

2019年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」 山下担当回レポート問題
 以下の[1]~[8]を出来る限り多く答えよ.

- [1] 1. 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_d)$ ($k_1, \dots, k_{d-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) の定義を述べよ.
 2. 組 (k_1, \dots, k_d) の重さと深さの定義を述べよ.
 3. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して, $n = k_1 + \dots + k_d$ となる組 (k_1, \dots, k_d) ($d \geq 1, k_1, \dots, k_{d-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) は 2^{n-2} 個あることを示せ (d も動くことに注意).
 4. Zagier の次元予想では $\dim_{\mathbb{Q}} Z_{15}$ はいくつになると予想されるか.

[2] A, B を互いに非可換な形式的な文字とする. 講義で導入した対合 $(-)^*$, 積分シャッフル積 $^{\text{III}}$, 調和シャッフル積 (級数シャッフル積ともいう)* について, 以下を計算せよ:

1. $(AB^2A^3B^4A^5B^3)^*$.
2. $(AB)^{\text{III}}(A^2B)$.
3. $(AB^2) * (A^2BAB)$.

[3] 多重ゼータ値の双対性を用いて, $n \geq 3$ に対して

$$\zeta(n) = \zeta(\overbrace{1, \dots, 1}^{n-2 \text{ 個}}, 2) \quad (1)$$

を示せ.

[4] ($\zeta(1) = \infty$ であるが) “ $\zeta(n-1) \cdot \zeta(1)$ ” について正規化双シャッフル関係式を用いて, $n \geq 3$ に対して

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{n-2} \zeta(i, n-i) \quad (2)$$

を示せ.

[5] 5 次の多重ゼータ値空間

$$Z_5 = \langle \zeta(5), \zeta(1, 4), \zeta(2, 3), \zeta(3, 2), \zeta(1, 1, 3), \zeta(1, 2, 2), \zeta(2, 1, 2), \zeta(1, 1, 1, 2) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

(ここで $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ に対して $\langle a_1, \dots, a_m \rangle_{\mathbb{Q}}$ は \mathbb{R} 内で a_1, \dots, a_m によって生成される \mathbb{Q} ベクトル空間を表す) に対して,

$$Z_5 = \langle \zeta(5), \pi^2 \zeta(3) \rangle_{\mathbb{Q}} \quad (3)$$

(特に, $\dim_{\mathbb{Q}} Z_5 \leq 2$) であることを以下の指示に従って示せ:

裏面もあることに注意せよ.

1. 多重ゼータ値の双対性を用いて,

$$\zeta(5) = \zeta(1, 1, 1, 2), \quad \zeta(1, 4) = \zeta(1, 1, 3), \quad \zeta(2, 3) = \zeta(1, 2, 2), \quad \zeta(3, 2) = \zeta(2, 1, 2) \quad (4)$$

が成り立つことを示せ.

2. $\zeta(3) \cdot \zeta(2)$ について双シャッフル関係式を用いて,

$$\zeta(5) = 2\zeta(2, 3) + 6\zeta(1, 4) \quad (5)$$

が成り立つことを示せ.

3. 式 (2) と式 (5) を合わせて,

$$\zeta(3, 2) = \zeta(2, 3) + 5\zeta(1, 4) \quad (6)$$

が成り立つことを示せ.

4. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ を用いて

$$\zeta(1, 4) = 2\zeta(5) - \frac{1}{6}\pi^2\zeta(3), \quad \zeta(2, 3) = -\frac{11}{2}\zeta(5) + \frac{1}{2}\pi^2\zeta(3), \quad \zeta(3, 2) = \frac{9}{2}\zeta(5) - \frac{1}{3}\pi^2\zeta(3) \quad (7)$$

が成り立つことを示せ (式 (4) と式 (7) により, 式 (3) が示された).

6 $N \geq 3$ と $2 \leq d \leq N - 1$ に対して, 和公式

$$\zeta(N) = \sum_{\substack{N=k_1+\dots+k_d, \\ k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_d) \quad (8)$$

が成り立つことを, 以下の指示に従って示せ (式 (8) の $d = 2$ の場合が式 (2), 式 (8) の $d = N - 1$ の場合が式 (1) である):

1. X を形式的な文字として, $d \geq 2$ に対して

$$\sum_{N \geq 0} \sum_{\substack{N=k_1+\dots+k_d, \\ k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_d) X^N = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_d} \frac{X^{d+1}}{n_d} \prod_{j=1}^d \frac{1}{n_j - X} \quad (9)$$

を示せ. ここで, N を与えた時に $N = k_1 + \dots + k_d$ となる $k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2$ が存在しない場合は $\sum_{\substack{N=k_1+\dots+k_d, \\ k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_d) X^N := 0$ と定義する. 一般的に, 条件を満たすものに関する和あるいは積において条件を満たすものが存在しない時は, 特に断りがなければその和あるいは積をそれぞれ 0 あるいは 1 とするのが業界での約束事である (この注は以下でも同様である).

2 枚目に続くことに注意せよ.

2. 式 (9) の右辺に部分分数展開 $\prod_{j=1}^d \frac{1}{n_j - X} = \sum_{j=1}^d \frac{1}{n_j - X} \prod_{i=1, i \neq j}^d \frac{1}{n_i - n_j}$ を用いた後, X について冪級数展開した時の X^N の係数を見ることで, $N \geq 3$ と $2 \leq d \leq N - 1$ に対して

$$\sum_{\substack{N=k_1+\dots+k_d, \\ k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1, k_d \geq 2}} \zeta(k_1, \dots, k_d) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{N-d}} \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} A(m, j-1) B(m, d-j) \quad (10)$$

を示せ. ただし, ここで $m \geq 2, t \geq 1$ に対して

$$A(m, t) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_t < m} \prod_{i=1}^t \frac{1}{m - n_i} = \sum_{0 < n'_1 < \dots < n'_t < m} \frac{1}{n'_1 \cdots n'_t}, \quad A(1, 0) := A(m, 0) := 1, A(1, t) := 0$$

(上の式で $n'_i := m - n_{t+1-i}$), $m \geq 1, t \geq 1$ に対して

$$B(m, t) := \sum_{m < n_1 < \dots < n_t} \frac{1}{n_t} \prod_{i=1}^t \frac{1}{n_i - m} = \sum_{0 < n'_1 < \dots < n'_t} \frac{1}{n'_1 \cdots n'_t (n'_t + m)}, \quad B(m, 0) := \frac{1}{m}$$

(上の式で $n'_i := n_i - m$) と置いた.

3. Y を形式的な文字として, $m \geq 1$ に対して

$$\sum_{t \geq 0} A(m, t) Y^t = \prod_{a=1}^{m-1} \left(1 + \frac{Y}{a} \right) \quad (11)$$

が成り立つことを示せ.

4. 固定した n'_{i-1} と m_{i+1} に対して, n'_i に関する和についての式

$$\sum_{n'_{i-1} < n'_i} \frac{1}{n'_i (n'_i + m_{i+1})} = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{n'_{i-1} < n'_i} \left(\frac{1}{n'_i} - \frac{1}{n'_i + m_{i+1}} \right) = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{m_i=1}^{m_{i+1}} \frac{1}{m_i + n'_{i-1}}$$

を $i = t, t-1, \dots, 1$ に対して繰り返し使い (ここで $m_{t+1} := m, n'_0 := 0$ であり, m_t, \dots, m_1 は和を考える時に新しく導入した文字), $m \geq 1$ と $t \geq 1$ に対して

$$B(m, t) = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_t \leq m} \frac{1}{m_1 \cdots m_t}$$

を示すことで, Y を形式的な文字として, $m \geq 1$ に対して

$$\sum_{t \geq 0} B(m, t) Y^t = \frac{1}{m} \prod_{b=1}^m \left(1 - \frac{Y}{b} \right)^{-1} \quad (12)$$

が成り立つことを示せ.

裏面もあることに注意せよ.

5. 式 (11) と式 (12) を用いて, $m \geq 1$ に対して

$$\sum_{d \geq 1} \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} A(m, j-1) B(m, d-j) Y^{d-1} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{Y}{m}\right)^{-1} \quad (13)$$

を示し, 式 (13) の右辺を Y について冪級数展開した時の Y^{d-1} の係数を見ることで得られる式に, 式 (10) をあわせることで, 最終的に和公式 (8) が成立することを示せ.

7 あなたの好きな定理を述べ, その理由もあわせて書け. 定理や理由は今回の講義内容と必ずしも関係しなくてもよい (定理の分野や難易度および好きである理由は成績には影響しないが, 定理の主張がおかしいなどの数学的内容に不備がある場合は成績に影響する).

8 講義について感想やコメントなどを書け (成績には影響しない).