+2/5T+1/5T^2}{(1-1/5T)(1-1/T)}=\frac{5T^2+2T+1}{(1-T)(1-5T)}=Z_E(T)$.

5. $Z_E(T)$ の分子 $1+2T+5T^2$ の根の逆数について, $|-1+2\sqrt{-1}|=|-1-2\sqrt{-1}|=\sqrt{5}$ であり, $Z_E(T)$ の分母の根の逆数も $1,5$ であるので $Z_E(T)$ は Riemann 予想の類似が成立する.

$\boxed{5}$ 1. n は $q-1$ を割りきるため $\mathbb{F}_q^\times$ には 1 の n 乗根が (n 個) 存在する．したがって, $a\in(\mathbb{F}_q^\times)^n$ の時, $b^n=a$, $b\in\mathbb{F}_q^\times$ とすると, $\{x\in\mathbb{F}_q\mid x^n=a\}=\{\zeta b\mid\zeta^n=1,\zeta\in\mathbb{F}_q^\times\}$ なので $\#\{x\in\mathbb{F}_q\mid x^n=a\}=n$. 一方, $\mathbb{F}_q^\times$ には 1 の n 乗根が (n 個) 存在するので $\chi^n=1$ となる準同型 $\chi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times$ は n 個存在し, $\sum_{\chi^n=1}\chi(a)=\sum_{\chi^n=1}\chi(b)^n=\sum_{\chi^n=1}1=n$ なので, $a\in(\mathbb{F}_q^\times)^n$ の時に示したい式が確かめられた.

次に $a\notin(\mathbb{F}_q^\times)^n$ とする．$\#\{x\in\mathbb{F}_q\mid x^n=a\}=0$ である．一方, この時, 準同型写像 $\chi_0:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times$ で $\chi_0^n=1$, $\chi_0^i\neq1\,(0<i<n)$ となるものを 1 つ選ぶと, $\chi_0(a)\neq1$ となる．なぜなら, $\alpha\in\mathbb{F}_q^\times$ を $\mathbb{F}_q$ の原始 $q-1$ 乗根の 1 つとし, $a=\alpha^m$ とすると m は n で割れず, $\chi_0(\alpha)\in\mathbb{C}^\times$ は原始 n 乗根であるため, $\chi_0(a)=\chi_0(\alpha)^m\neq1$ と分かる．すると, $\chi_0(a)\sum_{\chi^n=1}\chi(a)=\sum_{\chi^n=1}(\chi_0\chi)(a)=\sum_{\chi^n=1}\chi(a)$ なので $(\chi_0(a)-1)\sum_{\chi^n=1}\chi(a)=0$ より $\sum_{\chi^n=1}\chi(a)=0$ となり, $a\notin(\mathbb{F}_q^\times)^n$ の時にも示したい式が確かめられた.

2. $a=t^p-t$ となる $t\in\mathbb{F}_q$ が存在する時, $\{t\in\mathbb{F}_q\mid t^p-t=a\}=\{t+b\mid b\in\mathbb{F}_p\}$ なので $\#\{t\in\mathbb{F}_q\mid t^p-t=a\}=p$. 一方, $\sum_\psi\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))=\sum_\psi\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(t^p-t))=\sum_\psi\psi(0)=\sum_\psi1=p$ なので, $a=t^p-t$ となる $t\in\mathbb{F}_q$ が存在するの時に示したい式が確かめられた.

$a=t^p-t$ となる $t\in\mathbb{F}_q$ が存在しないとする．$\#\{t\in\mathbb{F}_q\mid t^p-t=a\}=0$ である．一方, この時, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)\neq 0$ であることを以下に示す．$\mathbb{F}_p$ 線形写像 $\mathrm{Fr}-1:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q$ を $(\mathrm{Fr}-1)(x):=x^p-x$ で定める．この線形写像の核は $\mathbb{F}_p$ なので, 像の位数は q/p である．一方, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\circ(\mathrm{Fr}-1)=0$ であるので, $\mathrm{Fr}-1$ の像は $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ の核に入る．また, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x)=x+x^p+\cdots+x^{q/p}$ であり $\mathbb{F}_q$ は体なので $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ の核は高々位数 q/p であることに注意すると, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ の核と $\mathrm{Fr}-1$ の像は一致することが分かる．したがって, a が $\mathrm{Fr}-1$ の像に入っていない時, a は $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ の核に入っていない．すなわち $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)\neq 0$ である．この時, 非自明準同型写像 $\psi_0:\mathbb{F}_p\to\mathbb{C}^\times$ を 1 つ選ぶと, $\psi_0(1)$ は原始 p 乗根であり, $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a)\neq 0$ なので $\psi_0(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))\neq 1$ と分かる．すると, $\psi_0(a)\sum_\psi\psi(a)=\sum_\psi(\psi_0\psi)(a)=\sum_\psi\psi(a)$ なので $(\psi_0(a)-1)\sum_\psi\psi(a)=0$ より $\sum_\psi\psi(a)=0$ となり, $a=t^p-t$ となる $t\in\mathbb{F}_q$ が存在しない時にも示したい式が確かめられた.

3. まず, 無限遠点は $(x,t)=(\infty,\infty)$ が 1 個. $x=0$ の時, $\{(0,t)\mid t\in\mathbb{F}_q, t^p-t=0\}=\{(0,t)\mid t\in\mathbb{F}_p\}$ でありこの位数は p である．$x\neq 0$ の時を考える．1 と 2 を使うと, $\#\{(x,t)\in\mathbb{F}_q^\times\times\mathbb{F}_q\mid t^p-t=x^n\}=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\#\{x\in\mathbb{F}_q^\times\mid x^n=a\}\#\{t\in\mathbb{F}_q\mid t^p-t=a\}=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\sum_{\chi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times,\,\chi^n=1}\chi(a)\sum_{\psi:\mathbb{F}_p\to\mathbb{C}^\times}\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))$ $=\sum_{\chi^n=1}\sum_\psi G_\psi(\chi)$.

$\chi=\psi=1$ の時, $G_1(1)=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}1=q-1$. $\chi\neq 1$, $\psi=1$ の時, $G_1(\chi)=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(a)=0$. $\chi=1,\psi\neq 1$ の時, $G_\psi(1)=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))=\sum_{a\in\mathbb{F}_q}\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a))-1=-1$. したがって, $\#C(\mathbb{F}_q)=1+p+\sum_{\chi^n=1}\sum_\psi G_\psi(\chi)=1+p+\sum_{\chi^n=1,\,\chi\neq 1}\sum_{\psi\neq 1}G_\psi(\chi)+(q-1)+(p-1)(-1)=q+1+\sum_{\chi^n=1,\,\chi\neq 1}\sum_{\psi\neq 1}G_\psi(\chi)$.

4. 上の 3 より, $\#C(\mathbb{F}_{q^m})=q^m+1+\sum_{\xi:\mathbb{F}_{q^m}^\times\to\mathbb{C}^\times,\,\xi^n=1,\,\xi\neq 1}\sum_{\psi\neq 1}G_\psi(\chi)$ となる．ここで $\mathbb{F}_q(\subset\mathbb{F}_{q^m})$ は n 乗根を含むので, $\xi^n=1$ となる $\xi:\mathbb{F}_{q^m}^\times\to\mathbb{C}^\times$ は $N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}:\mathbb{F}_{q^m}^\times\to\mathbb{F}_q^\times$ を経由する．つまり $\xi=\chi\circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}$ と書ける．Hasse-Davenport 関係式 $-G_\psi(\chi\circ N_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q})=(-G_\psi(\chi))^m$ より, $\#C(\mathbb{F}_{q^m})=q^m+1-\sum_{\chi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times,\,\chi^n=1,\,\chi\neq 1}\sum_{\psi\neq 1}(-G_\psi(\chi))^m$ となる．よって $\log(Z_C(T))=\sum_{m>0}\frac{(qT)^m}{m}+\sum_{m>0}\frac{T^m}{m}-\sum_{\chi^n=1,\,\chi\neq 1}\sum_{\psi\neq 1}\sum_{m>0}\frac{(-G_\psi(\chi)T)^m}{m}$ より $Z_C(T)=\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(1+G_\psi(\chi)T)}{(1-T)(1-qT)}$ となる.

5. $C\to\mathbb{P}^1$ $((x,t)\mapsto t)$ は次数 n の被覆で $\{(0,t)\mid t\in\mathbb{F}_p\}$, (∞,∞) で馴分岐なので, Riemann-Hurwitz 公式を用いると, $2g-2=n(-2)+(p+1)(n-1)$. よって $2g=(n-1)(p-1)$. 一方, $\chi^n=1,\chi\neq 1$ となる準同型写像 $\chi:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times$ は $n-1$ 個あり, $\psi\neq 1$ となる準同型写像 $\psi:\mathbb{F}_p\to\mathbb{C}^\times$ は $p-1$ 個あるので, 示したい式の右辺も $(n-1)(p-1)$ となり, 示したい式が示された.

6. まず, $\overline{G_\psi(\chi)}=\sum_{a\in\mathbb{F}_q^\times}\chi^{-1}(a)\psi^{-1}(a)=G_{\psi^{-1}}(\chi^{-1})$ に注意する．次に, $\chi\neq 1$, $\psi\neq 1$ に対して $|G_\psi(\chi)|^2=\sum_{a,b\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(ab^{-1})\psi(a-b)=\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(t)\sum_{b\in\mathbb{F}_q^\times}\psi((t-1)b)=\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(t)(\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\psi((t-1)b)-1)=\sum_{1\neq t\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(t)(\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\psi((t-1)b)-1)+(\sum_{b\in\mathbb{F}_q}\psi(0)-1)=-\sum_{1\neq t\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(t)+(q-1)=-(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times}\chi(t)-1)+(q-1)=q$ に注意する．この時, $Z_C(1/qT)=\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(1+G_\psi(\chi)/qT)}{(1-1/qT)(1-1/T)}=\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(1+G_\psi(\chi)/qT)}{(1-1/qT)(1-1/T)}=(qT)^{2-2g}\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(qT+G_\psi(\chi))}{(qT-1)(qT-q)}=$ $(qT)^{2-2g}q^{-1}\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(G_\psi(\chi)\overline{G_\psi(\chi)}T+G_\psi(\chi))}{(1-qT)(1-T)}=(qT)^{2-2g}q^{-1}\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}G_\psi(\chi)(1+G_{\psi^{-1}}(\chi^{-1})T)}{(1-qT)(1-T)}=$ $(qT)^{2-2g}q^{g-1}\frac{\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1}\prod_{\psi\neq 1}(1+G_\psi(\chi)T)}{(1-qT)(1-T)}=q^{1-g}T^{2-2g}Z_C(T)$. ここで, 最後から 2 番目の等式を説明する．積 $\prod_{\chi^n=1,\chi\neq 1,\psi\neq 1}G_\psi(\chi)$ $(*)$ において, $(\chi,\psi)\neq(\chi^{-1},\psi^{-1})$ となる (χ,ψ) たちを組にして掛け合わせたものは q になるが, $(\chi,\psi)=(\chi^{-1},\psi^{-1})$ となる (χ,ψ) に注意を払う必要がある．ここで $\psi^2=1$, $\psi\neq 1$ となる ψ が存在するのは $p=2$ の時のみであるが, その時は $q-1$ は奇数となり, その約数である n も奇数となる．その時 $\chi^n=1$, $\chi^2=1$, $\chi\neq 1$ となる χ は存在しない．つまり $(\chi,\psi)=(\chi^{-1},\psi^{-1})$,

$\chi^n = 1$, $\chi \neq 1, \psi \neq 1$ となる (χ, ψ) は存在しない. したがって, $(*) = q^g$ となる.

7. 上の 6 で示したように $|G_\psi(\chi)| = \sqrt{q}$. したがって, $Z_C(T)$ の分子の根の逆数の絶対値はすべて $\sqrt{q}$. また, $Z_C(T)$ の分母の根の逆数の絶対値についても, 1 と q である. したがって $Z_C(T)$ は Riemann 予想の類似を満たす.