開多様体の p 進 Hodge 理論

2006 年 8 月

山下　剛 (Go YAMASHITA)
数理解析研究所, 京都大学
(RIMS, Kyoto University)

本稿は 2006 年 8 月に催された代数学シンポジウムにおける講演「開多様体の p 進 Hodge 理論」の報告記事である. この場を借りて, 講演の機会を与えてくださった世話人の方々に感謝の意を表す. また, 本稿に有益な指摘を下さった斎藤毅先生に感謝する.

記号.　本稿でよく使う記号を以下のように定める.

- K : 標数 0 の完備離散付値体,
- O_K : K の付値環,
- k : K の剰余体, 標数 $p > 0$ の完全体と仮定,
- $W = W(k)$: k に係数を持つ Witt ベクトルのなす環,
- K_0 : W の商体,
- $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$: K の絶対 Galois 群,
- $\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{K}}$: $\overline{K}$ の p 進完備化 (記号の濫用).

K として $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大がよく使われる例である. この時, K_0 は $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐な K の最大の部分体である. また, 本稿では Fontaine-Illusie-加藤の対数的構造 (log structure) や対数的概型 (log scheme)[Ka2] については一切復習しない ([Na][Tsu3] も参照).

1　導入.

p 進 Hodge 理論の 3 つの方法. p 進 Hodge 理論の証明の方法は次の 3 つがある (p 進 Hodge 理論の定式化に 3 つあるという意味ではない).

1. Faltings のほとんど (almost) エタール理論 (+α) ([Fa1][Fa2][Fa3]) :
   良還元, 準安定還元ともに扱える. 非定数係数も扱える. “局所的な比較同型” 有り. 証明は難解 (ギャップやスケッチが多い).

2. Niziol の代数的 K 理論とレギュレーター ([Ni1][Ni2]) :
   良還元のみ (準安定還元も近々扱えるようになる可能性大). 定数係数のみ.

3. Fontaine-Messing-加藤-辻のサントミック (syntomic)・コホモロジー ([FM][Ka1][Ka3][KM][Tsu2]) :
   良還元, 準安定還元ともに扱える. 定数係数のみ.

今回は 3 の Fontaine-Messing-加藤-辻の方法を使う (5 章). 開多様体に p 進 Hodge 理論を拡張するにあたって, べったり (hollow) 対数的概型という新しい方法を導入する (5 章, [Y1][Y2]).

p 進 Hodge 理論で使うコホモロジー理論. p 進 Hodge 理論では以下のコホモロジー理論を考察する.

1. $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$: エタール・コホモロジー.
   連続な G_K 作用付き有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間.

2. $H^m_{\text{dR}}(X_K/K)$: de Rham コホモロジー.
   有限フィルトレイション付き有限次元 K ベクトル空間.

3. $H^m_{(\log)\text{crys}}(Y)$: (対数的) クリスタリン・コホモロジー.
   半線型な Frobenius 作用 φ(とモノドロミー作用 N) 付き有限次元 K_0 ベクトル空間.

ここで, X や Y が何であるか, 係数は何であるかは後で述べることにする. また, “半線型” とは K_0 に自然に備わっている Frobenius 作用を σ とすると, $\varphi(av) = \sigma(a)\varphi(v)(a \in K_0$, $v \in H^m_{(\log)\text{crys}})$ を満たす作用のことをいう (以下半線型と言う時はすべてこの σ についての半線型性を言うことにする). 以上のコホモロジー論以外に, 証明の中ではサントミック・コホモロジー $H^m_{\text{syn}}(\overline{X})$ も使う. これは微分形式を用いて定義される連続な G_K 作用付き有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間である.

p 進 Hodge 理論の 2 つの視点. 本稿では p 進 Hodge 理論を次の 2 つの視点を軸に説明する.

1. 幾何学的視点 ($\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論の p 進類似),

2. 表現論的視点 ($\ell(\neq p)$ 進表現論に対する p 進類似).

2 章で 1 の幾何学的視点を, 3 章で 2 の表現論的視点を説明し, 4 章で幾何学的視点と表現論的視点の混ざった視点で説明をしながら固有な多様体の p 進 Hodge 理論の主定理を復習す

る. 最後に 5 章で開多様体の p 進 Hodge 理論について述べる. 2 の表現論的視点で, p 進表現論は p 進 Hodge 理論だけではなく, (φ, Γ) 加群や p 進微分方程式とも関係するが, 講演及び本稿ではそれらは割愛する.

2　幾何学的視点 ($\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論の p 進類似).

類似点.

$\mathbb{C}$ 上では次の Hodge の分解定理が有名である.

定理 2.1 (Hodge 分解, de Rham, 小平-Hodge) X を $\mathbb{C}$ 上のコンパクト Kähler な多様体とすると, 標準的な同型

$$H^m_{\mathrm{sing}}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H^m_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i=0}^{m} H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/\mathbb{C}})$$

が存在する.

これは, **位相的な**特異コホモロジーと**微分形式**のなす連接層のコホモロジーとを結びつける同型である. 一方, p 進ではこの類似として次の定理が知られている.

定理 2.2 (Hodge-Tate 分解, Faltings[Fa1]) X_K を K 上固有滑らかな多様体とすると, G_K 作用と整合的な標準的な同型

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{C}_p(-i) \otimes_K H^{m-i}(X_K, \Omega^i_{X_K/K})$$

が存在する. ここで, G_K 作用は左辺には対角的 $(g \otimes g)$ に, 右辺には係数にのみ $(g \otimes \mathrm{id})$ に作用させる.

$\mathbb{C}_p(-i)$ は $\mathbb{C}_p$ の Tate 捻りを表す. つまり, $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim \mu_{p^n}(\overline{K})$, $\mathbb{Q}_p(1) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$ と置き (μ_{p^n} は 1 の p^n 乗根のなす群), $r > 0$ に対して $\mathbb{Q}_p(r) := \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes r}$, $r < 0$ に対して $\mathbb{Q}_p(r) := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p(-r), \mathbb{Q}_p)$, $\mathbb{Q}_p$ 代数 A に対して $A(r) := A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(r)$ と置いたものである.

この定理は, **位相的な**エタール・コホモロジーと**微分形式**のなす連接層のコホモロジーとを結びつける同型であり, $\mathbb{C}$ 上での Hodge 分解の p 進類似を与えている.

注 2.3 また, 表現論的視点で見ると, エタール・コホモロジーへの Galois 作用は一般には計算の非常に難しいものである (次章で説明するが, p 進表現ならなおさらである) が, $\mathbb{C}_p$ をテンソルすると

$$\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{C}_p(-i)^{\oplus h^{i,m-i}}$$

という非常に分かりやすい表現になっている, という事を述べている. ここで, $h^{i,m-i} := \dim_K H^{m-i}(X_K, \Omega^i_{X_K/K})$ は Hodge 数.

相違点.

p 進 Hodge 理論は $\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論とその哲学において大きく異なる点もある.

1. Hodge-Tate 分解を $\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論の p 進類似と見るならば, p 進 Hodge 理論ではそれの**精密化**である de Rham 予想, クリスタリン予想, 準安定予想 (いずれも証明されて定理である) も成立する. これらの $\mathbb{C}$ 上での類似物は存在しない. これらの精密化を述べるには Fontaine による p 進周期環が必要なのでそれらの準備の後で述べることにする (4 章).

2. $\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論では, 特異コホモロジーと de Rham コホモロジーは**一方だけでは情報は少なく, 比較同型を通じて両者を組にして考える事で大きな情報となる** (Hodge 構造) が, p 進 Hodge 理論では, 良還元や準安定還元を持つ時, 位相的なエタール・コホモロジーだけ, あるいは微分形式と関係する de Rham コホモロジーと (対数的) クリスタリン・コホモロジーの組だけでも情報量は多く, **一方から一方が比較同型を通じて付加構造を含めて復元できる** (4 章参照). つまり, $\mathbb{C}$ 上では位相的コホモロジーと微分形式のコホモロジーが比較同型でお互いがお互いを補い合っているが, p 進では比較同型は位相的コホモロジーと微分形式のコホモロジーとの間の等価な情報交換である. この視点は特筆すべき大きな相違点である.

注 2.4 上の 2 で, 例えば $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E を考えてみると, 位相的にはどの楕円曲線も同じものなので特異コホモロジーでは区別できない. また, de Rham コホモロジーでもフィルトレイションはどの楕円曲線も 0 番目は全体 (2 次元), 1 番目は 1 次元, 2 番目は 0 となり区別できない. けれども, 比較同型を通じて ($\mathbb{Z}$ 係数の) 特異コホモロジーと de Rham コホモロジーを組にして考えると, もとの楕円曲線が復活 ($E(\mathbb{C}) \cong H_1(E,\mathbb{Z})\backslash(H^1_{\mathrm{dR}}(E)/\mathrm{Fil}^1)^*$) する程の情報量となる. 一方, 代数体上の楕円曲線に対してそのエタール・コホモロジーからもとの楕円曲線の同種類 (isogeny class) が決定できる程の情報量がある ([Fa0]) ($\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数だと同型類まで決定できる) (有限体上の Abel 多様体でも本田-Tate 理論によりエタール・コホモロジーからもとの Abel 多様体の同種類が分かる. 本稿では局所体上の多様体を扱うので, これらの例はあまり良い例ではないかもしれない. Tate 予想は素体上有限生成な体に対するものなので, 局所体上ではどの程度もとの Abel 多様体が分かるのか本稿以上の事を筆者は知らない (楕円曲線の時の (導手) = (判別式の付値) + 1 − (極小正則モデルの特殊ファイバーの既約成分の個数) ぐらいか?)).

注 2.5 対応の辞書としては,

$$\text{混合 Hodge 構造} \leftrightarrow \text{Galois 表現} \leftrightarrow \text{(弱許容) フィルター } (\varphi, N) \text{ 加群},$$

$$(H^m_{\mathrm{sing}}, H^m_{\mathrm{dR}}) \leftrightarrow H^m_{\text{ét}} \leftrightarrow (H^m_{\mathrm{dR}}, H^m_{(\log)\mathrm{crys}})$$

と考えられている ((弱許容) フィルター (φ, N) 加群については次章参照). この対応辞書のもとでは, $\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論は左端の Hodge 構造を形成するための比較同型であり, p 進 Hodge 理論は真ん中と右端を行き来するための比較同型であることが分かる.

今回の講演の内容から外れるが, 上の対応辞書は, 族にすると

$$\text{混合 Hodge 構造の許容変形} \leftrightarrow \text{スムース}\, p\, \text{進層} \leftrightarrow \text{フィルター}\, F\, \text{アイソクリスタル}$$

となる (ここで右端は "弱許容" に対応する良い概念はまだ得られていないと思う). ここで,

$$\text{混合 Hodge 構造の許容変形} = (\mathbb{Q}(\text{あるいは}\, \mathbb{Z})\, \text{局所系, 接続付き加群}) \text{ の組 } (+\, \text{公理})$$

であるが, それらは

$$\text{混合 Hodge 加群} = (\mathbb{Q}(\text{あるいは}\, \mathbb{Z})\, \text{偏屈層, 正則ホロノミー}\, D\, \text{加群}) \text{ の組 } (+\, \text{公理})$$

と一般化され, これのエタール対応物は p 進偏屈層であるが, サントミック対応物 (右端のもの) はまだない (Berthelot が D 加群の p 進類似である $D^\dagger$ 加群を定義した [B1][B2][B3] が 6 つの操作についての安定性はまだ証明されていない).

$$\text{混合 Hodge 加群} \leftrightarrow p\, \text{進偏屈層} \leftrightarrow ??.$$

3 表現論的視点 ($\ell(\neq p)$ 進表現に対する p 進類似).

K の絶対 Galois 群 G_K の構造を復習しよう.

$$G_K \supset I_K \supset P_K \supset \{1\}$$

ここで, I_K と P_K は各々惰性群と暴惰性群 (wild inertia) であり, 後者は巨大な副 p 群 (pro-p group) である.

定義 3.1 G_K の ℓ 進表現 ($\ell = p$ を含む) とは, 有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間への G_K の連続な作用のことである.

G_K の $\ell(\neq p)$ 進表現 V に対して, 副 p 群の副 ℓ 群への像は自明になるために $\mathrm{GL}(V)$ への P_K の像は**有限になる** (G_K はコンパクトであり, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ の極大コンパクト部分群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_\ell)$ は指数有限の副 ℓ な部分群 $1 + \ell \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_\ell)$ を持つことに注意) が, G_K の p 進表現では P_K の像は**一般に巨大になる**. 一般に, 暴惰性群 P_K が作用すると Galois 表現が難しくなるわけだが, $\ell(\neq p)$ 進表現の時は像が有限のために Swan 類等を使った立派な理論ができている. 一方, p 進表現の時はその像が巨大になるために, Fontaine が (p 進 Hodge 理論的考察から)p 進周期環を導入して p 進表現を分かりやすいものにする以前は全くわけの分からぬ対象であった. 例えば, Tate 捻りをした表現 $\mathbb{Q}_p(r)(r \neq 0)$ に対して, こういう簡単な表現は "とても良いもの" として扱いたいのだが P_K が巨大に作用する. Fontaine が p 進周期環を導入する以前はこのような簡単な表現すらもどのように扱っていいのか分からなかった (後述するが, この表現は "クリスタリン表現" という不分岐表現に対応する "とても良いもの" として扱われることになる).

しかし, Fontaine が p 進周期環を導入した事によって, p **進表現論に** $\ell(\neq p)$ **進表現論と類似の事を定式化し, 証明する事ができるようになった** ([Fo1][Fo2]). また, P_K が巨大に作用してよく分からない対象を (弱許容) フィルター (φ, N) 加群という**よく分かるもので置き換えて調べる事が可能になった** ([Fo2]). これらを以下で説明する.

Fontaine の p 進周期環.

Fontaine は次の 3 つの環 (p 進周期環) を定義した. その定義は本稿では割愛する ([Fo1] を参照).

1. B_{dR} : G_K 作用とフィルトレイションを持った K 代数,
2. B_{crys} : G_K 作用と半線型な Frobenius 作用 φ を持った K_0 代数,
3. B_{st} : G_K 作用と半線型な Frobenius 作用 φ と $N\varphi = p\varphi N$ を満たすモノドロミー作用 N を持った K_0 代数.

本稿では以下の性質を使う.

- B_{crys} は B_{dR} と B_{st} の部分環,
- K の素元 π を選ぶと B_{st} から B_{dR} への埋め込みが得られる,
- $B_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$, $B_{\mathrm{crys}}^{G_K} = K_0$, $B_{\mathrm{st}}^{G_K} = K_0$,
- $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$, $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1, N=0} = \mathbb{Q}_p$
- $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} / \mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}} \cong \mathbb{C}_p(i)$.

以降, K の素元 π を選んで固定し, B_{st} の B_{dR} への埋め込みも固定する.

不正確を承知で言うとすれば, B_{dR} と B_{crys} の大きさはだいたい

$$B_{\mathrm{dR}} \leftrightarrow \mathbb{C}_p((T)),\ B_{\mathrm{crys}} \leftrightarrow O_{\mathbb{C}_p}\left[\frac{T^n}{n!}|_{n\geq 1}\right]^{p\text{ 進完備化}}\left[\frac{1}{p}, \frac{1}{T}\right]$$

と比較され得る. また, B_{st} は非標準的に $B_{\mathrm{crys}}[X]$ (X は文字) と同型である.

定義 3.2 (Fontaine, [Fo2]) G_K の p 進表現 V に対し,

$$D_{\mathrm{dR}}(V) := (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},\ D_{\mathrm{crys}}(V) := (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K},\ D_{\mathrm{st}}(V) := (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

と定義する. B_{dR}, B_{crys}, B_{st} に備わっている付加構造から各々フィルトレイション付き K ベクトル空間, Frobeniusφ 作用付き K_0 ベクトル空間, Frobeniusφ 作用とモノドロミー作用 N 付き K_0 ベクトル空間になる.

一般に
$$\dim_{K_0} D_{\mathrm{crys}}(V) \leq \dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \leq \dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$
が成り立つことが知られている.

定義 3.3 (Fontaine, [Fo2]) $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (あるいは $\dim_{K_0} D_{\mathrm{crys}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$) が成り立つ時, 各々$V$ は **de Rham 表現** (あるいは**クリスタリン表現** (crystalline representation), **準安定表現** (semistable representation)) という.

上の不等号から, クリスタリン表現は準安定表現であり, 準安定表現は de Rham 表現であることが分かる.

また, 前述したように例えば $\mathbb{Q}_p(r)$ $(r \in \mathbb{Z})$ はクリスタリン表現になる.

定義 3.4 (Fontaine, [Fo2]) K 上のフィルター φ 加群 (あるいはフィルター (φ, N) 加群) とは, 半線型な φ 作用 (と $N\varphi = p\varphi N$ を満たすモノドロミー作用 N) 付き K_0 上の有限次元ベクトル空間で, K_0 上 K をテンソルした後に有限フィルトレイションが与えられているものとする.

クリスタリン表現 (あるいは準安定表現)V に対して各々$D_{\mathrm{crys}}(V)$(あるいは $D_{\mathrm{st}}(V)$) はフィルター φ 加群 (あるいはフィルター (φ, N) 加群) となることが分かるが, さらに, 弱許容性という φ 作用 (から定まる Newton ポリゴン) とフィルトレイション (から定まる Hodge ポリゴン) の間のある種の関係を満たす ([Fo2]) 事も知られている (詳細は略).

定理 3.5 (Colmez-Fontaine [CF]) 関手 D_{crys}(あるいは D_{st}) により, クリスタリン表現の圏 (あるいは準安定表現の圏) は K 上の弱許容フィルター φ 加群 (あるいは K 上の弱許容フィルター (φ, N) 加群) と圏同値である. その擬逆は $D \mapsto \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D) \cap (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$ (あるいは $D \mapsto \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D) \cap (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}$) で与えられる.

注 3.6 ここで, K 上のフィルター φ 加群は**ある基底を取ると φ の作用は 1 つの行列で表され, フィルトレイションも有限個のベクトルで表される非常に分かりやすい対象である** (フィルター (φ, N) 加群も同様). これから暴惰性群 P_K が巨大に作用する p 進表現が完全に把握できるというのは驚きである (それだけクリスタリンあるいは準安定という条件が強いとも言えるが, これらの条件はそれなりに "まとも" な条件であることもだんだんと分かってくる). これが「よく分かるもので置き換えることができる」と言っていた意味である.

ところで, $\ell(\neq p)$ 進表現の方では惰性群が自明に作用する表現を**不分岐表現**, 惰性群が (ある基底を取ると) 上半三角で対角成分が 1 に作用する表現を**冪単表現** (unipotent representation), G_K のある開部分群に制限すると冪単表現になる表現を**擬冪単表現** (quasi-unipotent representation) と呼んでいて, 各々どういう表現なのか捉えられる表現のクラスになっているが, p 進表現に対して上のように de Rham 表現, クリスタリン表現, 準安定表現という p 進表現のクラスを定義したが, 定義そのものだけからは, これらのクラスがどういう意味を

持っているのかは不明である．結論から言うと, **de Rham 表現は $\ell(\neq p)$ 進表現全体と対応し, クリスタリン表現は不分岐表現に対応し, 準安定表現は冪単表現に対応するものである**．また, G_K のある開部分群に制限すると準安定表現になる表現の事を潜在的準安定表現 (potentially semistable representation) と言うことにすると, この対応のもと, **潜在的準安定表現は擬冪単表現に対応するもの**と考えられる．ここで "対応" という言葉を使ったが, その意味はまだこの時点では不明なので, これについて以下で説明するが, まず上の事を表にしておくと以下のようになる．

$\ell(\neq p)$ 進		p 進		"分かりやすい" 置き換え
		$\{p$ 進表現$\}$		
		$\cup$		
$\{\ell(\neq p)$ 進表現$\}$	$\leftrightarrow$	$\{$deRham 表現$\}$	$\xrightarrow{D_{\mathrm{dR}}}$	$\{$フィルター加群$/K\}$
$\cup(\ \Vert\ )$		$\cup(\ \Vert\ )$		$\uparrow$ (忘却)
$\{$擬冪単表現$\}$	$\leftrightarrow$	$\{$潜在的準安定表現$\}$	$\xrightarrow{D_{\mathrm{pst}}\cong}$	$\{$弱許容フィルター WD 群表現$/K\}$
$\cup$		$\cup$		$\cup$
$\{$冪単表現$\}$	$\leftrightarrow$	$\{$準安定表現$\}$	$\xrightarrow{D_{\mathrm{st}}\cong}$	$\{$弱許容フィルター (φ, N) 加群$/K\}$
$\cup$		$\cup$		$\cup$
$\{$不分岐表現$\}$	$\leftrightarrow$	$\{$クリスタリン表現$\}$	$\xrightarrow{D_{\mathrm{crys}}\cong}$	$\{$弱許容フィルターφ 加群$/K\}$
$\cup$		$\cup$		$\cup$
$\{1\}$	$\leftrightarrow$	$\{B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1}$ 許容表現$\}$	$\xrightarrow{\cong}$	$\{$弱許容フィルターφ 加群$/K, \varphi = 1\}$
		$\cup$		
		$\{1\}$		

(この表の中でまだ出てきていない用語の説明については割愛する)．上の表での 2 つの等号 ($\Vert$) については, 次の 2 つの定理で説明される．

定理 3.7 (Grothendieck のモノドロミー定理 [ST]) k のどの有限次拡大体も 1 のすべての ℓ 冪根を含まないと仮定する．この時, G_K の任意の $\ell(\neq p)$ 進表現は擬冪単表現である．

注 3.8 定理の条件は k が素体上有限生成なら満たされる．

定理 3.9 (p 進モノドロミー定理, Berger[Be], André-Kedlaya-Mebkhout[A][Ke][M]) G_K の任意の de Rham 進表現は潜在的準安定表現である．

ここで, Grothendieck のモノドロミー定理の方は G_K の構造の簡単な理解から容易に証明されるが, p 進モノドロミー定理の方は (φ, Γ) 加群を通って p 進微分方程式と関係付け ([Be]), p 進微分方程式の方での Crew-都築予想を解く ([A][Ke][M]) 事で証明され, $\ell(\neq p)$ 進の時に比べ非常に難しくなっている．

上の 2 つの定理を見比べると,

$$\text{対応} : \ell(\neq p) \text{ 進表現} \leftrightarrow \text{deRham 表現}$$

が (対応: 冪単表現 $\leftrightarrow$ 準安定表現のもとで) 了解されるだろう.

次の例も見てみよう.

例 ($\mathbb{Q}_\ell$ の $\mathbb{Q}_\ell(r)$ による拡大, [BK2]):
$n := [K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ の時に, $r \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathbb{Q}_\ell$ の $\mathbb{Q}_\ell(r)$ による拡大の同値類のなす群

$$\{0 \to \mathbb{Q}_\ell(r) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0\}/\sim\, \cong \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Q}_\ell(r)) \cong H^1(G_K, \mathbb{Q}_\ell(r))$$

を考える. $\ell \neq p$ の時にこの群の中で, 不分岐表現になる拡大の次元と冪単表現になる拡大の次元と拡大全体の次元を示した表は以下のようになる.

$\ell \neq p$ の時:

dim	0	(不分岐)	(冪単)	Ext^1
$r < 0$	0	0	0	0
$r = 0$	0	1	1	1
$r = 1$	0	0	1	1
$r > 1$	0	0	0	0

一方, $\ell = p$ の時にこの群の中で, クリスタリン表現になる拡大の次元と準安定表現になる拡大の次元と de Rham 表現になる拡大の次元と拡大全体の次元を示した表は以下のようになる.

$\ell = p$ の時:

dim	H^1_e	(クリスタリン)	(準安定)	(de Rham)	Ext^1
$r < 0$	0	0	0	0	n
$r = 0$	0	1	1	1	$n+1$
$r = 1$	n	n	$n+1$	$n+1$	$n+1$
$r > 1$	n	n	n	n	n

この表で $\ell = p$ の時の "n の部分" を無視すれば $\ell \neq p$ の時の表とぴったり一致することに注意せよ. ここで H^1_e の説明は省略する ($\mathbb{Q}_p(r)$ は $r \neq 0$ の時 $B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1}$ 許容表現でないので, H^1_e と $B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1}$ 許容表現の類はちょっとずれる. $r = 0$ の時は両者は一致するが, $B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1}$ 許容性は惰性群への制限だけでは決まらない事に注意せよ). ここでも対応

$\ell(\neq p)$ 進表現 $\leftrightarrow$ deRham 表現,

不分岐表現 $\leftrightarrow$ クリスタリン表現,

冪単表現 $\leftrightarrow$ 準安定表現

が見てとれる. この "n の部分" は $\ell(\neq p)$ 進ではなかった Hodge フィルトレイションの情報であり, $r < 0$ や $r > 1$ の時にも分裂しない拡大が存在する ($r > 1$ の時にはそれらはさらにクリスタリン表現でもある). この例は $\ell(\neq p)$ 進と p 進の類似と非類似をよく表している.

注 3.10 $r = 1$ の時の参考として, K 群は

$$\dim K_1(O_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell = \dim O_K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell = \begin{cases} 0, & \ell \neq p, \\ n, & \ell = p \end{cases}$$

となる事にも注意せよ. $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) \cong K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の中で $O_K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ がクリスタリン表現に対応する拡大類を与える.

注 3.11 $r = 0$ では,

$$0 \to \mathrm{Hom}(G_K/I_K, \mathbb{Q}_p) \to H^1(G_K, \mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Hom}_{G_K/I_K}(I_K, \mathbb{Q}_p) \to 0$$

での $\mathrm{Hom}(G_K/I_K, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p$ がクリスタリン表現に対応する拡大類で, $\mathrm{Hom}_{G_K/I_K}(I_K, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Hom}_{G_K/I_K}(P_K, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Hom}_{G_K/I_K}(P_K^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}_p)$ がクリスタリン表現にならない商である (局所類体論からその次元は n である).

注 3.12 また, G_K の ℓ 進表現 V_ℓ に対して, その Galois コホモロジーの Euler 指標が

$$\chi(H^*(G_K, V_\ell)) := \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(G_K, V_\ell) = \begin{cases} 0, & \ell \neq p, \\ -\dim_{\mathbb{Q}_p} V_p, & \ell = p \end{cases}$$

となる事にも注意せよ.

話はズレるが, de Rham 表現にすらならない拡大類があるが, それらが重要でないかというとそういうわけでもなく, 岩澤理論で重要な元が非 de Rham 拡大類に住んでいたり $(H^1(\mathbb{Z}[1/S], V_pE) \to H^1(\mathbb{Q}_p, V_pE) \twoheadrightarrow H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V_pE) \cong (\tan((V_pE)^*(1)))^*$: zeta 元 $\mapsto (L(E,1))\cdot$(ある定数), $\exp^* : H^1_{/f}(K_n, T^{\otimes(-r)}(1)) \to \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR},K_n}(V^{\otimes(-r)}(1)) \cong \mathrm{coLie}(G)^{\otimes r} \otimes_{O_K} K_n$: 楕円単数 $\mapsto L(E, \chi_K^r, 1) \cdot$ (ある定数). また, これらでは $H^1_f = H^1_g$. 記号の説明は略 ([Ka4])), Chow 群の研究でも非 de Rham 拡大類が重要だったりする ($\mathrm{Pic}(E \times_{\mathbb{Q}} E(\mathrm{mod}\ell)) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1_{/f}(\mathbb{Q}_\ell, H^2((E \times_{\mathbb{Q}} E)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(2)))$ ($\ell = p$ も含む). また, これらでも $H^1_f = H^1_g$. 記号の説明は略 ([LS])).

クリスタリン表現と不分岐表現, 準安定表現と冪単表現の間の対応関係は次の章でより明らかになるであろう.

4 幾何学的視点と p 進表現論的視点.

幾何は複雑な対象なので, コホモロジーをとって混合 Hodge 構造や Galois 表現やフィルター (φ, N) 加群などの線型代数のレベルまで落として考える事をよくする. その時, 幾何の情報がそれらの線型代数にどのように反映されるのか, それら線型代数からもとの幾何がどこまで分かるか, というのが重要な研究方法である. この章では, エタール・コホモロジーをとって得られる $\ell(\neq p)$ 進表現と p 進表現について比較をしながら p 進 Hodge 理論の主定理を説明していく.

次の 2 つの定理は, Abel 多様体に対して良還元を持つかどうか, あるいは準安定還元を持つかどうかという幾何がエタール・コホモロジーをとって得られる $\ell(\neq p)$ 進表現や p 進表現で完全に判別できることを示している.

定理 4.1 (Néron-Ogg-Shafarevich, Grothendieck [ST][G]) A を K 上の Abel 多様体とする. この時, 以下の同値が成立する.

1. A が良還元を持つ
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\ell \neq p$ に対して $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が不分岐表現になる
$\Longleftrightarrow$ ある $\ell \neq p$ が存在して $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が不分岐表現になる.

2. A が準安定還元を持つ
$\Longleftrightarrow$ 任意の $\ell \neq p$ に対して $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が冪単表現になる
$\Longleftrightarrow$ ある $\ell \neq p$ が存在して $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が冪単表現になる.

定理 4.2 (Tate, Fontaine, Laffaille, Breuil [T][L][Br]) A を K 上の Abel 多様体とする. この時, 以下の同値が成立する.

1. A が良還元を持つ
$\Longleftrightarrow$ $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ がクリスタリン表現になる.

2. A が準安定還元を持つ
$\Longleftrightarrow$ $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ が準安定表現になる.

注 4.3 純 p 進的議論では, $p > 2$ ([Br]) または $K = K_0$ ([L]) の条件がいる (左から右は一般に成立) が, 次のような $\ell(\neq p)$ 進コホモロジーとの比較を使うと定理 4.2 は 4.1 に帰着させる事で一般でも言える. この指摘は斎藤毅氏による.

$H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ が準安定表現とする. (仮定とは関係なく)K のある有限次 Galois 拡大 L で $A_L := A \otimes_K L$ が準安定還元を持つものが存在する ([G]). $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ に対する D_{st} 関手を $D_{\mathrm{st},L}$ と書くことにすると, $D_{\mathrm{st},L}(H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \cong H^1_{\mathrm{logcrys}}(A_{O_L} \otimes k_L)$ (ここで比較同型定理を使ったが, p 可除群に対する比較同型定理は一般の多様体に対するものよりもかなり容易にできる). 一方, $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は準安定表現なので, $D_{\mathrm{st},L}(H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \cong D_{\mathrm{st}}(H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \otimes_{K_0} L_0$. また, L_0/K_0 は不分岐拡大なので, $H^1_{\mathrm{logcrys}}(A_{O_L} \otimes k_L) \cong D_{\mathrm{st}}(H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \otimes_{K_0} L_0$ への $I_K/I_L \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ の作用は自明と分かる. 次に, $\ell \neq p$ に対して $H^1_{\mathrm{logcrys}}(A_{O_L} \otimes k_L)$ と $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への I_K の作用を比べる. $\sigma \in I_K$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\sigma; H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \mathrm{Tr}(\Pi_1 \circ \sigma; H^*(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) \\
&= (\Pi_1 \circ \Gamma_\sigma, \Delta) \\
&= \mathrm{Tr}(\Pi_1 \circ \sigma; H^*_{\mathrm{logcrys}}(A_{O_L} \otimes k_L)) = \mathrm{Tr}(\sigma; H^1_{\mathrm{logcrys}}(A_{O_L} \otimes k_L))
\end{aligned}
$$

である. ここで, Π_1 は H^1 成分への Künneth 射影の代数的サイクル (Abel 多様体に対しては存在が知られている). よって, $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への I_K の作用は冪単と分かる. 定理 4.1 を使えば A が準安定還元を持つ事が分かる. さらに, $H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ がクリスタリン表現とする. A が準安定還元を持つ事が分かっているので, 上で $L = K$ とする. $H^1_{\mathrm{logcrys}}(A \otimes k) \cong D_{\mathrm{st}}(H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ へのモノドロミーの作用は自明なので A が良還元を持つ事も分かる.

この上の 2 つの定理を見ても,

$$\text{不分岐表現} \leftrightarrow \text{クリスタリン表現},\ \text{冪単表現} \leftrightarrow \text{準安定表現}$$

というが対応が分かる (ここでも p 進の方が対応する定理の証明は難しい).

一般の多様体でも良い還元を持てばエタール・コホモロジーをとって得られる $\ell(\neq p)$ 進表現が不分岐表現になることは固有滑らか基底変換定理からすぐに分かる. 一方, その時エタール・コホモロジーをとって得られる p 進表現がクリスタリン表現になることは以下に述べる p 進 Hodge 理論の主定理の 1 つであるクリスタリン予想から出, ここでも p 進の方が対応する定理の証明は難しい. クリスタリン予想は単にエタール・コホモロジーがクリスタリン表現になることだけを述べているのではなく, それはより強く, **位相的なエタール・コホモロジーと微分形式と関係するクリスタリン・コホモロジーとの間の比較同型**を述べている.

定理 4.4 (クリスタリン予想 (C_{crys}), Faltings[Fa2]) X を O_K 上固有滑らかな多様体, Y をその特殊ファイバーとする. この時, 付加構造と整合的な標準同型

$$B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}(Y)$$

が存在する. 特に, $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ はクリスタリン表現である. ここで, 両辺の G_K 作用と Frobenius 作用と B_{dR} テンソル後のフィルトレイションは以下のように定める.

$$\begin{array}{lrlcrl}
 & B_{\mathrm{crys}} & \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \cong & B_{\mathrm{crys}} & \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}(Y) \\
G_K\ \text{作用} & g & \otimes g & & g & \otimes 1 \\
\text{Frobenius 作用} & \varphi & \otimes 1 & & \varphi & \otimes \varphi \\
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{crys}}}\ \text{後の}\ \mathrm{Fil}^i & \mathrm{Fil}^i & \otimes H^m_{\text{ét}} & & \displaystyle\sum_{i=j+k} \mathrm{Fil}^j & \otimes \mathrm{Fil}^k
\end{array}$$

ただし, Berthelot-Ogus 同型 ([BO]) $K \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}(Y) \cong H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ を使って右辺にフィルトレイションを定義した.

注 4.5 この比較同型から $B_{\mathrm{crys}}^{G_K} = K_0$ を使うと

$$H^m_{\mathrm{crys}}(Y) \cong D_{\mathrm{crys}}(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) := (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))^{G}_{K}$$

が分かり, $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$ を使うと

$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)) \cap (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{crys}}(Y))^{\varphi=1}$$

が分かる. これは $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$ から $(H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K), H^m_{\mathrm{crys}}(Y))$ が付加構造を込めて復元でき, 逆に $(H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K), H^m_{\mathrm{crys}}(Y))$ から $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$ が付加構造を込めて復元できる事を言っている.

次に, 準安定還元を持つ場合であるが, 一般の多様体でも準安定還元を持てばエタール・コホモロジーをとって得られる $\ell(\neq p)$ 進表現が冪単表現になることは消滅サイクル複体へのモノドロミー作用からすぐに分かる. 一方, その時エタール・コホモロジーをとって得られる p 進表現が準安定表現になることは以下に述べる p 進 Hodge 理論のもっとも深い主定理である準安定予想から出, ここでも p 進の方が対応する定理の証明は難しい. こちらも同様に, 準安定予想は単にエタール・コホモロジーが準安定表現になることだけを述べているのではなく, それはより強く, **位相的なエタール・コホモロジーと微分形式と関係する対数的クリスタリン・コホモロジーとの間の比較同型**を述べている.

定理 4.6 (準安定予想 (C_{st}), 辻 [Tsu2]) X を O_K 上固有準安定モデル, Y をその特殊ファイバーとする. この時, 付加構造と整合的な標準同型

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y)$$

が存在する. 特に, $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は準安定表現である. ここで, 両辺の G_K 作用と Frobenius 作用とモノドロミー作用と B_{dR} テンソル後のフィルトレイションは以下のように定める.

$$\begin{array}{lllcrl}
 & B_{\mathrm{st}} & \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) & \cong & B_{\mathrm{st}} & \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y) \\
G_K \text{ 作用} & g & \otimes g & & g & \otimes 1 \\
\text{Frobenius 作用} & \varphi & \otimes 1 & & \varphi & \otimes \varphi \\
\text{モノドロミー作用} & N & \otimes 1 & & N \otimes 1 & +1 \otimes N \\
B_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{st}}} \text{ 後の } \mathrm{Fil}^i & \mathrm{Fil}^i & \otimes H^m_{\text{ét}} & & \displaystyle\sum_{i=j+k} \mathrm{Fil}^j & \otimes \mathrm{Fil}^k
\end{array}$$

ただし, 兵頭-加藤同型 ([HK]) $\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y) \cong H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ を使って右辺にフィルトレイションを定義した. この同型は K の素元 π の選び方に依存する (B_{st} の B_{dR} への埋め込みを定義する時に使った素元と同じものを使う).

注 4.7 この比較同型から $B_{\mathrm{st}}^{G_K} = K_0$ を使うと

$$H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y) \cong D_{\mathrm{st}}(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) := (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))^G_K$$

が分かり, $\mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{st}}^{\varphi=1, N=0} = \mathbb{Q}_p$ を使うと

$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)) \cap (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y))^{\varphi=1, N=0}$$

が分かる. これは $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$ から $(H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K), H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y))$ が付加構造を込めて復元でき, 逆に $(H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K), H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y))$ から $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$ が付加構造を込めて復元できる事を言っている.

上の定理が p 進 Hodge 理論の主定理の中でもっとも深いと言ったが, 実際, 準安定予想からクリスタリン予想は自明に出て来, オルタレイション ([dJ]) のテクニックを使うと準安定予想から以下の de Rham 予想と, 次章で紹介する潜在的準安定予想の固有な多様体の場合が出る ([Tsu4][Tsu5]). また, 下の定理の注にあるように de Rham 予想から Hodge-Tate 分解も出る.

定理 4.8 (de Rham 予想 (C_{dR}), Faltings[Fa2]) X_K を K 上固有滑らかな多様体とする．この時, 付加構造と整合的な標準同型

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{dR}} \otimes_K H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$$

が存在する．特に, $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は de Rham 表現である．ここで, 両辺の G_K 作用とフィルトレイションは以前と同様に定める．

注 4.9 この同型の両辺で $\mathrm{Fil}^0/\mathrm{Fil}^1$ をとると, $\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^{i+1} B_{\mathrm{dR}} \cong \mathbb{C}_p(i)$ から 2 章で紹介した Hodge-Tate 分解

$$\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{C}_p(-i) \otimes_K H^{m-i}(X_K, \Omega^i_{X_K/K})$$

が出る．

5 開多様体の p 進 Hodge 理論.

次に, 開多様体の場合を考える．X を O_K 上固有準安定モデル, $D \subset X$ を水平な正規交叉因子で X の特殊ファイバー Y とも正規交叉するとする．

この時, $X \setminus D$ の幾何的一般ファイバーの固有台付き (あるいは通常の) エタール・コホモロジーや $X \setminus D$ の一般ファイバーの固有台付き (あるいは通常の)de Rham コホモロジーや $X \setminus D$ の特殊ファイバーの固有台付き (あるいは通常の) 対数的クリスタリン・コホモロジーを考えるが, ここではもう少し一般化して, それらの部分的固有台付きコホモロジー版を考えたい．そのため, $D = D^1 \cup D^2$ と共通因子を持たない 2 つの因子に分ける．D, D^1, D^2 の特殊ファイバーを各々C, C^1, C^2 と置く．以下のような部分的固有台付きコホモロジーを考える．

- $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}, \mathbb{Q}_p) := H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, j_{1!}Rj_{2*}\mathbb{Q}_p)$,
  ここで, j_1, j_2 は次の開埋め込み $(X \setminus D)_{\overline{K}} \xhookrightarrow{j_2} (X \setminus D^1)_{\overline{K}} \xhookrightarrow{j_1} X_{\overline{K}}$,
- $H^m_{\mathrm{dR}}(X_K, D^1_{K!}, D^2_{K*}/K) := H^m(X_K, I(D^1_K)\Omega^\bullet_{X_K/K}(\log D_K))$,
  ここで $\Omega^\bullet_{X_K/K}(\log D_K)$ は D_K に沿って高々対数的極を持つ微分形式のなす層, $I(D^1_K)$ は D^1_K を定義するイデアル層,
- $H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y, C^1_!, C^2_*) := H^m(((Y, M_Y(C))/(W, N^0))^{\log}_{\mathrm{crys}}, K(C^1)) \otimes_W K_0$,
  記号の意味は省略.

ここで, $D^1 = \emptyset$ の時は通常のコホモロジー, $D^2 = \emptyset$ の時は固有台付きコホモロジーになる．

この時, 上記コホモロジーの各々には “モチヴィック重みフィルトレイション”$\{W'_\nu\}_\nu$ が入る ([Y2])．これは所謂 Frobenius 重みではない．p 進エタール・コホモロジーはそのままで

は Frobenius 重みは定義できず, D_{st} をとって初めて Frobenius 重みが考えられるが, D_{st} をとると以下に見るようにクリスタリン・コホモロジーになってしまうので, p 進エタール・コホモロジーとクリスタリン・コホモロジー各々に "Frobenius 重みフィルトレイション" を定義して比較するということはできないことに注意せよ. ここで言う "モチヴィック重みフィルトレイション" は, $\mathbb{Z}$ 上平坦なモデルを取って他の良い素点で還元すると Frobenius 重みフィルトレイションになっている. "モチヴィック重みフィルトレイション" は退化が起こっていても "純" になり得る ([NS] も参照). 定義は Deligne の Hodge II を真似する (台付きコホモロジーや部分的台付きコホモロジーは後で見る "因子の共通部分たちを使った解消" を使って定義する. また, 一般に特異多様体に対しても Hodge III の真似で定義する. ([De1][De2])).

上記部分的固有台付きコホモロジーに対して次の比較同型が開多様体の p 進 Hodge 理論の主定理である. 以下で "開" あるいは "open" は「固有引く正規交叉因子」を意味し, 任意の開多様体と区別している.

定理 5.1 ("開" 準安定予想 ("open" C_{st})[Y1][Y2]) この時, 付加構造と整合的な標準同型

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}, \mathbb{Q}_p) \cong B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y, C^1_!, C^2_*)$$

が存在する. 特に, $H^m_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, D^1_{\overline{K}!}, D^2_{\overline{K}*}, \mathbb{Q}_p)$ は準安定表現である. ここで, 両辺の G_K 作用と Frobenius 作用とモノドロミー作用と B_{dR} テンソル後のフィルトレイションは以前と同様に定める. さらに, $D^1 = \emptyset$ または $D^2 = \emptyset$ の時は, 上の同型はモチヴィック重さフィルトレイションとも整合的である. ここで両辺にモチヴィック重さフィルトレイションは $B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W'_\nu$, $B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} W'_\nu$ で定める. ただし, 兵頭-加藤同型 ([Y1]) $\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^m_{\mathrm{logcrys}}(Y, C^1_!, C^2_*) \cong H^m_{\mathrm{dR}}(X_K, D^1_{K!}, D^2_{K*}/K)$ を使って右辺にフィルトレイションを定義した. この同型は K の素元 π の選び方に依存する (B_{st} の B_{dR} への埋め込みを定義する時に使った素元と同じものを使う).

注 5.2 上の "開" 準安定予想から部分的固有台付きコホモロジーに対して "開" クリスタリン予想が自明に従い, オルタレイションのテクニックを使うと, 部分的固有台付きコホモロジーに対する "開"de Rham 予想や, 以下に述べる潜在的準安定予想も出る ([Y2]). また, Hartshorne の代数的 de Rham コホモロジー ([Ha1][Ha2]) を用いると, 一般の開多様体でかつ特異点も許したものに対する de Rham 予想も出る (こちらは部分的固有台付きコホモロジーは定義できない)([Y2]).

定理 5.3 (潜在的準安定予想 (C_{pst})[Y2]) X_K を K 上有限型分離的概型とする. この時, $H^m_{\mathrm{\acute{e}t},(c)}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は潜在的準安定表現である.

以下で主定理の証明について注意とスケッチを与える. まず, 比較同型射と Leray スペクトル系列の整合性は難しく, まだ証明されていない (Faltings の理論がなしでは無理じゃないかと筆者は考えている). だから, 固有な場合に帰着させることはできない. そこで, 固有な場合に帰着させずに証明する, というのが注意である.

一般に, Fontaine-Messing-加藤-辻のサントミック・コホモロジーを使う方法では, まず

$$H^m_{\text{ét}} \longleftarrow H^m_{\text{syn}} \longrightarrow B_{\text{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\text{logcrys}}$$

と射を構成し, 次に左の射が同型である事を示し (ここでは Bloch-加藤, 兵頭の p 進消滅サイクルの計算 ([BK1][H]) と加藤, 栗原, 辻のサントミック複体の計算 ([Ka1][Ku][Tsu1]) が本質的. 前者は加藤による高次元類体論の流れから出て来, 後者は Fontaine-Laffaille のフィルター φ 加群を族にしたものの絶対コホモロジーを計算するような複体である), それにより得られた比較写像

$$B_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}} \longrightarrow B_{\text{st}} \otimes_{K_0} H^m_{\text{logcrys}}$$

が同型であることを最後に**積構造を使って**証明する.

ここで, 開多様体の時には比較写像が積構造と整合的であることをナイーヴには示せないという悩ましさがある. この事を説明する. 以下, 簡単のため $D^2 = \emptyset$ で $D = D^1$ は単純正規交叉因子とする. 通常のコホモロジーの時, 比較写像は X 上の十分 “小さな” エタール概型 $\mathrm{Spec} A$ に対して, Fontaine の基本完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}_p(r)' \longrightarrow \mathrm{Fil}^r_p A_{\text{crys}}(\overline{A^h}) \overset{1-\varphi/p^r}{\longrightarrow} A_{\text{crys}}(\overline{A^h}) \to 0$$

を “貼り合わせて” 構成する. ここで $\overline{A^h}$ は A の p 進 Hensel 化 A^h の商体の対数的構造が自明になる零点の外で不分岐になる最大の拡大体における A^h の整閉包, $A_{\text{crys}}(\overline{A^h})$ は $\overline{A^h}$ に対する A_{crys} である. しかし, 固有台付きコホモロジーでは零拡張 $j_!$ は上の基本完全系列とは “合わない”. そこで, $j_!\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{(X\setminus D)_{\overline{K}}}$ を次のように定数層で解消する.

$$0 \to j_!\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{(X\setminus D)_{\overline{K}}} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{X_{\overline{K}}} \to i^{(1)}_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{D^{(1)}_{\overline{K}}} \to i^{(2)}_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{D^{(2)}_{\overline{K}}} \to \cdots .$$

ここで, $D^{(j)_{\overline{K}}}$ は $D_{\overline{K}} = \bigcup_{i\in I} D_{i,\overline{K}}$ を既約成分への分解とした時に

$$D^{(j)_{\overline{K}}} := \coprod_{J\subset I, \#J=j} \bigcap_{i\in J} D_{i,\overline{K}}$$

と定義したものであり, $i^{(j)} : D^{(j)}_{\overline{K}} \to X_{\overline{K}}$ は自然な射. しかしこの時, 複体

$$\left[\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{X_{\overline{K}}} \to i^{(1)}_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{D^{(1)}_{\overline{K}}} \to i^{(2)}_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{D^{(2)}_{\overline{K}}} \to \cdots\right]$$

と複体 $Rj_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の間に積構造は定義できない. これは図で説明すると,

$$\begin{array}{ccc} & & D^{(j)}_{\overline{K}} \\ & & \downarrow \\ (X\setminus D)_{\overline{K}} & \longrightarrow & X_{\overline{K}} \end{array}$$

で引き戻しを取ると, 空集合になることで説明できる.

$$
\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & D^{(j)}_{\overline{K}} \arrow[d] \\
(X \setminus D)_{\overline{K}} \arrow[r] & X_{\overline{K}}
\end{tikzcd}
$$

この状況を, 対数的構造を使って以下のように置き換える.

$$
\begin{tikzcd}
(D^{(j)}_{\overline{K}}, M_{D^{(j)}_{\overline{K}}}(D_{\overline{K}})) \arrow[r] \arrow[d] & (D^{(j)}_{\overline{K}}, \mathcal{O}^{\times}) \arrow[d] \\
(X_{\overline{K}}, M_{X_{\overline{K}}}(D_{\overline{K}})) \arrow[r] & (X_{\overline{K}}, \mathcal{O}^{\times})
\end{tikzcd}
$$

ここで, $\mathcal{O}^{\times}$ は自明な対数的構造, $M_{X_{\overline{K}}}(D_{\overline{K}})$ は $D_{\overline{K}}$ で定義される対数的構造, $M_{D^{(j)}_{\overline{K}}}(D_{\overline{K}})$ はそれの $D^{(j)}_{\overline{K}}$ への引き戻しである. この時, 引き戻しである左上の対数的概型 $(D^{(j)}_{\overline{K}}, M_{D^{(j)}_{\overline{K}}}(D_{\overline{K}}))$ は空集合ではなく対数的構造がべったりと概型 $D^{(j)}_{\overline{K}}$ 全体に乗っかっている一風おかしなもので, **べったり (hollow) 対数的概型**と呼ばれる. これは $D^{(j)}_{\overline{K}}$ のある種の管状近傍と考えられる. このべったり対数的概型を用いることで, 積構造と整合的な射が得られる. これを再び複体の言葉で言うと, $R\varepsilon_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{(D^{(j)}_{\overline{K}}, M_{D^{(j)}(D_{\overline{K}})})}$ $(\varepsilon : (D^{(j)}_{\overline{K}}, M_{D^{(j)}}(D_{\overline{K}}))^{\log,\sim}_{\text{ét}} \to (D^{(j)}_{\overline{K}})^{\sim}_{\text{ét}})$ を代表する複体 A^j を使った解消

$$0 \to j_!\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_{(X\setminus D)_{\overline{K}}} \to A^0 \to i^{(1)}_* A^1 \to i^{(2)}_* A^2 \to \cdots .$$

と $Rj_*\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の間に積構造が入ることになる. これはエタール側であるが, 対数的クリスタリン側, de Rham 側, サントミック側も対応することを行う.

1. べったり対数的概型を用いることで, 積構造と整合的な射 $H^m_{\text{syn}} \to H^m_{\text{ét}}$ が得られ,
2. べったり対数的概型を用いない (積構造と整合的とは分からない) 射 $H^m_{\text{syn}} \to H^m_{\text{ét}}$ が同型であることを示し,
3. 上の 2 つの射が一致することを示す.

これで積構造と整合的な比較写像が得られ, それによって比較写像が同型であることを示すことができ, 主定理は証明される.

参考文献

[A] André, Y. *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique.* Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 285–317.

[B1] Berthelot, P. *D-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, 185–272.

[B2] Berthelot, P. *D-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. **81** (2000)

[B3] Berthelot, P. *Introduction à la théorie arithmétique des D-modules.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque No. **279** (2002), 1–80.

[Be] Berger, L. *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. **148** (2002), 219–286.

[Br] Breuil, C. *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés.* Ann. of Math. (2) **152** (2000), no. 2, 489–549.

[BK1] Bloch, S.; Kato, K. *p-adic étale cohomology.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **63** (1986), 107–152.

[BK2] Bloch, S.; Kato, K. *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., **86**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

[BO] Berthelot, P.; Ogus, A. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

[CF] Colmez, P.; Fontaine, J. -M. *Construction des représentations p-adiques semi-stables.* Invent. Math. **140** (2000), no. 1, 1–43.

[De1] Deligne, P. *Theorie de Hodge. II.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.

[De2] Deligne, P. *Theorie de Hodge. III.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **44** (1974), 5–77.

[dJ] de Jong, A. J. *Smoothness, semistability and alterations.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **83** (1996), 51–93.

[Fa0] Faltings, G. *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern.* Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[Fa1] Faltings, G. *p-adic Hodge theory.* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 255–299.

[Fa2] Faltings, G. *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations.* Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, (1988) 25–80.

[Fa3] Faltings, G. *Almost étale extensions.* Cohomologies p-adiques et applications arithmetiques, II. Astérisque **279** (2002), 185–270.

[Fo1] Fontaine, J. -M. *Le corps des périodes p-adiques.* Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque **223** (1994), 59–111.

[Fo2] Fontaine, J. -M. *Représentations p-adiques semi-stables.* Astérisque No. **223** (1994), 113–184.

[FM] Fontaine, J.-M.; Messing, W. *p-adic periods and p-adic étale cohomology.* Contemp. Math., **67**, 179–207,

[G] Grothendieck, A. *Modèles de Néron et monodromie.* Exp. IX. Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I). Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **288**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Ha1] Hartshorne, R. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. **45** (1975), 5–99.

[Ha2] Hartshorne, R. *Algebraic de Rham cohomology.* Manuscripta Math. **7** (1972), 125–140.

[H] Hyodo, O. *A note on p-adic étale cohomology in the semistable reduction case.* Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 543–557.

[HK] Hyodo, O.; Kato, K. *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles.* Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque **223**, (1994), 221–268.

[Ka1] Kato, K. *On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing).* Adv.Studies Pure Math. **10** (1987), 207-251

[Ka2] Kato, K. *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie.* Algebraic analysis, geometry, and number theory. Johns Hopkins University Press, Baltimore (1989) , 191-224

[Ka3] Kato, K. *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology.* Periodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque No. **223** (1994), 269–293.

[Ka4] Kato, K. *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I.* Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), 50–163, Lecture Notes in Math., **1553**, Springer, Berlin, 1993.

[Ke] Kedlaya, K. S. *A p-adic local monodromy theorem.* Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 93–184.

[KM] Kato, K.; Messing, W. *Syntomic cohomology and p-adic etale cohomology.* Tohoku Math. J. **2** 44 (1992), no. 1, 1–9.

[KN] Kato, K.; Nakayama, C. *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log-schemes over C.* Kodai Math. J. **22** (1999), no. 2, 161–186.

[Ku] Kurihara, M. *A note on p-adic étale cohomology.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63** (1987), no. 7, 275–278.

[L] Laffaille, G. *Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié.* Bull. Soc. Math. France **108** (1980), no. 2, 187–206.

[LS] Langer, A.; Saito, S. *Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve.* Duke Math. J. **85** (1996), no. 2, 315–357.

[M] Mebkhout, Z. *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique.* Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 319–351.

[Na] Nakayama, C. *Logarithmic étale cohomology.* Math. Ann. **308** (1997), no. 3, 365–404.

[Ni1] Niziol, W. *Crystalline conjecture via K-theory.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 5, 659–681.

[Ni2] Niziol, W. *Semi-stable conjecture for vertical log-smooth families.* preprint, 1998

[NS] Nakkajima, Y.; Shiho, A. *Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties in characteristic $p > 0$.* preprint.

[ST] Serre, J. -P.; Tate, J. *Good reduction of abelian varieties.* Ann. of Math. (2) **88** 1968 492–517.

[T] Tate, J. T. *p-divisible groups.* 1967 Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 158–183.

[Tsu1] Tsuji, T. *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles.* J. Reine Angew. Math. **472** (1996), 69–138.

[Tsu2] Tsuji, T. *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semistable reduction case.* Invent. Math. **137**,(1999) , 233-411.

[Tsu3] Tsuji, T. *Poincaré duality for logarithmic crystalline cohomology.* Compositio Math. **118** (1999), no. 1, 11–41.

[Tsu4] Tsuji, T. *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen:a survey.* Cohomologies p-adiques et applications arithmetiques, II. Astérisque **279** (2002), 323-370.

[Tsu5] Tsuji, T. *p-adic Hodge theory in the semistable reduction case.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 207–216.

[Y1] Yamashita, G. *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semistable reduction–I.* preprint.

[Y2] Yamashita, G. *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology for open varieties with semistable reduction–II.* preprint.