2019 年度全学共通科目「現代の数学と数理解析」　山下担当回レポート問題の講評と解説

$\boxed{\text{講評}}$:

<u>テーマについて</u>: 例年講義が難しいという意見が多かったので, 今年度は多重ゼータ値の双シャッフル関係式という高校生レベルの知識で具体的に手を動かして楽しめるテーマを選んだ.

<u>講義について</u>: 例年よりも具体例を多く説明した. 講義後にも質問が少し出るなど, 意欲ある学生がいたことを感じた.

<u>レポートについて</u>: 計算して楽しめる問題を出した.
レポート提出 33 名 (1 回生 17 名, 2 回生 11 名, 3 回生 2 名, 4 回生以上 3 名). 今年度は例年よりレポート提出が多かった. 内容が簡単でとっつき易い問題が多かったためと思われる.
配点: $\boxed{1}$: 各 5 点, $\boxed{2}$: 各 5 点, $\boxed{3}$: 5 点, $\boxed{4}$: 5 点, $\boxed{5}$: 各 5 点 $\boxed{6}$: 小問 4 は 10 点で他は各 5 点, $\boxed{7}$: 5 点の 100 点満点.
評価: A(優): 76〜100 点, B(良): 51〜75 点, C(可): 1〜50 点, D(不可): 0 点.
集計: A: 9 名, B: 11 名, C: 13 名. 例年より A(優) の人が多かった.

$\boxed{1}$: 概ねよく出来ていた.
$\boxed{2}$: けっこう計算ミスしている人がいた.
$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$: 概ね出来ていた. $(-)|_{T=1}$ を書き忘れている人も多かったがそこは大目に見た.
$\boxed{6}$: 丁寧に指示を付けたのでもっと解く人が多いと思っていたが, 解いた人は意外に少なかった.
$\boxed{7}$: 興味深く読ませてもらった. 定理の名前のみで主張の書かれていないものは採点しなかった.
$\boxed{8}$: 講義の内容が難しいが面白かったという意見が多かった. また, 講義中にはよく分からなかったが後でレポート問題を解きながら講義内容を復習するとよく分かったという意見もそこそこあった. レポート問題を解くのが楽しかったという意見もけっこうあった.

総評: 今年度は例年よりもレポート提出も多く, かつ解答した問題数も多かった. さらに, レポート問題を解くのが楽しかったという意見もけっこうあり, この講義で数学を楽しいと感じた人が複数いたのは幸いだった.

(次ページに続く)

$\boxed{1}$ 1. $\zeta(k_1,\ldots,k_d) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_d} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_d^{k_d}}$. (和を $\sum_{n_1>\cdots>n_d>0}$ で定義する流儀もある．問題文では $k_d \geq 2$ と明示しているので, 講義で採用した $\sum_{0<n_1<\cdots<n_d}$ の方の定義を正解としたいところだが, $\sum_{n_1>\cdots>n_d>0}$ の方でも一応正解とする.)

2. 組 $(n_1,\ldots,n_d)$ に対して, $n_1+\cdots+n_d$ を重さ, d を深さとよぶ.

3. 考えている組は, 一列に並んだ n 個の丸○○○ $\cdots$ ○○○において, 「最後の丸と最後から 2 番目の丸の間」を除く各々の「丸と丸の間」に線「|」を入れるかどうかを考えたものと 1 対 1 に対応する．線「|」を入れるかどうか考える場所は $n-2$ 箇所あるので, そのようなものの場合の数は 2^{n-2} 個である.

(例: ○○○|○|○○は $\zeta(3,1,2)$ に対応する.)

4. 下の表により, **Zagier の次元予想**では $\dim_{\mathbb{Q}} Z_{15} = 28$ と予想されている:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_n	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28

$\boxed{2}$ 1. $(AB^2A^3B^4A^5B^3)^* = A^3B^5A^4B^3A^2B$.

2. $(AB)^{\text{Ш}}(A^2B) = A(B^{\text{Ш}}(A^2B)) + A((AB)^{\text{Ш}}(AB)) = A(BA^2B+ABAB+2A^2B^2)+2A^2(B^{\text{Ш}}(AB)) = A(BA^2B+ABAB+2A^2B^2)+2A^2(BAB+2AB^2) = ABA^2B+3A^2BAB+6A^3B^2$.

3. $(AB^2)*(A^2BAB) = (z_2z_1)*(z_3z_2) = z_2(z_1*(z_3z_2)) + z_3((z_2z_1)*z_2) + z_5(z_1*z_2) = z_2(z_1(z_3z_2) + z_3(z_1*z_2) + z_4z_2) + z_3(z_2(z_1*z_2) + z_2(z_2z_1) + z_4z_1) + z_5(z_1z_2+z_2z_1+z_3) = z_2(z_1z_3z_2 + z_3(z_1z_2 + z_2z_1+z_3) + z_4z_2) + z_3(z_2(z_1z_2+z_2z_1+z_3) + z_2z_2z_1 + z_4z_1) + z_5(z_1z_2+z_2z_1+z_3) = z_2z_1z_3z_2 + z_2z_3z_1z_2 + z_2z_3z_2z_1 + z_2z_3z_3 + z_2z_4z_2 + z_3z_2z_1z_2 + 2z_3z_2z_2z_1 + z_3z_2z_3 + z_3z_4z_1 + z_5z_1z_2 + z_5z_2z_1 + z_5z_3 = AB^2A^2BAB + ABA^2B^2AB + ABA^2BAB^2 + ABA^2BA^2B + ABA^3BAB + A^2BAB^2AB + 2A^2BABAB^2 + A^2BABA^2B + A^2BA^3B^2 + A^4B^2AB + A^4BAB^2 + A^4BA^2B$.

$\boxed{3}$ $(A^{n-1}B)^* = AB^{n-1}$ なので, **双対性**より $\zeta(n) = \zeta(\overbrace{1,\ldots,1}^{n-2\text{ 個}},2)$.

$\boxed{4}$ $z_{n-1}*z_1 = z_{n-1}z_1 + z_1z_{n-1} + z_n$ より, ($\zeta(1)=\infty$, $\zeta(n-1,1)=\infty$ であるが) **調和シャッフル積**が導く式は "$\zeta(n-1)\cdot\zeta(1) = \zeta(n-1,1)+\zeta(1,n-1)+\zeta(n)$" となる．一方, $(A^{n-2}B)^{\text{Ш}}B = BA^{n-2}B + ABA^{n-3}B + A^2BA^{n-4}B + \cdots + A^{n-3}BAB + 2A^{n-2}B^2$ なので, **積分シャッフル積**が導く式は ($\zeta(1)=\infty$, $\zeta(n-1,1)=\infty$ であるが) "$\zeta(n-1)\cdot\zeta(1) = \zeta(n-1,1)+\zeta(n-2,2)+\zeta(n-3,3)+\cdots+\zeta(2,n-2)+2\zeta(1,n-1)$" となる．よって, ($\zeta(1)=\infty$, $\zeta(n-1,1)=\infty$ であるため, 素朴に両辺の $\zeta(n-1,1)=\infty$ を相殺することはできないが**正規化双シャッフル関係式**によりそのような "相殺" を正当化することが可能で) $\zeta(n) = \zeta(n-2,2)+\zeta(n-3,3)+\cdots+\zeta(2,n-2)+\zeta(1,n-1)$ が得られる.

$\boxed{5}$ 1. **双対性**を使うと, $(A^4B)^* = AB^4$ より $\zeta(5) = \zeta(1,1,1,2)$, $(A^3B^2)^* = A^2B^3$ より $\zeta(1,4) = \zeta(1,1,3)$, $(A^2BAB)^* = ABAB^2$ より $\zeta(2,3) = \zeta(1,2,2)$, $(ABA^2B)^* = AB^2AB$ より $\zeta(3,2) = \zeta(2,1,2)$.

2. $z_3 * z_2 = z_3z_2 + z_2z_3 + z_5$ より, **調和シャッフル積**が導く式は $\zeta(3)\cdot\zeta(2) = \zeta(3,2)+\zeta(2,3)+\zeta(5)$. 一方, $(A^2B)\text{Ш}(AB) = A((AB)\text{Ш}(AB)) + A((A^2B)\text{Ш}B) = 2A^2(B\text{Ш}(AB)) + A(BA^2B + ABAB + 2A^2B^2) = 2A^2(BAB + 2AB^2) + A(BA^2B + ABAB + 2A^2B^2) = 3A^2BAB + 6A^3B^2 + ABA^2B$ より, **積分シャッフル積**が導く式は $\zeta(3)\cdot\zeta(2) = 3\zeta(2,3) + 6\zeta(1,4) + \zeta(3,2)$. したがって, $\zeta(5) = 2\zeta(2,3) + 6\zeta(1,4)$ が成り立つ (**双シャッフル関係式**).

3. $\zeta(5) = \zeta(1,4)+\zeta(2,3)+\zeta(3,2)$ と $\zeta(5) = 2\zeta(2,3)+6\zeta(1,4)$ を合わせると, $\zeta(3,2) = \zeta(2,3)+5\zeta(1,4)$ が成り立つ.

4. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ と 2. の証明中に現れた調和シャッフル積および積分シャッフル積の関係式より, $\pi^2\zeta(3) = 6\zeta(3)\zeta(2) = 6\zeta(3,2) + 6\zeta(2,3) + 6\zeta(5) = 30\zeta(1,4) + 12\zeta(2,3) + 6\zeta(5)$ および $\pi^2\zeta(3) = 18\zeta(2,3) + 36\zeta(1,4) + 6\zeta(3,2) = 24\zeta(2,3) + 66\zeta(1,4)$ $(*)$ が従う. この 2 式から $\zeta(2,3)$ を消去すると, $\zeta(1,4) = 2\zeta(5) - \frac{1}{6}\pi^2\zeta(3)$ を得, $\zeta(1,4)$ を $\zeta(5)$ と $\pi^2\zeta(3)$ の $\mathbb{Q}$ 係数線形結合で表された. 式 $(*)$ で $\zeta(1,4)$ を消去すると, $\zeta(2,3) = -\frac{11}{2}\zeta(5) + \frac{1}{2}\pi^2\zeta(3)$ を得, $\zeta(2,3)$ を $\zeta(5)$ と $\pi^2\zeta(3)$ の $\mathbb{Q}$ 係数線形結合で表された. 最後に, 3. で示された式を使うと $\zeta(3,2) = \frac{9}{2}\zeta(5) - \frac{1}{3}\pi^2\zeta(3)$ を得, $\zeta(3,2)$ を $\zeta(5)$ と $\pi^2\zeta(3)$ の $\mathbb{Q}$ 係数線形結合で表された.

$\boxed{6}$ 1. X を形式的な文字として, 式 (8) の右辺を X^N 倍して $N \geq 0$ に関して和をとったものは

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\sum_{k_1,\ldots,k_{d-1}\geq 1,\, k_d\geq 2}\left(\frac{X}{n_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{X}{n_d}\right)^{k_d} = \sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\frac{X/n_1}{1-X/n_1}\cdots\frac{X/n_{d-1}}{1-X/n_{d-1}}\frac{(X/n_d)^2}{1-X/n_d}$$
$$= \sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\frac{X^{d+1}}{n_d}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{n_j-X}$$

となることより分かる.

2. 部分分数展開 $\prod_{j=1}^d \frac{1}{n_j-X} = \sum_{j=1}^d \frac{1}{n_j-X}\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^d \frac{1}{n_i-n_j}$ を使うと, 1. の式の最右辺は

$$= \sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\frac{X^{d+1}}{n_d}\sum_{j=1}^{d}\frac{1}{n_j-X}\left(\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{d}\frac{1}{n_i-n_j}\right)$$
$$= \sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\sum_{j=1}^{d}\left(\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{d}\frac{1}{n_i-n_j}\right)\frac{X^{d+1}}{n_d}\frac{1}{n_j}\left(1+\frac{X}{n_j}+\left(\frac{X}{n_j}\right)^2+\cdots\right)$$

と変形できる. これの X^N の係数は

$$\sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\sum_{j=1}^{d}\left(\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{d}\frac{1}{n_i-n_j}\right)\frac{1}{n_d}\frac{1}{n_j^{N-d}}$$

である. $1\leq j\leq d$ に対して $m:=n_j$ と置き, この式で $i<j$ の部分と $i>j$ の部分をまとめると, これは

$$=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^{N-d}}\sum_{j=1}^{d}\sum_{0<n_1<\cdots<n_{j-1}<m}\left(\prod_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n_i-m}\right)\sum_{m<n_{j+1}<\cdots<n_d}\frac{1}{n_d}\left(\prod_{i=j+1}^{d}\frac{1}{n_i-m}\right)$$

となる. 定義より

$$A(m,j-1)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_{j-1}<m}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{1}{m-n_i},\quad B(m,d-j)=\sum_{m<n_{j+1}<\cdots<n_d}\frac{1}{n_d}\prod_{i=j+1}^{d}\frac{1}{n_i-m}$$

であることを思い出すと, これは

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^{N-d}}\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}A(m,j-1)B(m,d-j)$$

と一致する. ただし, ここで $j=1$, $m\geq 1$ の時 $\sum_{0<n_1<\cdots<n_{j-1}<m}\left(\prod_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n_i-m}\right):=1$, $j\geq 2$, $m=1$ の時 $\sum_{0<n_1<\cdots<n_{j-1}<m}\left(\prod_{i=1}^{j-1}\frac{1}{n_i-m}\right):=0$, $j=d$ の時 $\sum_{m<n_{j+1}<\cdots<n_d}\frac{1}{n_d}\left(\prod_{i=j+1}^{d}\frac{1}{n_i-m}\right):=\frac{1}{n_d}$ とみなしている.

3. $m\geq 2$ と $t\geq 1$ に対して $A(m,t):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_t<m}\prod_{i=1}^{t}\frac{1}{m-n_i}=\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_t<m}\frac{1}{n'_1\cdots n'_t}$ なので, $\sum_{t\geq 0}A(m,t)Y^t=\sum_{t\geq 0}\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_t<m}\frac{Y}{n'_1}\cdots\frac{Y}{n'_t}=\left(1+\frac{Y}{1}\right)\left(1+\frac{Y}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{Y}{m-1}\right)$. (ただし, $t=0$ の時 $\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_t<m}\frac{Y}{n'_1}\cdots\frac{Y}{n'_t}:=1$ とみなしている.)

4. $n'_i:=n_i-m$, $m_{t+1}:=m$ として, $t\geq 1$ の時

$$\begin{aligned}
B(m,t)&:=\sum_{m<n_1<\cdots<n_t}\frac{1}{n_t}\prod_{i=1}^{t}\frac{1}{n_i-m}=\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_t}\frac{1}{n'_1\cdots n'_t}\sum_{n'_{t-1}<n'_t}\frac{1}{n'_t(n'_t+m)}\\
&=\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_{t-1}}\frac{1}{n'_1\cdots n'_{t-1}}\frac{1}{m_{t+1}}\sum_{m_t=1}^{m_{t+1}}\frac{1}{m_t+n'_{t-1}}\\
&=\sum_{m_t=1}^{m_{t+1}}\frac{1}{m_{t+1}}\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_{t-2}}\frac{1}{n'_1\cdots n'_{t-2}}\sum_{n'_{t-2}<n'_{t-1}}\frac{1}{n'_{t-1}(m_t+n'_{t-1})}\\
&=\sum_{m_t=1}^{m_{t+1}}\sum_{m_{t-1}=1}^{m_t}\frac{1}{m_tm_{t+1}}\sum_{0<n'_1<\cdots<n'_{t-2}}\frac{1}{n'_1\cdots n'_{t-2}}\frac{1}{m_{t-1}+n'_{t-2}}=\cdots\\
&=\sum_{m_t=1}^{m_{t+1}}\sum_{m_{t-1}=1}^{m_t}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3}\frac{1}{m_3\cdots m_{t+1}}\sum_{0<n'_1}\frac{1}{n'_1(m_2+n'_1)}=\sum_{m_t=1}^{m_{t+1}}\sum_{m_{t-1}=1}^{m_t}\cdots\sum_{m_1=1}^{m_2}\frac{1}{m_2\cdots m_{t+1}}\frac{1}{m_1}\\
&=\frac{1}{m}\sum_{1\leq m_1\leq\cdots\leq m_t\leq m}\frac{1}{m_1\cdots m_t}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{t\geq 0} B(m,t)Y^t = \frac{1}{m}\sum_{1\leq m_1\leq\cdots\leq m_t\leq m}\frac{Y}{m_1}\cdots\frac{Y}{m_t}$$
$$= \frac{1}{m}\left(1+\frac{Y}{1}+\left(\frac{Y}{1}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\frac{Y}{2}+\left(\frac{Y}{2}\right)^2+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{Y}{m}+\left(\frac{Y}{m}\right)^2+\cdots\right)$$
$$= \frac{1}{m}\left(1-\frac{Y}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{Y}{m}\right)^{-1}.$$

5. 上の 3. と 4. で示したことより,

$$\sum_{d\geq 1}\sum_{j=1}^{d}(A(m,j-1)(-Y)^{j-1})(B(m,d-j)Y^{d-j}) = \sum_{d\geq 1}\frac{1}{m}\prod_{a=1}^{m-1}\left(1-\frac{Y}{a}\right)\prod_{b=1}^{m}\left(1-\frac{Y}{b}\right)^{-1}$$
$$= \sum_{d\geq 1}\frac{1}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)^{-1} = \sum_{d\geq 1}\frac{1}{m}\left(1+\frac{Y}{m}+\left(\frac{Y}{m}\right)^2+\cdots\right)$$

となる. これの Y^{d-1} の係数を見比べると, $\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}A(m,j-1)B(m,d-j) = \frac{1}{m^d}$ を得る. したがって, $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^{N-d}}\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}A(m,j-1)B(m,d-j) = \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^N} = \zeta(N)$. これと 2. で示したこととあわせると最終的に和公式 $\zeta(N) = \sum_{\substack{N=k_1+\cdots+k_d,\\ k_1,\ldots,k_{d-1}\geq 1,\, k_d\geq 2}}\zeta(k_1,\ldots,k_d)$ が成立することが示された.